

Algorithmische Graphentheorie

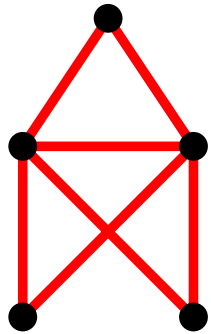
Sommersemester 2025

3. Vorlesung

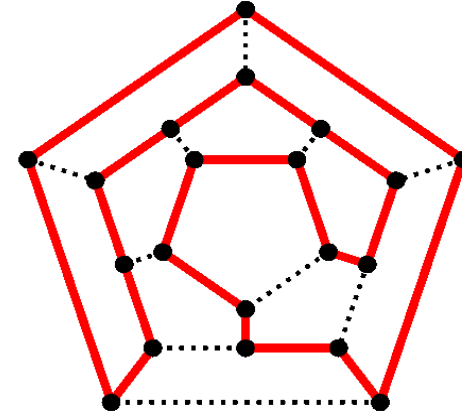
Rundreiseprobleme – Teil III

Übersicht

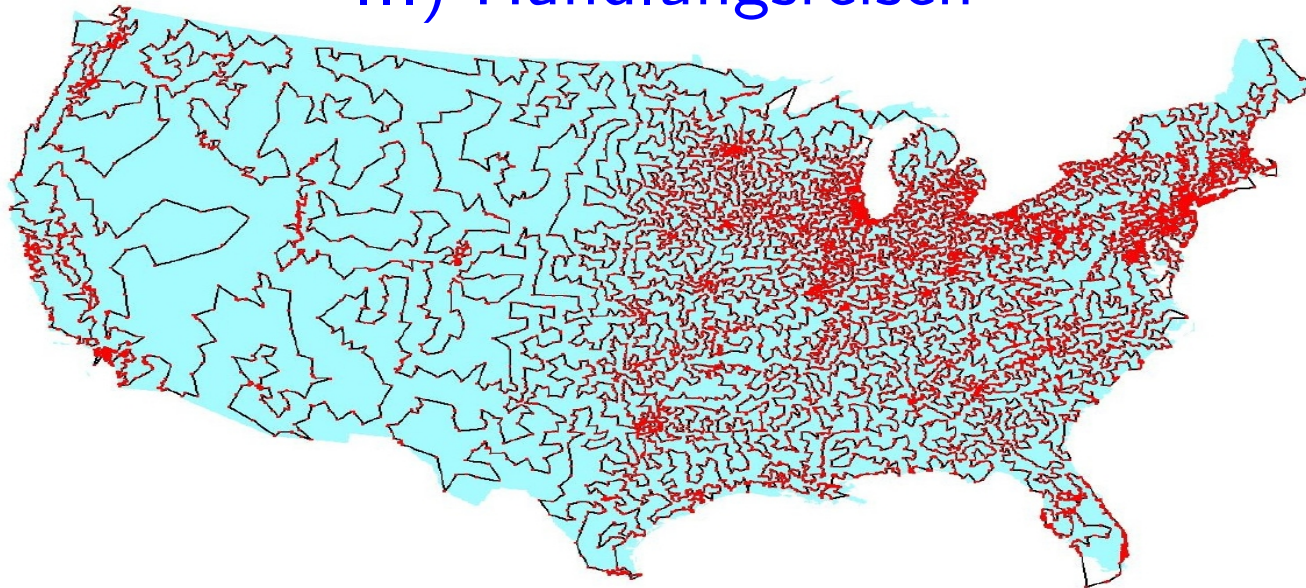
I) Eulerkreise



II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



III) Handlungsreisen

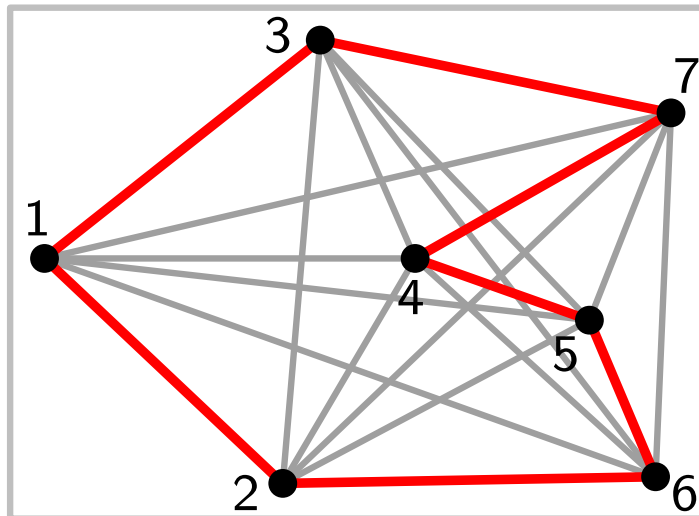
Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

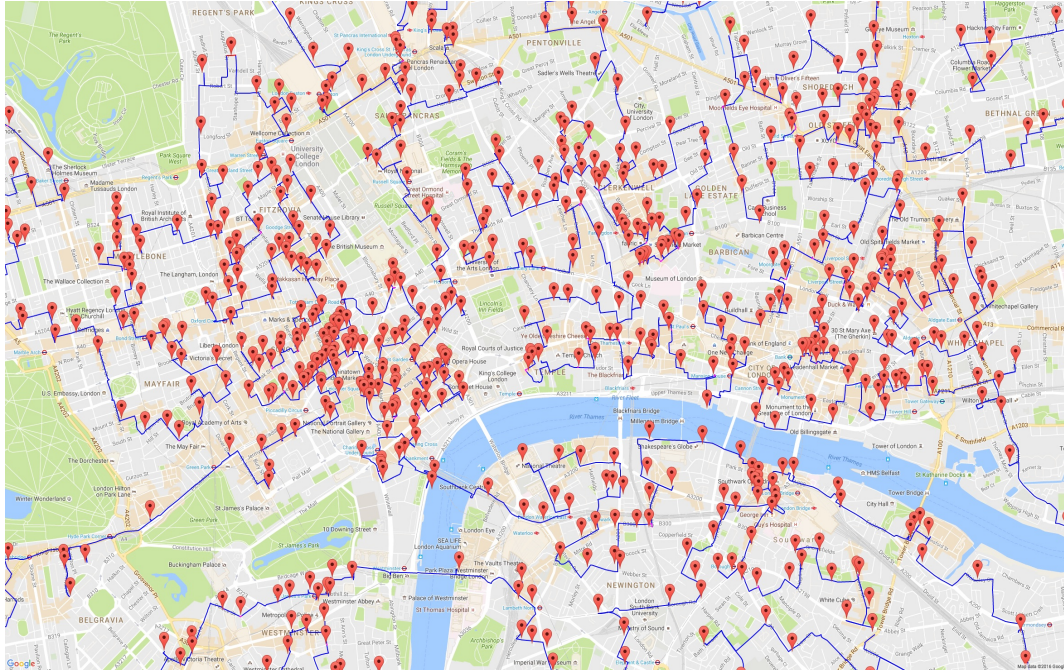
Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

Beispielinstanzen



Alle 24.727 Pubs in Großbritannien.
(45.495,239 km)



Mona Lisa TSP Challenge.

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher: $O(n)$ für aktuelle und bisher beste Permutation.

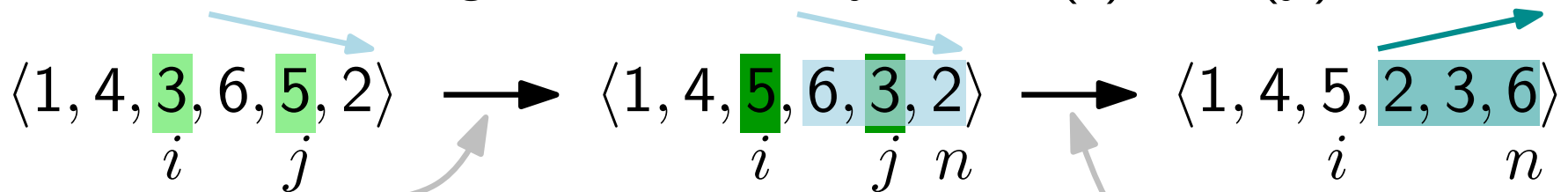
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Genauer: Sterlingformel

[James Sterling, 1692–1770]

Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

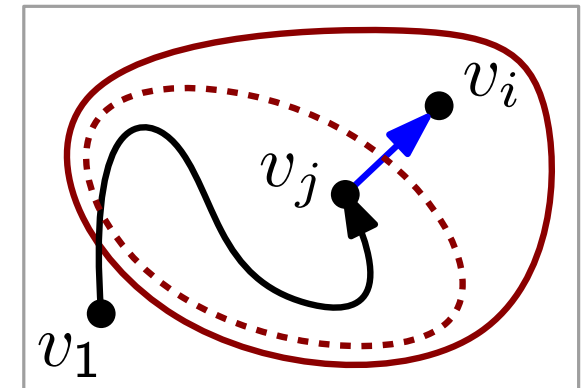
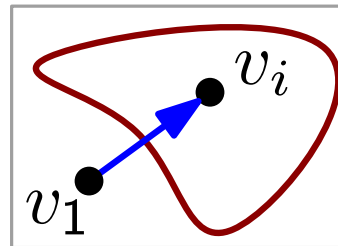
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

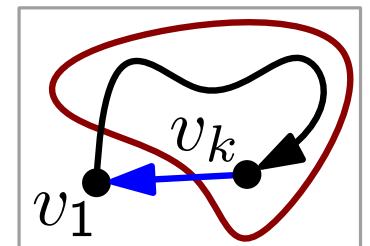


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

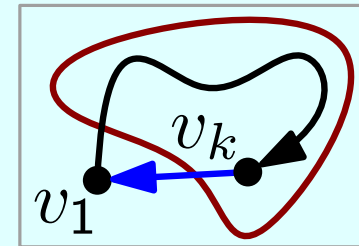
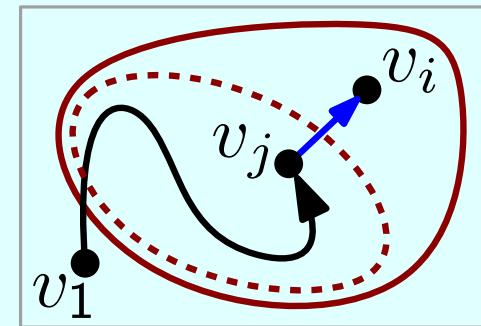
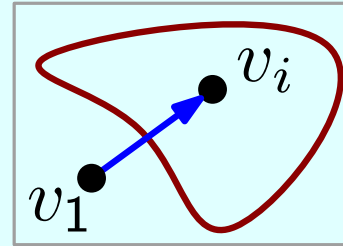
for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$

return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

\Rightarrow Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:** $O(n \cdot 2^n)$

Vergleich

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$O(n \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Bem. Nederlof hat vor kurzem [STOC 2020] einen randomisierten Algorithmus für *bipartites* Matching vorgeschlagen, der in $O(\text{poly}(n) \cdot 1.9999^n)$ Zeit läuft (falls man Matrizen schnell genug multiplizieren kann).

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
 Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
 dann auch HK. *in Polynomialzeit!*

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
 Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also: Optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei ziel die Zielfunktion von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\nless 1$.

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

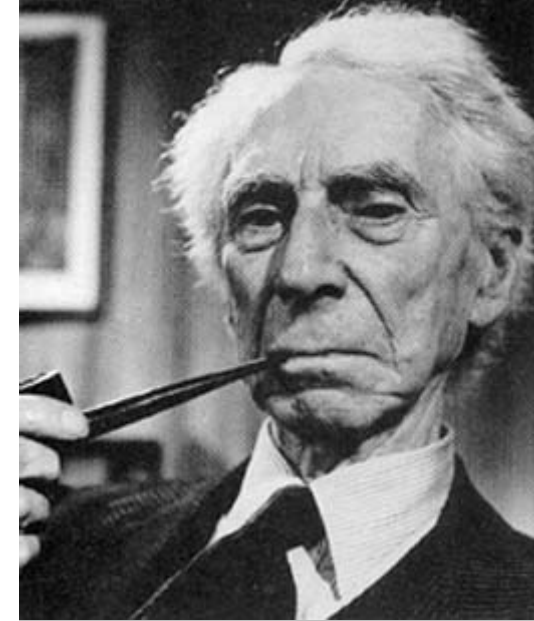
$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \nless \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

OPT(I)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.



z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.

poly($|V|$)

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ~~\geq~~ 1.

Güte von \mathcal{A}

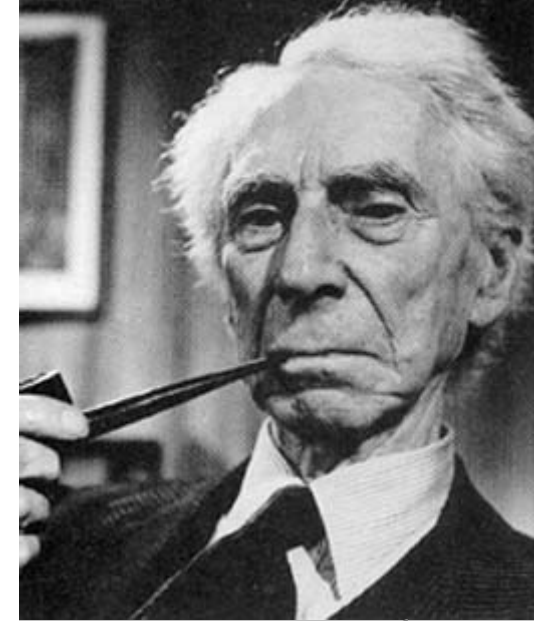
Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

Diagram: An arrow points from the yellow box "ziel(optimale Lösung)" to the yellow box "OPT(I)". Another arrow points from the yellow box "Güte von A" to the γ in the denominator.

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.



z.B. LSP = { longest
simple
path }
ziel \equiv Länge

γ -Approx. für
LSP liefert
einfachen Pfad,
der *mindestens* γ
mal so lang ist
wie der längste.

$\text{poly}(|V|)$

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ -Approximation für TSP (außer $P=NP$).

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ ^{mit Güte γ approximieren} könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

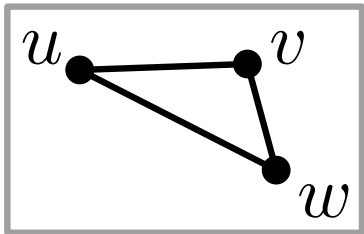
$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| \cdot \gamma & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow ~~optimale~~ TSP-Tour ^{mit Güte γ} kostet $\leq \gamma \cdot |V| \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

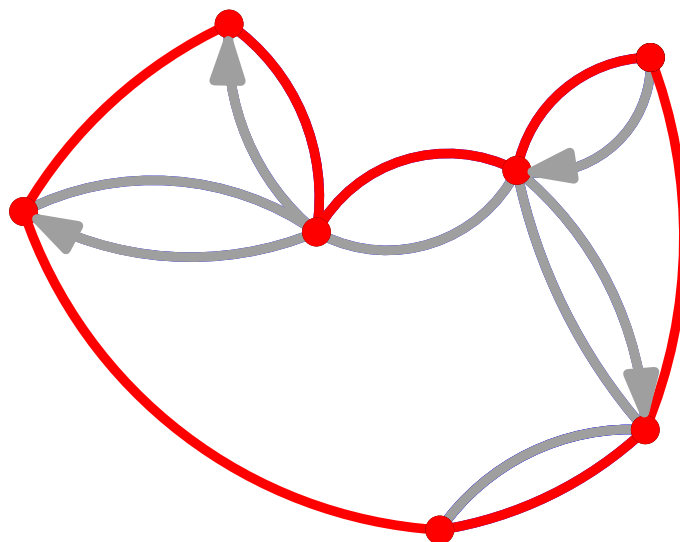
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



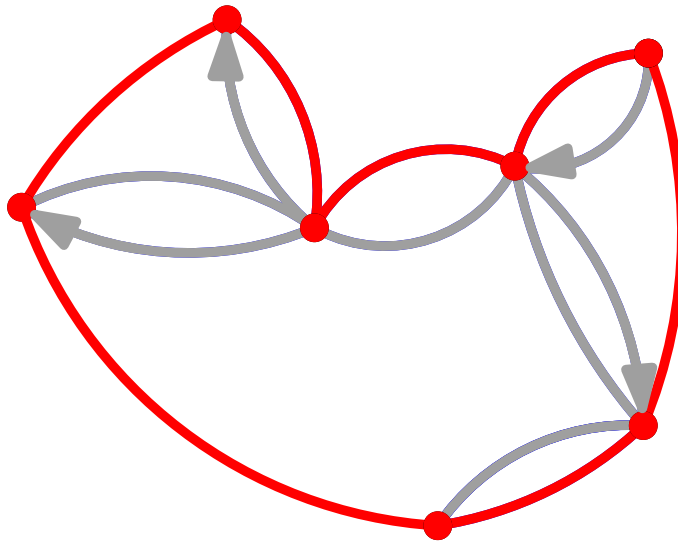
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.
 Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!
 Durchlaufe den **Kreis**.
 Überspringe besuchte Knoten.
 Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$