

Algorithmische Graphentheorie

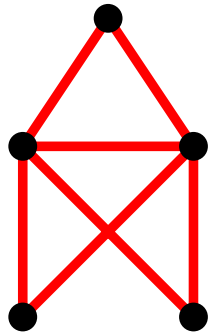
Sommersemester 2025

3. Vorlesung

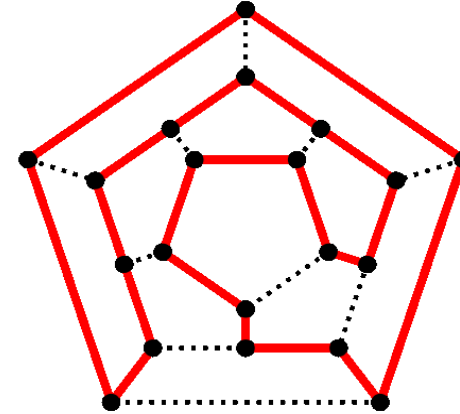
Rundreiseprobleme – Teil III

Übersicht

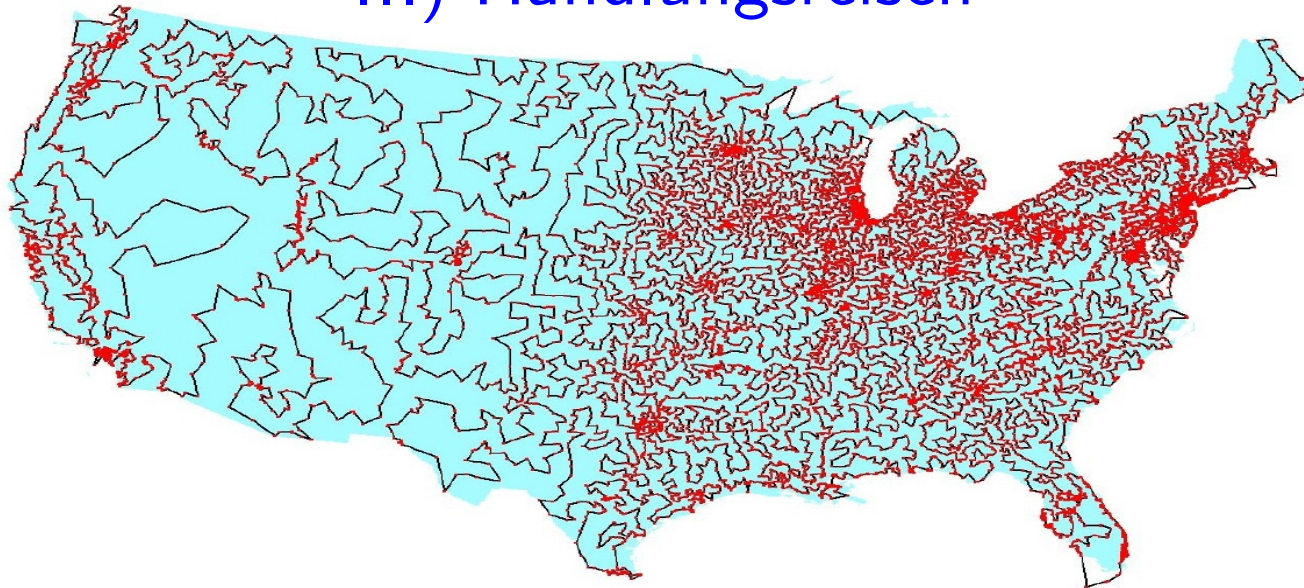
I) Eulerkreise



II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

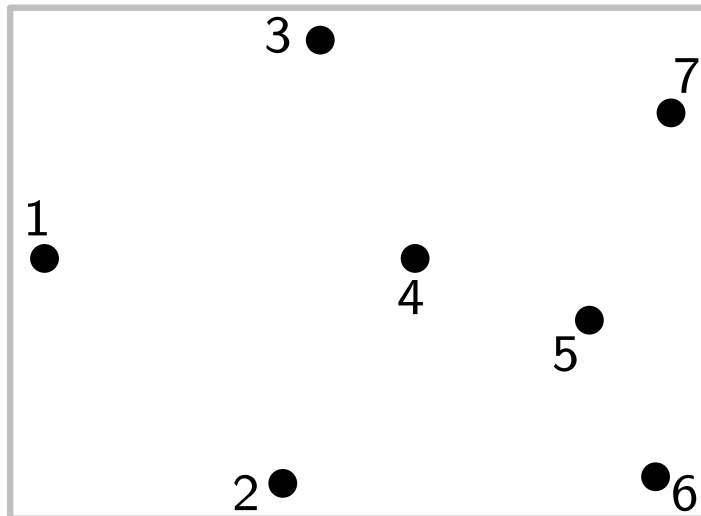
Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$

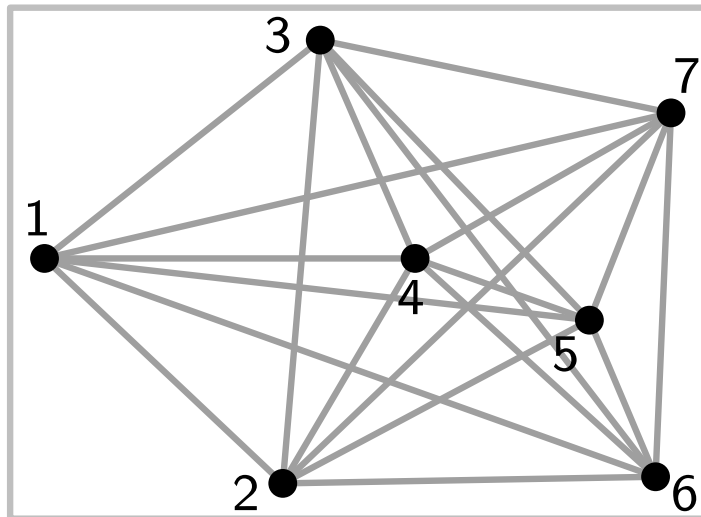


III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



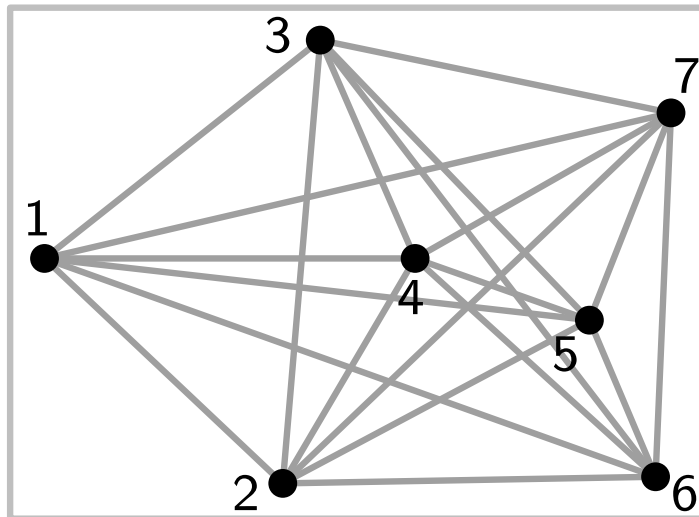
III) Handlungsreisen

Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

III) Handlungsreisen

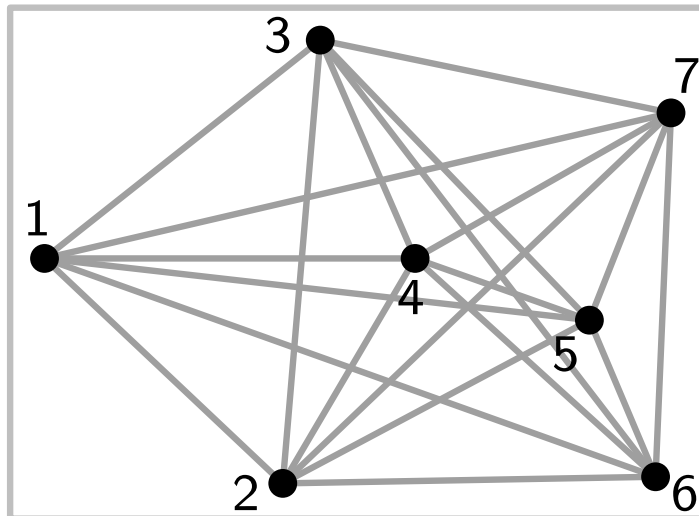
Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K)$.

Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

III) Handlungsreisen

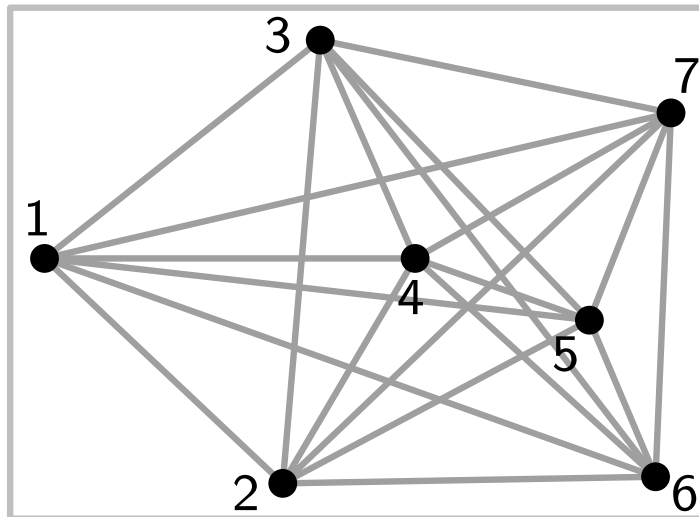
Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

III) Handlungsreisen

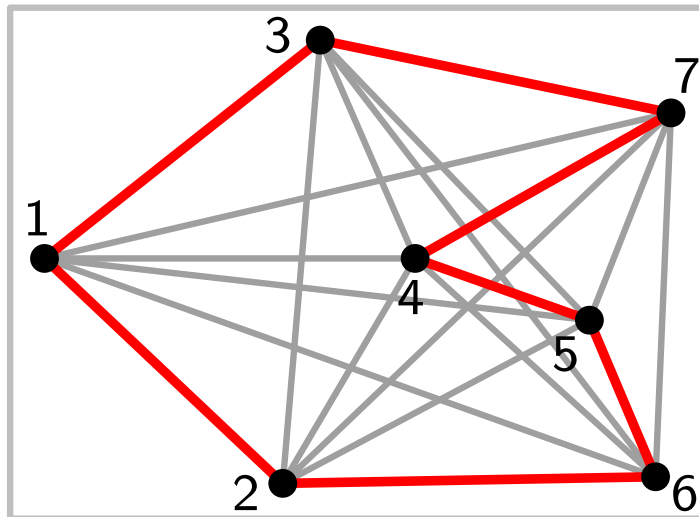
Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

III) Handlungsreisen

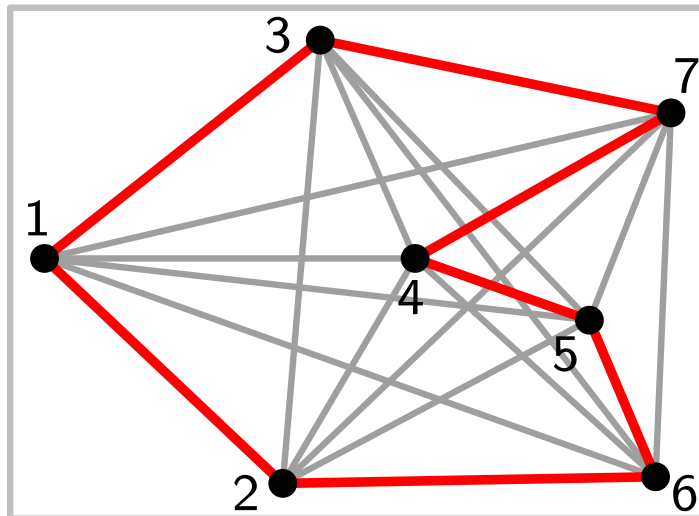
Problem: *Traveling Salesman/Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

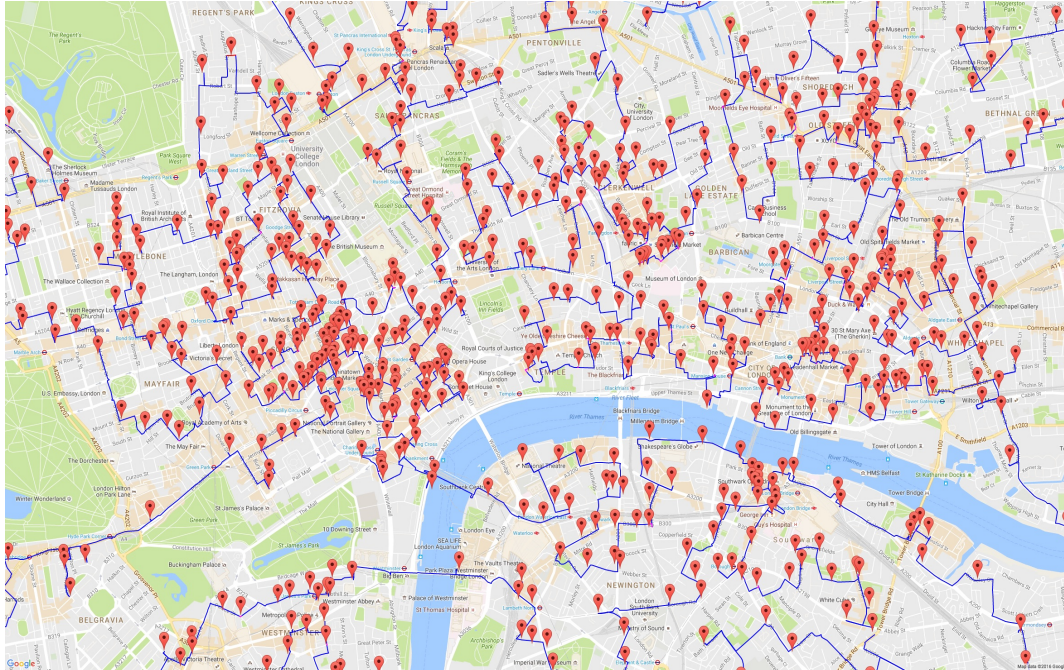
Beispiel.

$c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

Beispielinstanzen



Alle 24.727 Pubs in Großbritannien.
(45.495,239 km)



Mona Lisa TSP Challenge.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus: • Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.
- Laufzeit:** Anzahl Permutationen von n Objekten:

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.
- Laufzeit:** Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$:

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:
$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation:

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:


$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit 

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher:

Exakte Berechnung: Brute Force

- Algorithmus:**
- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$:
 Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten v_1, \dots, v_n in dieser Reihenfolge:

$$c(\sigma) = c(v_{\sigma(n)}v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)})$$
 - Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n - 1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? = $O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher: $O(n)$ für aktuelle und bisher beste Permutation.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

$\langle 1, 4, 3, 6, 5, 2 \rangle$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?


Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).

$\langle 1, 4, 3, 6, 5, 2 \rangle$
 $\quad \quad \quad i$



Wie iteriert man durch alle Permutationen?


Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.

$\langle 1, 4, 3, 6, 5, 2 \rangle$
 $\quad \quad \quad i$



Wie iteriert man durch alle Permutationen?


Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.

$\langle 1, 4, 3, 6, 5, 2 \rangle$
 $\quad \quad \quad i \quad \quad j$




Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.

$\langle 1, 4, 3, 6, 5, 2 \rangle$

 $\quad \quad i \quad \quad j$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

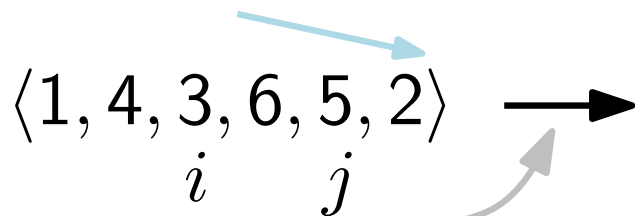
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

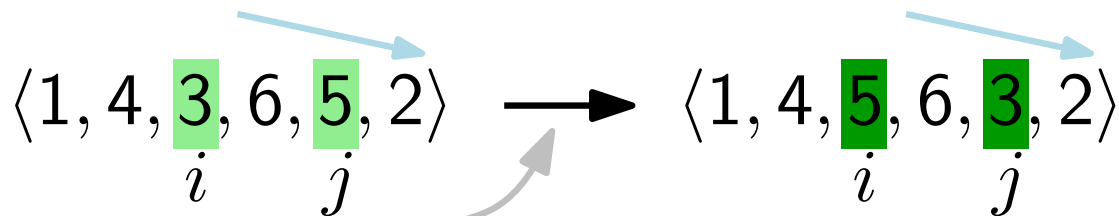
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

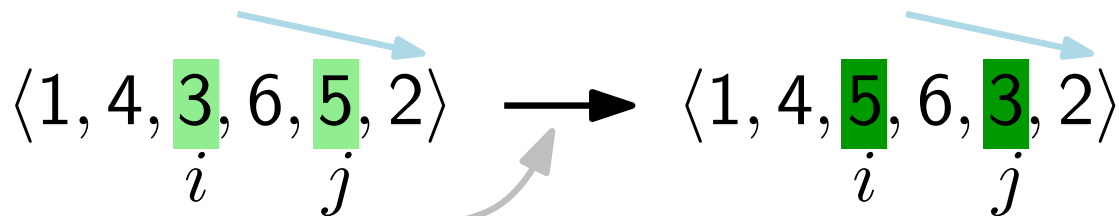
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

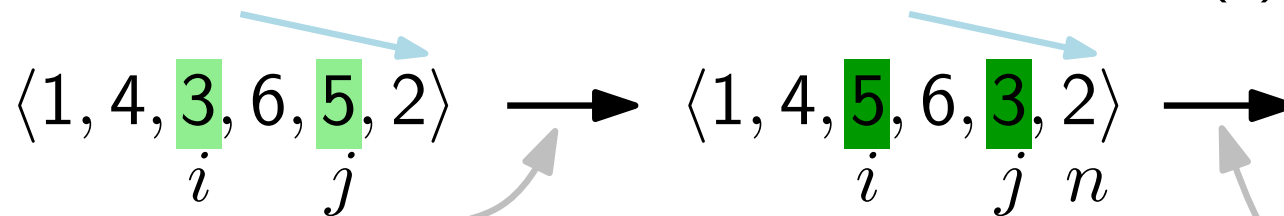
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

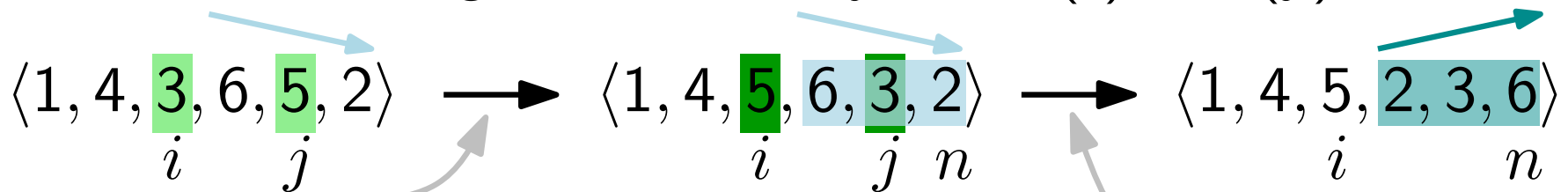
Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:

$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$.



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n) \rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2 \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow n! \leq n^n =$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow n! \leq n^n = (2^{\text{■}})^{\text{■}}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow n! \leq n^n = (2 \text{ )^{n \text{ $$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n =$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

\Rightarrow

$$n! \in$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Genauer: Sterlingformel

[James Sterling, 1692–1770]

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Genauer: Sterlingformel

[James Sterling, 1692–1770]

Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \dots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = (2^{\log_2 n})^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow n! \in 2^{\Theta(n \log n)}$$

Genauer: Sterlingformel

[James Sterling, 1692–1770]

Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

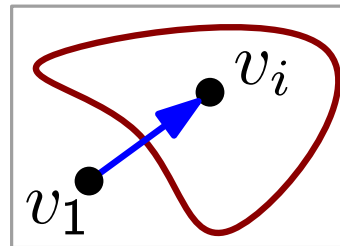
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] =$$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

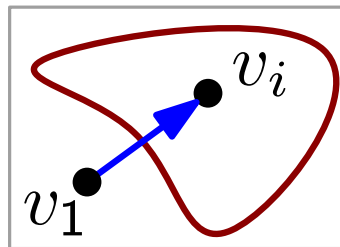
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

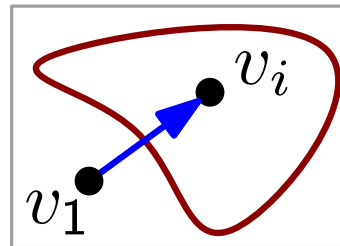
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

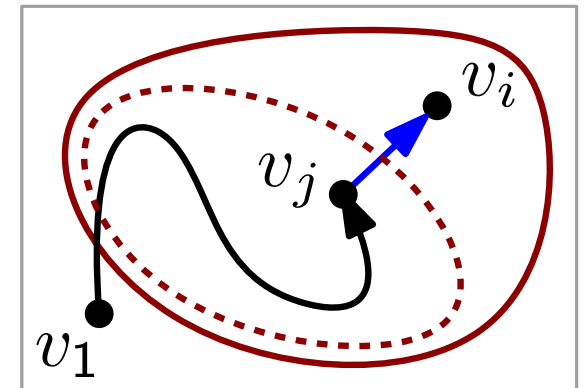
Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] =$$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

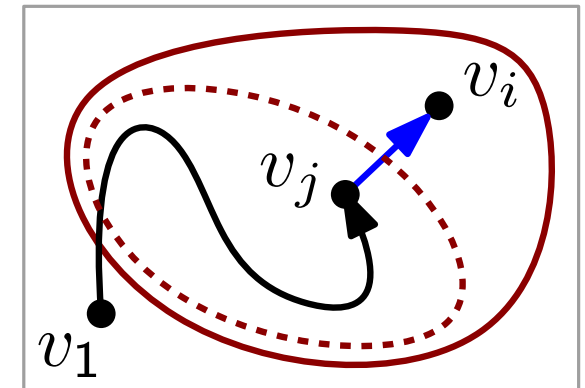
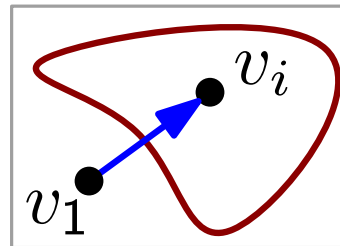
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}}$$

Letzter Knoten vor v_i

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

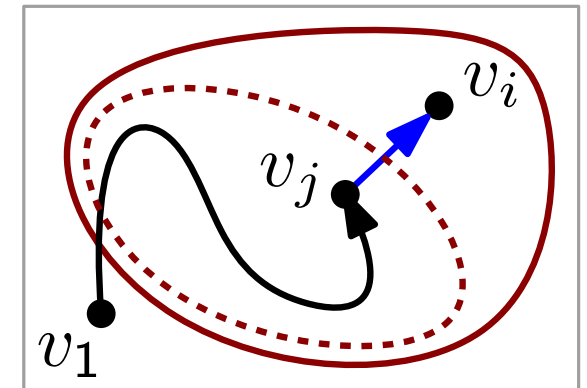
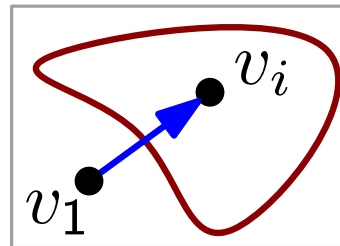
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j]$$

Letzter Knoten vor v_i

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

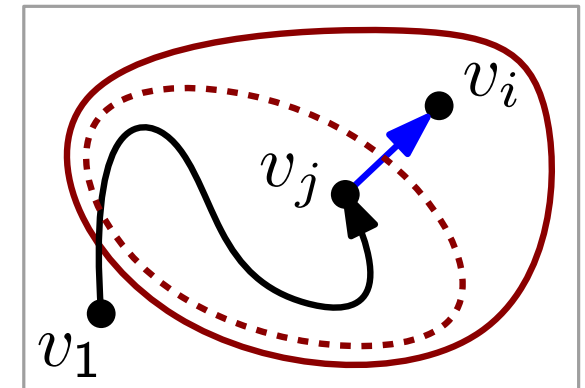
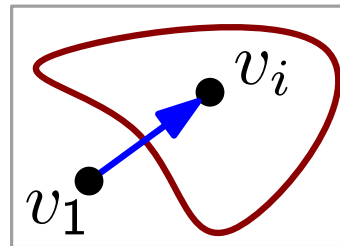
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] +$$

Letzter Knoten vor v_i

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

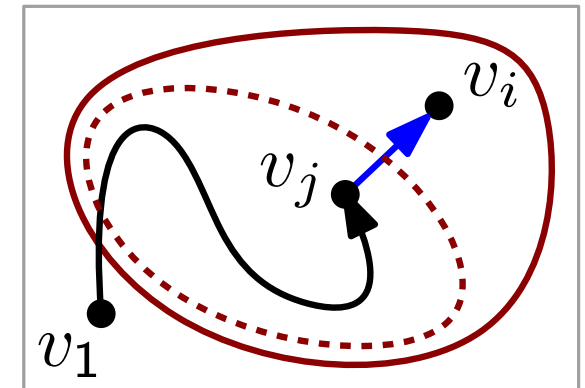
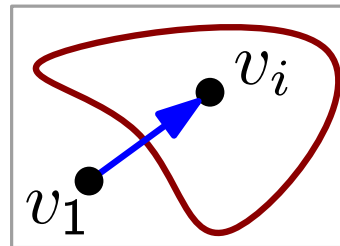
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

Letzter Knoten vor v_i

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

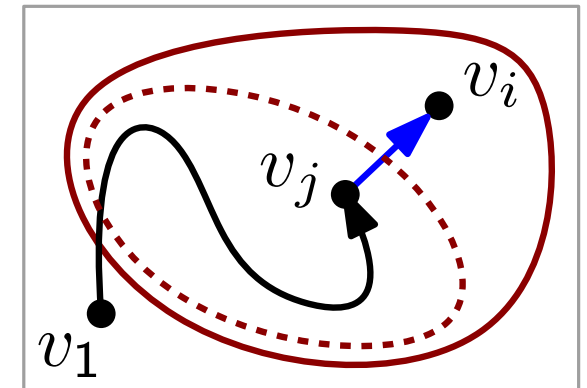
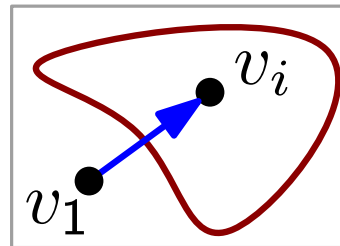
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

Letzter Knoten vor v_i

Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

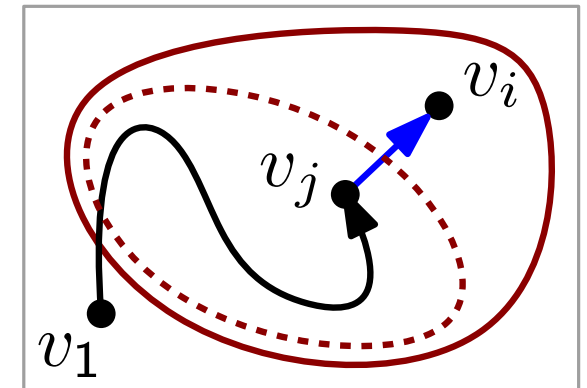
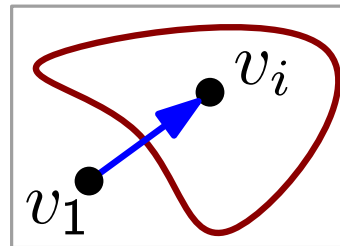
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

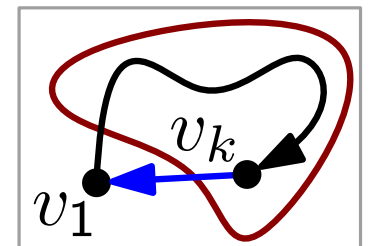


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

Letzter Knoten vor v_i

$\Rightarrow \text{OPT} =$



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

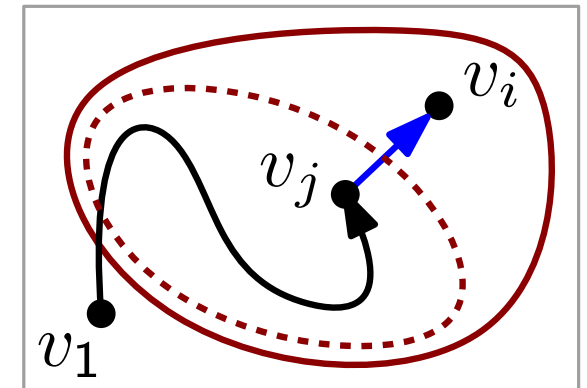
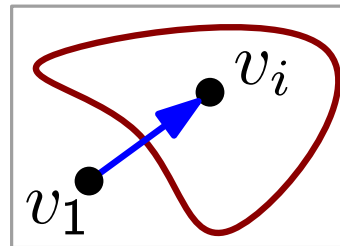
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

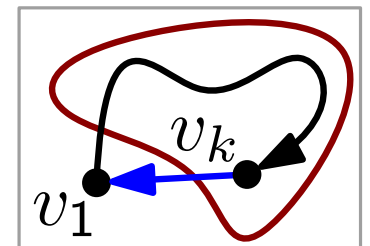


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1}$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

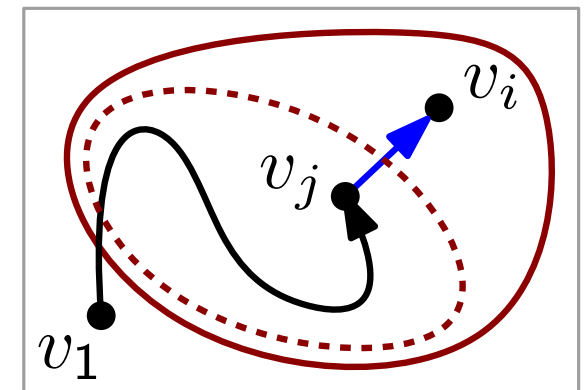
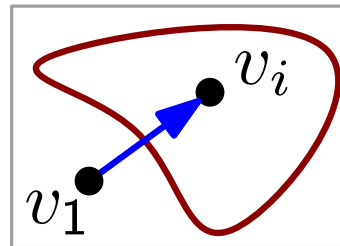
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

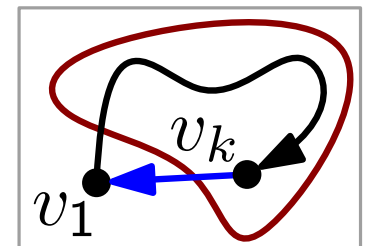


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} \text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k]$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

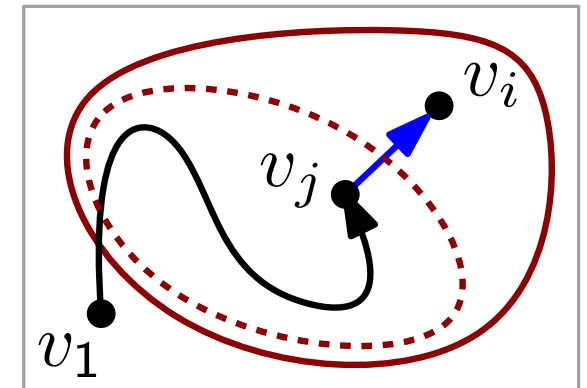
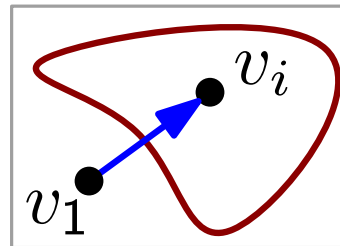
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir
 $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs
durch alle Knoten in W .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

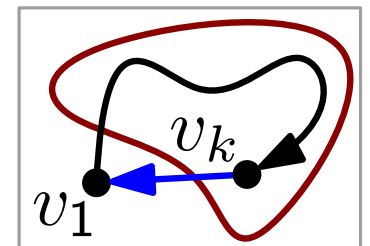


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} \text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] +$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

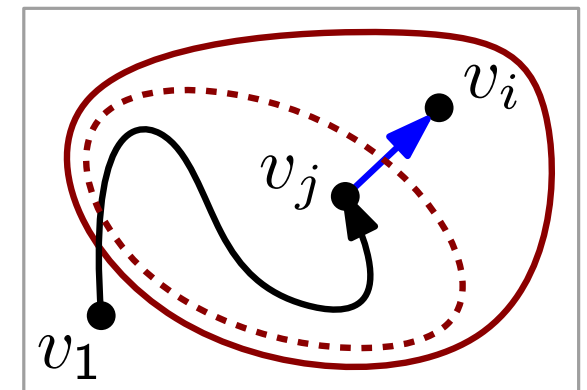
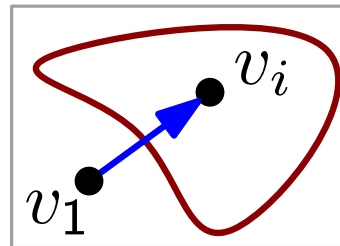
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

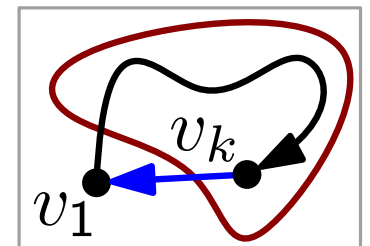


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} \text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1)$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Exakt, aber schneller: Dynamisches Programm

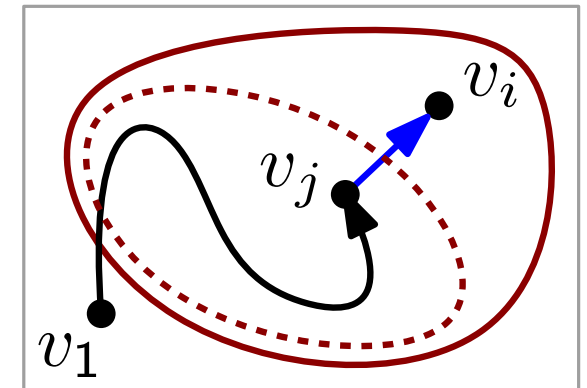
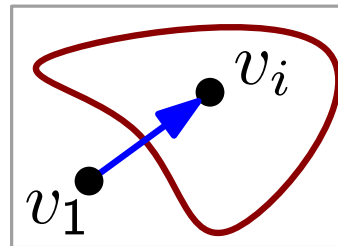
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1 .

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir $\text{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1 - v_i -Wegs *durch alle Knoten in W* .

Idee für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

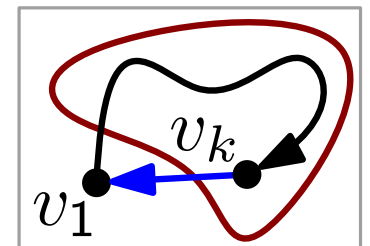


Und für W mit $\{v_i\} \subsetneq W$:

$$\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$$

$$\Rightarrow \text{OPT} = \min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$$

Index des letzten Knotens vor v_1



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

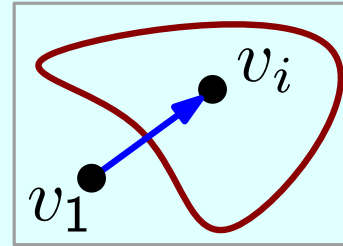
BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] =$

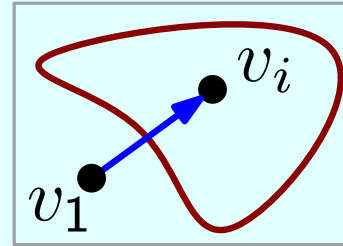


Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

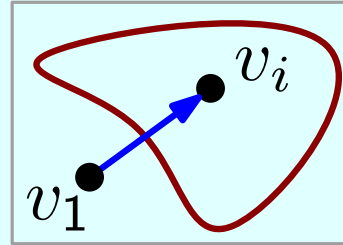
BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ **OPT** $[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

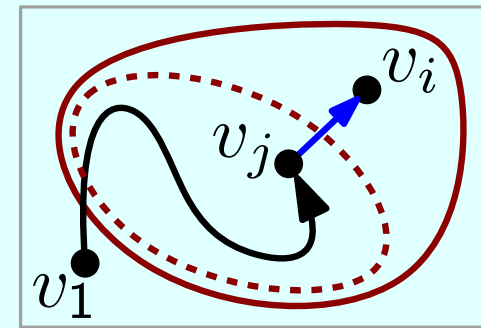
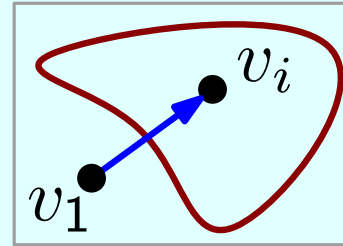
└ **OPT** $[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ **OPT** $[W, v_i] =$



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

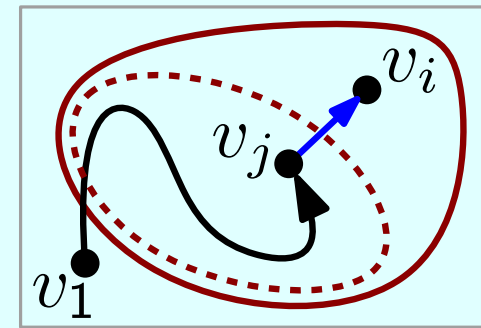
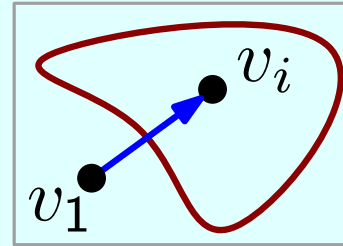
└ **OPT** $[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ **OPT** $[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}}$

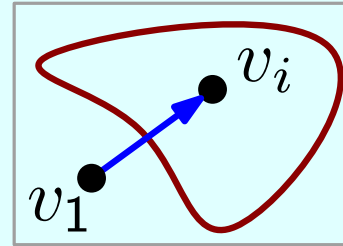


Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ **OPT** $[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

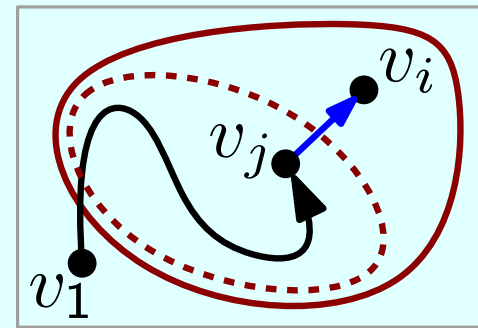


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ **OPT** $[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j]$



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

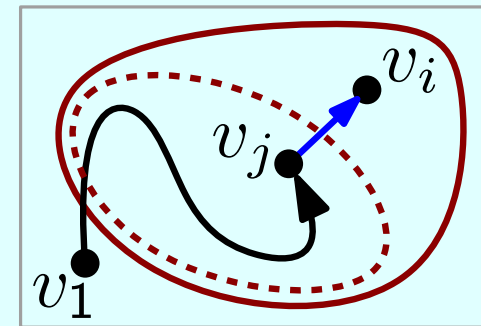
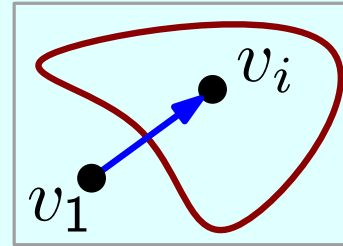
└ **OPT** $[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ **OPT** $[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$

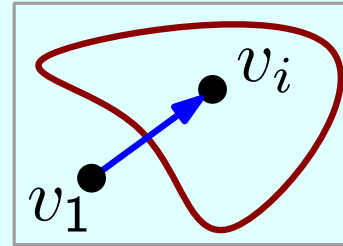


Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

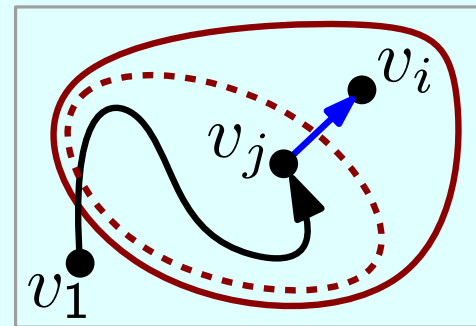


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

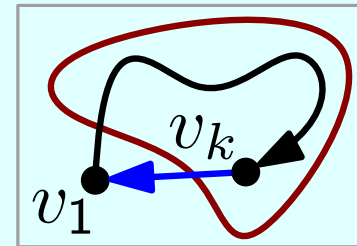
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return

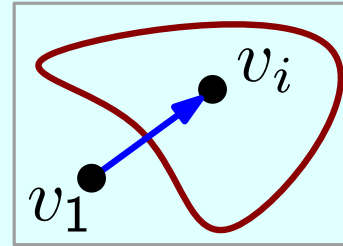


Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

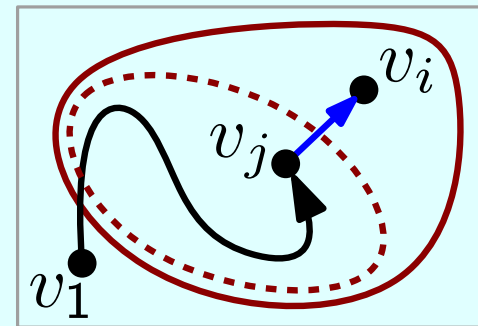


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

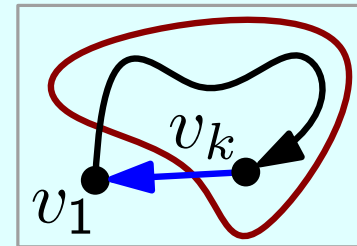
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

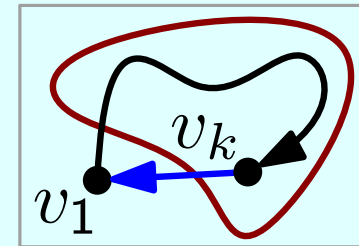
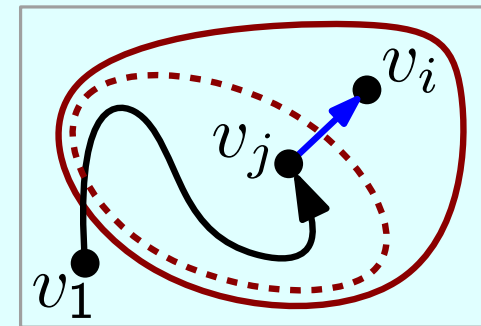
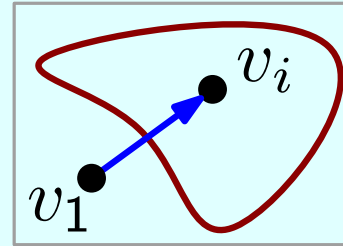
for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ └ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$

return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



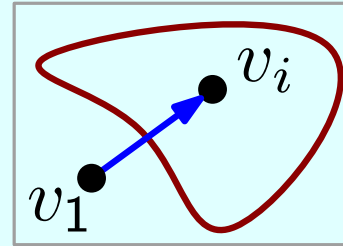
Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$:

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

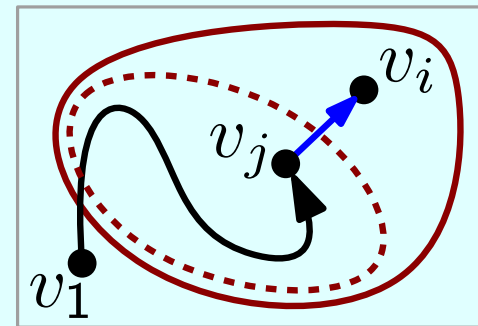


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

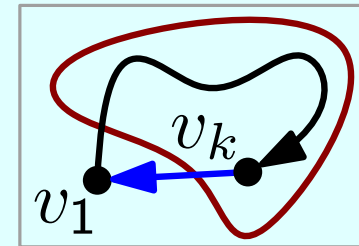
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



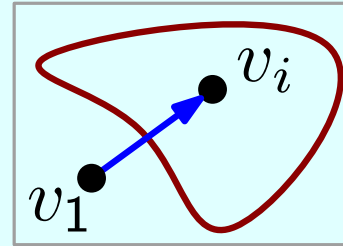
Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

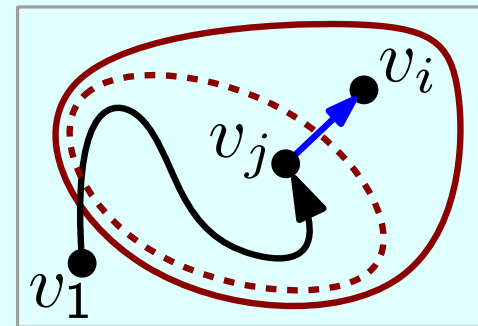


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

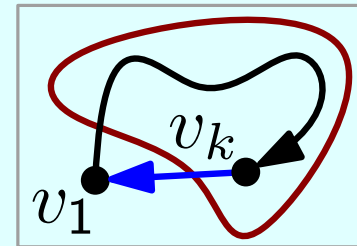
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

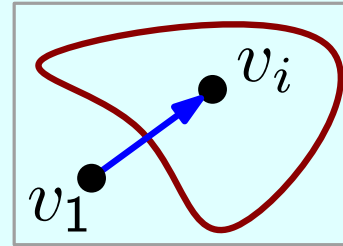
Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's?

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

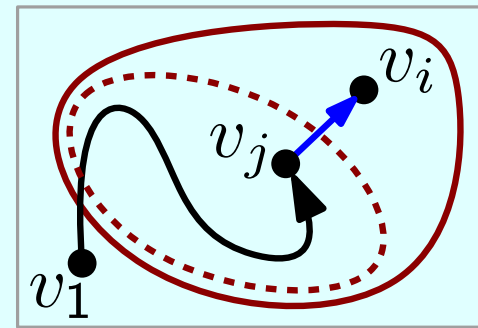


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

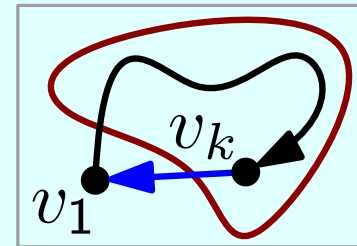
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

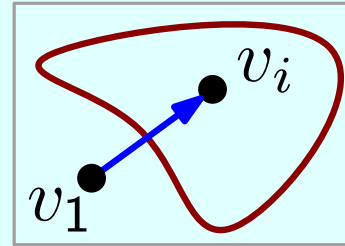
Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

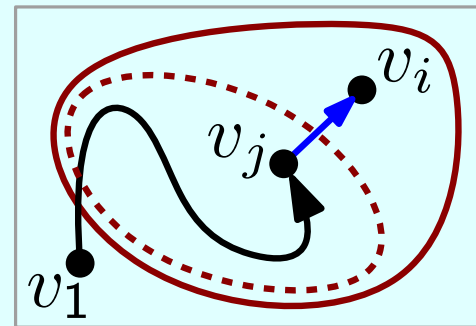


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

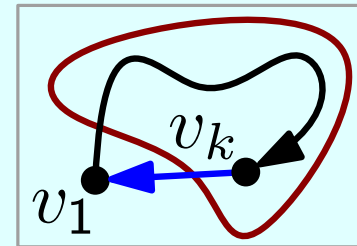
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

\Rightarrow Gesamtlaufzeit $\in O(\quad)$

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

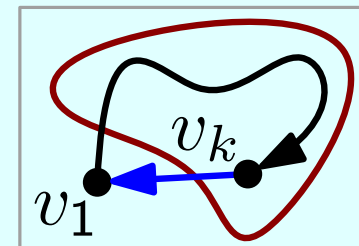
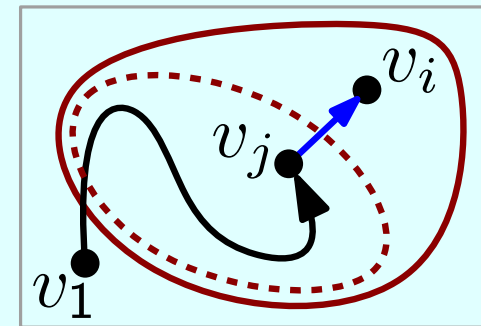
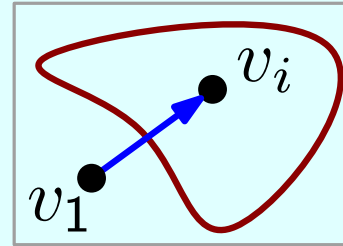
for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$

return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

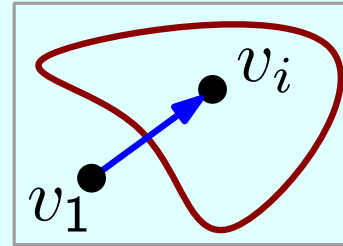
\Rightarrow Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

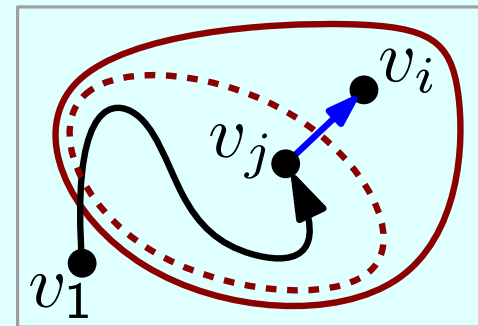


for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

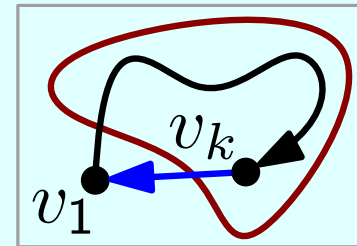
└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$



return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

\Rightarrow Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:**

Der Algorithmus von Bellman & Held-Karp

BellmanHeldKarp(Knotenmenge V , Abstände $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**

└ $\text{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

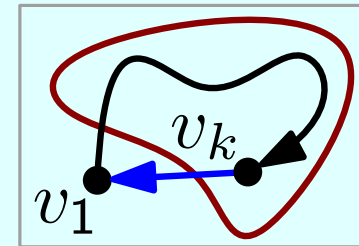
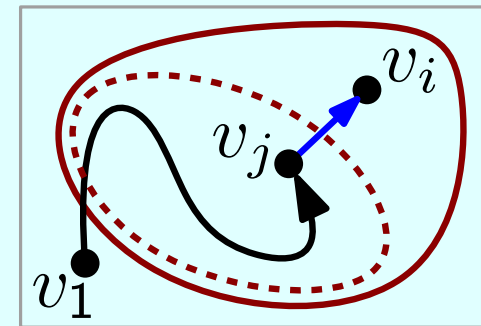
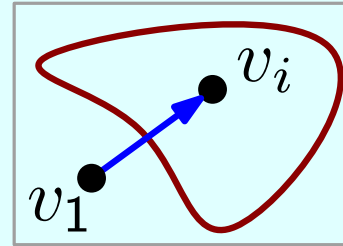
for $r = 2$ **to** $n - 1$ **do**

└ **foreach** $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = r$ **do**

└ **foreach** $v_i \in W$ **do**

└ $\text{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} (\text{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i))$

return $\min_{k \neq 1} (\text{OPT}[V \setminus \{v_1\}, v_k] + c(v_k, v_1))$



Laufzeit: Berechnung von $\text{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

\Rightarrow Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:** $O(n \cdot 2^n)$

Vergleich

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$O(n \cdot 2^n)$

Vergleich

Brute Force

Bellman/Held-Karp

Laufzeit

$$2^{\Theta(n \log n)}$$

$$O(n^2 \cdot 2^n)$$

Speicher

$$O(n)$$

$$O(n \cdot 2^n)$$

Vergleich

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$O(n \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Vergleich

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$O(n \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Vergleich

	Brute Force	Bellman/Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$O(n \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Bem. Nederlof hat vor kurzem [STOC 2020] einen randomisierten Algorithmus für *bipartites* Matching vorgeschlagen, der in $O(\text{poly}(n) \cdot 1.9999^n)$ Zeit läuft (falls man Matrizen schnell genug multiplizieren kann).

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten,
dann auch HK.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
dann auch HK.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
dann auch HK. *in Polynomialzeit!*

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
dann auch HK. *in Polynomialzeit!*
Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
Graph $H = (V, E)$.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
dann auch HK. *in Polynomialzeit!*
Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
Graph $H = (V, E)$.
Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
 Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
 dann auch HK. *in Polynomialzeit!*

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
 Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) = \begin{cases} ? & \text{falls } uv \in E, \\ ? & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
 Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
 dann auch HK. *in Polynomialzeit!*

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
 Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bad News

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.
 Zu zeigen: wenn wir TSP **effizient** lösen könnten,
 dann auch HK. *in Polynomialzeit!*

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
 Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:

G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

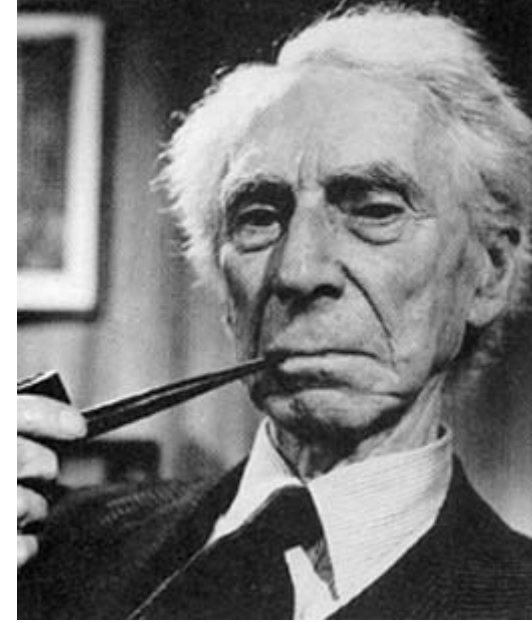
Also: Optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun?

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

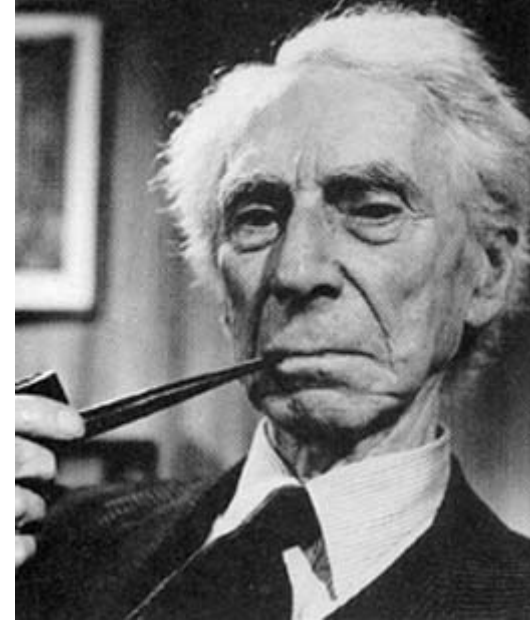


Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

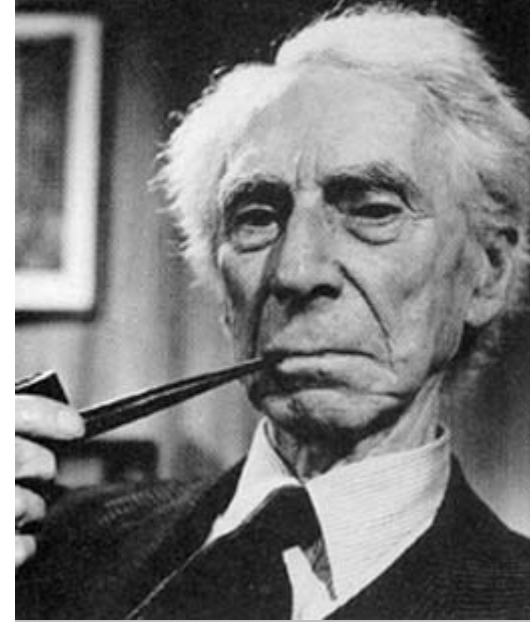


Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.



z.B. TSP

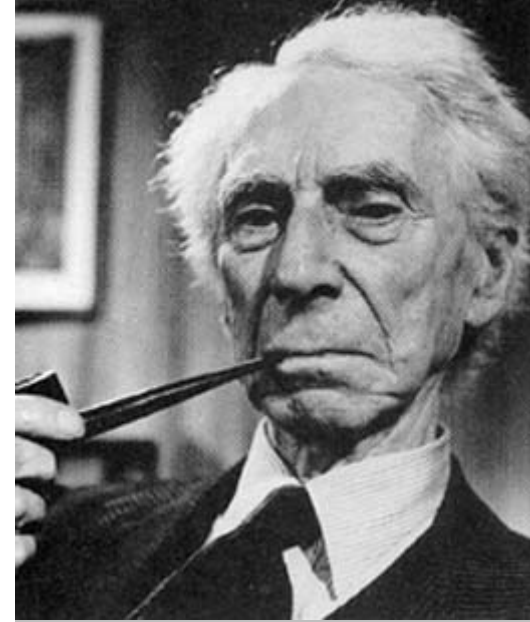
Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei z die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.



z.B. TSP

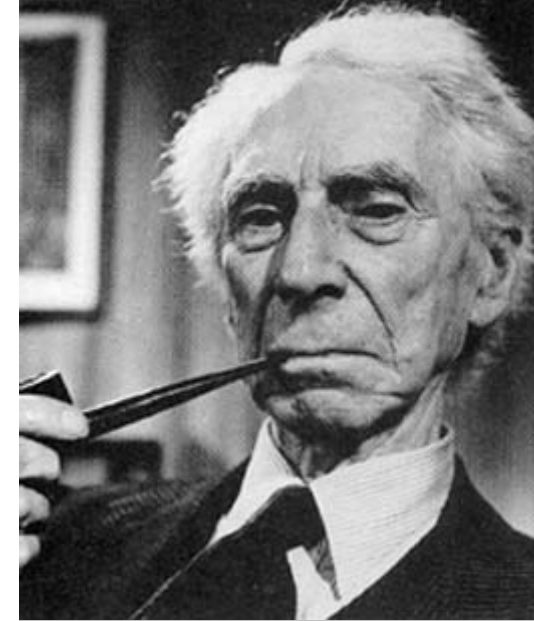
Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.



z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

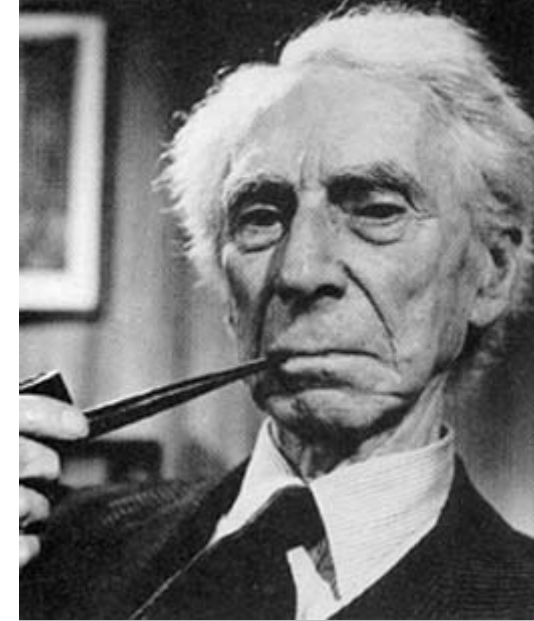
Bertrand Russell
(1872–1970)

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .



z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)

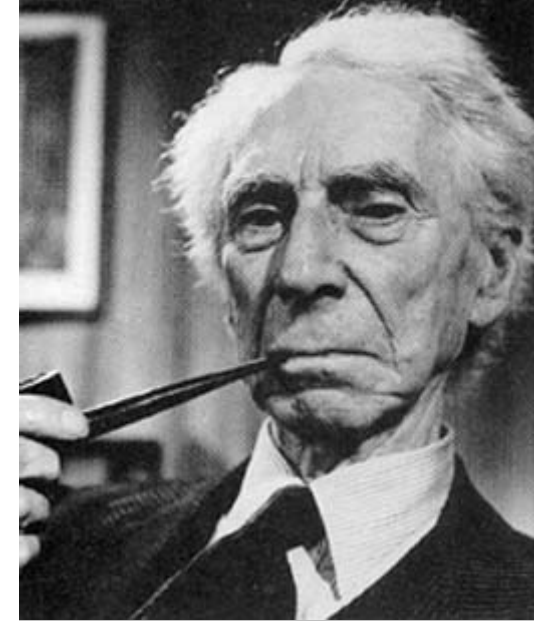
„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -*Approximation*, wenn

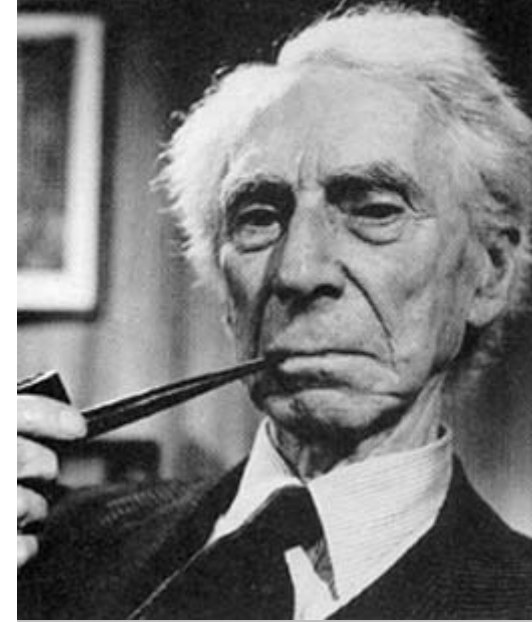


z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

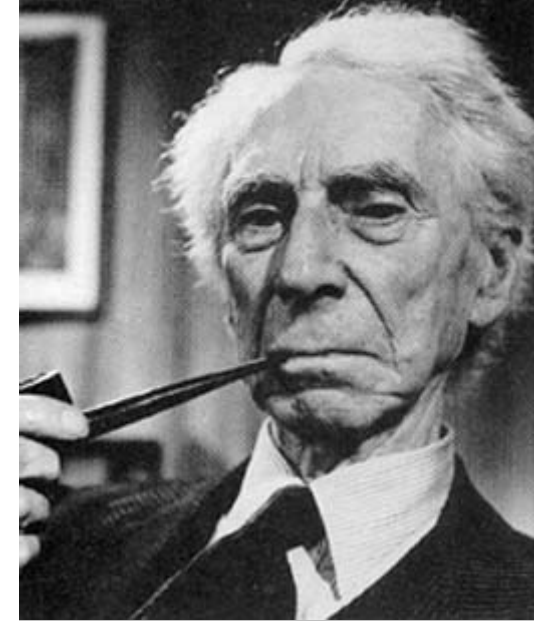
Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$



z.B. TSP

ziel $\equiv c$

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

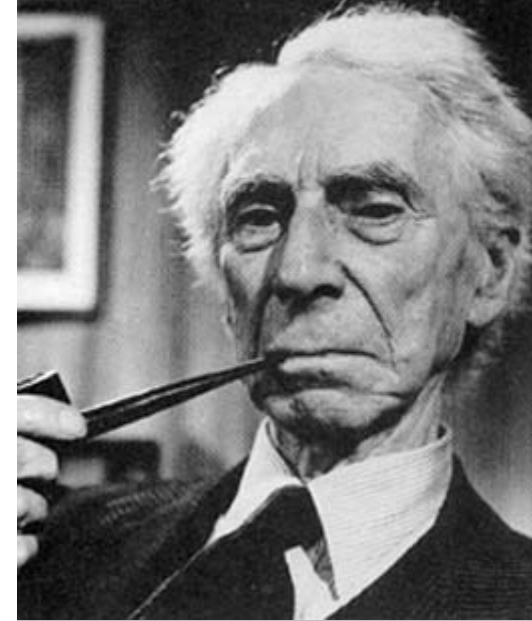
Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$



z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

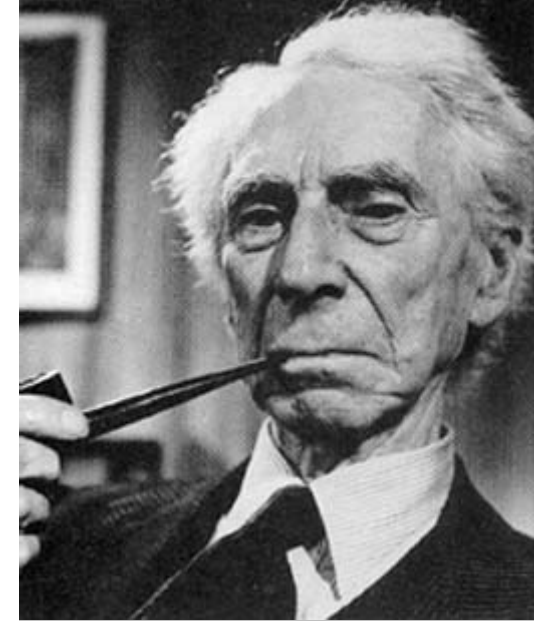
Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

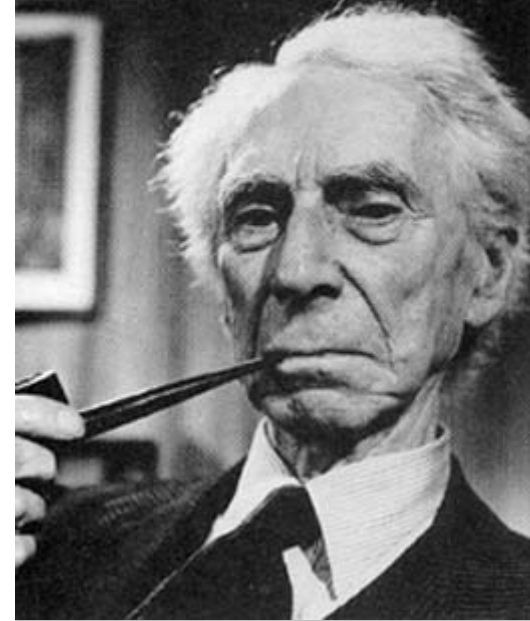
$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$



z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.



Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

Diagram: An arrow points from the text 'ziel(optimale Lösung)' to the 'OPT(I)' term in the denominator of the equation. Another arrow points from the text 'Güte von A' to the Greek letter gamma in the inequality.

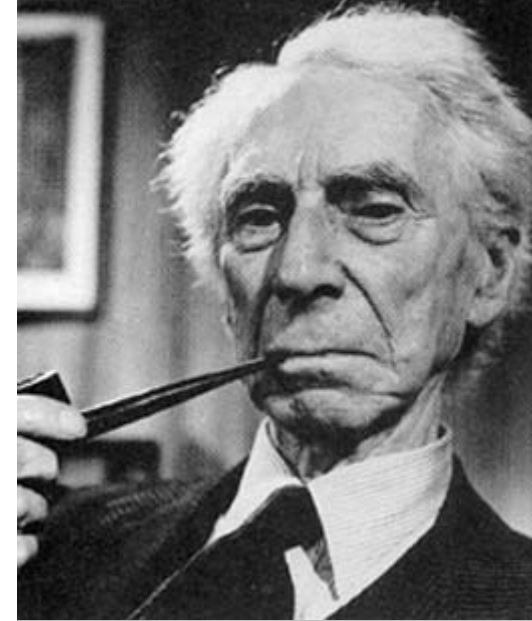
z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

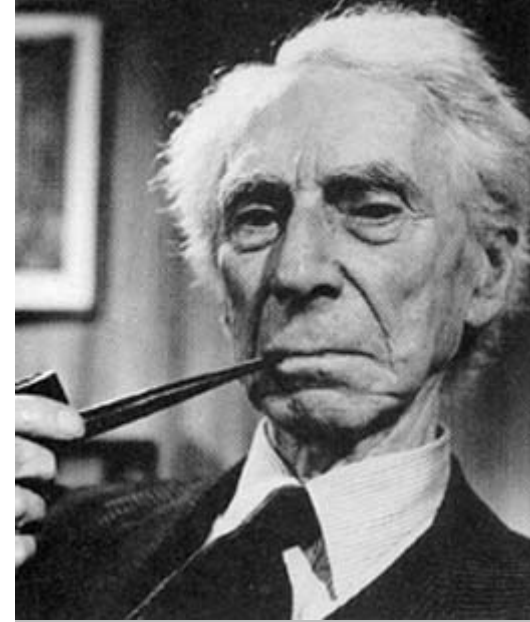
Diagram: An orange arrow points from the text 'ziel(optimale Lösung)' to the 'OPT(I)' term in the denominator of the equation. Another orange arrow points from the text 'Güte von A' to the ' γ ' term in the inequality.

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.



Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

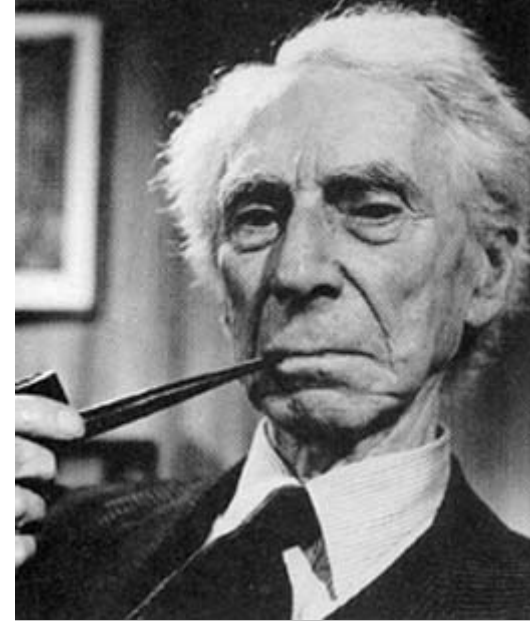
Diagram: An arrow points from the text 'ziel(optimale Lösung)' to the 'OPT(I)' term in the denominator of the equation. Another arrow points from the text 'Güte von A' to the ' γ ' term in the inequality.

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.



Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

OPT(I)

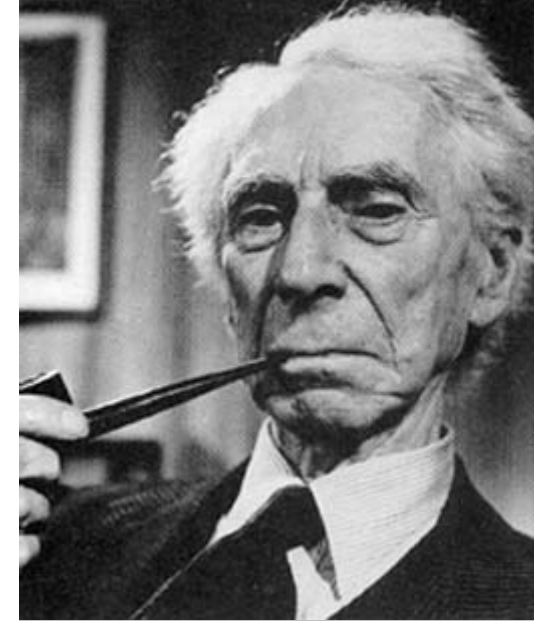
Größe der Instanz I

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.



Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Sei Π ein *Minimierungsproblem*.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

OPT(I)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.

poly($|V|$)

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ≥ 1 .

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

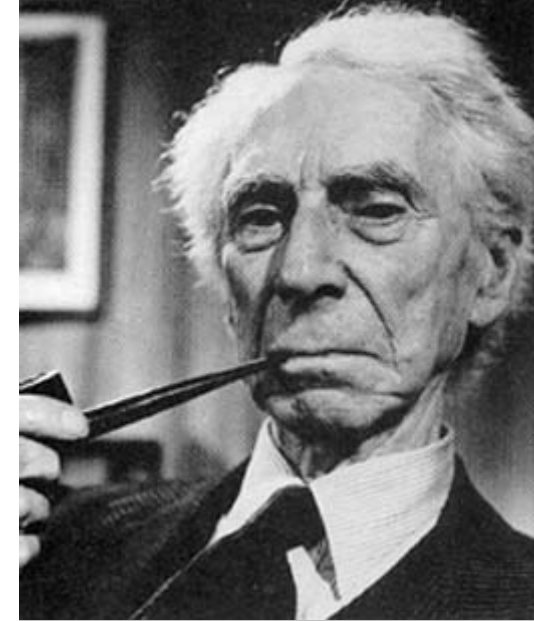
$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \leq \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

OPT(I)

Größe der Instanz I

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

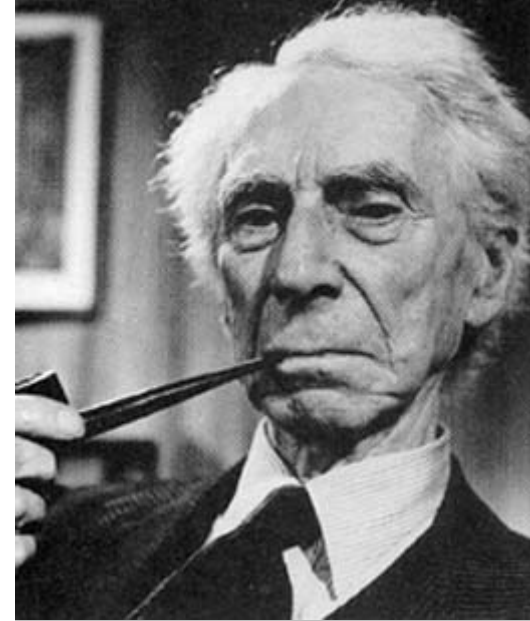


z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.

poly($|V|$)



Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei ziel die Zielfunktion von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl $\nless 1$.

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \nless \gamma$$

ziel(optimale Lösung)

OPT(I)

Größe der Instanz I

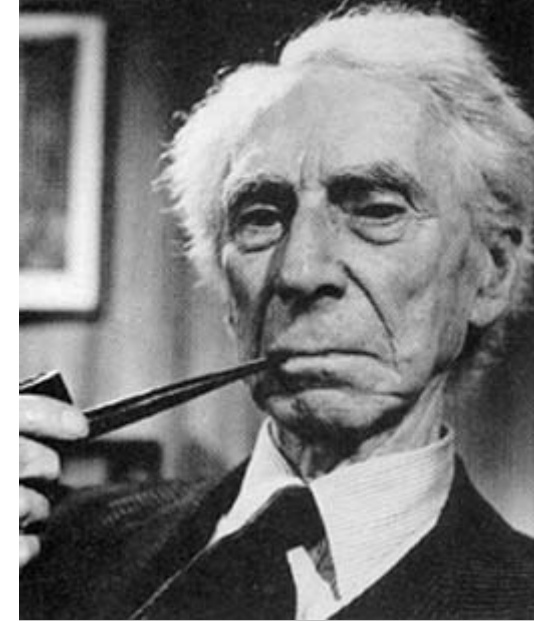
- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. TSP

ziel $\equiv c$

γ -Approx. für
TSP liefert Tour
die höchstens γ
mal so teuer ist
wie billigste Tour.

poly($|V|$)



Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei $ziel$ die Zielfunktion von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ~~\geq~~ 1.

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

Diagram: An arrow points from the text 'ziel(optimale Lösung)' to the 'OPT(I)' term in the denominator of the fraction. Another arrow points from the text 'Güte von A' to the ' γ ' term in the inequality.

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei $ziel$ die *Zielfunktion* von Π : $Lösung \mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ~~\geq~~ 1.

Güte von \mathcal{A}

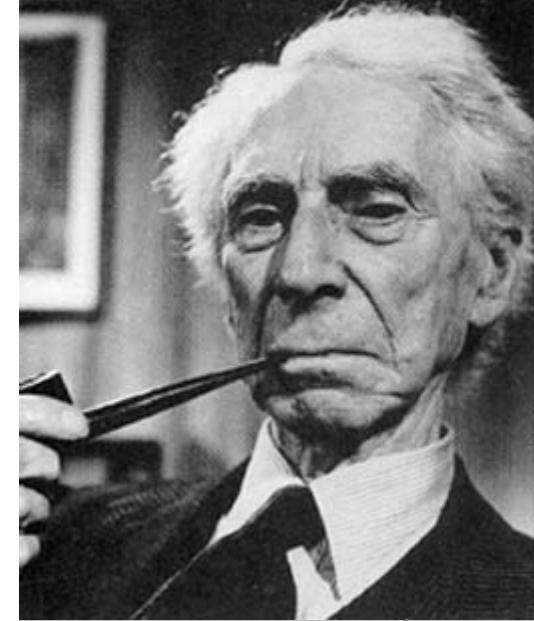
Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{ziel(\mathcal{A}(I))}{\text{ziel(optimale Lösung)}} \geq \gamma$$

$OPT(I)$

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.



z.B. LSP = { longest
simple
path }

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ~~\geq~~ 1.

Güte von \mathcal{A}

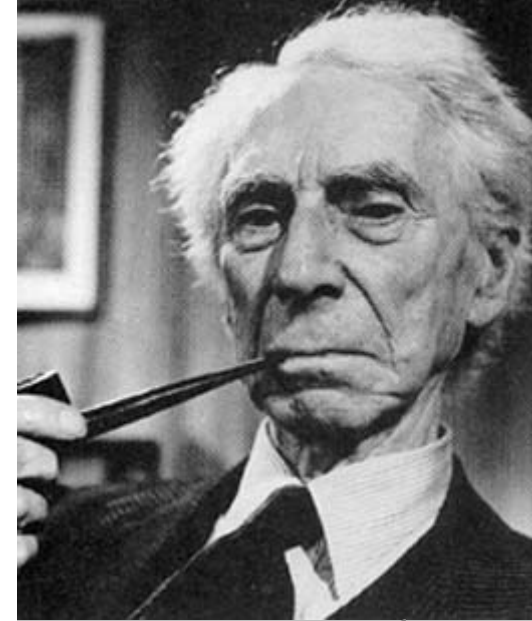
Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

Diagram: An arrow points from the text "ziel(optimale Lösung)" to the term "OPT(I)" in the denominator of the fraction.

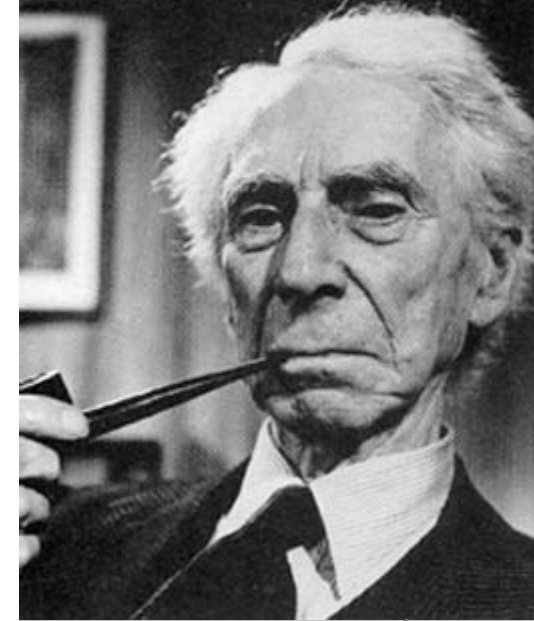
- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.



z.B. LSP = { longest
simple
path
ziel \equiv Länge

Was tun?

Bertrand Russell
(1872–1970)



„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ~~\geq~~ 1.

Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

Diagram: An arrow points from the text 'ziel(optimale Lösung)' to the 'OPT(I)' term in the denominator of the fraction. Another arrow points from the text 'Güte von A' to the ' γ ' term in the inequality.

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.

z.B. LSP = { longest
simple
path
ziel \equiv Länge

γ -Approx. für
LSP liefert
einfachen Pfad,
der *mindestens* γ
mal so lang ist
wie der längste.

Was tun?

„All exact science is dominated
by the idea of approximation.“

Maximierungsproblem

Sei Π ein ~~Minimierungsproblem~~.

Sei *ziel* die *Zielfunktion* von Π : Lösung $\mapsto \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Sei γ eine Zahl ~~\geq~~ 1.

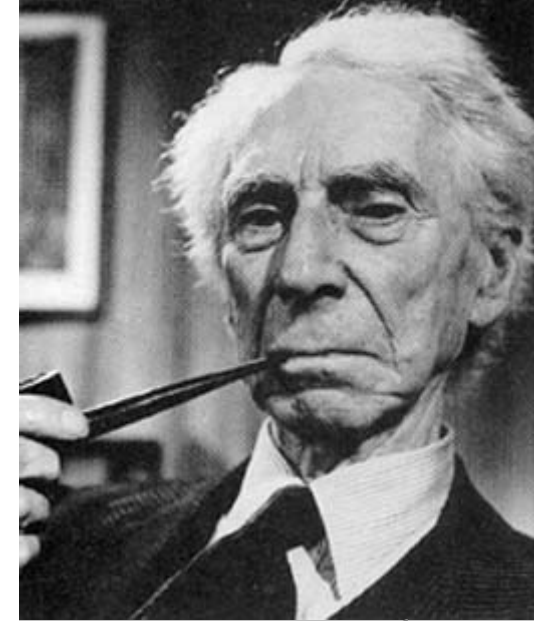
Güte von \mathcal{A}

Ein Algorithmus \mathcal{A} heißt γ -Approximation, wenn

- \mathcal{A} für jede Instanz I von Π eine Lösung $\mathcal{A}(I)$ berechnet, so dass

$$\frac{\text{ziel}(\mathcal{A}(I))}{\text{ziel(optimale Lösung)}} = \frac{\text{OPT}(I)}{\text{OPT}(I)} \geq \gamma$$

- die Laufzeit von \mathcal{A} polynomiell in $|I|$ ist.



z.B. LSP = { longest
simple
path }
ziel \equiv Länge

γ -Approx. für
LSP liefert
einfachen Pfad,
der *mindestens* γ
mal so lang ist
wie der längste.

$\text{poly}(|V|)$

Bad News II

Satz. TSP ist NP-schwer.

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten,
dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten,
dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ -Approximation für TSP (außer $P=NP$).

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP effizient lösen könnten,
dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger)
Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ -Approximation für TSP (außer $P=NP$).

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ ^{mit Güte γ approximieren} könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ -Approximation für TSP (außer $P=NP$).

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ ^{mit Güte γ approximieren} könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| \cdot \gamma & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow optimale TSP-Tour kostet $|V| \Leftrightarrow H$ ham.

Bad News II

D.h. für kein $\gamma \geq 1$ gibt's eine γ -Approximation für TSP (außer $P=NP$).

Satz. TSP ist NP-schwer **zu approximieren!**

Beweis. Durch Reduktion vom Problem Hamiltonkreis.

Zu zeigen: wenn wir TSP ~~effizient lösen~~ ^{mit Güte γ approximieren} könnten, dann könnten wir auch HK eff. lösen.

Gegeben: ungerichteter (i.A. *nicht* vollständiger) Graph $H = (V, E)$.

Def. vollständigen Graphen G mit Kosten c , so dass:
 G hat billige TSP-Tour $\Leftrightarrow H$ hamiltonsch.

Nimm $G = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ und für $u, v \in V$ setze

$$c(uv) := \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in E, \\ |V| \cdot \gamma & \text{sonst.} \end{cases}$$

\Rightarrow ~~optimale~~ TSP-Tour ^{mit Güte γ} kostet $\leq \gamma \cdot |V| \Leftrightarrow H$ ham.

Was tun?

Problem:

Traveling Salesman Problem

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem:

Traveling Salesman Problem

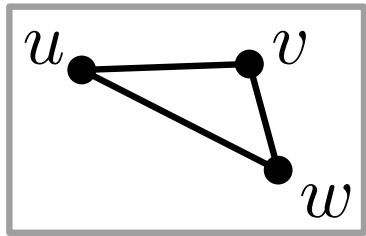
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem:

Traveling Salesman Problem

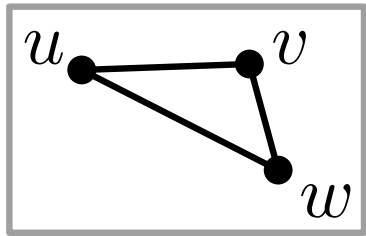


Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)



Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$

mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

die die Dreiecksungleichung erfüllen,

d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

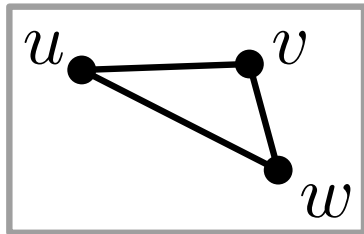
Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$

mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

die die Dreiecksungleichung erfüllen,

d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

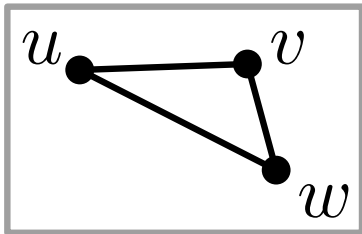
Satz.

Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

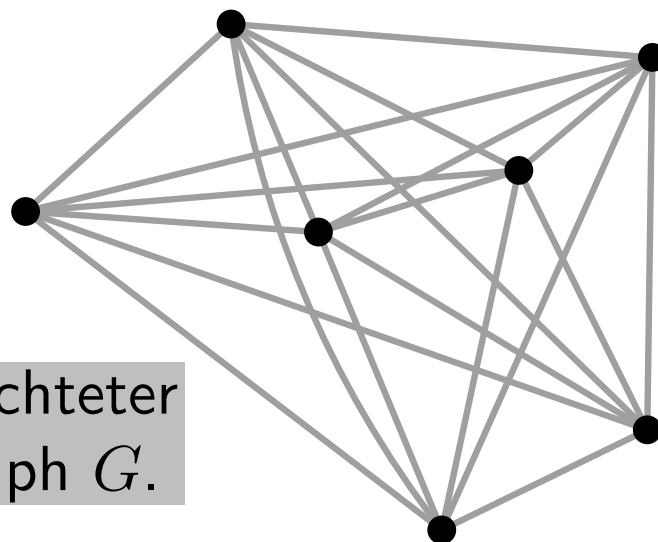
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.

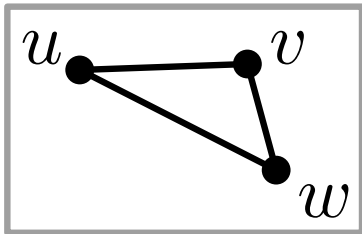


Geg. gewichteter
vollst. Graph G .

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

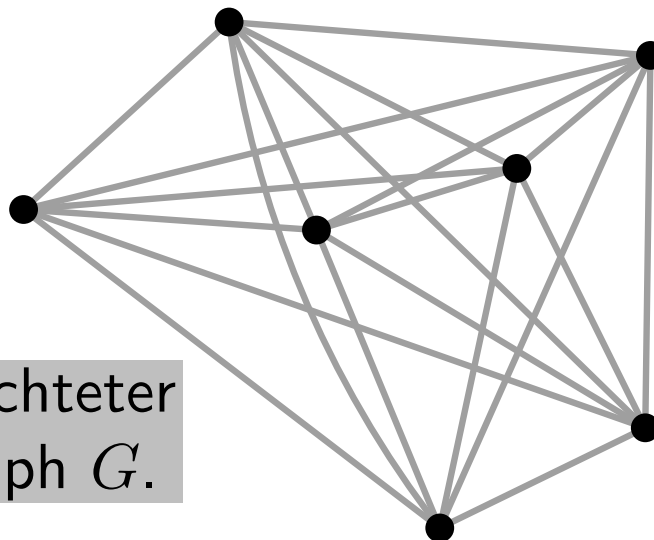
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Geg. gewichteter
vollst. Graph G .

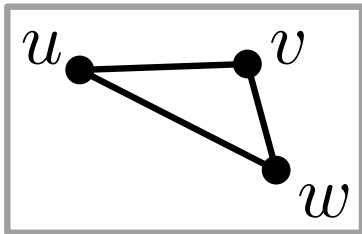
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

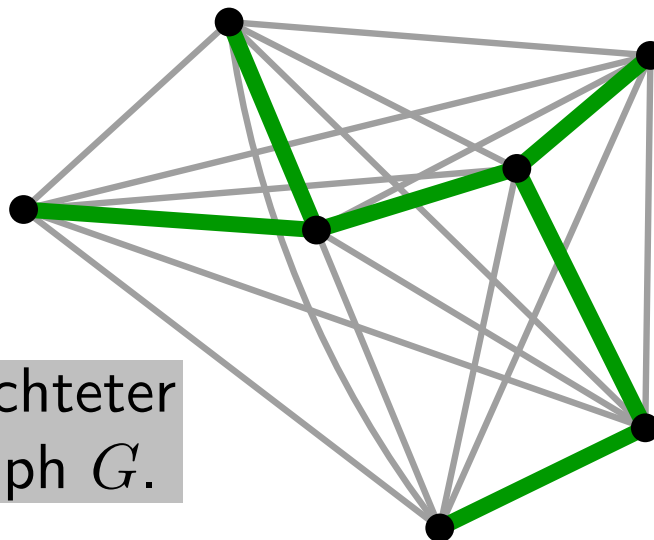
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Geg. gewichteter
vollst. Graph G .

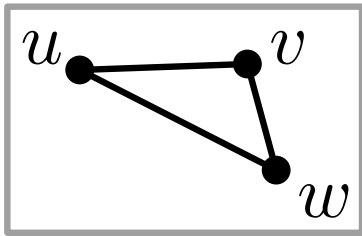
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

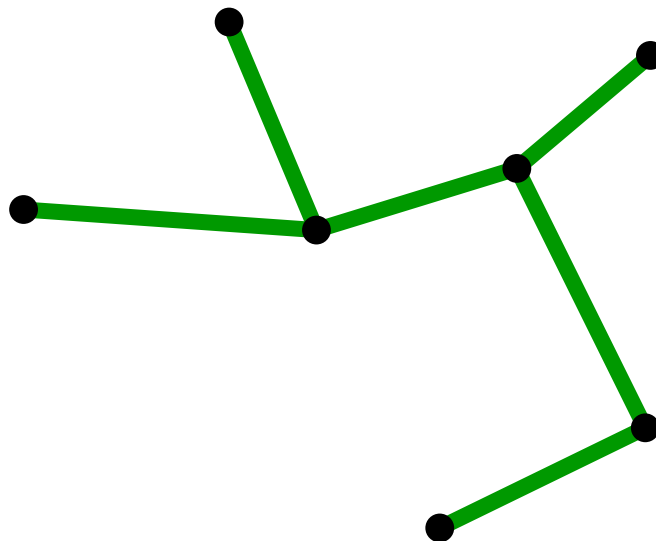
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



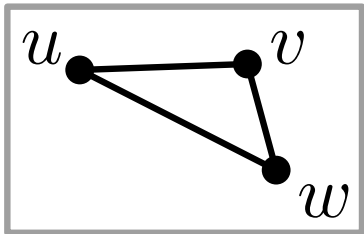
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

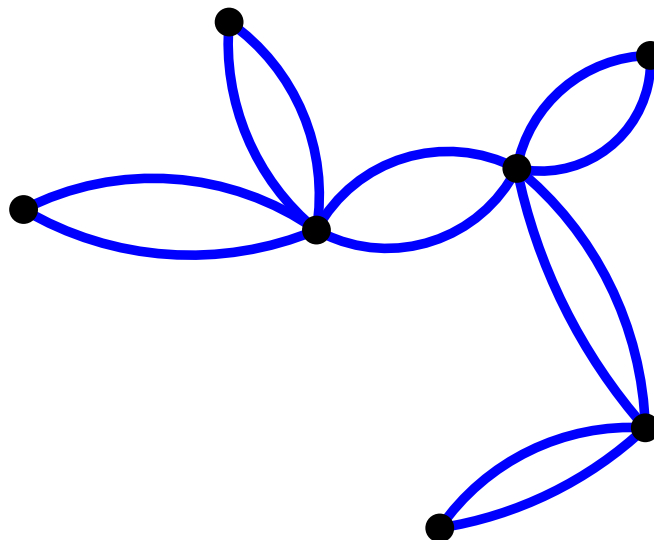
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

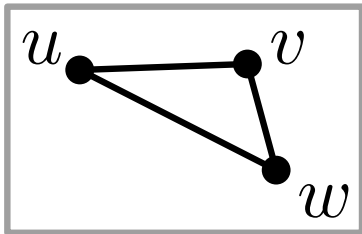
Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

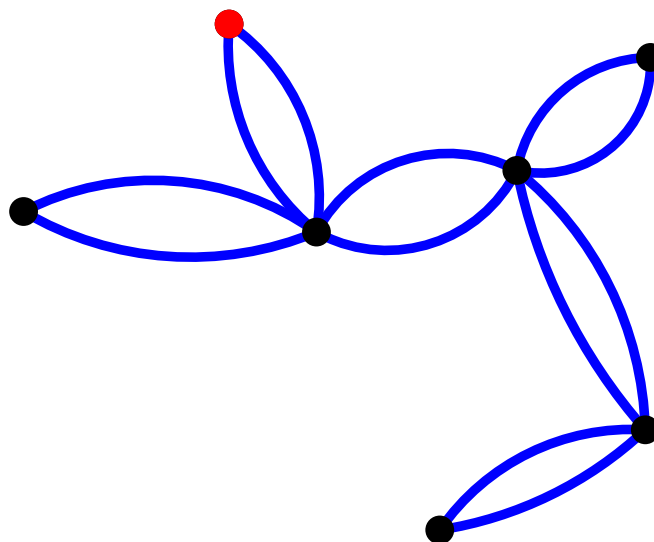
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



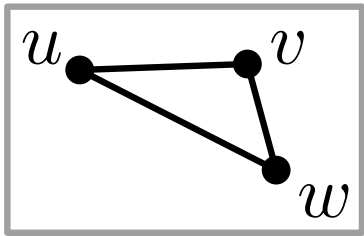
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.
 Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!
 Durchlaufe den **Kreis**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

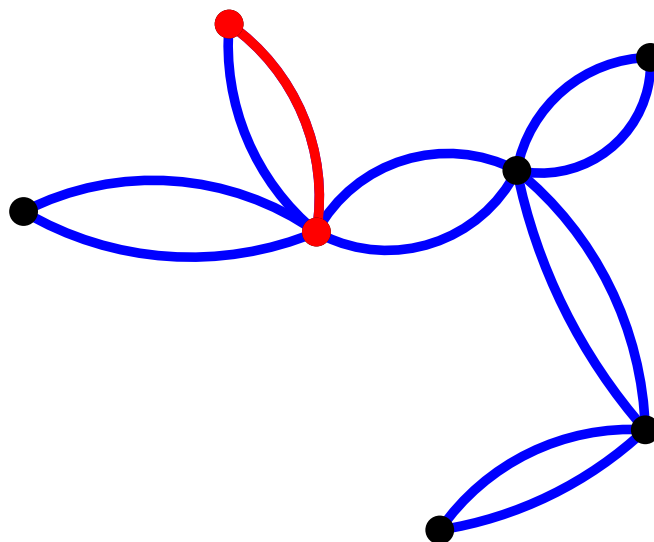
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



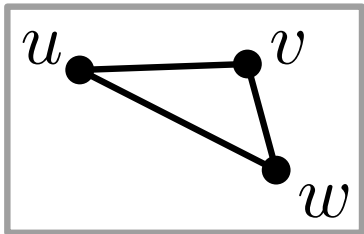
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.
 Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!
 Durchlaufe den **Kreis**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

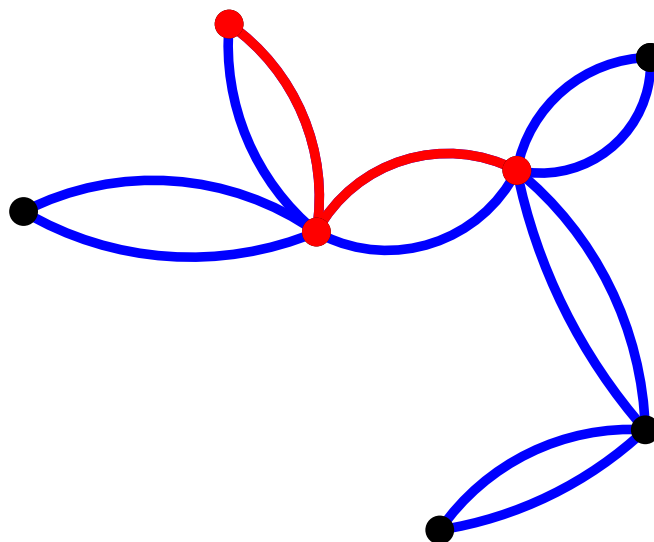
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



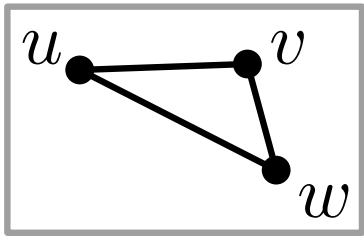
Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.
 Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!
 Durchlaufe den **Kreis**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

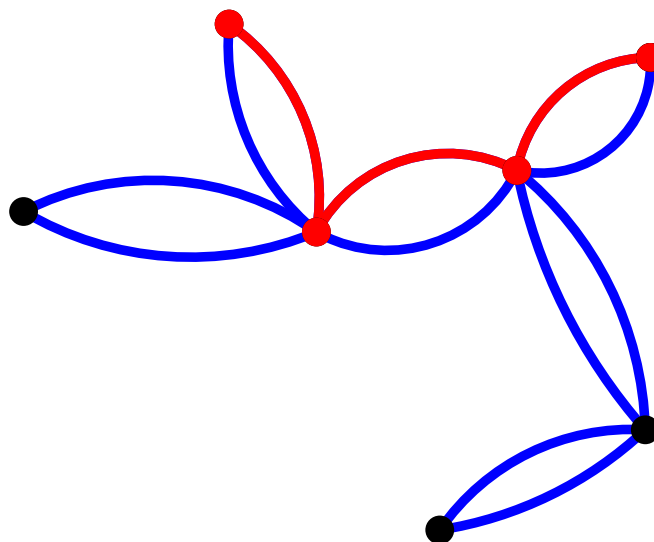
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

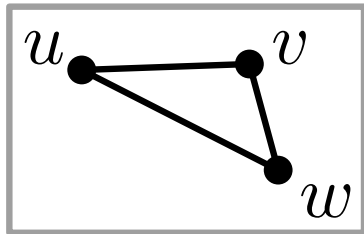
Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

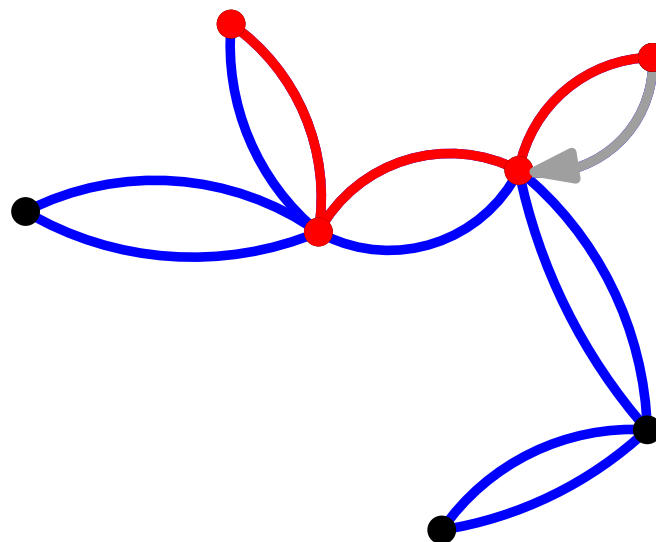


Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz.

Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

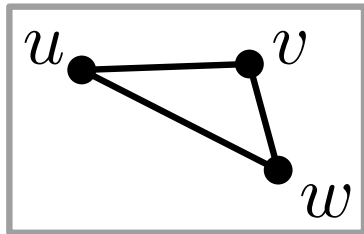
Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

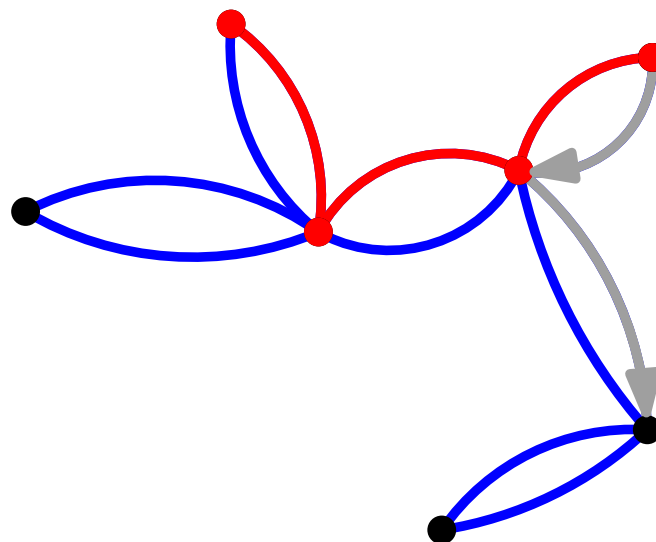
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

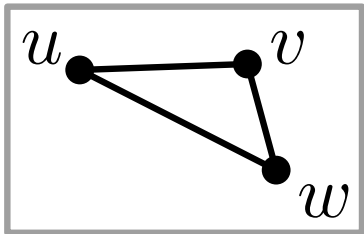
Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

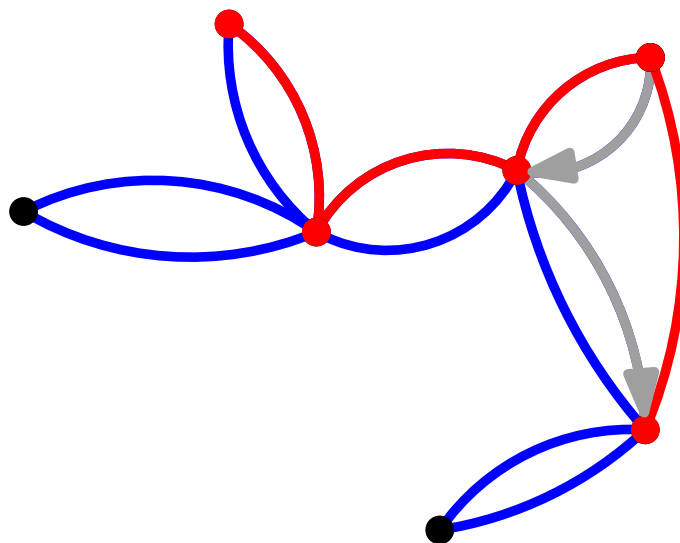
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

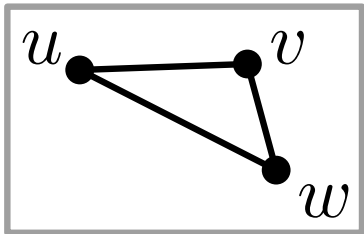
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

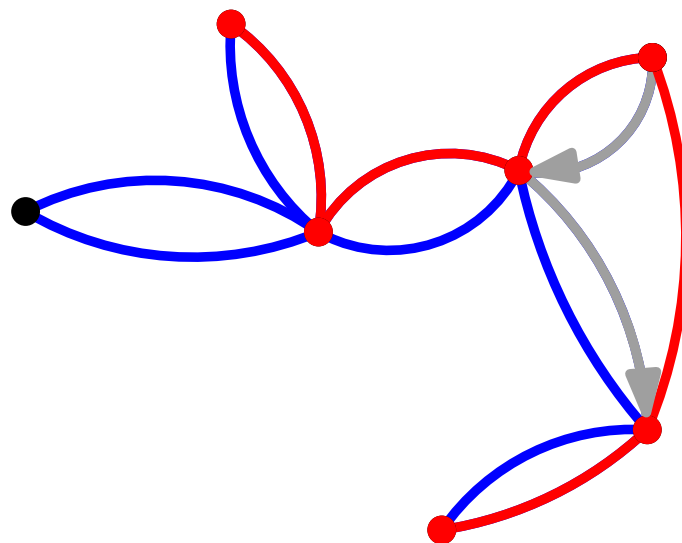
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

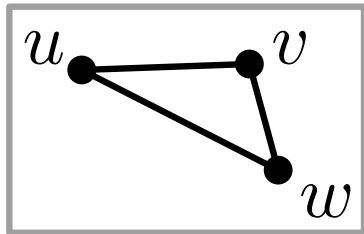
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

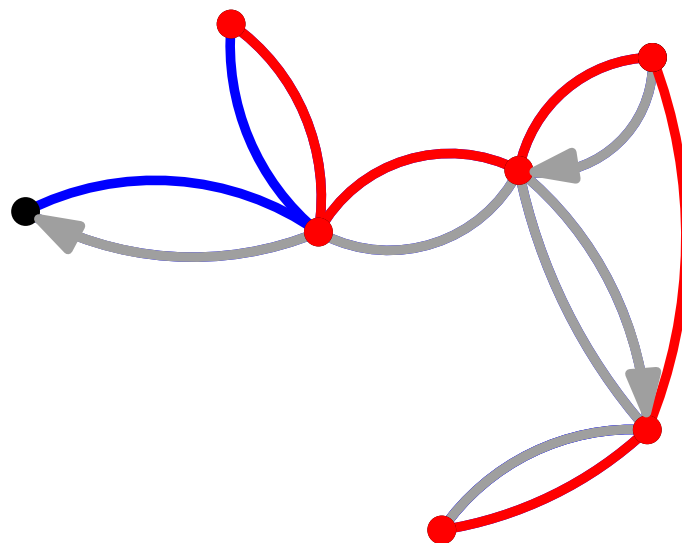
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

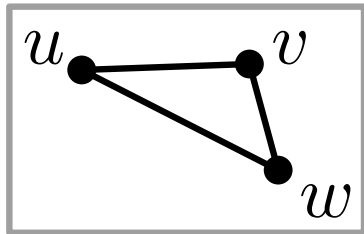
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

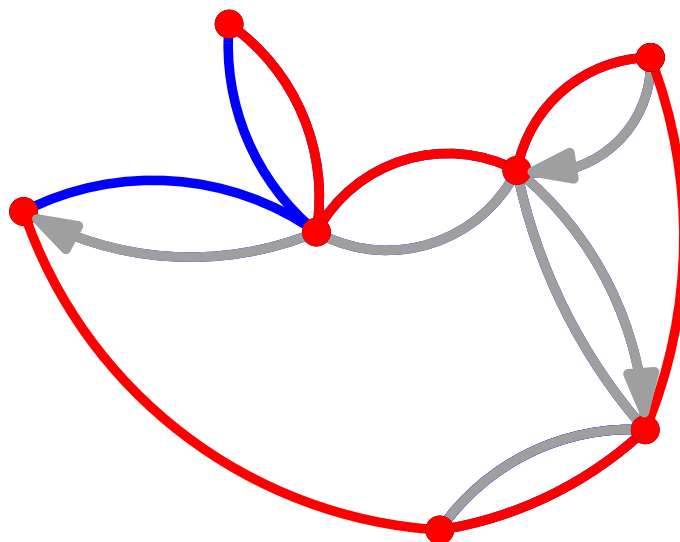
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

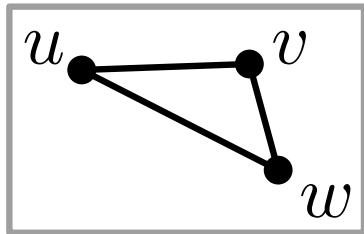
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

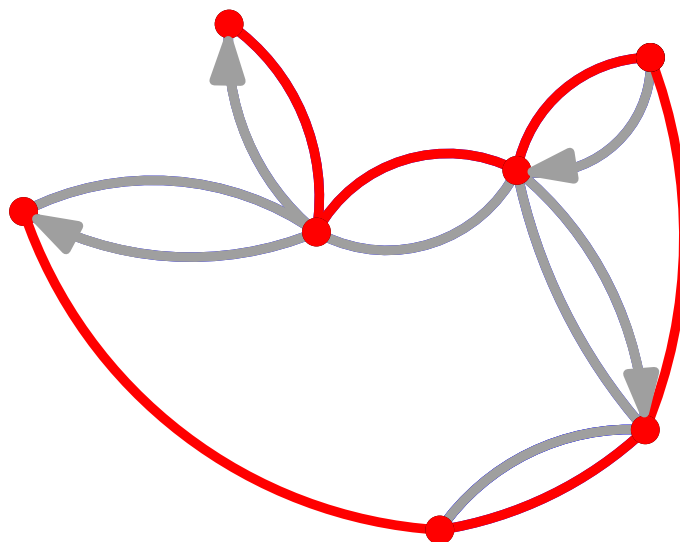
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

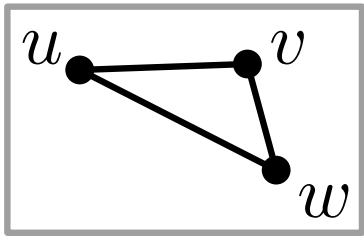
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesman Problem* (Δ -TSP)

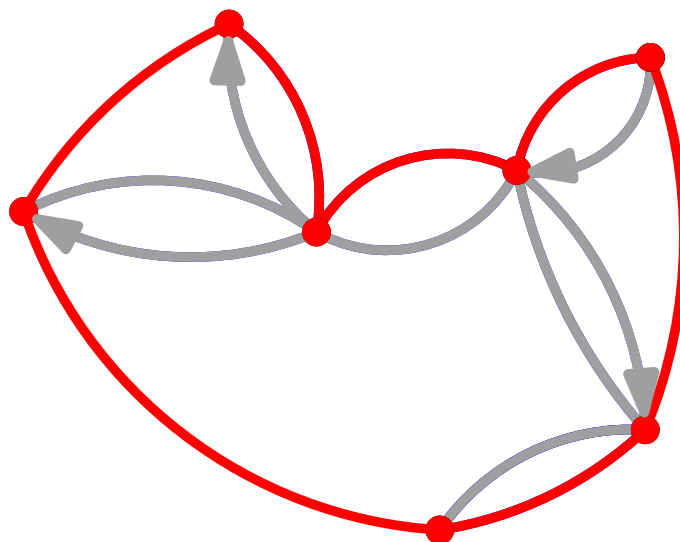
Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
 mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
 die die Dreiecksungleichung erfüllen,
 d.h. $\forall u, v, w \in V: c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.



Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum **MSB**.

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

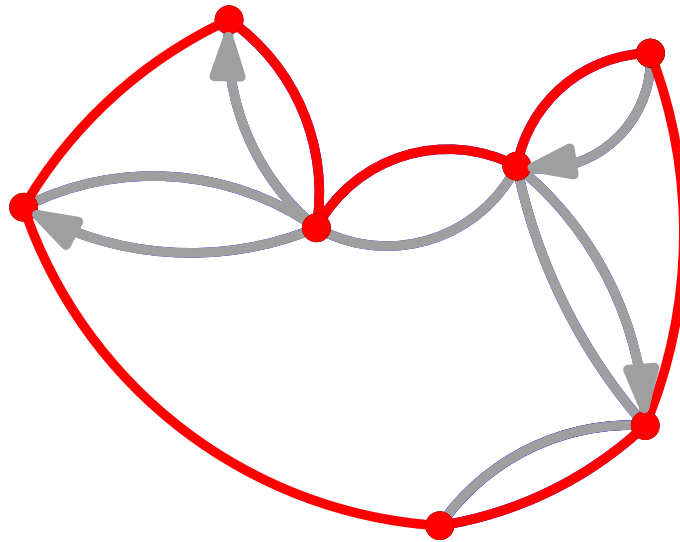
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

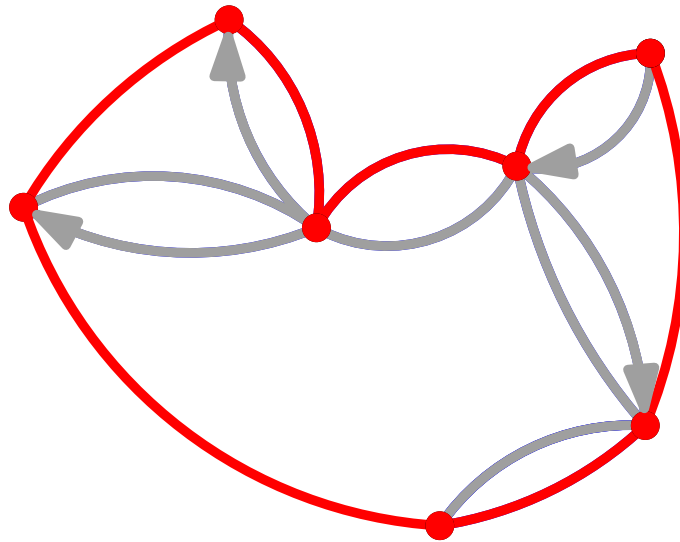
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

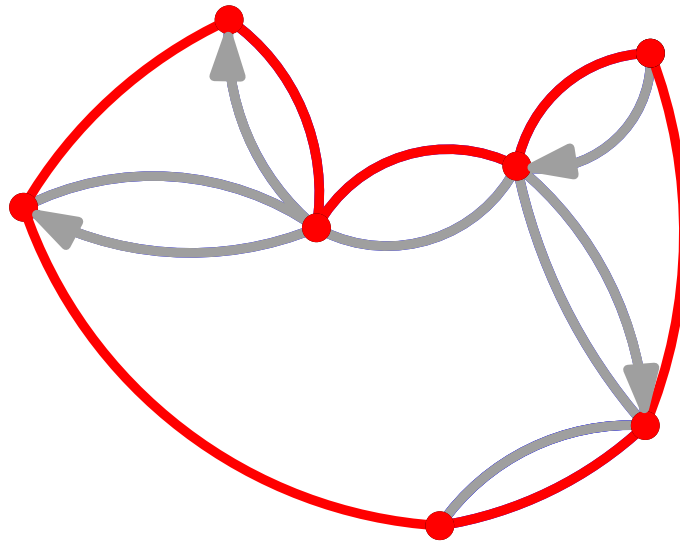
Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

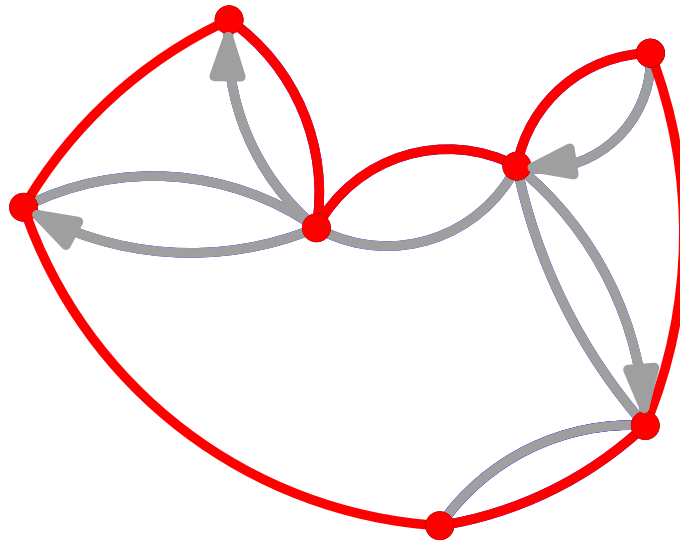
2. Analyse

$$c(\text{ALG}) \leq$$

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

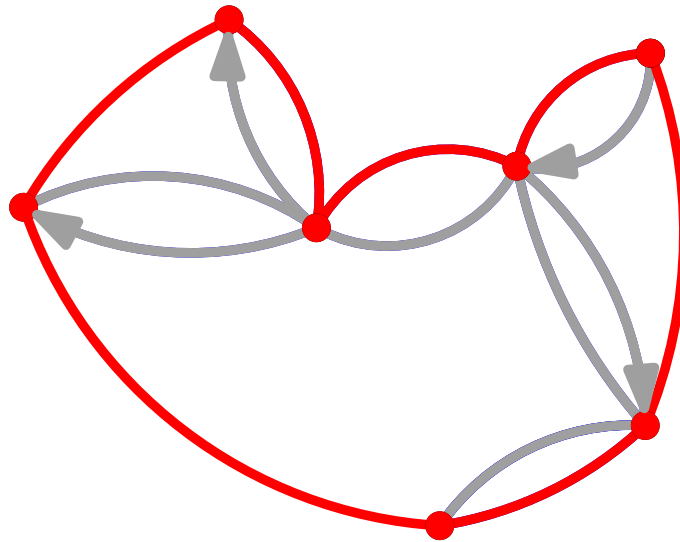
$$c(\text{ALG}) \leq$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

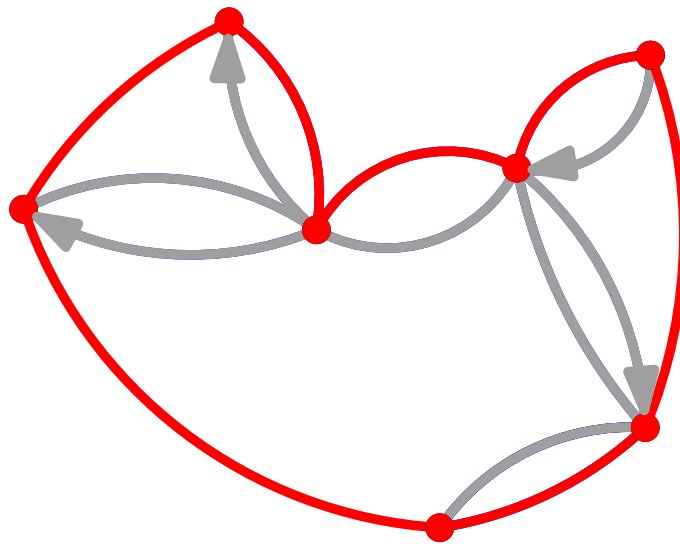
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) =$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

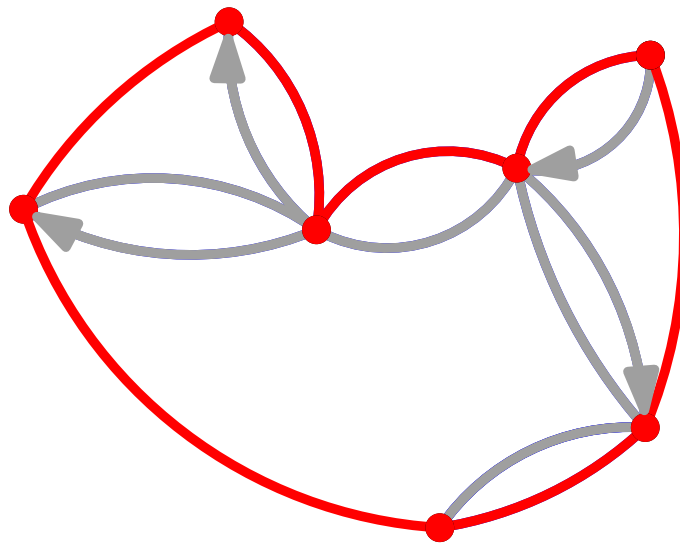
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

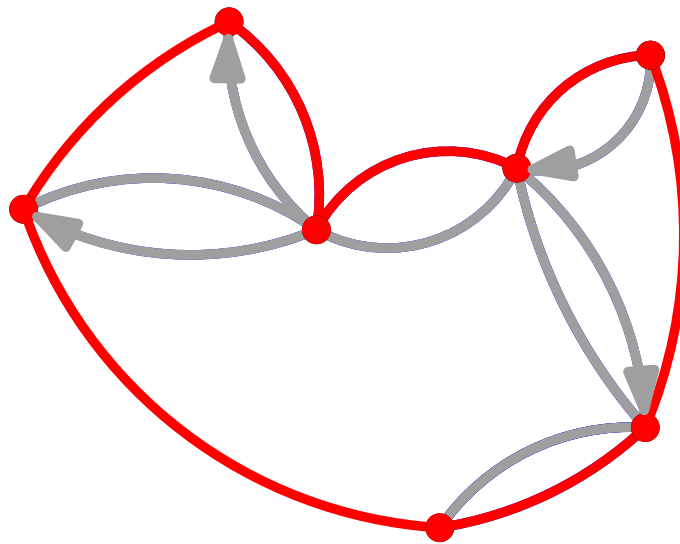
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \boxed{}$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

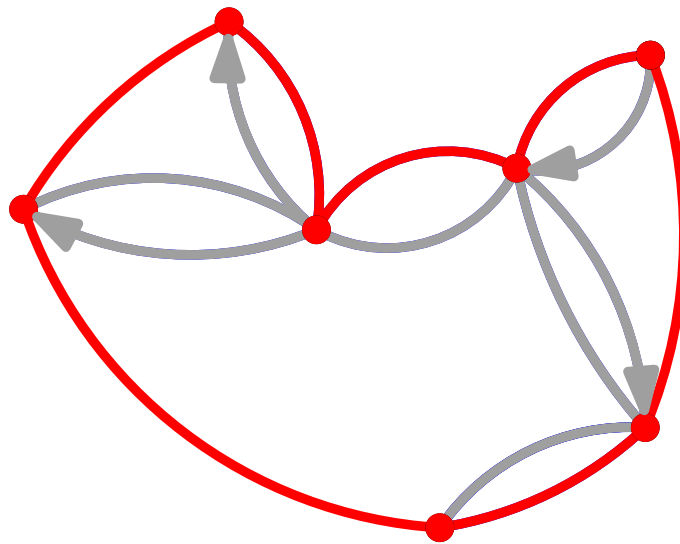
$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

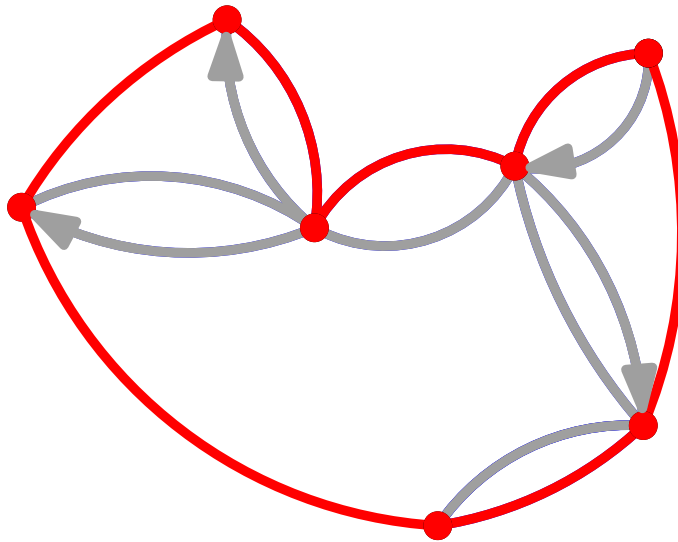
Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ -TSP.

Beweis.



1. Algorithmus

Berechne **MSB** von G .

Verdopple MSB \Rightarrow ergibt Kreis!

Durchlaufe den **Kreis**.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. Analyse

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$