

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

2. Vorlesung

Lineares Programmieren

Gewinnmaximierung

Sie sind Chef einer kleinen Firma, die zwei Produkte P_1 und P_2 herstellt. Produzieren Sie x_1 Einheiten P_1 und x_2 Einheiten P_2 , so beträgt Ihr Gewinn in €

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$

Drei Mitarbeiter M_A , M_B und M_C produzieren die dafür jeweils notwendigen Einzelteile. Dabei brauchen sie eine bestimmte Zeit pro Teil und haben jeweils eine maximale Arbeitszeit, die die Produktion der Einzelteile einschränkt:

$$M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$

$$M_B: \quad x_1 + x_2 \leq 150$$

$$M_C: \quad x_2 \leq 60$$

Welche Wahl von (x_1, x_2) maximiert den Gewinn?

Lösung

3

Lineare Beschränkungen:

$$M_A: 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$

$$M_B: x_1 + x_2 \leq 150$$

$$M_C: x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$Ax \leq b$$

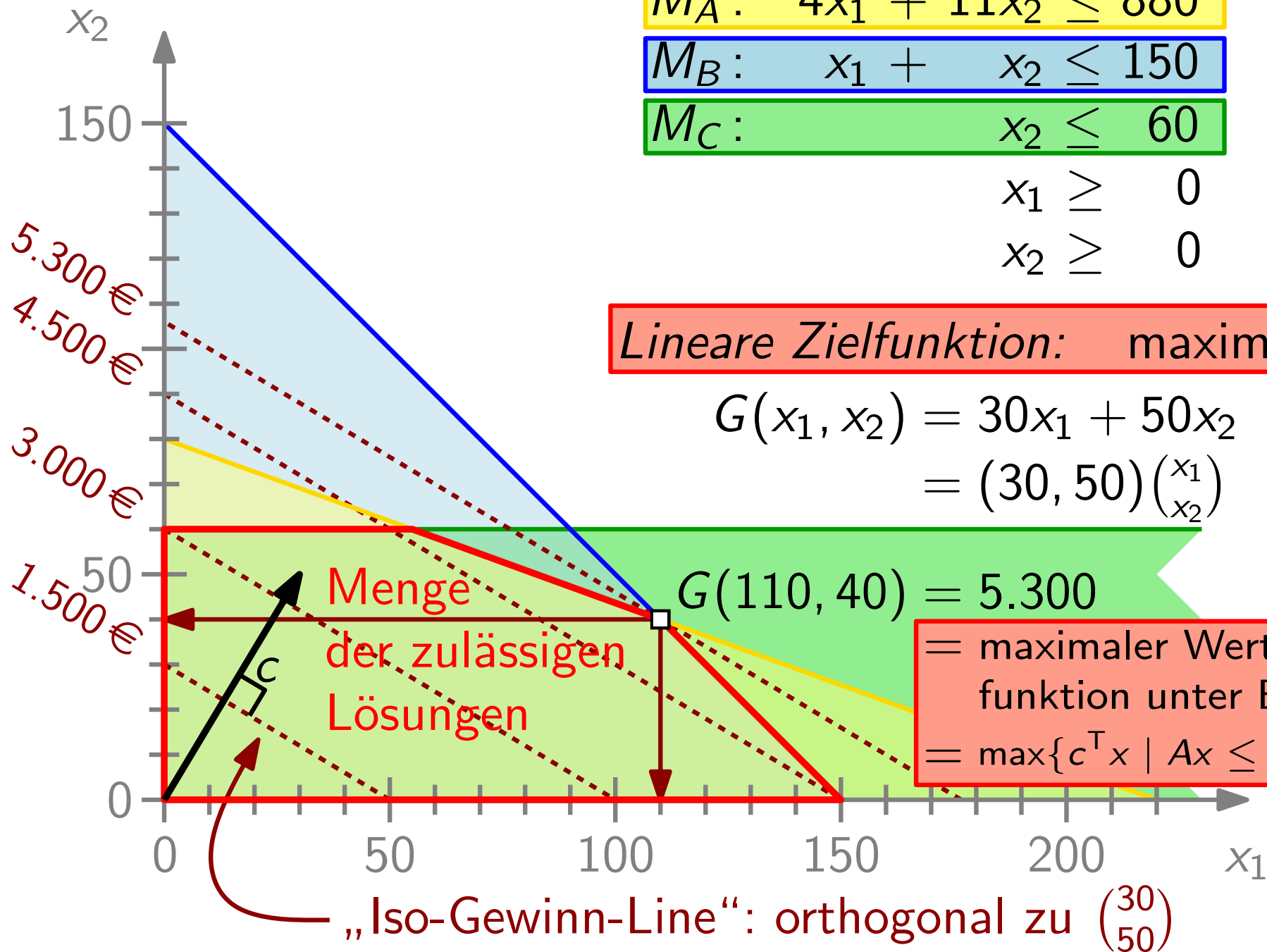
$$x \geq 0$$

Lineare Zielfunktion: maximiere $c^T x$

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$
$$= (30, 50) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$G(110, 40) = 5.300$$

= maximaler Wert der Zielfunktion unter Beschränkung.
= $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



Lineares Programmieren I

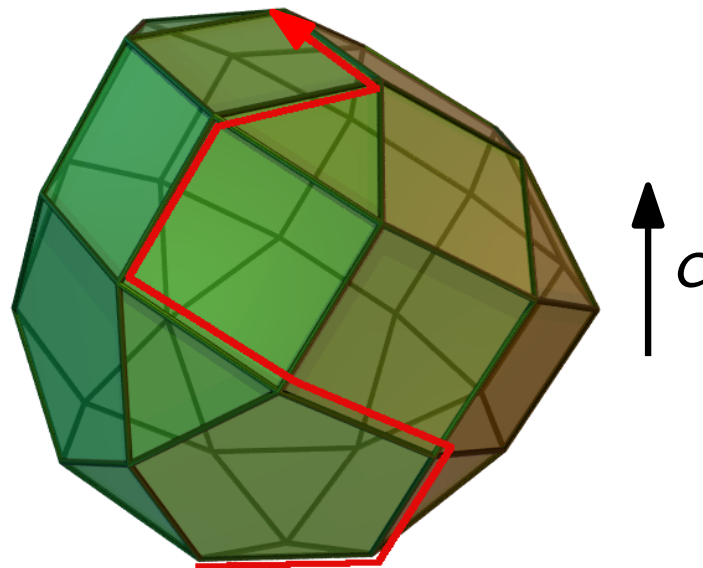
Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $x^* = \arg \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

Satz. [Dantzig, 1947]



Der Simplex-Algorithmus löst lineare Programme.



Satz. [Klee & Minty, 1972]

Es gibt Beispiele, auf denen der Simplex-Algorithmus exponentielle Zeit benötigt.

Lineares Programmieren II

Satz.

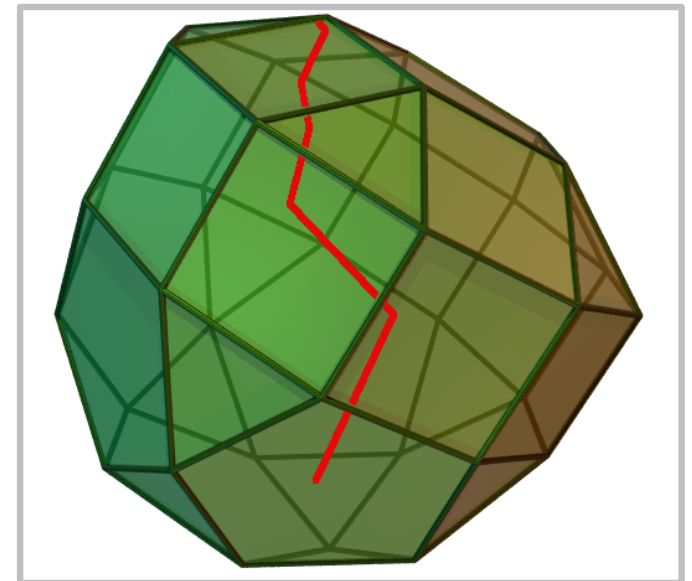
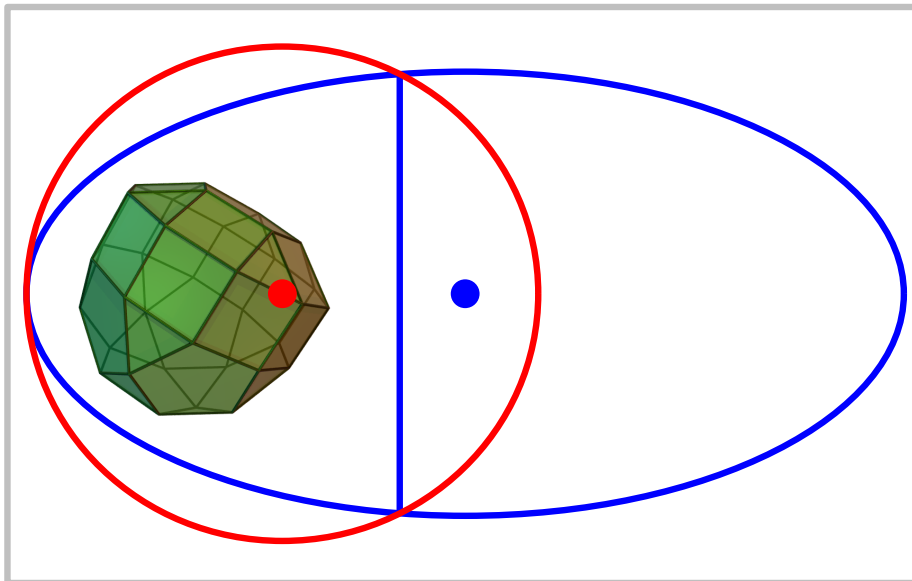
[Khachiyan, 1979]

Ellipsoidmethode

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^6)$ Zeit lösen, wobei $L = \text{Anz. Bits in der Eingabe}$.



Leonid Khachiyan
*1952 Leningrad
†2005 South
Brunswick, NJ



Narendra Karmarkar
*1957 Gwalior, Indien

Satz.

[Karmarkar, 1984]

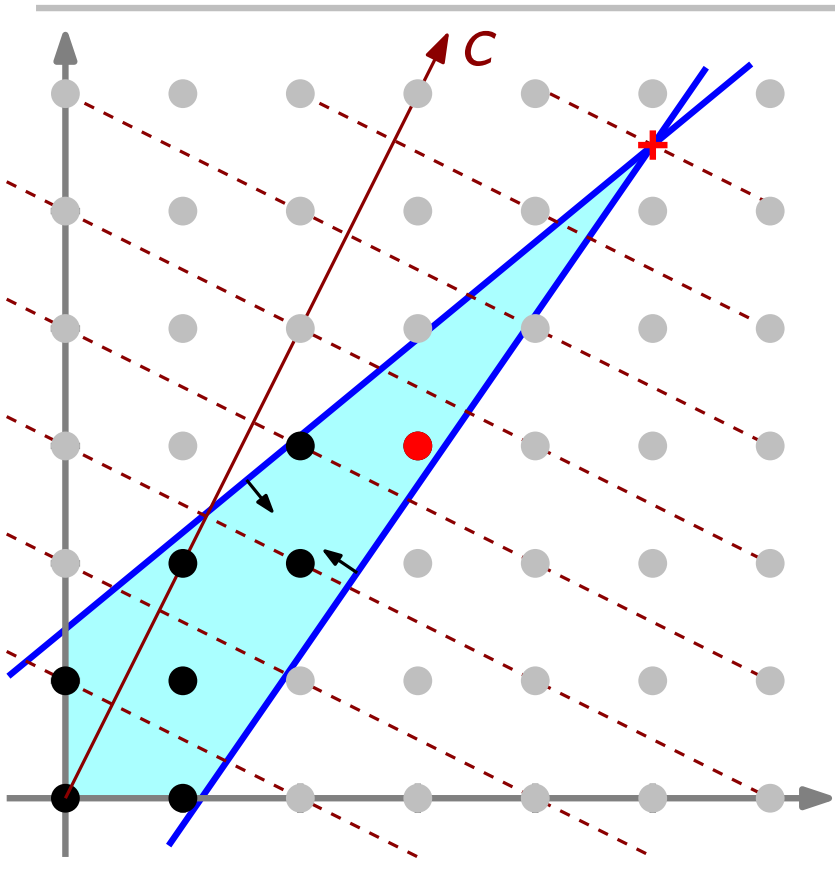
Innere-Punkt-Methode

Ein Lineares Programm der Dim. n lässt sich in $O(L^2 \cdot n^{3.5})$ Zeit *numerisch stabil* lösen.

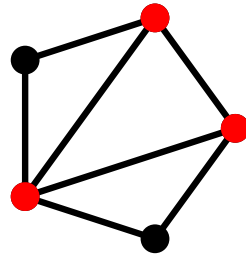
Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $x^* = \arg \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$
 häufig $\{0, 1\}^n$ oder $\arg \min$ $x \in \mathbb{Z}^n$



Problem. Geg. Graph G



Ges. Knotenüberdeckung,
 d.h. $V' \subseteq V(G)$, so dass
 jede Kante mind. einen
 Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

Aufgabe. Modellieren Sie dieses
 Problem als ILP!

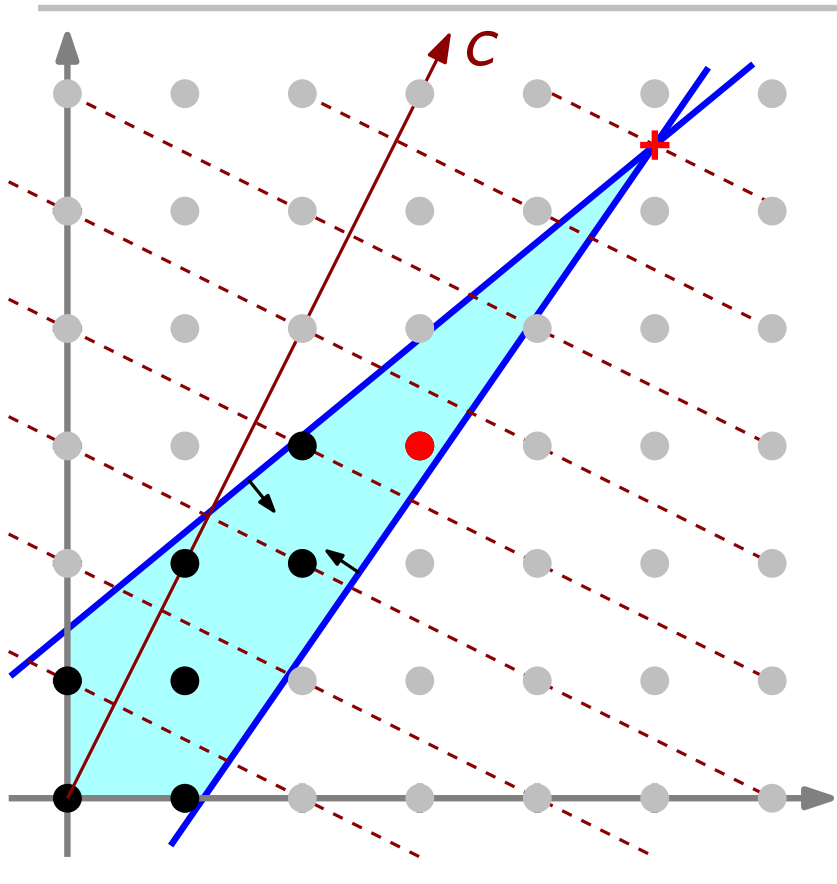
Tipp.

Verwenden Sie für jeden
 Knoten v eine Variable
 $x_v \in \{0, 1\}$, mit
 $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$

Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $x^* = \arg \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$
 häufig $\{0, 1\}^n$ oder $\arg \min$ $x \in \mathbb{Z}^n$



Problem.

NP-
schwer

Geg. Graph G

Ges. Knotenüberdeckung,
d.h. $V' \subseteq V(G)$, so dass
jede Kante mind. einen
Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal!

Modell.

0-1-ILP



NP-
schwer

Für $v \in V(G)$ sei $x_v \in \{0, 1\}$.

Zielfkt.: minimiere $\sum_{v \in V(G)} x_v$

Beschränkungen:

für jede Kante $uv \in E(G)$
fordern wir $x_u + x_v \geq 1$.

Bsp. II: ILP-Formulierung für MaxClique

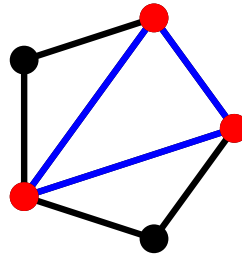
Geg. ungerichteter, ungewichteter Graph G

Ges. Clique in G , $G[V'] := (V', \{u'v' \in E(G) : u' \in V', v' \in V'\})$

d.h. $V' \subseteq V(G)$, sodass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig,

m.a.W. $V' \subseteq V(G)$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt: $u'v' \in E(G)$.

Ziel: $|V'|$ maximal!



Variable:

Für $v \in V$ sei $x_v \in \{0, 1\}$. (Damit codieren wir die Menge V' !)

Zielfunktion:

Maximiere $\sum_{v \in V(G)} x_v$

unter den Nebenbedingungen:

für jede Nicht-Kante $\{u, v\} \in \binom{V}{2} \setminus E(G)$: $x_u + x_v \leq 1$.

D.h. wenn u und v nicht benachbart sind, darf höchstens einer in die Clique.

Bsp. III: ILP-Formulierung für TSP

Gegeben: vollständiger Graph G mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und Kantenkosten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

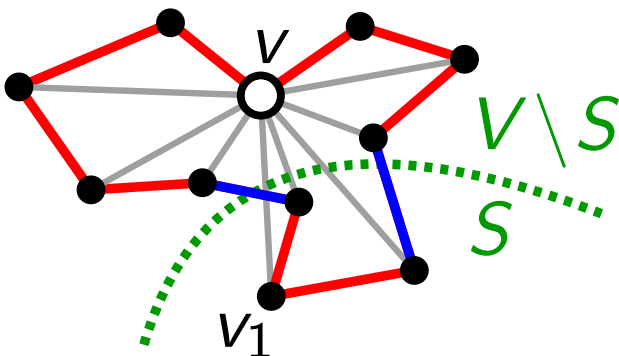
Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K)$.
d.h. Permutation σ von $\langle 1, \dots, n \rangle$, die
 $c(v_{\sigma(n)}, v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(i+1)})$ minimiert.

Problem: Es gibt $2^{n-1} - 1$ solcher Schnitte!

Variable:

Zielfunktion:

Nebenbedingungen:



Für $uv \in E(G)$ sei $x_{uv} \in \{0, 1\}$.

Minimiere $\sum_{uv \in E(G)} c(u, v) \cdot x_{uv}$

für jeden Knoten $v \in V(G)$:

$$\sum_{u \in \text{Adj}[v]} x_{uv} = 2$$

für jeden Schnitt $(S, V \setminus S)$ mit $\begin{cases} v_1 \in S \\ S \neq V(G) \end{cases}$

$$\sum_{u \in S, v \in V(G) \setminus S} x_{uv} \geq 2$$

Bsp. III: ILP-Formulierung für TSP

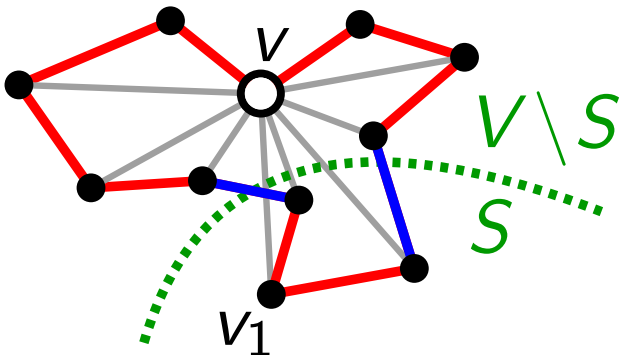
- Lösung:**
- Stelle Formulierung nur mit Knotenbedingungen auf.
 - Löse Formulierung (★) mit ILP-Solver (Cplex o.ä.)
 - Solange Lösung aus mehreren Kreisen besteht:
 - Für jeden Kreis K
füge Schnittbed. für $(K, V(G) \setminus K)$ zu (★) hinzu.
 - Fahre mit der Lösung des ILPs fort („Warmstart“).

Problem: Es gibt $2^{n-1} - 1$ solcher Schnitte!

Variable:

Zielfunktion:

Nebenbedingungen:



Für $uv \in E(G)$ sei $x_{uv} \in \{0, 1\}$.
 Minimiere $\sum_{uv \in E(G)} c(u, v) \cdot x_{uv}$
 für jeden Knoten $v \in V(G)$:

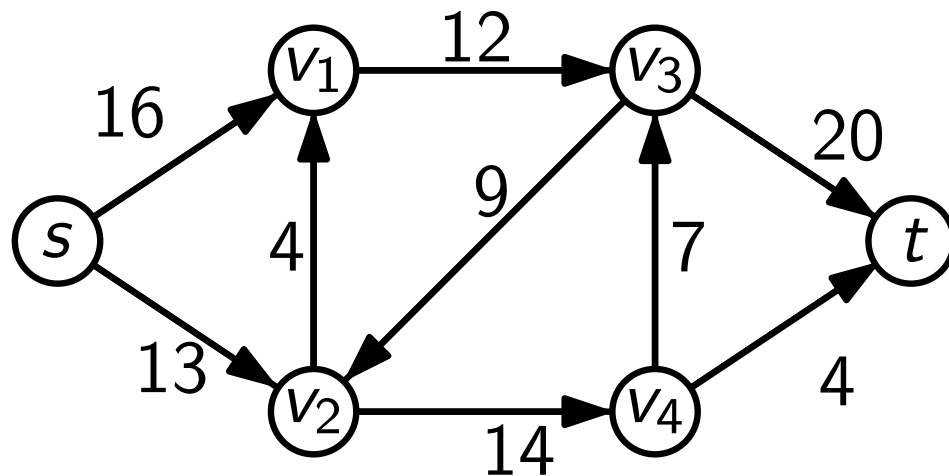
$$\sum_{u \in \text{Adj}[v]} x_{uv} = 2$$

für jeden Schnitt $(S, V \setminus S)$ mit $\begin{cases} v_1 \in S \\ S \neq V(G) \end{cases}$

$$\sum_{u \in S, v \in V(G) \setminus S} x_{uv} \geq 2$$

Bsp. IV: Ein Transportproblem

Ihre Firma möchte eine möglichst große Menge einer Ware von ihrem Lager s zu einem Kunden am Zielort t transportieren. Aufgrund bestehender Transport-Kapazitäten kann nur eine begrenzte Menge der Ware pro Transportabschnitt (Kante) transportiert werden. Welche Menge pro Tag können Sie zum Großkunden senden?



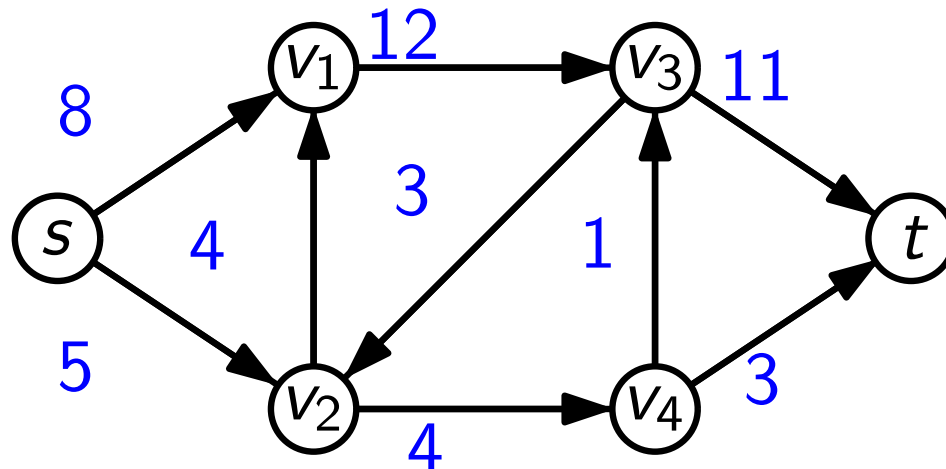
Modellierung durch Flüsse

Def. Sei G ein gerichteter Graph mit $s, t \in V(G)$.
 Eine Funktion $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **s - t -Fluss** („Fluss“),
 wenn für jeden Knoten $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$ gilt

Fluss-
erhal-
tung

$$\underbrace{\sum_{\{u \in V(G) : v \in \text{Adj}[u]\}} f(uv)}_{\text{Zufluss}_f(v)} - \underbrace{\sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw)}_{\text{Abfluss}_f(v)} = 0.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Nettozufluss}_f(v)}$



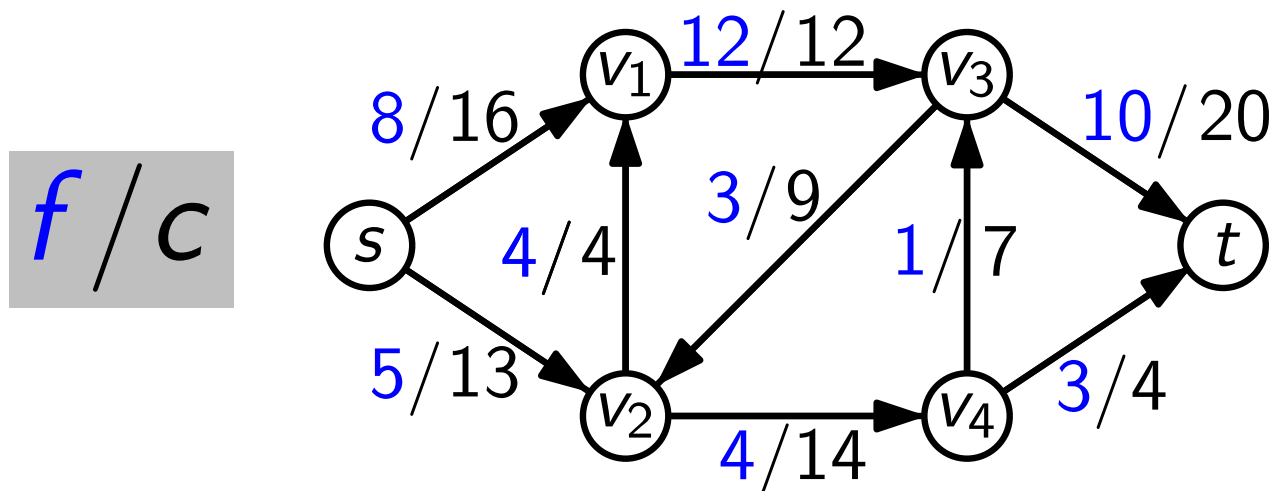
Zulässige und maximale Flüsse

Def. Sei G ein gerichteter Graph mit $s, t \in V(G)$.
 Seien durch $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ Kantenkapazitäten^{*} gegeben. Ein Fluss f ist *zulässig*, wenn für jede Kante e von G gilt

$$0 \leq f(e) \leq c(e).$$

Der *Wert* $|f|$ eines zulässigen Flusses f ist
 $\text{Nettozufluss}_f(t)$.

Ein zulässiger Fluss f ist *maximal*,
 wenn für jeden zulässigen Fluss f' gilt $|f'| \leq |f|$.



^{*}) Diese Funktion hat nichts mit dem Zielfunktionsvektor bei den LPs zu tun!

Aufgabe

YES, it's an LP!

Gegeben sei ein gerichteter Graph G mit $s, t \in V(G)$ und Kantenkapazitäten $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie eine Methode an, die einen **maximalen s - t -Fluss f** konstruiert, also eine Funktion $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die

- den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten $v \notin \{s, t\}$ sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{\{u \in V(G): v \in \text{Adj}[u]\}} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

- zulässig ist, d.h. für jede Kante e von G garantiert:

Konstante

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$ lineare
Beschränkungen!

- maximal ist, d.h. unter allen zulässigen s - t -Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

lineare
Zielfunktion!

Flussalgorithmen

Kann man maximale Flüsse (= Spezialfall eines LPs) auch mit maßgeschneiderten kombinatorischen Algorithmen berechnen?

Hoffnung: Das könnte schneller gehen –
und strukturelle Einsichten liefern.

Fortsetzung folgt!