Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität
Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

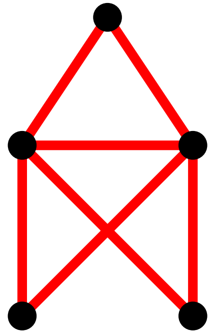
1. Vorlesung

Rundreiseprobleme: Teil I – Eulerkreise

Lehrstuhl für Informatik I
Alexander Wolff

Übersicht

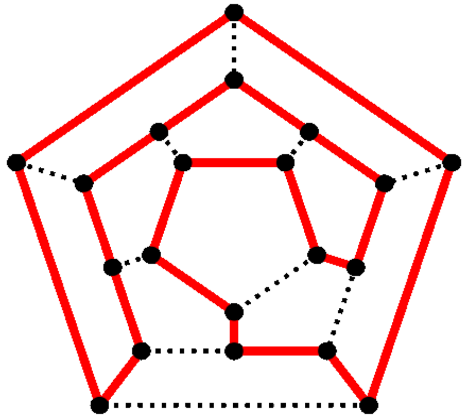
I) Eulerkreise



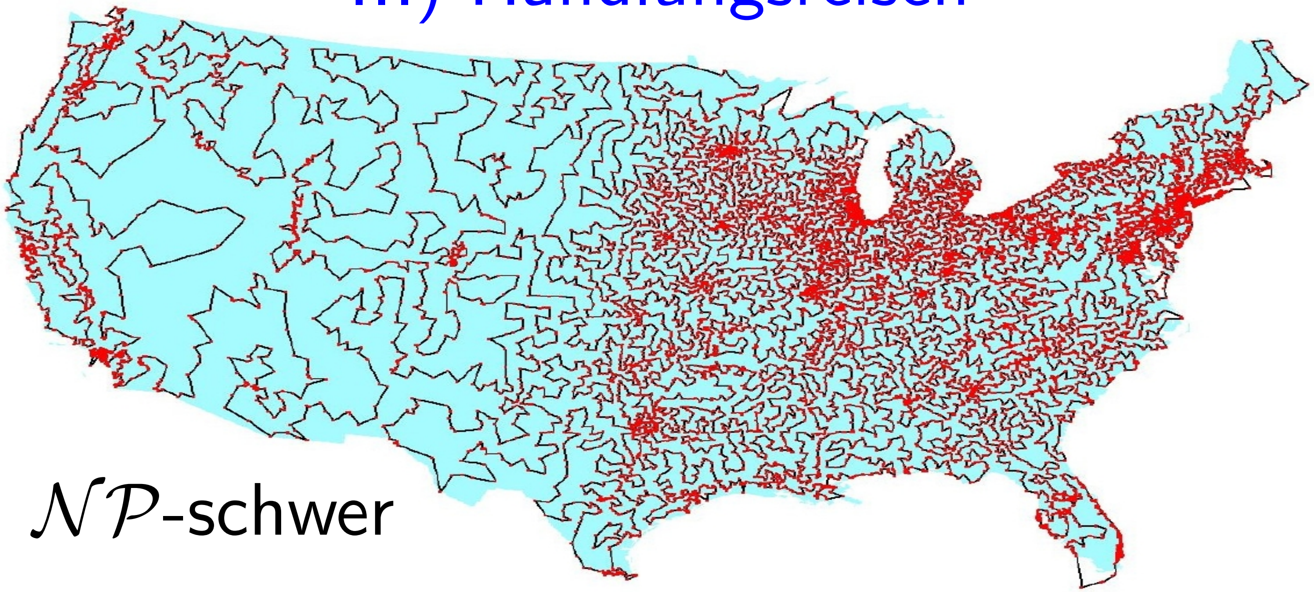
$\mathcal{P}$

II) Hamiltonkreise

$\mathcal{NP}$-schwer



III) Handlungsreisen



$\mathcal{NP}$-schwer

I) Eulerkreise

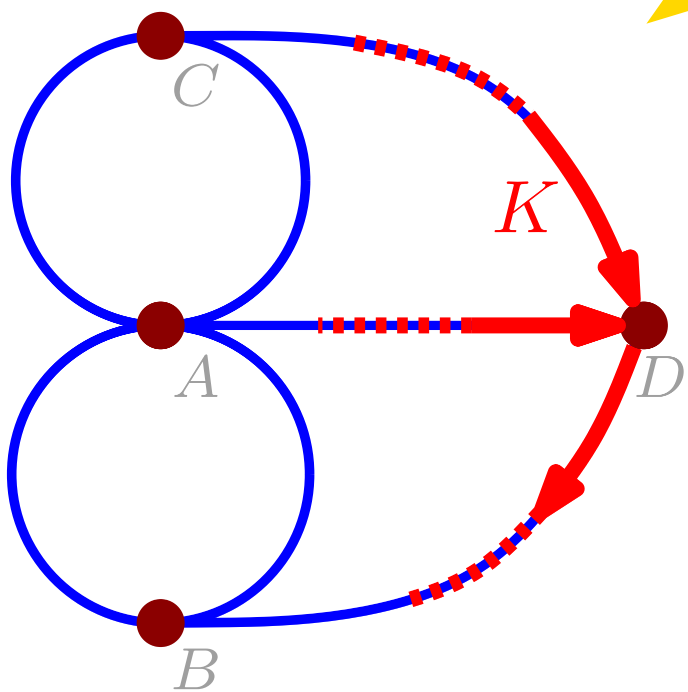
Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
Ein *Eulerkreis* (*-weg*) in G ist ein Kreis (Weg), der jede Kante genau einmal durchläuft.

Ein Graph heißt *eulersch*, falls er einen Eulerkreis enthält.

Geburtsstunde der Graphentheorie!

Königsberger Brückenproblem [Euler, 1741]

Basel 1707 – St. Petersburg 1783



Angenommen ja.

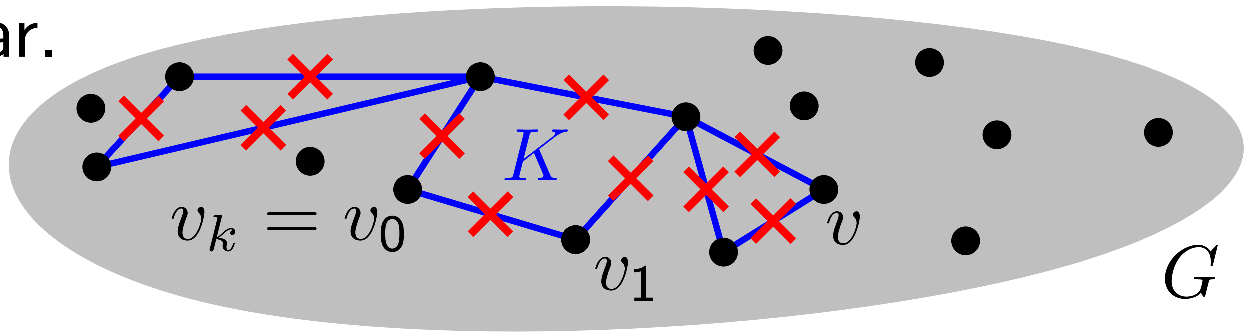
$\Rightarrow$ Es gibt einen Eulerkreis K.

Aber $\deg(D) = 3$, also ungerade.

Satz von Euler für ungerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ungerichteter und zshg. Graph. Dann gilt:
G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad.

Beweis. „$\Rightarrow$“ klar.



„$\Leftarrow$“ Sei $v_0 \in V(G)$. Wähle einen Nachb. $v_1 \in \text{Adj}[v_0]$.

Markiere die Kante v_0v_1 als gebraucht.

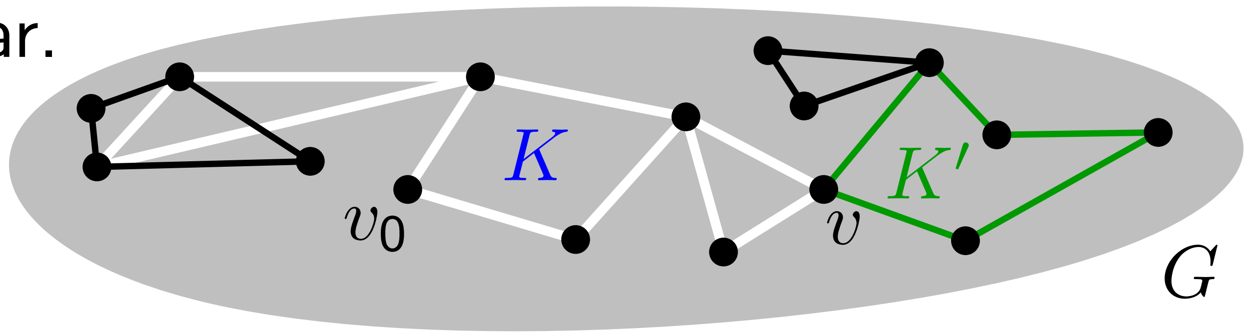
Wiederhole diesen Schritt, bis aktueller Knoten v_k nur noch zu gebrauchten Kanten inzident ist.

Alle Knotengrade gerade $\Rightarrow$ $v_k = v_0$, d.h.
$K := \langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ ist Kreis.
$\Rightarrow$ in $(V(G), E(K))$ haben alle Knoten ger. Grad.

Satz von Euler für ungerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ungerichteter und zshg. Graph. Dann gilt:
G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad.

Beweis. „$\Rightarrow$" klar.



„$\Leftarrow$" Im Restgr. $(V(G), E \setminus E(K))$ haben alle Knoten geraden Grad – aber er muss nicht zshg. sein!

Beweis konstruktiv. Laufzeit der Konstruktion?

Durchlaufe K noch einmal.

Wenn ein Knoten $v \in K$ noch eine unbenutzte Kante besitzt, finde einen neuen Kreis K' von v zu v und füge ihn in K ein.

Durchlaufe weiter den neuen Kreis K (bis v_0). $\square$

Eulerkreis, ganz schnell

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zshg. Graph.

(i) Man kann in $O(E)$ Zeit testen, ob G eulersch ist.

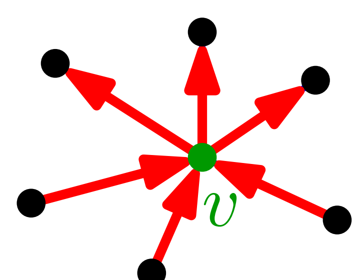
(ii) Falls G eulersch ist, so kann man in $O(E)$ Zeit einen Eulerkreis finden.

Beweis. (ii) Implementiere den Beweis des Satzes von Euler.

Trick: Verwalte in jedem Knoten v einen Zeiger curr$[v]$, der auf den ersten Nachbarn w zeigt mit vw unbenutzt; falls alle zu v inzidenten Kanten benutzt sind, sei curr$[v] = nil$.

Beispiel:

Anzahl der Änderungen von curr$[v] = $ deg(v)



curr$[v]$ $= nil$

Gesamtanzahl der Zeigeränderungen $= \sum_{v \in V(G)}$ deg(v) $= 2|E(G)|$ $\square$

Eulerkreis, ganz schnell (Forts.)

Die Verwendung der curr-Zeiger stellt sicher, dass wir in jedem Knoten in *amortisiert konstanter* Zeit den “Ausgang” finden.

Das bedeutet, dass unser Aufwand für den ersten Kreis K proportional zur Länge $|K|$ von K ist.

Aber falls $K \neq E(G)$, wie finden wir schnell einen Knoten in K, der inzident zu nicht-markierten Kanten ist?

Dazu verwalten wir in jedem Knoten v ein *Flag* v.*erledigt*, das auf *wahr* gesetzt wird, wenn die letzte zu v inzidente Kante markiert wird.

Wenn also $K \neq E(G)$, dann gehen wir mit einem neuen Zeiger z (beginnend mit v_0) durch K, bis wir den ersten noch nicht erledigten Knoten finden.

Eulerkreis, ganz schnell (Forts.)

Dort finden wir den nächsten Kreis K', fügen ihn in K ein und bewegen dann unseren Zeiger bis zum nächsten noch nicht erledigten Knoten weiter – bis $K = E(G)$.

Im Laufe der Zeit geht der Zeiger z durch K, bis er wieder beim Startknoten v_0 ist, also genau $1\times$ über jede Kante.

Aufwand für das Vorrücken des Zeigers z:	$O(E)$
Aufwand für die Aufrechterhaltung der erledigt-Flags:	$O(V)$
Extraaufwand (außer der Konstruktion von K):	$O(E)$

Bem. In zusammenhängenden Graphen gilt $|E| \geq |V| - 1$, also $O(V) \subseteq O(E)$. $\square$

Satz von Euler für gerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ~~un~~gerichteter $\overbrace{\text{und zshg.}}^{\text{schwach}}$* Graph. Dann:

G eulersch $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{für jeden Knoten } v \text{ gilt: } \operatorname{indeg}(v) = \operatorname{outdeg}(v).}$

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ~~un~~gerichteter $\overbrace{\text{und zshg.}}^{\text{schwach}}$ Graph.

(i) Man kann in $O(E)$ Zeit testen, ob G eulersch ist.

(ii) Falls G eulersch ist,
so kann man in $O(E)$ Zeit einen Eulerkreis finden.

Beweis. Im Prinzip wie im ungerichteten Fall.

Man muss einen curr-Zeiger allerdings nur dann weiterrücken, bevor man die aktuelle Kante benutzt.

Kosten fürs Zeigerbewegen: $\sum_{v \in V} \operatorname{outdeg}(v) = |E|$. $\square$

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2025

1. Vorlesung

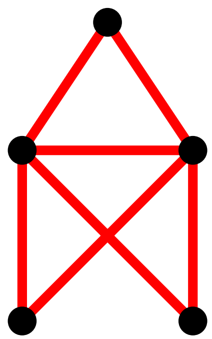
Rundreiseprobleme: Teil II – Hamiltonkreise

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Übersicht

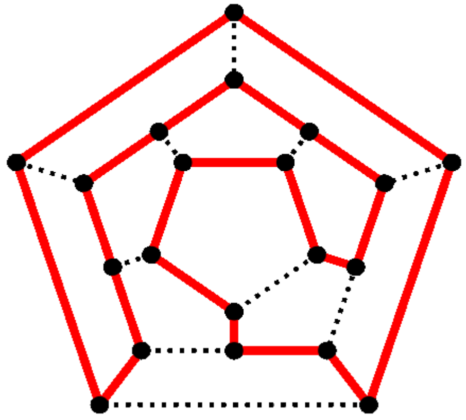
I) Eulerkreise



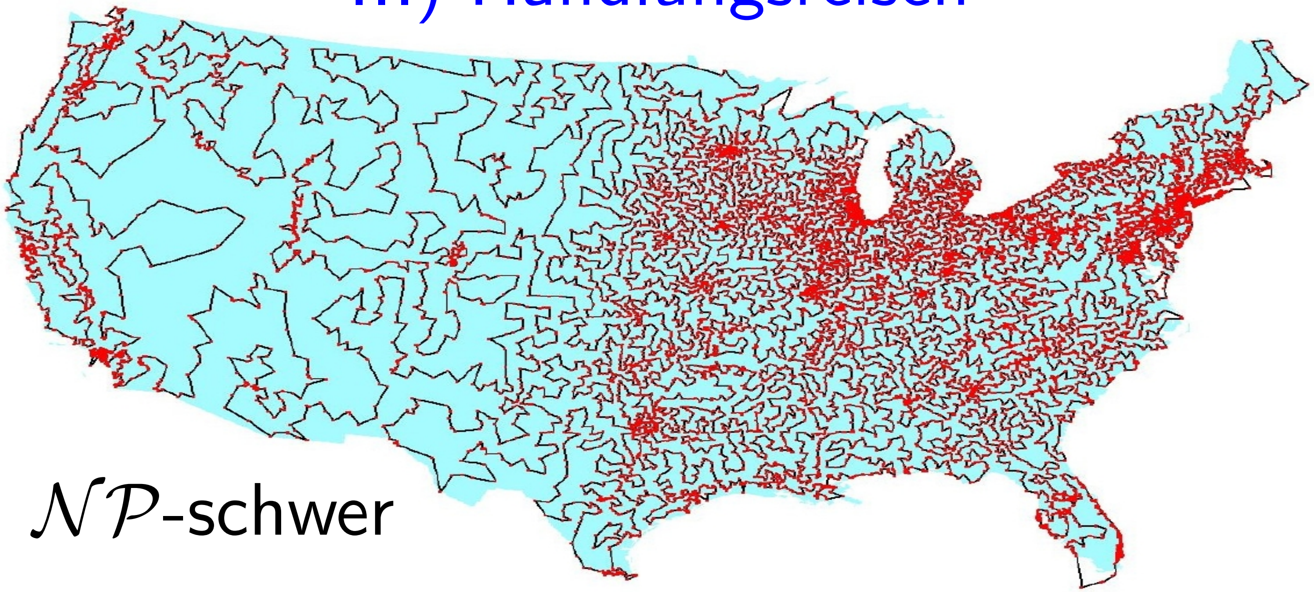
$\mathcal{P}$

II) Hamiltonkreise

$\mathcal{NP}$-schwer



III) Handlungsreisen



$\mathcal{NP}$-schwer

II) Hamiltonkreise

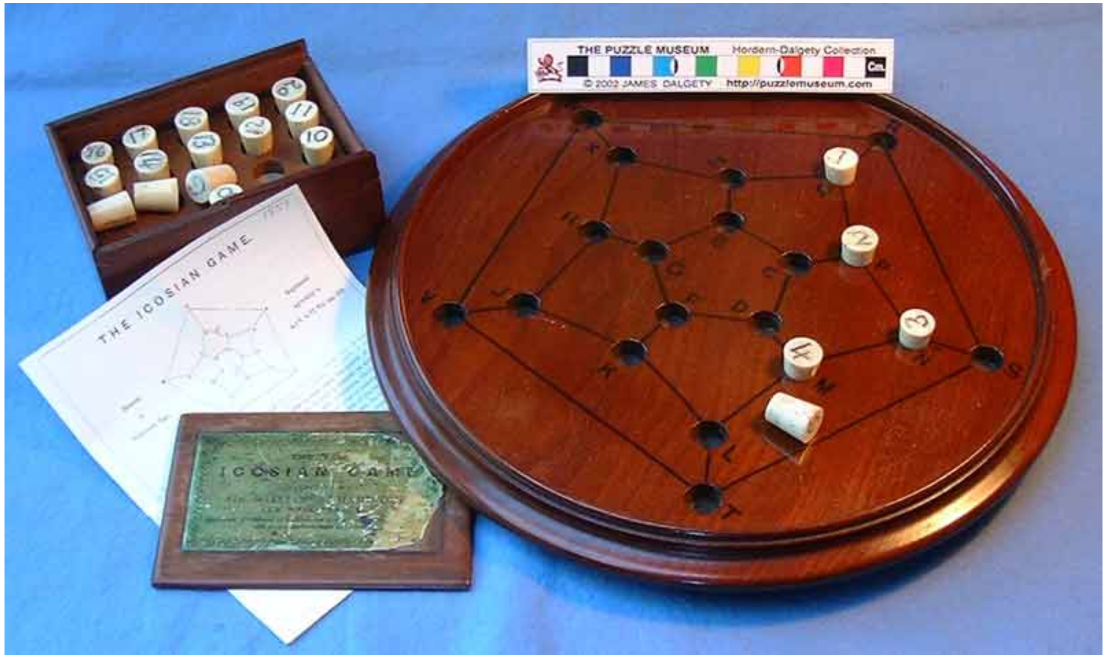
Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
Ein *Hamiltonkreis* (*-weg*) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden *Knoten* genau einmal durchläuft.

Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen Hamiltonkreis enthält.

Sir William Rowan Hamilton

1805 Dublin – 1865 Dunsink

Icosian Game / Traveller's Dodecahedron

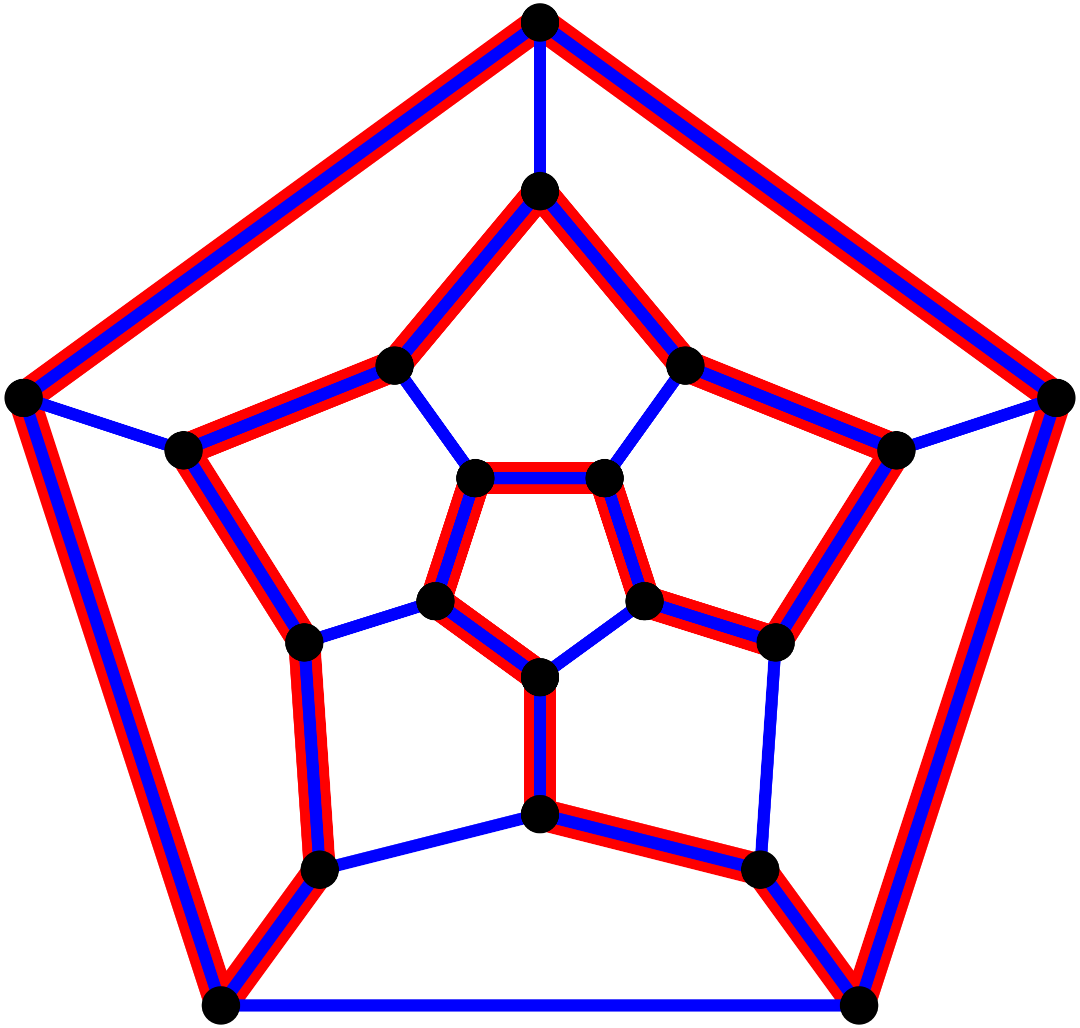


(c) 2002 James Dalgety, The Puzzle Museum

A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

Antwort: Ja!



Die Skelette der vier anderen platonischen Körper auch.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
– „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* hinreichende *Bedingungen* dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

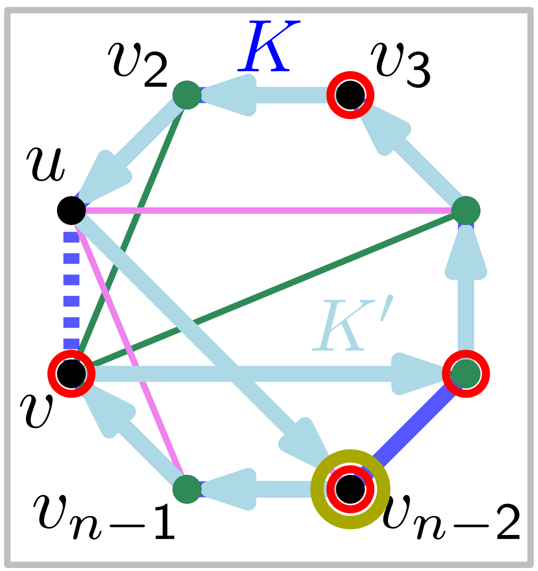
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \iff G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \;\Rightarrow\; |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$

Satz von Dirac

Satz. [Chvátal & Bondy]
Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch } \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Kor. Sei G ein ungerichteter Graph mit $n := |V(G)| \geq 3$. Falls jeder Knoten von G Grad $\geq n/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Beweis. Probieren Sie's!