Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2024/25

25. Vorlesung

Leichte Kreise in Graphen

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Kürzeste Kreise – Verschiedene Settings

– Gewichteter und ungewichteter Fall

– Gerichteter und ungerichteter Fall

Beispiel: Sei G ein ungewichteter und ungerichteter Graph.

(O.B.d.A. ist G zusammenhängend, sonst verarbeite jede Zusammenhangskomponente separat.)

Für einen Knoten s liefert BFS(G, s) für jede Nicht-Baumkante $\{u, v\}$ einen Kreis der Länge $d(s, u) + d(s, v) + 1$. Sei C_s der kürzeste unter diesen.

Dann ist C_s ein kürzester Kreis durch s. – Warum??

Der kürzeste der Kreise in der Menge $\{C_s \mid s \in V(G)\}$ ist ein kürzester Kreis in G.

Laufzeit: $|V| \cdot O(V + E) = O(VE)$ (Da G zusammenhängend, gilt $|E| \geq |V| + 1$.)

Minimales durchschnittliches Kantengewicht

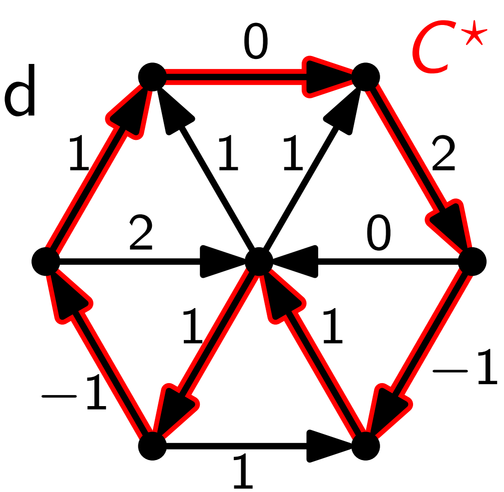
Sei G ein gerichteter Graph (ohne Schleifen) mit beliebigen Kantengewichten $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$. Sei $n = |V(G)|$.

Für einen gerichteten Kreis $C = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$ ($k \geq 2$) sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$$

sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$\mu^\star = \mu(C^\star) = \frac{3}{7}$



Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteter Kreise in G und

$$\mu^\star = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).

Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis $C^\star$ mit $\mu(C^\star) = \mu^\star$, d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)

$\mu_{\text{min}} = \infty$

foreach $C = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$ **do**

  $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$

  if $\mu < \mu_{\text{min}}$ **then**

    $\mu_{\text{min}} = \mu$

    $C' = C$

return C'

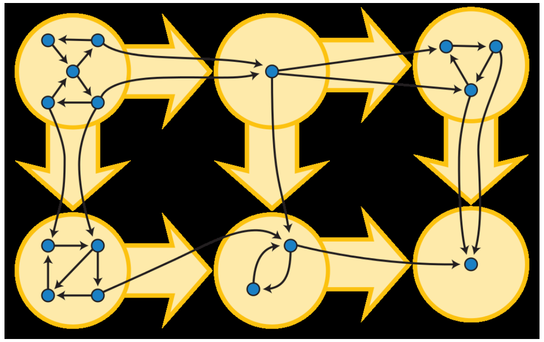
Laufzeit? *Mindestens exponentiell in* $|V|$ *:-(*

höchstens exponentiell in $|E|$

Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass G *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten u-v-Weg.

Ansonsten zerlegen wir G in seine starken Zusammenhangskomponenten (wie?*) und betrachten jede separat.



Sei s ein beliebiger Knoten von G.

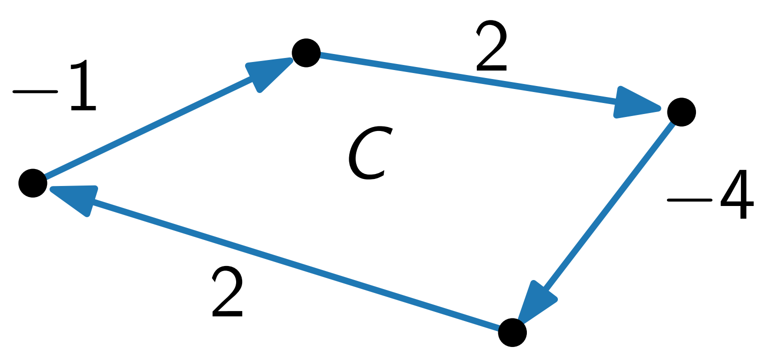
Sei $\delta(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten (leichtesten) s-v-Wegs.

Für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ sei $\delta_k(s, v)$ das Gewicht eines kürzesten s-v-Wegs, der aus *genau* k Kanten besteht (sonst ∞).

*) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component)

Schritt I

Zeige: Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt:
1. G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2. Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s, v) = \min_{0 \le k \le n-1} \delta_k(s, v)$. ✓



Beweis.

1. Angenommen es gäbe einen Kreis C mit $w(C) < 0$.
   $\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^\star < 0$ $\lightning$
2. Betrachte s-v-Weg π mit $k > n - 1$ Kanten.
   $\Rightarrow \pi$ enthält Kreis C. Aber $w(C) \geq 0$. $\Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$
   $\Rightarrow$ Es gibt einen kürzesten s-v-Weg mit $\leq n - 1$ Kanten.

Schritt II

Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt:
– G hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
– Für jeden Knoten v gilt: $\delta(s,v) = \min_{0 \le k \le n-1} \delta_k(s,v)$. (*)

Zeige: Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \ge 0.$$

Beweis: Nach Def. von δ gilt: $\delta_n(s,v) \ge \delta(s,v)$

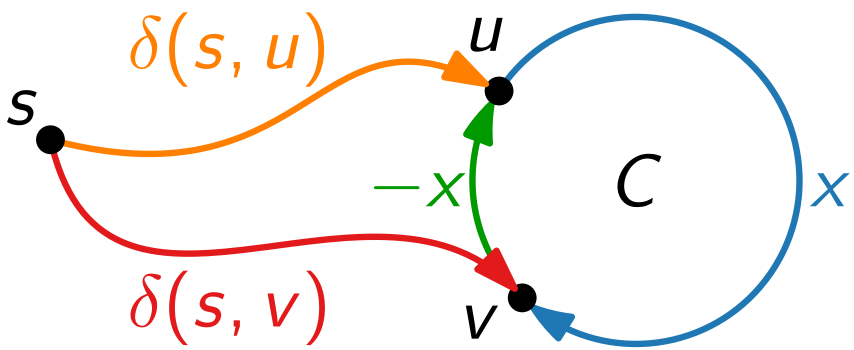
Wegen (*) gilt: $\delta(s,v) = \delta_k(s,v)$ für ein $k \in \{0,\dots,n-1\}$

Also gilt $\delta_n(s,v) \ge \delta_k(s,v)$ für ein $k \in \{0,\dots,n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \le k \le n-1} \delta_n(s,v) - \delta_k(s,v) \ge 0 \underset{n-k>0}{\Rightarrow}$ Beh. $\square$

Schritt III

Sei C ein Kreis mit Gewicht 0. Seien u, v Knoten auf C.
Sei x das Gewicht des Wegs von u nach v auf C.



$w(C) = 0$

Zeige: $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.

Klar: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$.

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von s nach v geben?

Angenommen, es gälte $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$.

$\Rightarrow \quad \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$ ↯ zur Def. von δ. $\square$

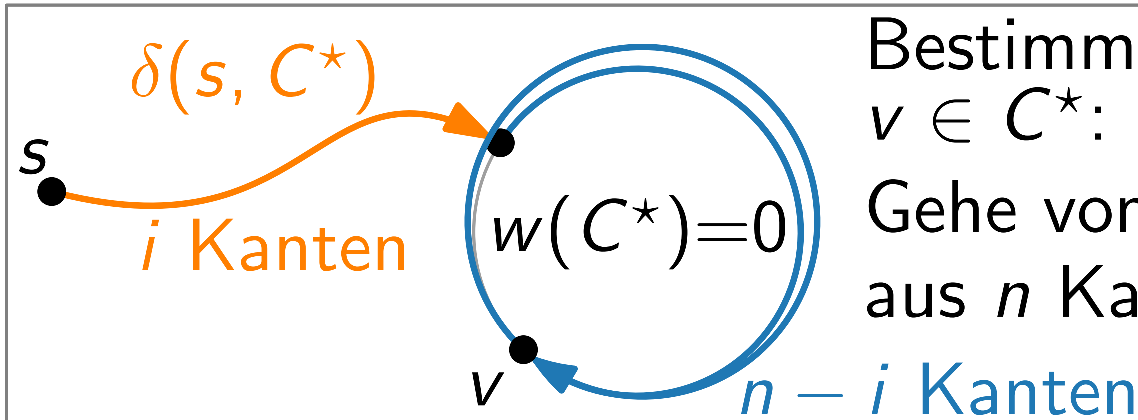
Schritt IV

Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \ge 0.$$

Zeige:
Falls $\mu^\star = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis $C^\star$, so dass

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$



Bestimme $v \in C^\star$:
Gehe von s aus n Kanten.

Schritt III für *dieses* v:
$\Rightarrow \delta_n(s,v) = \delta(s,v)$.
$\Rightarrow \delta_n(s,v) \le \delta_k(s,v)$!!
Aber für welches k gilt

$$\delta_n(s,v) = \delta_k(s,v)?$$

z.B. $k = n - |C^\star|$, denn $w(C^\star) = 0$ und $|C^\star| \le n$.

Schritt V

Falls $\mu^\star = 0$, dann gilt für jeden Knoten v

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \ge 0.$$

Falls $\mu^\star = 0$, dann gibt es einen Knoten v auf dem Kreis $C^\star$, so dass

$$\max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:
Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V(G)} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = \mathbf{0}.$$

Klar...

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:
Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Zeige damit, dass

$$\mu^\star \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t.

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0.$$

Zeige:
Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Zeige damit, dass

$$\mu^\star \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\overbrace{\overbrace{\delta_n(s,v)}^{+nt} - \overbrace{\delta_k(s,v)}^{+kt}}^{+\frac{nt-kt}{n-k} = +t}}{n-k}.$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t. ✓

Schritt VI

Falls $\mu^\star = 0$, dann

$$\left.\min_{v\in V}\ \max_{0\le k\le n-1} \frac{\delta_n(s,v)-\delta_k(s,v)}{n-k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:
Falls wir eine Konstante t zum Gewicht jeder Kante von G addieren, dann steigt $\mu^\star$ um t.

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^\star} \overset{?!}{=} \boxed{\min_{v\in V}\ \max_{0\le k\le n-1} \frac{\overbrace{\underbrace{\delta_n(s,v)}_{+nt} - \underbrace{\delta_k(s,v)}_{+kt}}^{+\frac{nt-kt}{n-k} = +t}}{n-k}} =: \beta(t)$$

Zeige: Rechte Seite steigt dann *auch* um t. ✓

Also: α und β sind *lineare* Fkt. in t mit $\alpha(-\mu^\star) \underset{(**)}{=} \beta(-\mu^\star)$ und Steigung 1 $\Rightarrow$ $\alpha \equiv \beta$. □

Schritt VII

Es gilt

$$\mu^\star \overset{(***)}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \le k \le n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k}.$$

[Karp, 1978]

Satz. Ein Kreis $C^\star$ mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ($\mu(C^\star) = \mu^\star$) lässt sich in $O(VE)$ Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der $\mu^\star$ in $O(VE)$ Zeit berechnet:

- Setze $\delta_0(s,s) = 0$ und, für $v \neq s$, setze $\delta_0(s,v) = \infty$.
- Für $k = 1, \dots, n$ und $v \in V(G)$, berechne in $O(\text{indeg } v)$ Zeit

  $$\delta_k(s,v) = \min_{u\colon uv \in E(G)} \delta_{k-1}(s,u) + w(u,v).$$

  Dies benötigt insgesamt $O(VE)$ Zeit.

  Das ist ein kleines dynamisches Programm! :-)
- Berechne $\mu^\star$ nach (***) in $O(V^2)$ Zeit. $\square$