Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 24: Problem des Handlungsreisenden (TSP) – Approximation & exakte Berechnung

Alexander Wolff

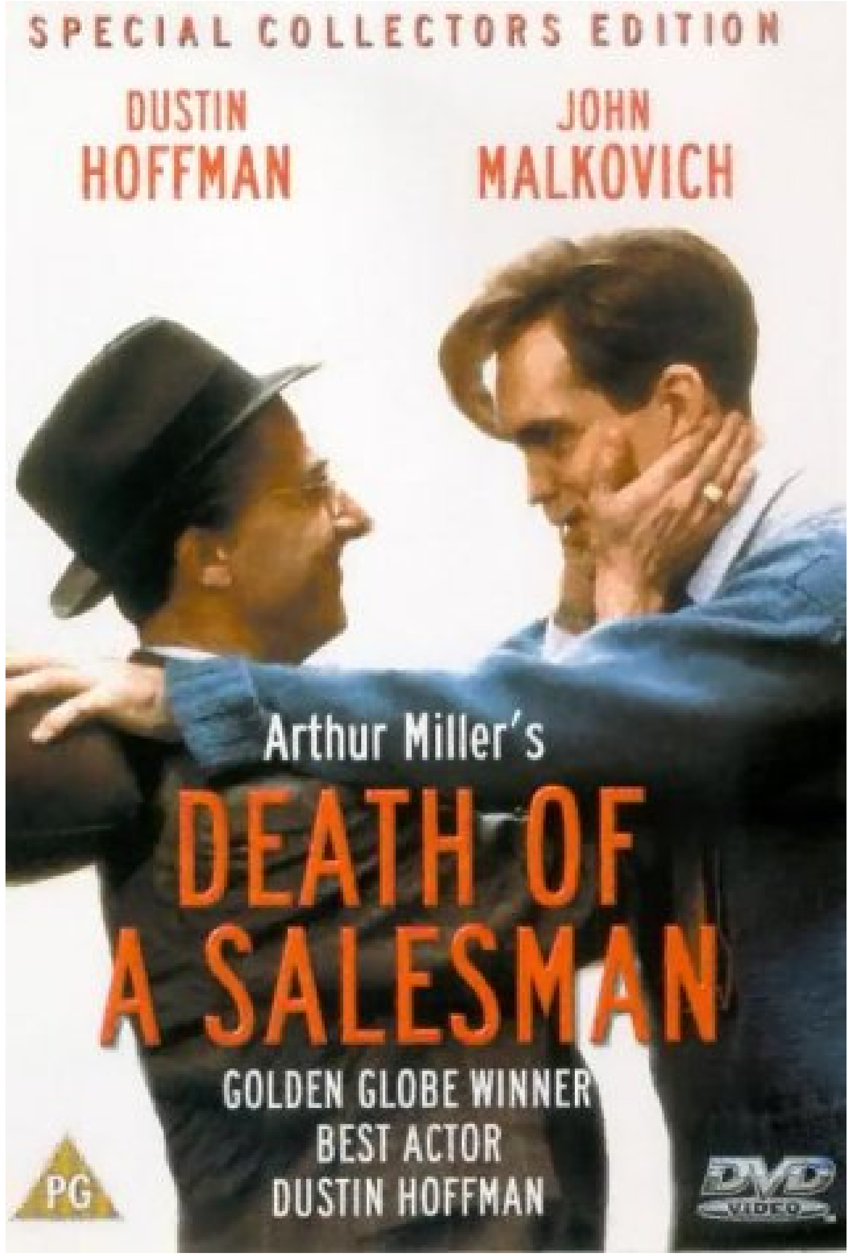
Wintersemester 2024

Letzte Chance!

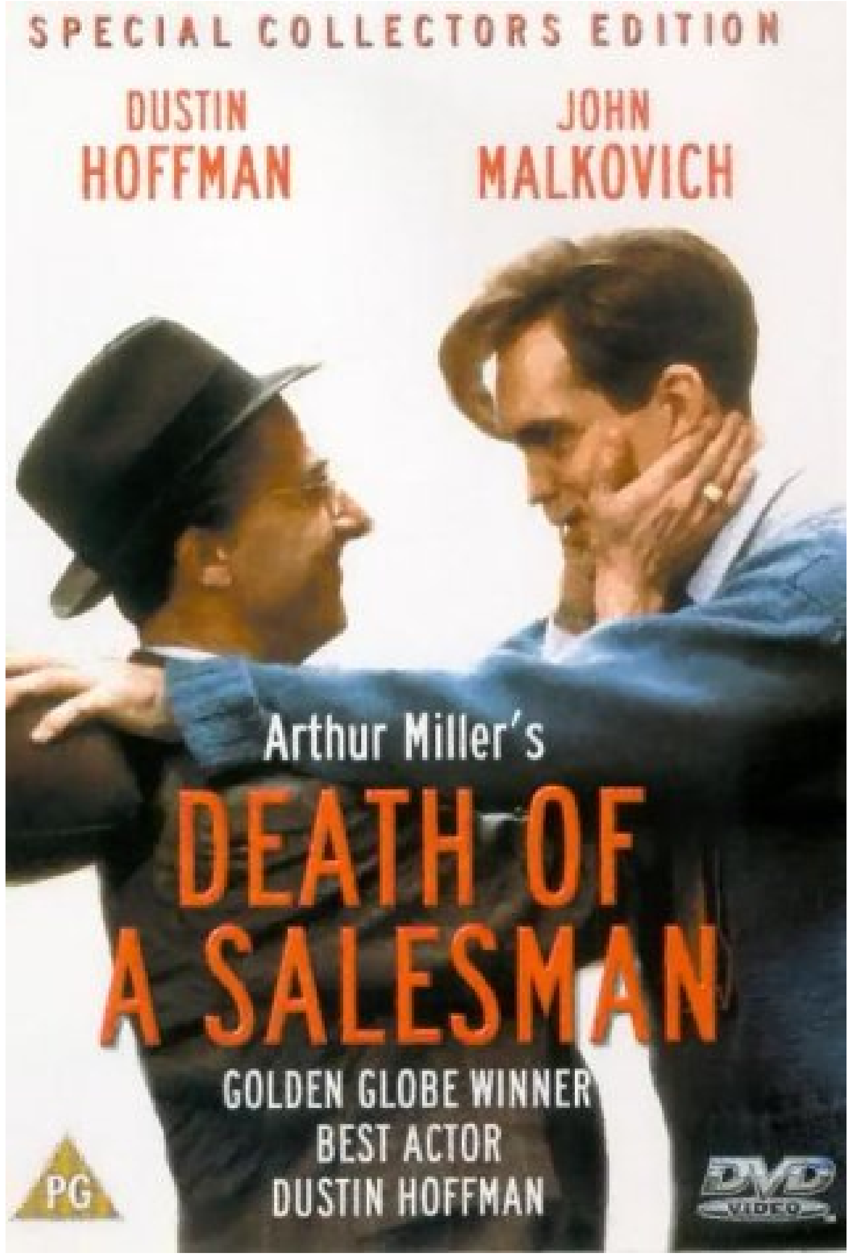
Anmeldung zur Klausur nur bis 31. Januar.

(Aber die Nachklausur ist auch nicht schlecht – mit Repetitorium :-)

Der Handlungsreisende



Der Handlungsreisende



MAINFRANKEN
THEATER
WÜRZBURG

Das Problem

Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

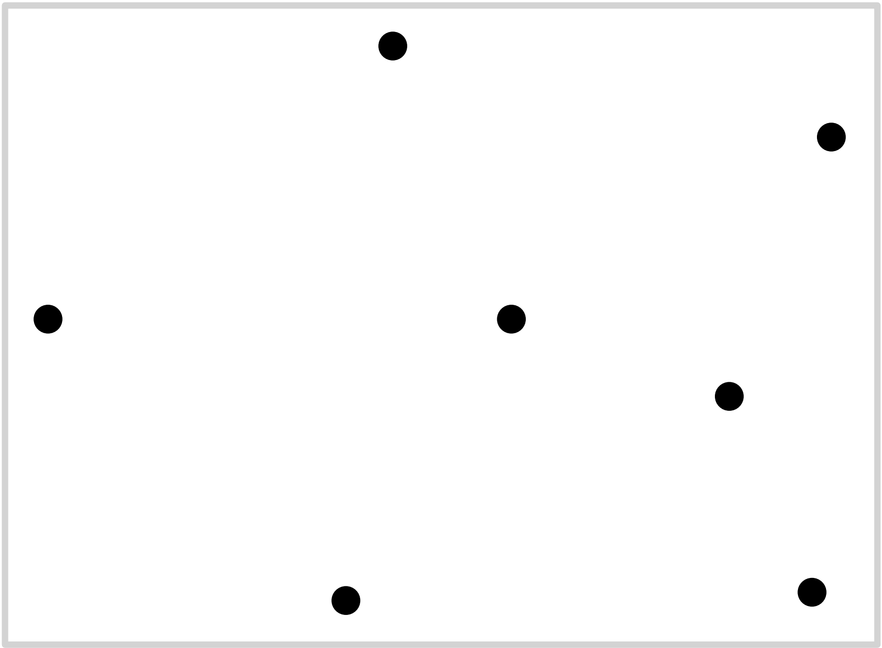
Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c \colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Das Problem

Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$

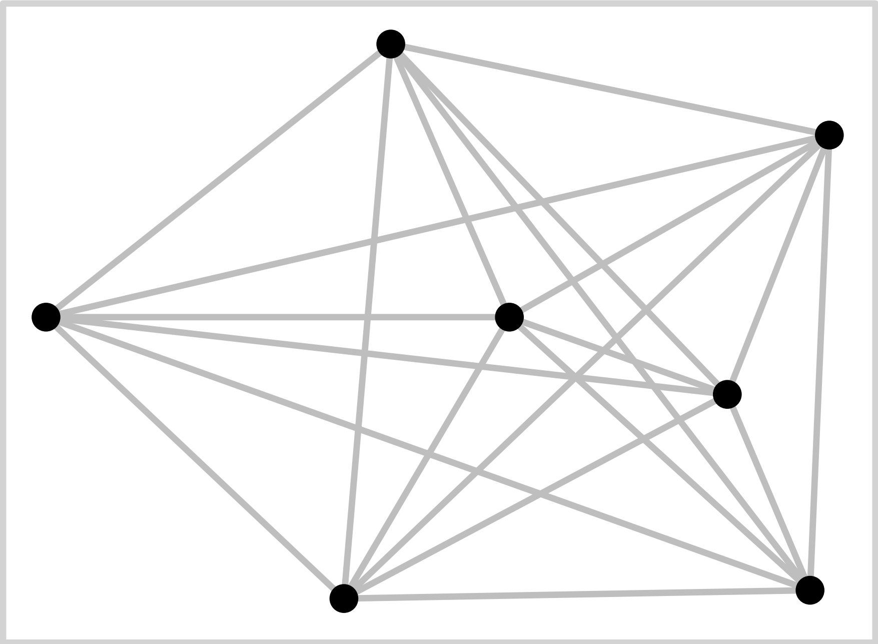


Das Problem

Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c \colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



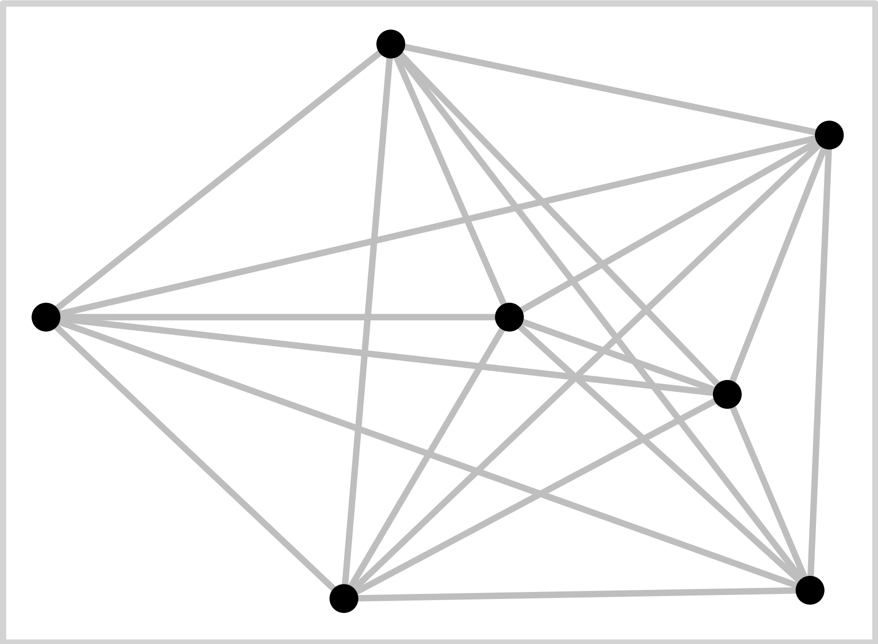
Das Problem

Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c \colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K)$

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



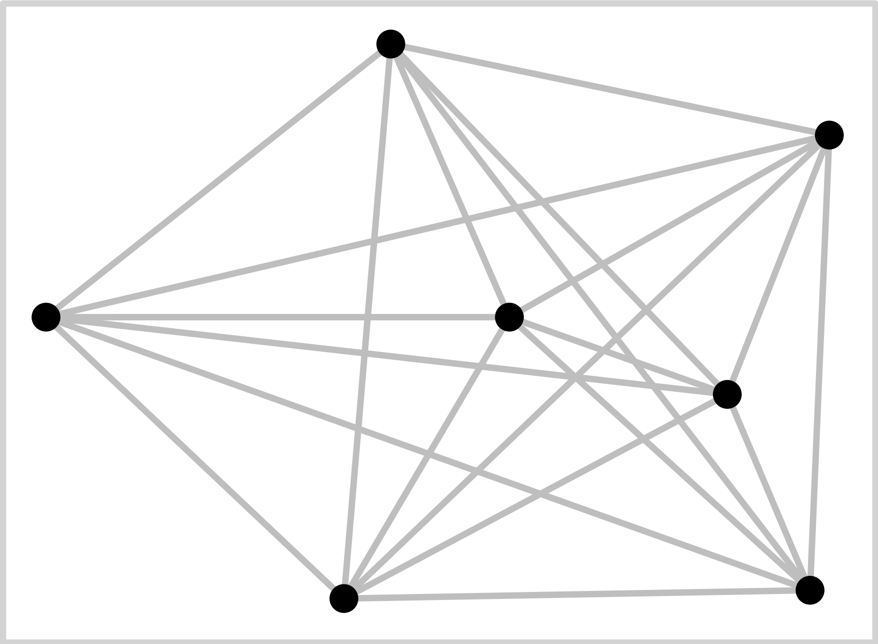
Das Problem

Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

Beispiel. $c \equiv d_{\mathrm{Eukl.}}$



Das Problem

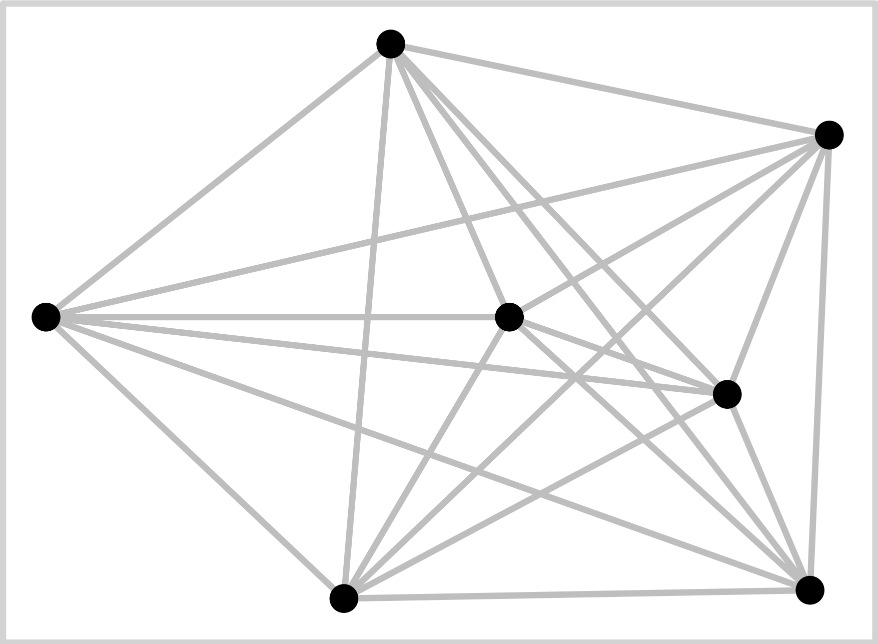
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Das Problem

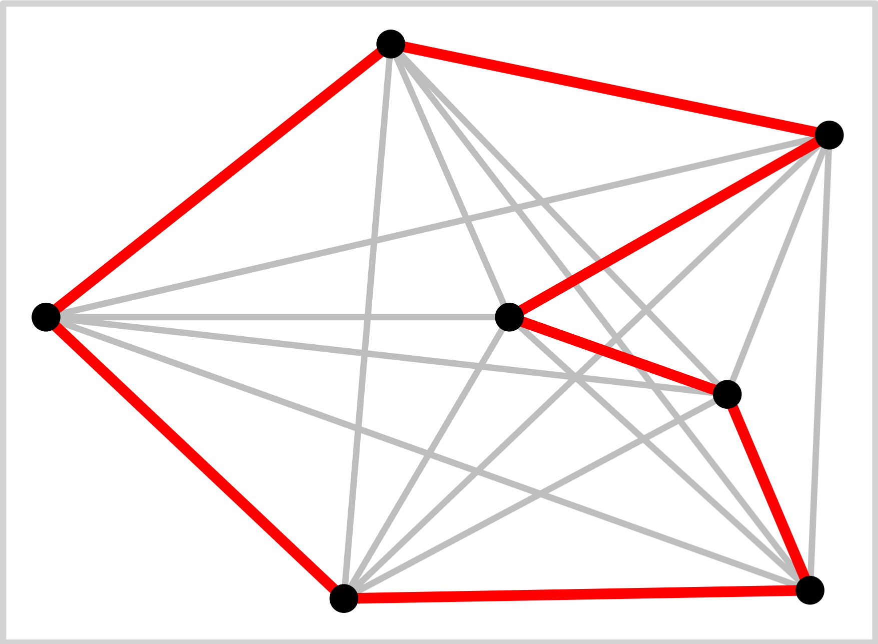
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Das Problem

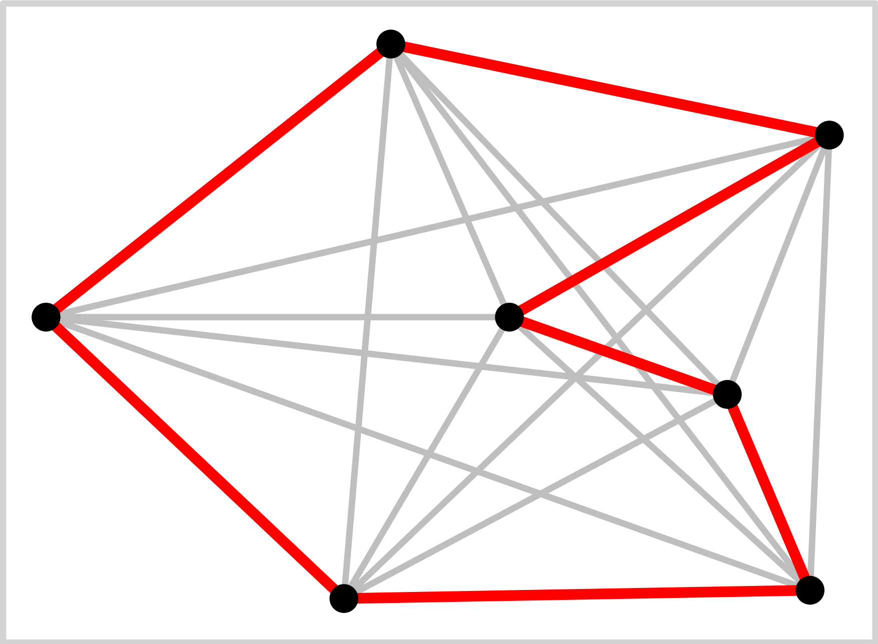
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Problem.

Das Problem

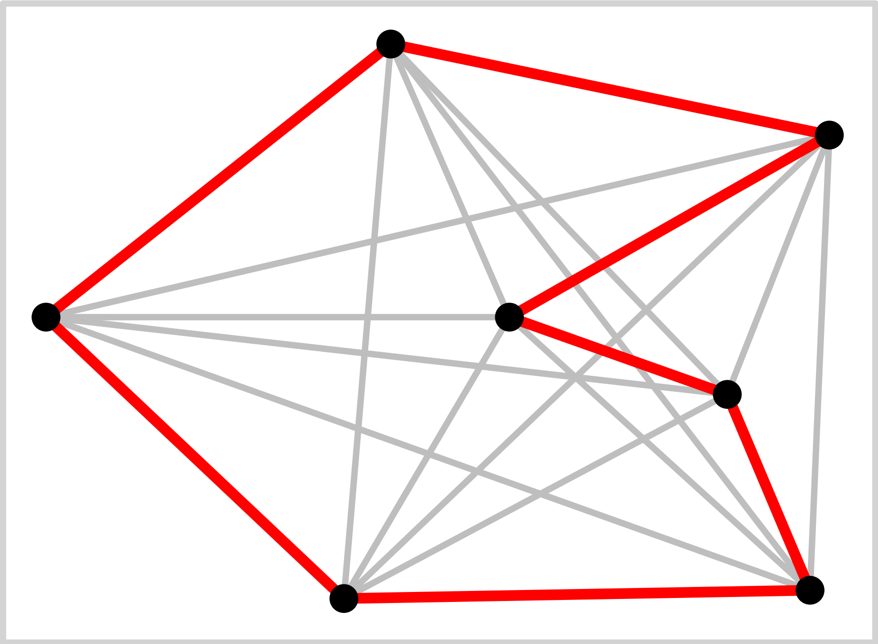
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Problem.

- TSP ist NP-schwer

Das Problem

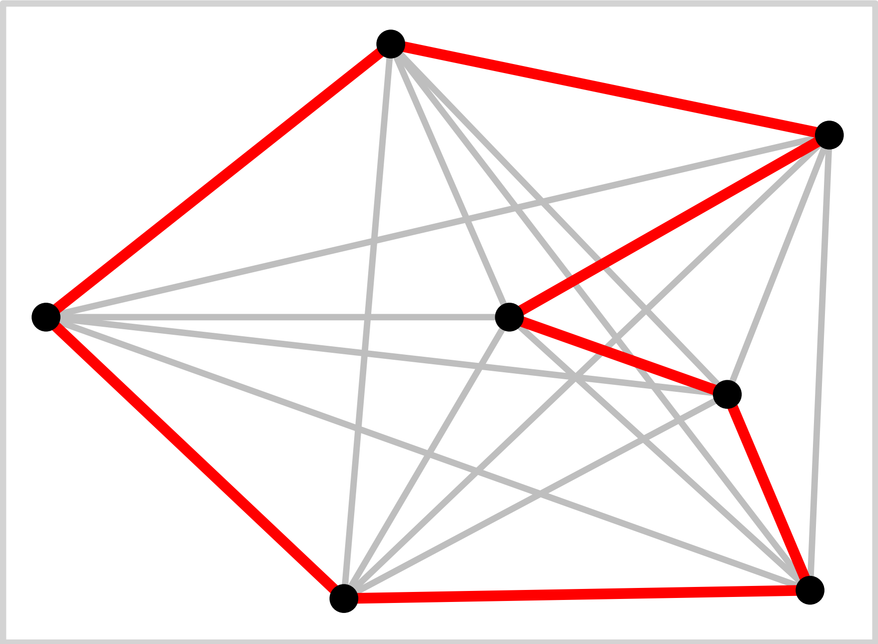
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

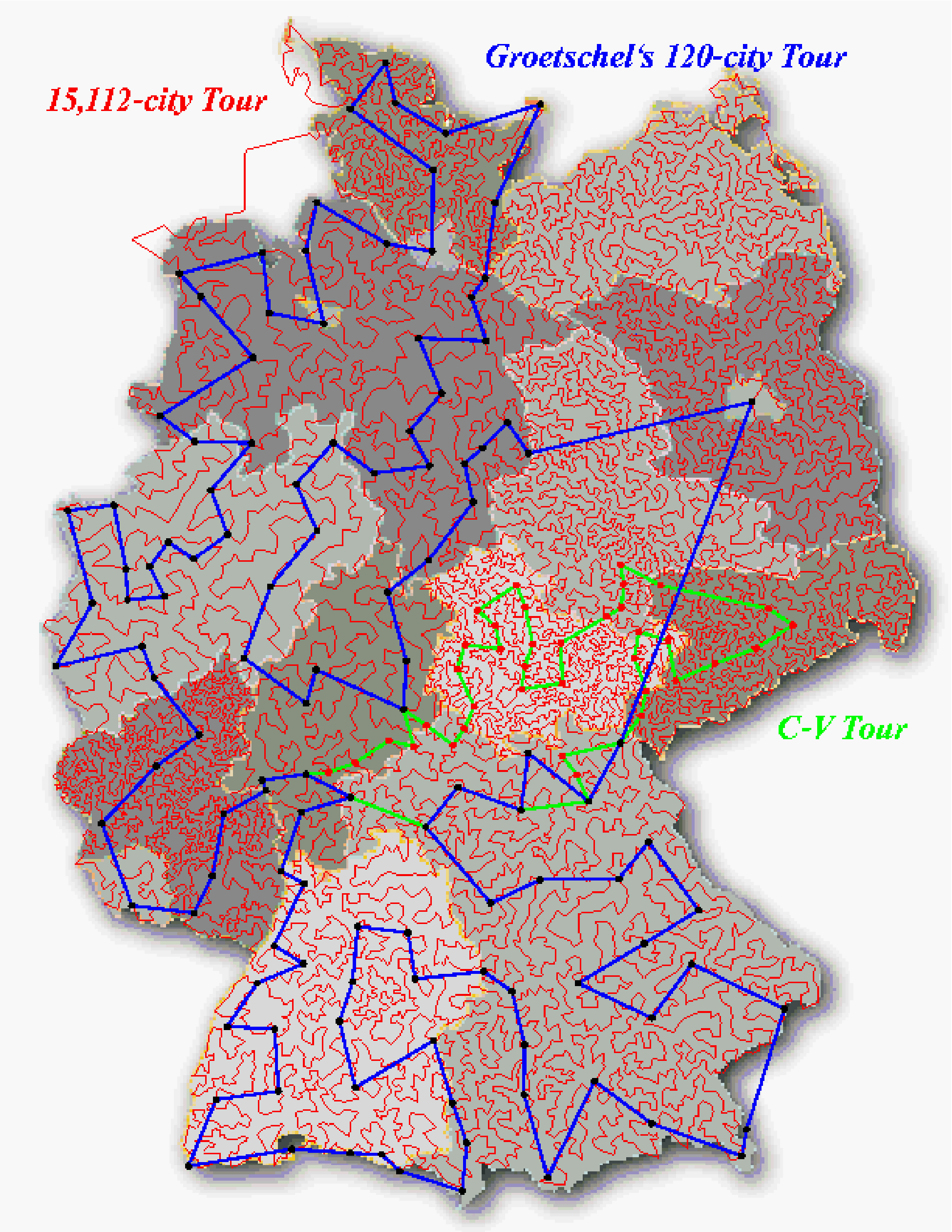
Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Problem.

- TSP ist NP-schwer
- und schwer zu approximieren.

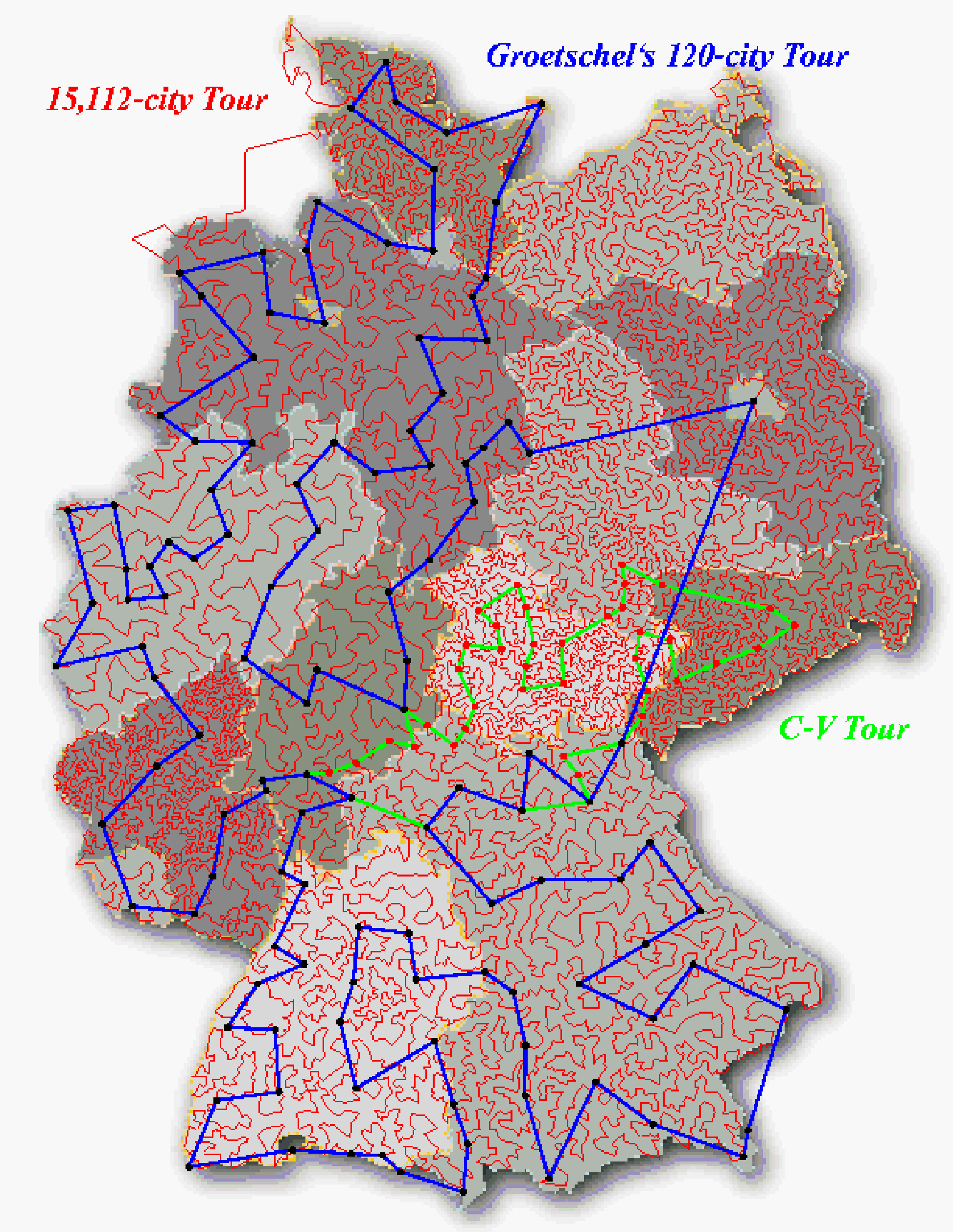
Etwas Geschichte



Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.

Von einem alten Commis-Voyageur [1832]

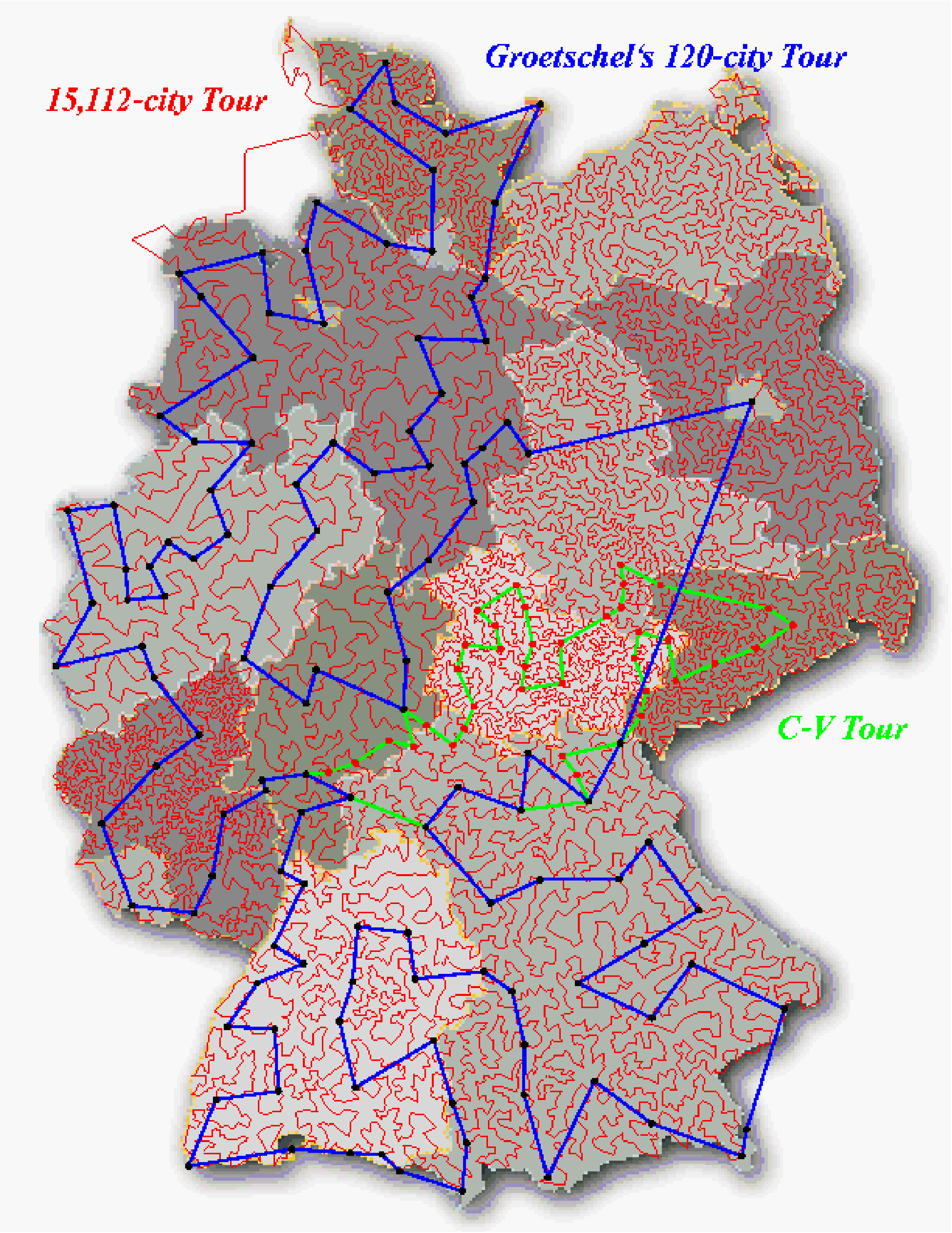


Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.

Von einem alten Commis-Voyageur [1832]

Rekord I: optimale 120-Städte-Tour [Groetschel, 1977]



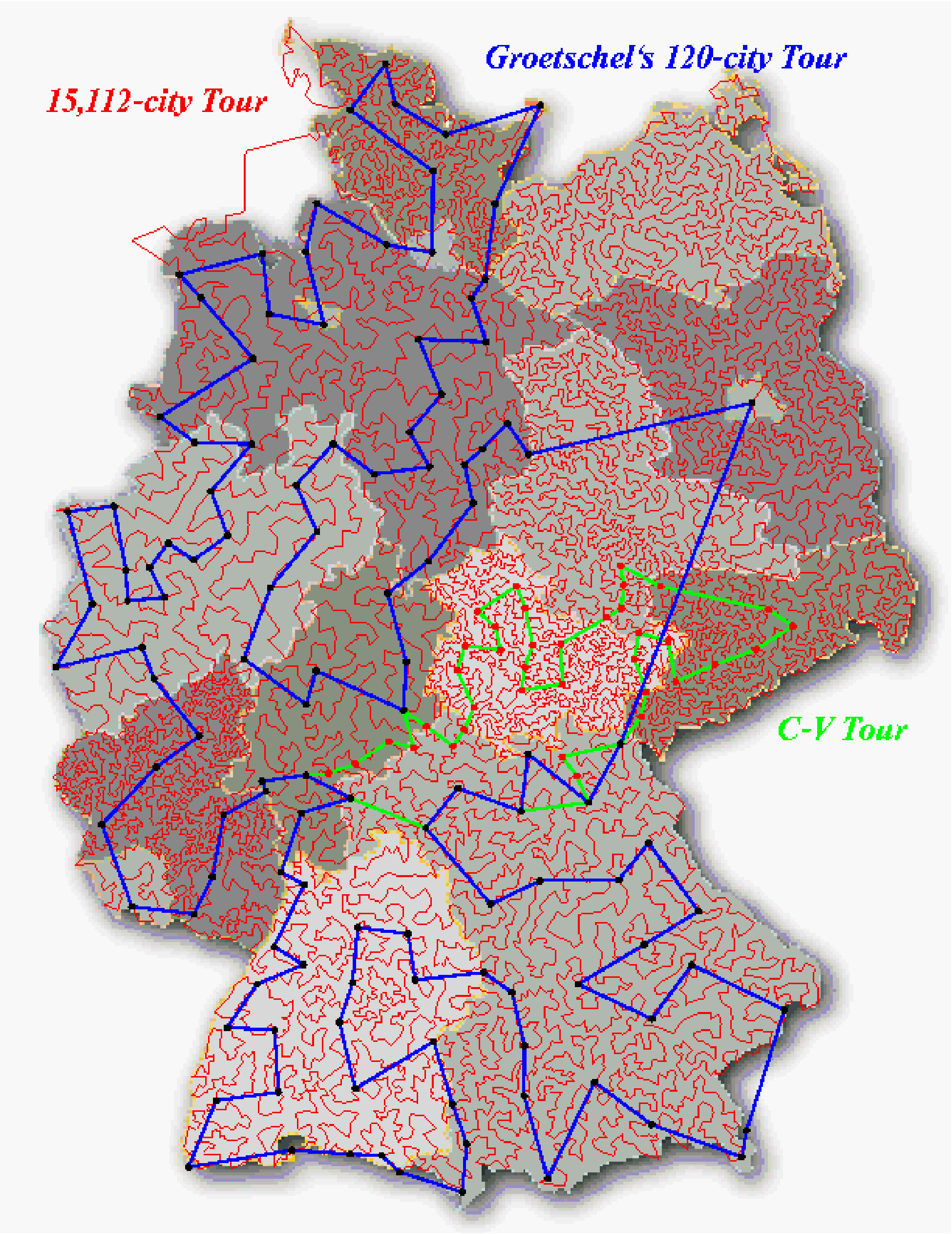
Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.

Von einem alten Commis-Voyageur [1832]

Rekord I: optimale 120-Städte-Tour [Groetschel, 1977]

Rekord II: optimale 15.112-Städte-Tour [Applegate, Bixby, Chvátal, Cook 2001]



Was tun?

Problem: *Traveling Salesperson Problem*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

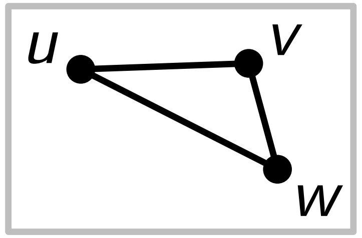
Problem: *Traveling Salesperson Problem*

Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Traveling Salesperson Problem*

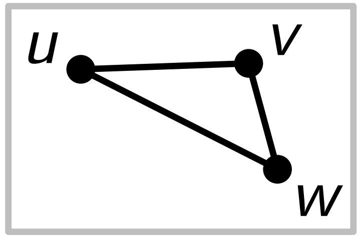


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

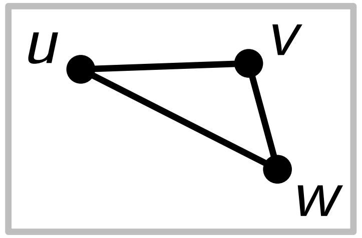


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*



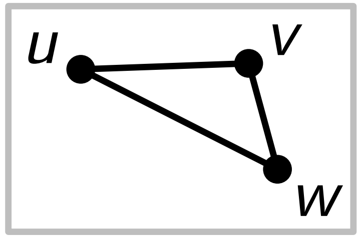
Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

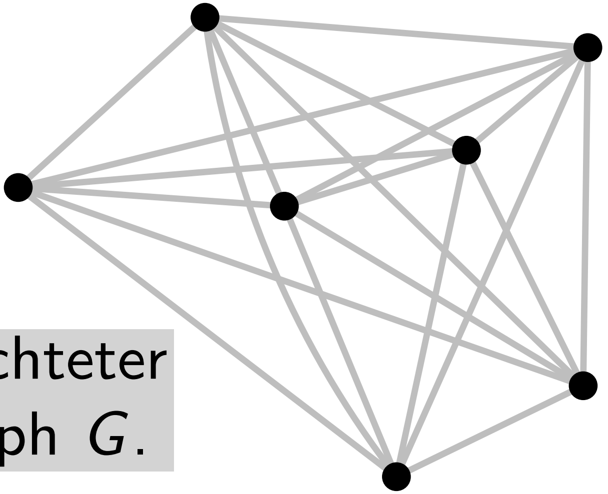


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

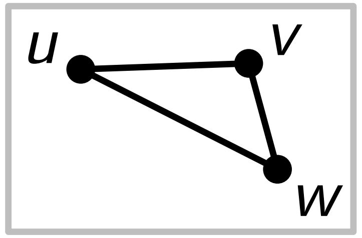
Beweis.



Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

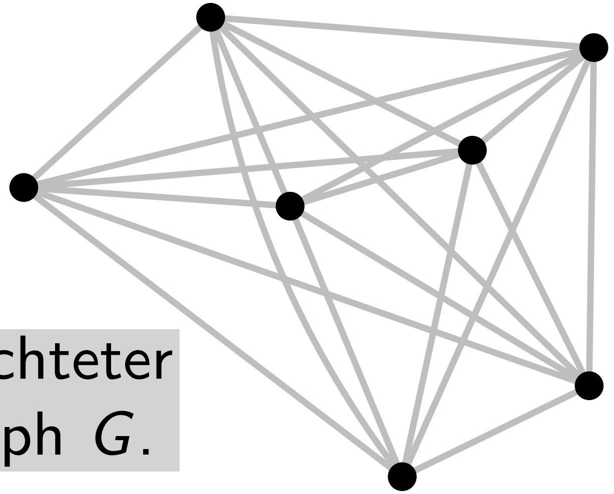


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



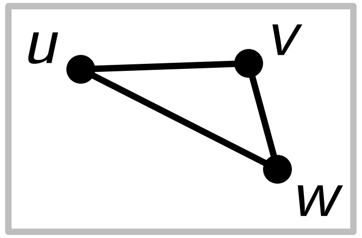
Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

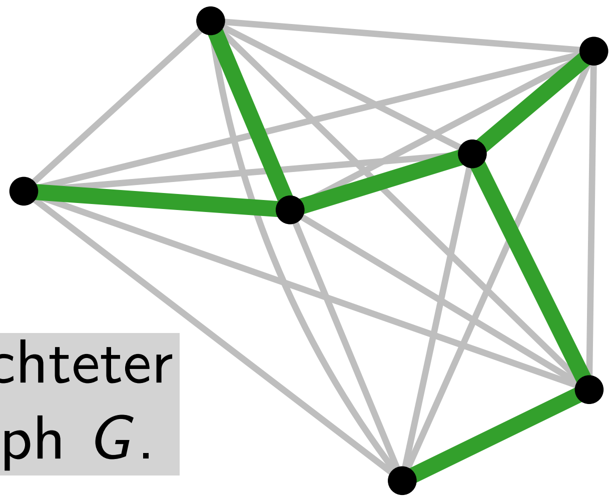


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



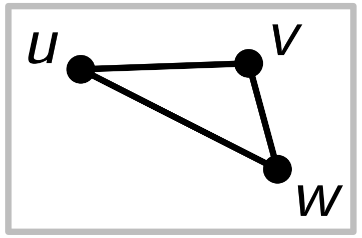
Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

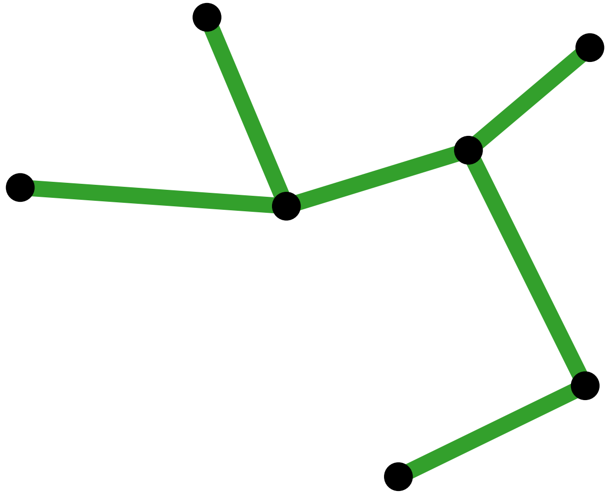


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.

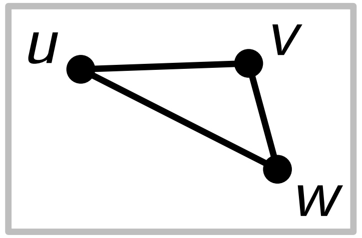


Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

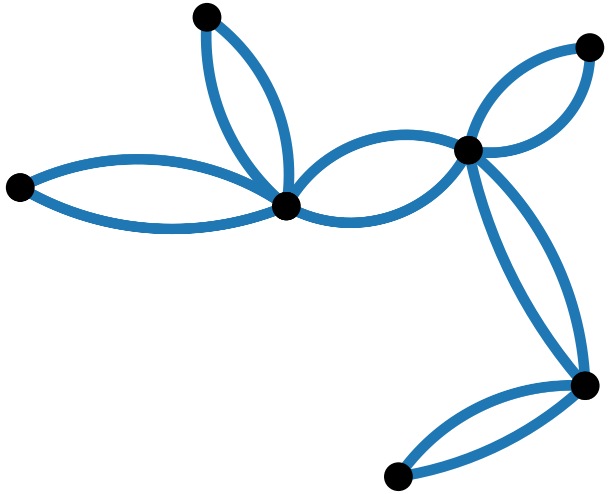


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



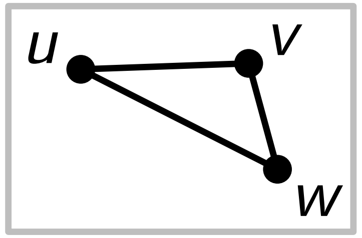
Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

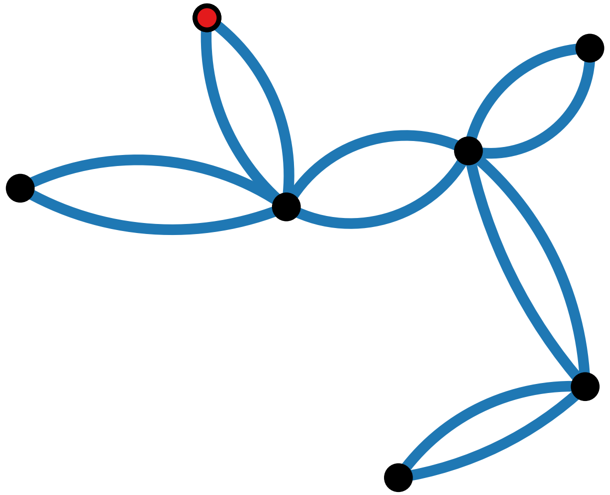


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

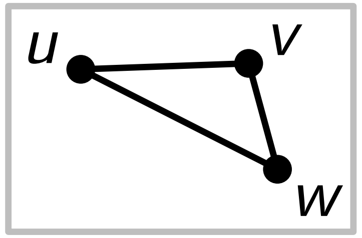
Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

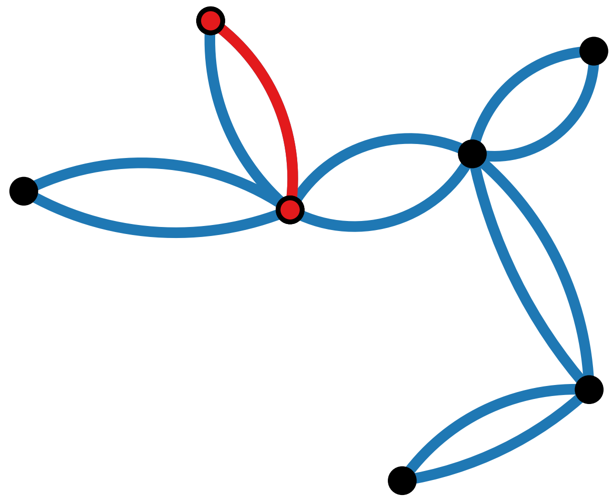


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

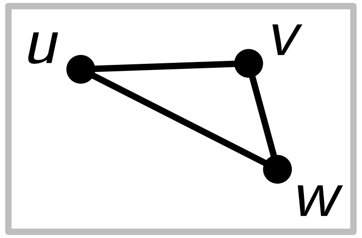
Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

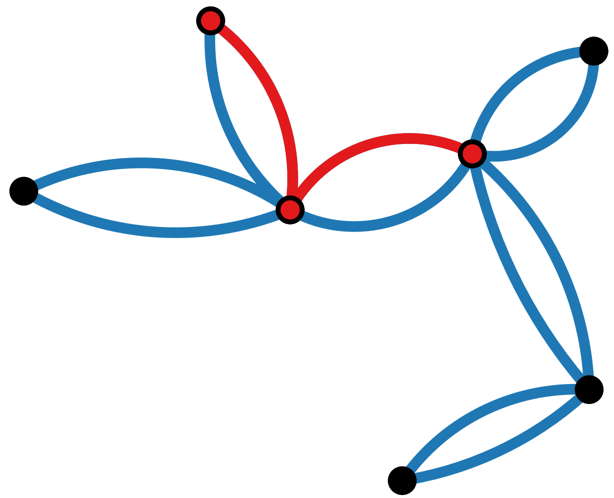


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

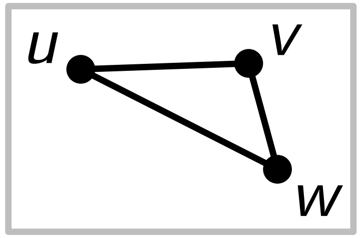
Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

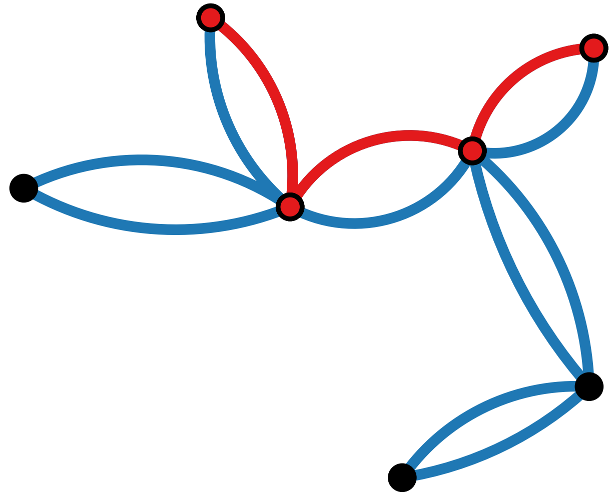


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

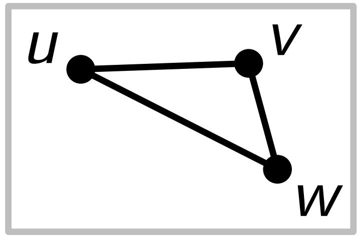
Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

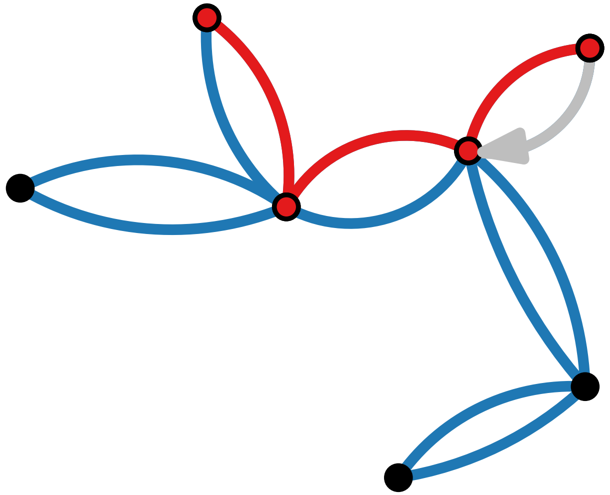


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

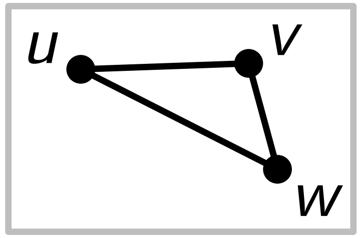
Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

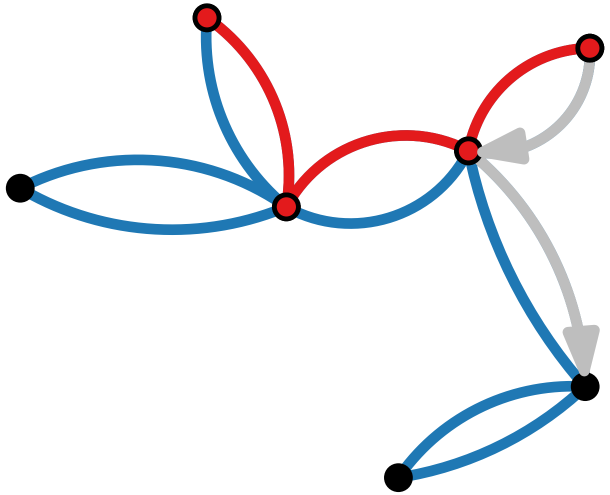


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

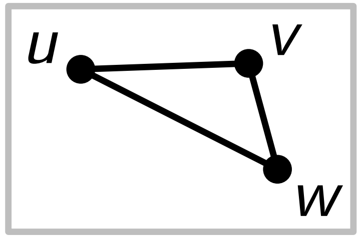
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten,

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

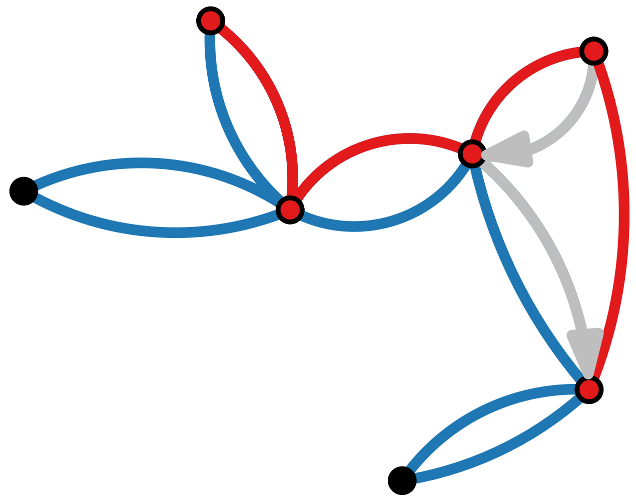


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

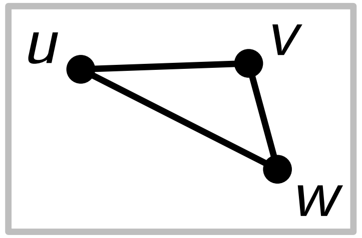
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

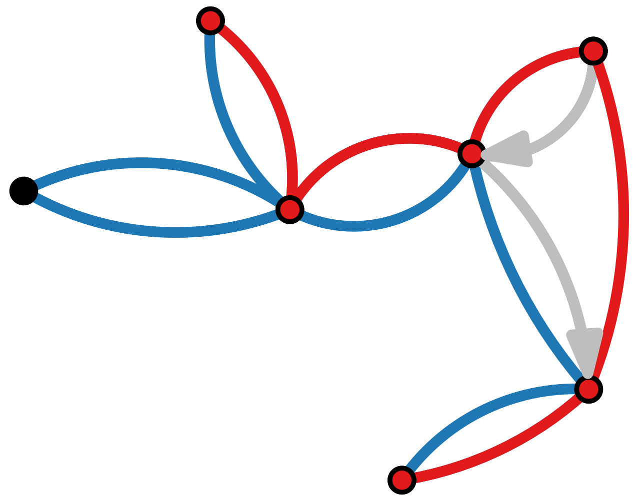


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

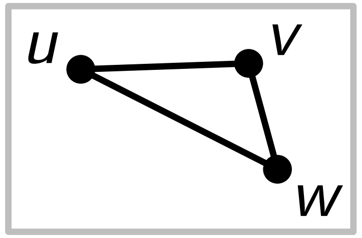
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

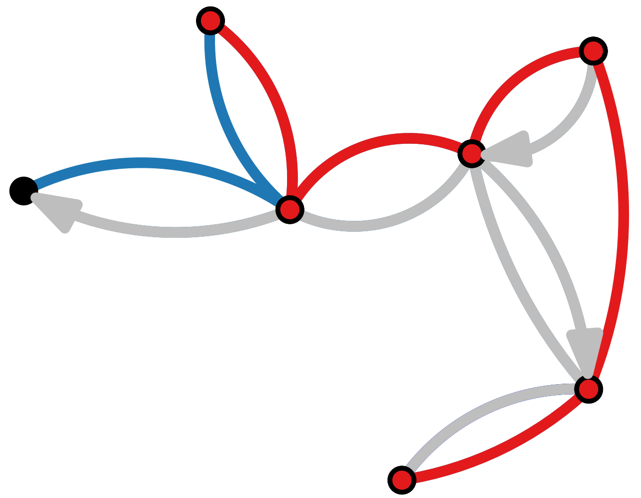


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

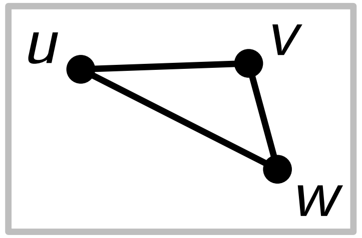
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

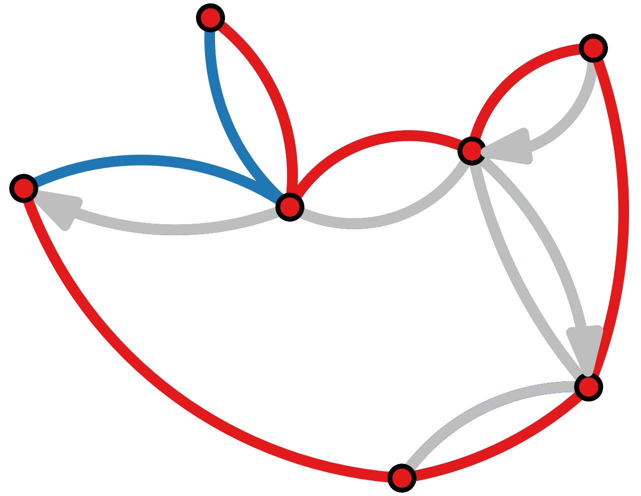


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

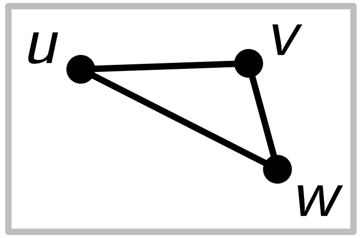
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

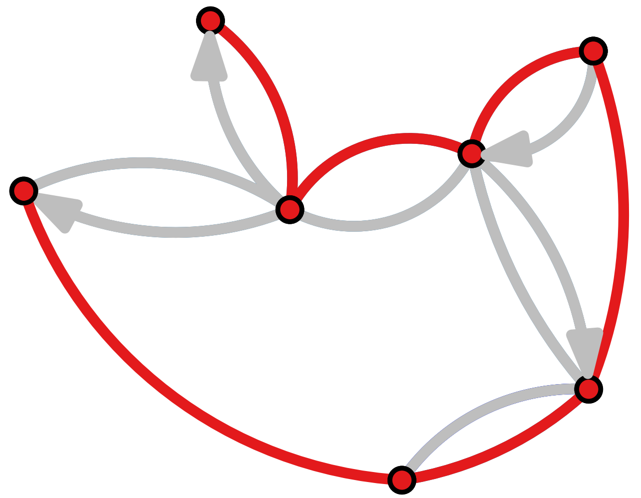


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

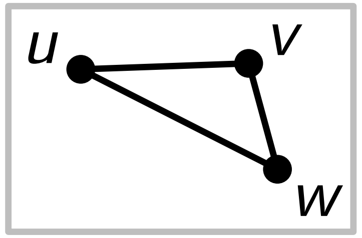
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

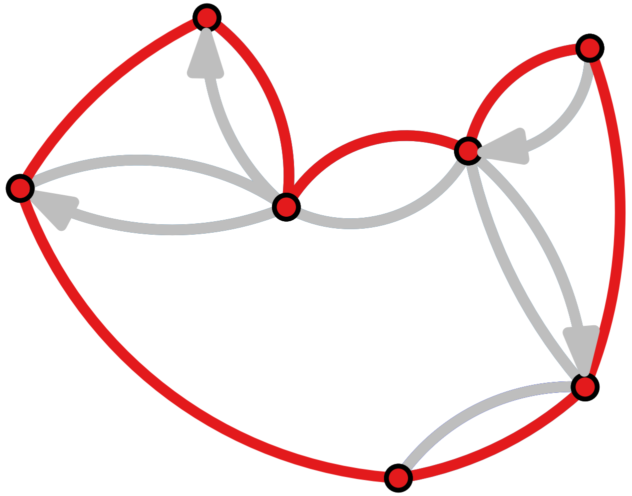


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

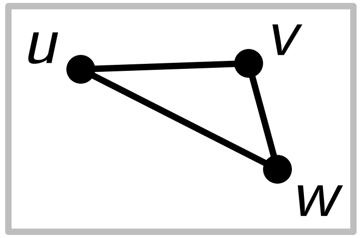
Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

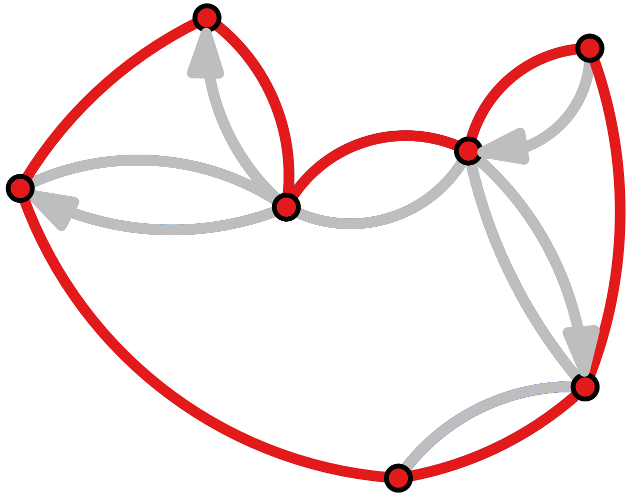


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

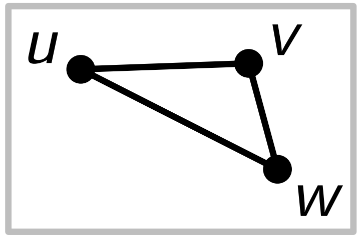
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

$c(\text{ALG}) \leq$

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

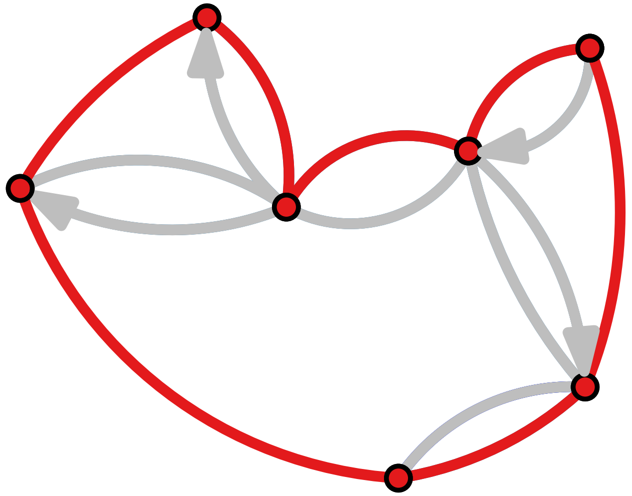


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

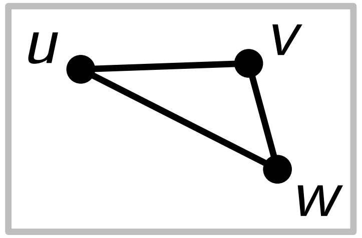
Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen" ein.

$c(\text{ALG}) \leq$

Dreiecksungleichung

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

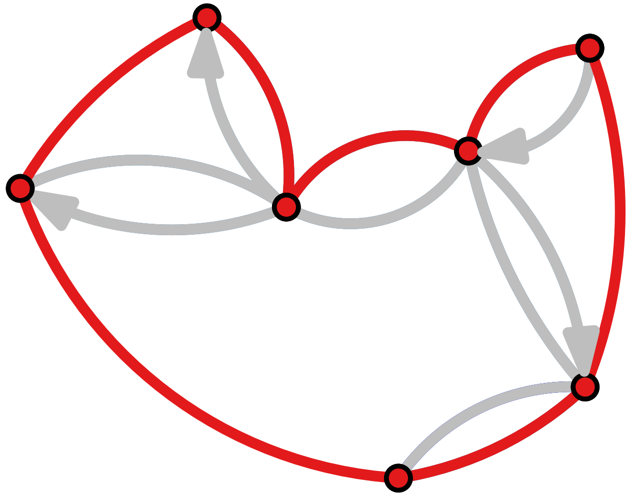


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

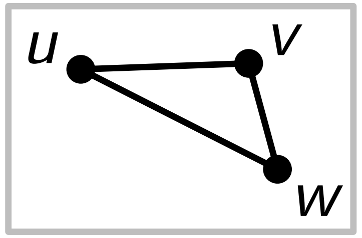
Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen" ein.

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) =$

Dreiecksungleichung

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

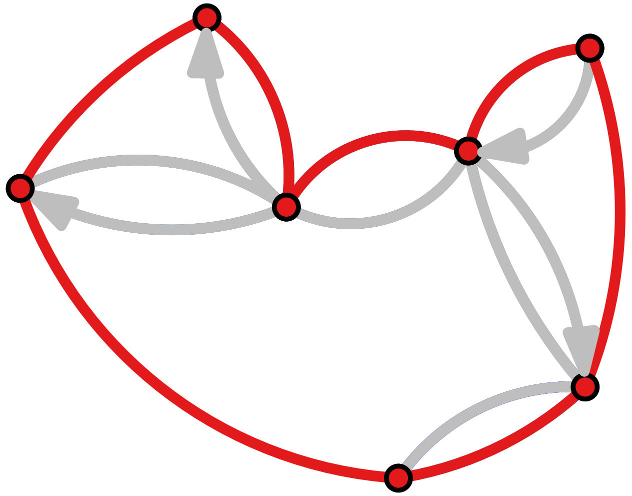


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

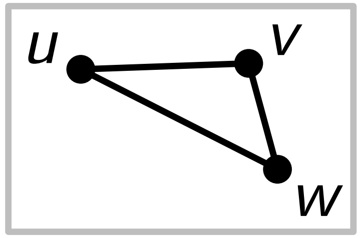
Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot \boxed{c(\text{MSB})} \leq$

Dreiecksungleichung

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

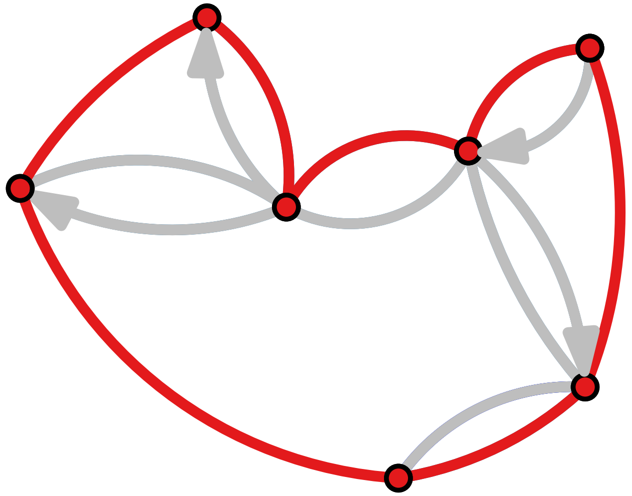


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

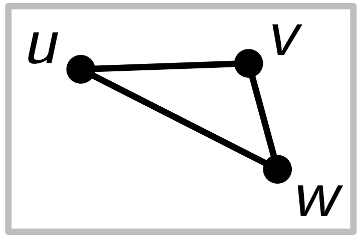
Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

$$c(\text{ALG}) \underbrace{\leq}_{\text{Dreiecksungleichung}} c(\text{Kreis}) = 2 \cdot \boxed{c(\text{MSB})} \leq 2 \cdot \boxed{\text{OPT}}$$

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

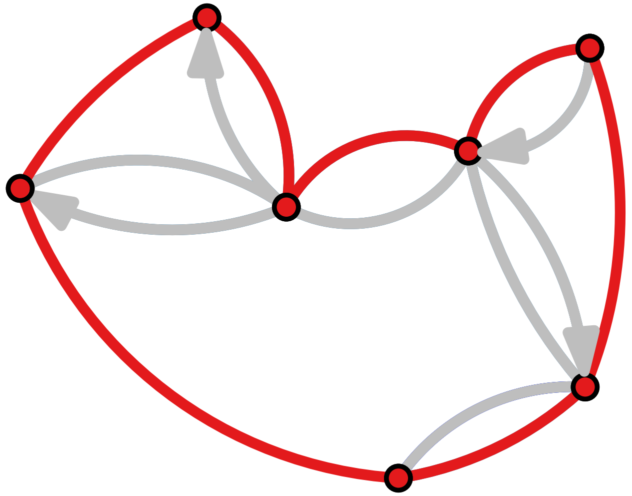


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

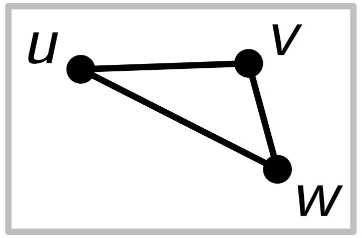
$$\underbrace{c(\mathrm{ALG}) \leq c(\mathrm{Kreis})}_{\text{Dreiecksungleichung}} = 2 \cdot c(\mathrm{MSB}) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!

Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

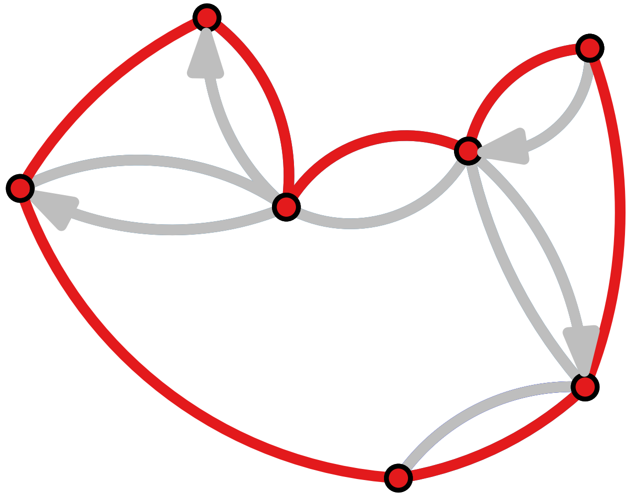


Gegeben: unger. vollständiger Graph G mit Kantenkosten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Dreiecksungleichung erfüllen, d.h. $\forall u, v, w \in V(G)\colon c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne minimalen Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten, füge „Abkürzungen“ ein.

$$c(\mathrm{ALG}) \leq c(\mathrm{Kreis}) = 2 \cdot c(\mathrm{MSB}) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}$$

Die „Kunst“ der unteren Schranke!

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:
  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:
  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit: Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:
  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur" $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur" $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur" $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$

Speicher:

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur" $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$

Speicher:

$O(n)$ für: bisher beste, aktuelle & nächste Permutation.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \ldots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle.$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5\rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6\rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \dots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

$\langle 1,3,4,6,5,2\rangle$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle.$

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

$$\langle 1, 3, \underset{i}{4}, 6, 5, 2 \rangle$$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).

$$\langle 1,3,\underset{i}{4},6,5,2\rangle$$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \dots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1,3,\underset{i}{4},6,5,2\rangle$$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5\rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6\rangle, \ldots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1, 3, \underset{i}{4}, 6, \underset{j}{5}, 2\rangle$$

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5\rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6\rangle, \ldots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1, 3, \underset{i}{4}, 6, \underset{j}{5}, 2\rangle$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6\rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5\rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6\rangle, \dots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1, 3, \underset{i}{4}, 6, \underset{j}{5}, 2\rangle \longrightarrow$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle, \langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle, \langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle, \ldots, \langle 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1, 3, \underset{i}{4}, 6, \underset{j}{5}, 2 \rangle \longrightarrow \langle 1, 3, \underset{i}{5}, 6, \underset{j}{4}, 2 \rangle$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \dots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1,3,\underset{i}{4},6,\underset{j}{5},2\rangle \longrightarrow \langle 1,3,\underset{i}{5},6,\underset{j}{4},\underset{n}{2}\rangle$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \dots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1,3,\underset{i}{\boxed{4}},6,\underset{j}{\boxed{5}},2\rangle \longrightarrow \langle 1,3,\underset{i}{\boxed{5}},6,\underset{j}{\boxed{4}},\underset{n}{2}\rangle \longrightarrow$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \dots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\dots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*

$$\langle 1,3,\underset{i}{4},6,\underset{j}{5},2\rangle \longrightarrow \langle 1,3,\underset{i}{5},6,\underset{j}{4},\underset{n}{2}\rangle \longrightarrow \langle 1,3,\underset{i}{5},2,4,\underset{n}{6}\rangle$$

- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \dots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \leq$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \leq \quad n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\leq \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \leq \quad n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \quad = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2 \quad \leq \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \leq \quad n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \quad = n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \;\leq\; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \;\leq\; n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \;=\; n^n$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \;\leq\; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \;\leq\; n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \;=\; n^n$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad n! \leq n^n =$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \;\leq\; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \;\leq\; n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \;=\; n^n$$

$\Rightarrow$ $$n! \leq n^n = 2$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} =$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} = 2^{n \log_2 n}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n! \in \qquad}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Stirlingformel [James Stirling, 1692–1770]

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^{n} = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Stirlingformel [James Stirling, 1692–1770]

Für $n \to \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Stirlingformel [James Stirling, 1692–1770]

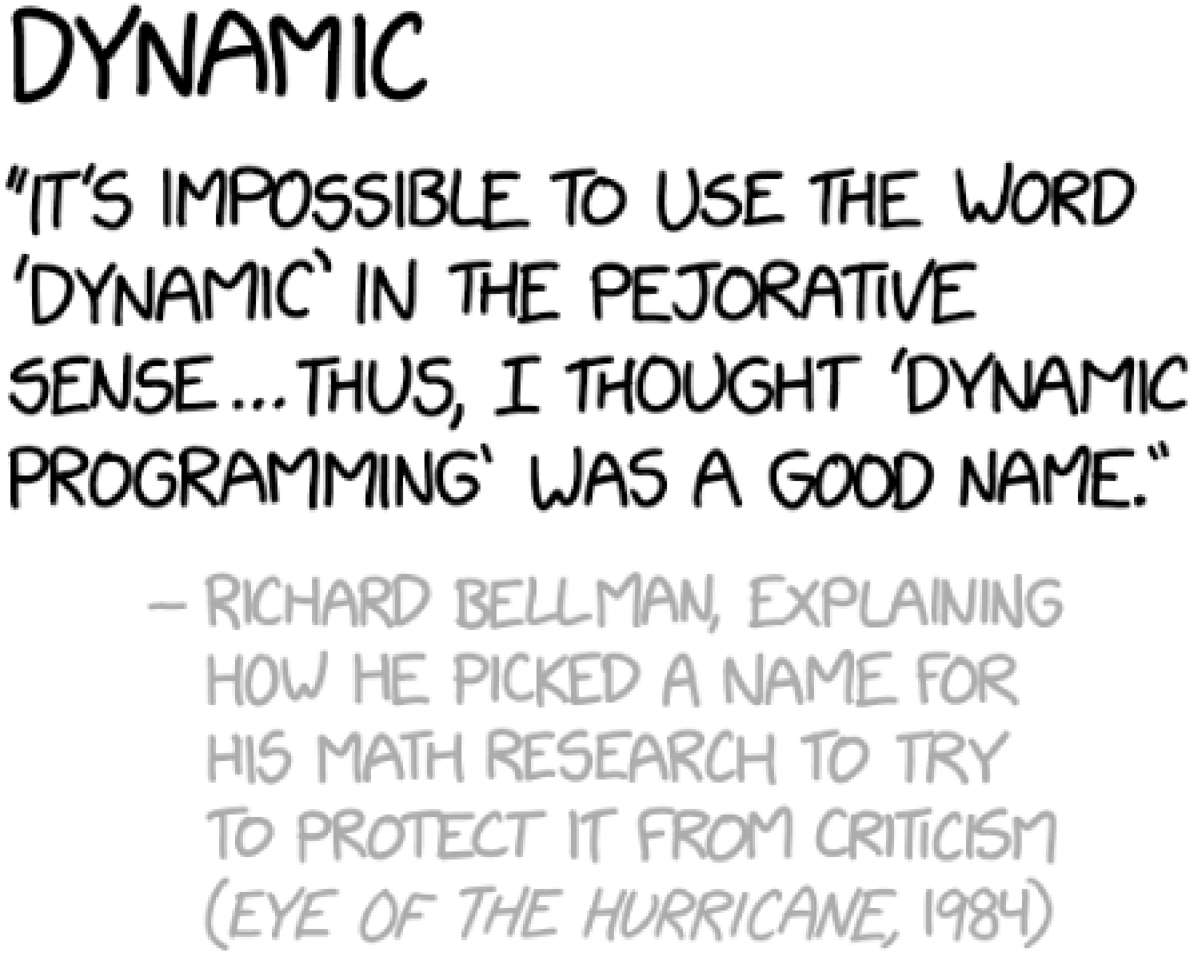
Für $n \to \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\,\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!



[xkcd]

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

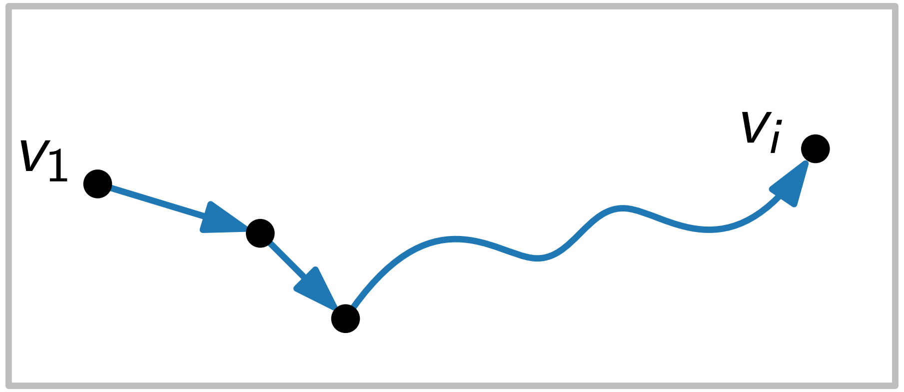
Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs

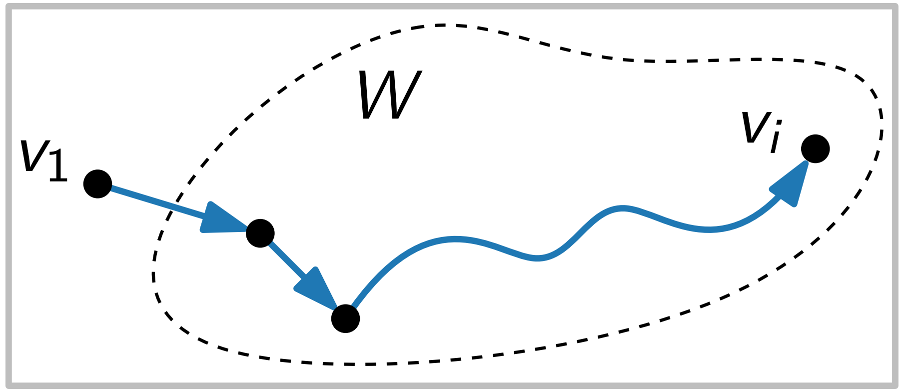


Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.



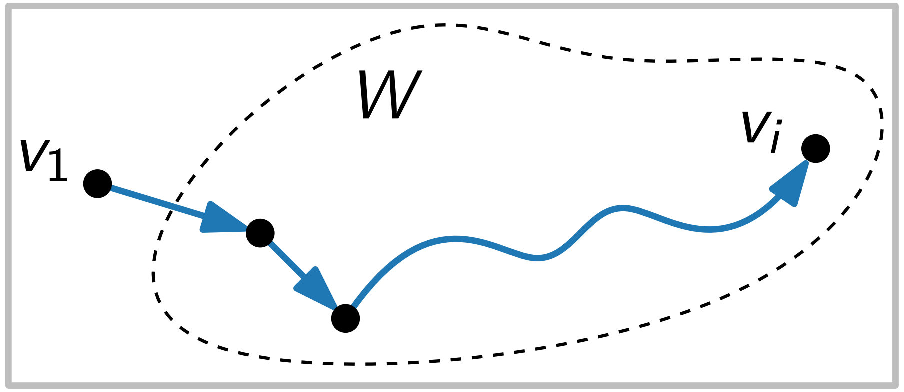
Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*



Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

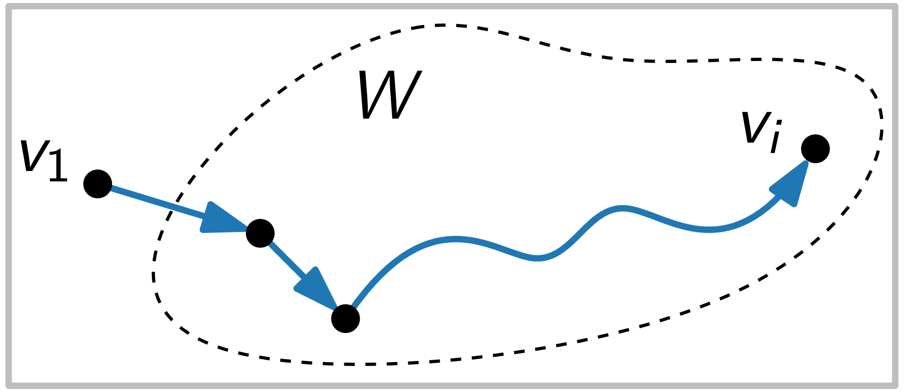
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$T[W, v_i] =$



Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

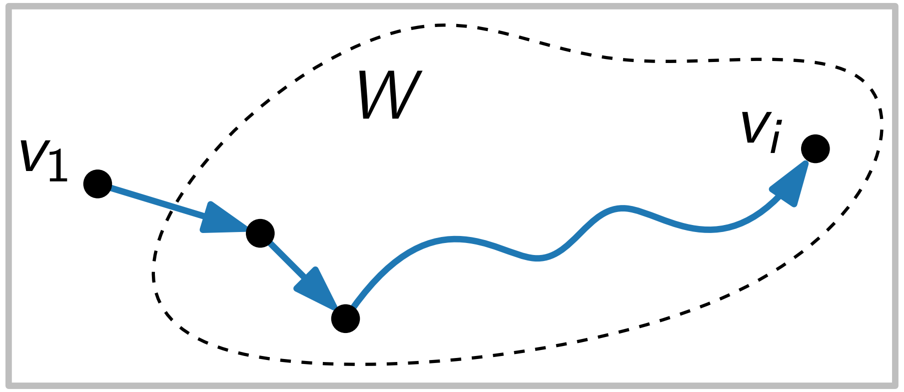
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

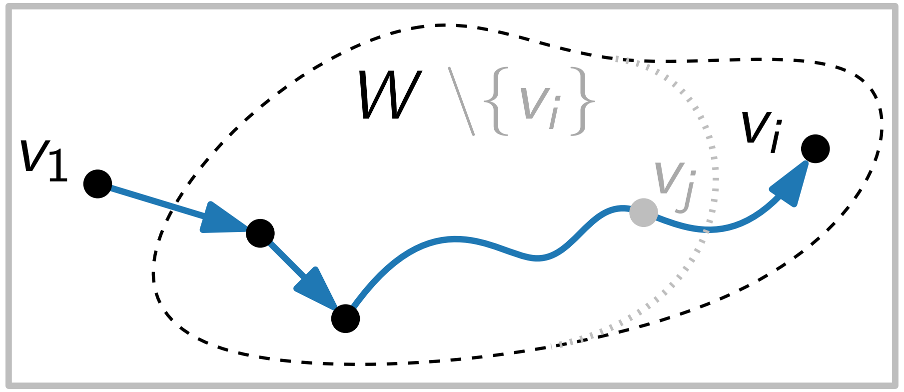
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

$$T[W, v_i] =$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

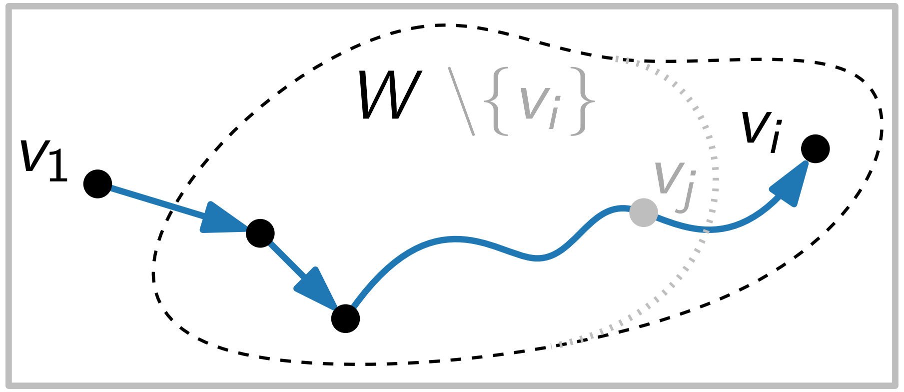
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}}$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

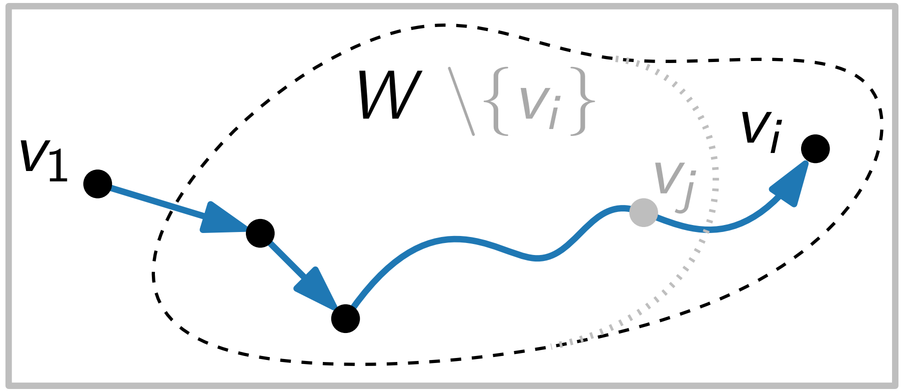
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \quad T[W \setminus \{v_i\}, v_j]$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

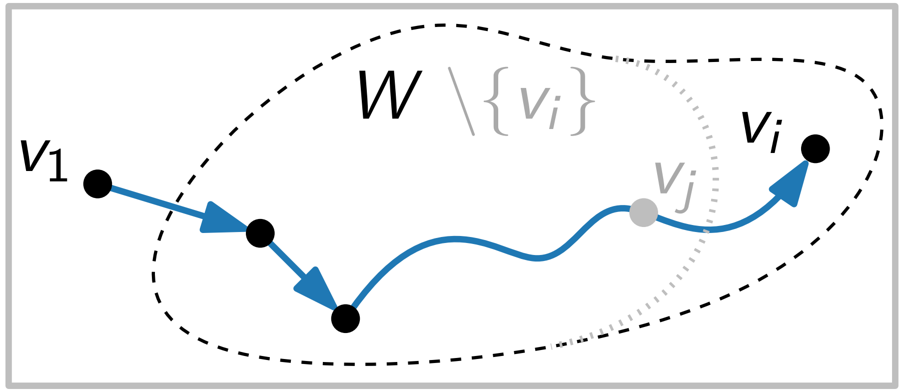
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \quad T[W \setminus \{v_i\}, v_j] \; +$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

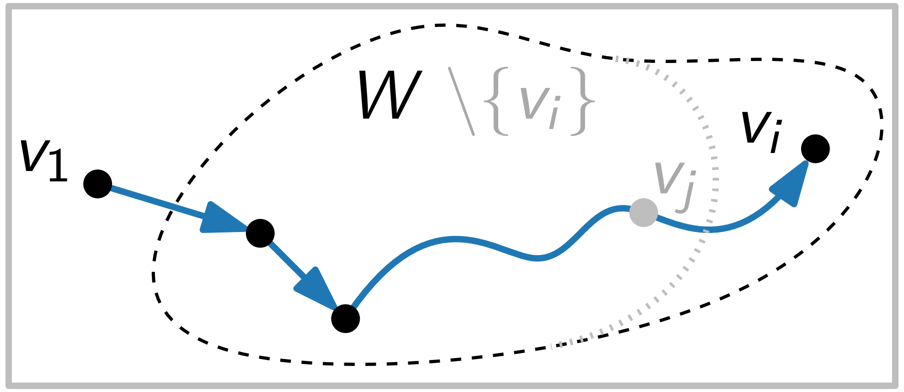
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \quad T[W \setminus \{v_i\}, v_j] \; + \; c(v_j, v_i)$$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

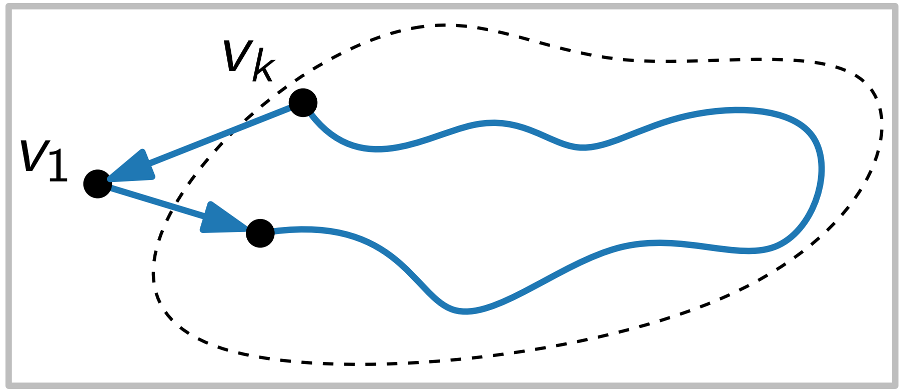
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \quad T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

$\Rightarrow$ $\quad$ OPT $=$

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

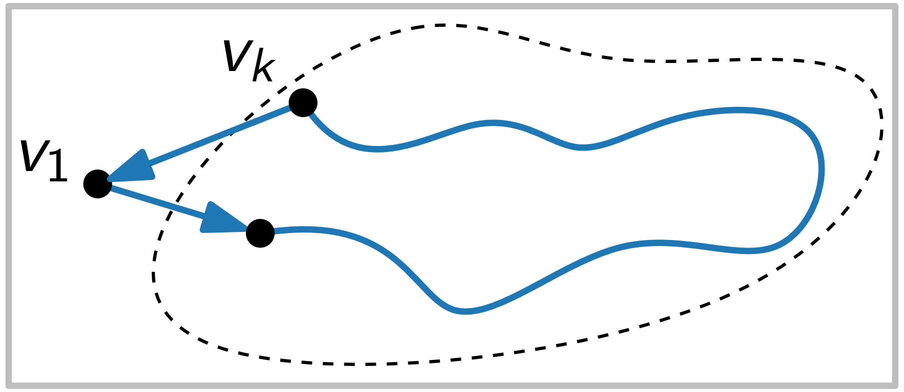
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \quad T[W \setminus \{v_i\}, v_j] \; + \; c(v_j, v_i)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1}$$

Index des letzten Knotens vor v_1

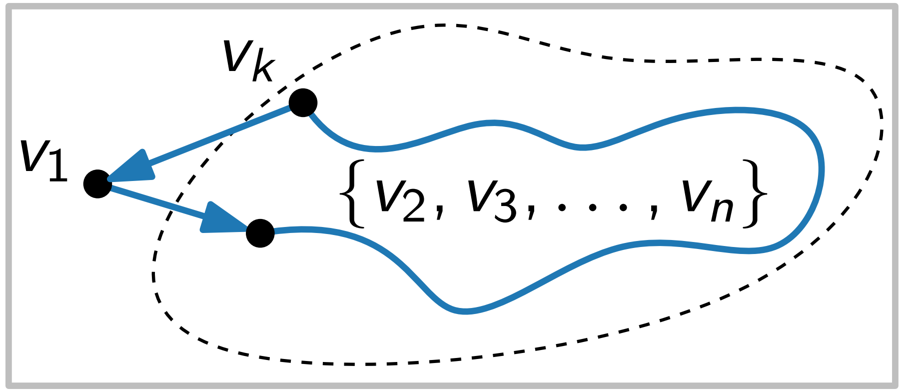
Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*



Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \; T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1} \; T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k]$$

Index des letzten Knotens vor v_1

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

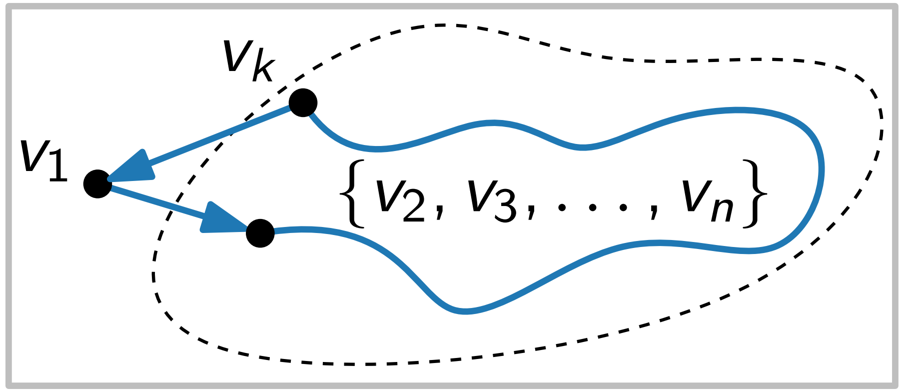
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] +$$

Index des letzten Knotens vor v_1

Exakter TSP-Algorithmus: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

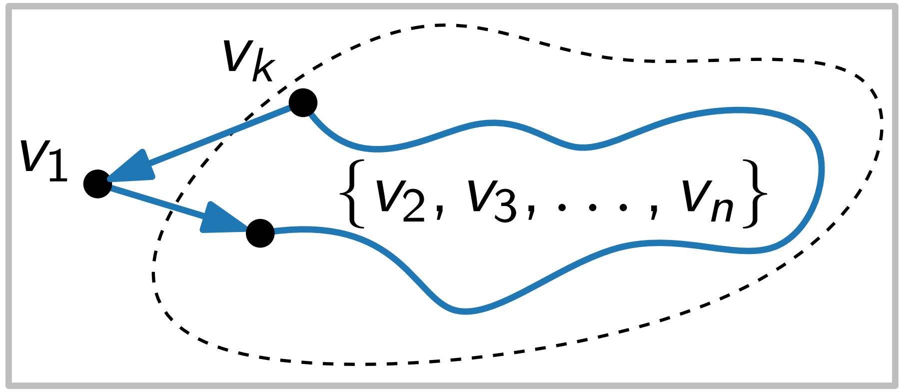
Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definiere:

$T[W, v_i]$:= optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in* W.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$T[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$



Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

Letzter Knoten vor v_i

$$T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \quad T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1} \quad T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$$

Index des letzten Knotens vor v_1

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp$\big($Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}\big)$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
- $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
- **foreach** $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
  - **foreach** $v_i \in W$ **do**

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
- $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
- **foreach** $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
  - **foreach** $v_i \in W$ **do**
    - $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c : V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
- $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n-1$ **do**
- **foreach** $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
  - **foreach** $v_i \in W$ **do**
    - $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n-1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c: V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$:

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

```
for i = 2 to n do
    T[{v_i}, v_i] = c(v_1, v_i)

for j = 2 to n − 1 do
    foreach W ⊆ {v_2, ..., v_n} mit |W| = j do
        foreach v_i ∈ W do
            T[W, v_i] = min_{v_j ∈ W \ {v_i}} T[W \ {v_i}, v_j] + c(v_j, v_i)

return min_{k≠1} T[{v_2, v_3, ..., v_n}, v_k] + c(v_k, v_1)
```

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's?

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

```
float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände c: V² → ℚ≥0)

  for i = 2 to n do
    T[{v_i}, v_i] = c(v_1, v_i)

  for j = 2 to n − 1 do
    foreach W ⊆ {v_2, ..., v_n} mit |W| = j do
      foreach v_i ∈ W do
        T[W, v_i] = min_{v_j ∈ W \ {v_i}} T[W \ {v_i}, v_j] + c(v_j, v_i)

  return min_{k≠1} T[{v_2, v_3, ..., v_n}, v_k] + c(v_k, v_1)
```

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O(\quad)$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n-1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:**

Der Algorithmus von Bellman, Held & Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer optimalen Lösung (hier: bottom-up)!*

float BellmanHeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V^2 \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $T[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$

for $j = 2$ **to** $n - 1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \dots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $T[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} T[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$

return $\min_{k \neq 1} T[\{v_2, v_3, \dots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $T[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit
Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq 2^{n-1} \cdot n$
$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$ **Speicher:** $O\left(n \cdot 2^n\right)$

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit		
Speicher		

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	
Speicher		

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher		

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher		$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs.

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)^{\star}$

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot,\cdot]$ speichern würden?

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$\boxed{2^{\Theta(n \log n)}}$	$O\big(n^2 \cdot 2^n\big)$
Speicher	$O(n)$	$\boxed{O\big(n \cdot 2^n\big)}$ *

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot,\cdot]$ speichern würden?

Zur Berechnung von $T[W,\cdot]$ brauchen wir nur die Einträge $T[W',\cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$ *

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot,\cdot]$ speichern würden?

Zur Berechnung von $T[W,\cdot]$ brauchen wir nur die Einträge $T[W',\cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Welches j maximiert $\binom{n}{j}$?

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$ *

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot, \cdot]$ speichern würden?

Zur Berechnung von $T[W, \cdot]$ brauchen wir nur die Einträge $T[W', \cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Welches j maximiert $\binom{n}{j}$? $j = \frac{n}{2}$.

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$\boxed{2^{\Theta(n \log n)}}$	$O(n^2 \cdot 2^n)$
Speicher	$O(n)$	$\boxed{O(n \cdot 2^n)}$ *

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot,\cdot]$ speichern würden?

Zur Berechnung von $T[W,\cdot]$ brauchen wir nur die Einträge $T[W',\cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Welches j maximiert $\binom{n}{j}$? $j = \frac{n}{2}$.

Wie groß ist $\binom{n}{n/2}$?

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)

Vergleich

	Brute Force	Bellman-Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)^{\star}$

Der Bellman-Held-Karp-Algorithmus verringert also die Laufzeit zu Lasten des Speicherplatzverbrauchs. Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.

*) Wie wär's, wenn wir im DP nicht *ganz* $T[\cdot,\cdot]$ speichern würden?

Zur Berechnung von $T[W,\cdot]$ brauchen wir nur die Einträge $T[W',\cdot]$ mit $|W'| = |W| - 1$.

Welches j maximiert $\binom{n}{j}$? $j = \frac{n}{2}$.

Wie groß ist $\binom{n}{n/2}$? In $\Theta(2^n/\sqrt{n})$. :-(

Richard M. Karp
(*1935)

Richard E. Bellman
(1920–1984)