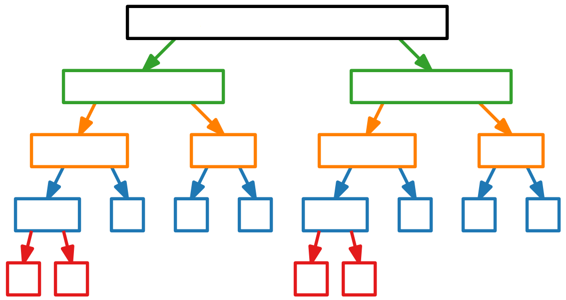
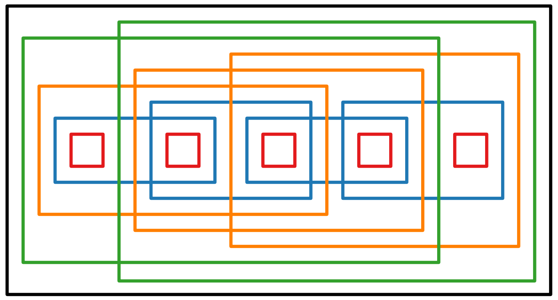
Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 21:
Dynamisches Programmieren





Alexander Wolff

Wintersemester 2024

Entwurfstechniken

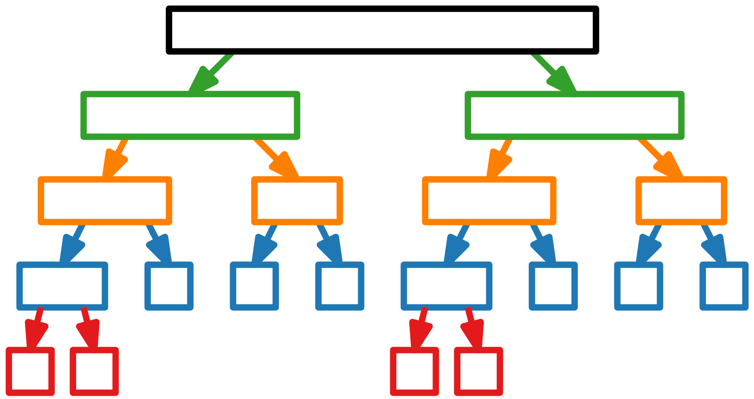
- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

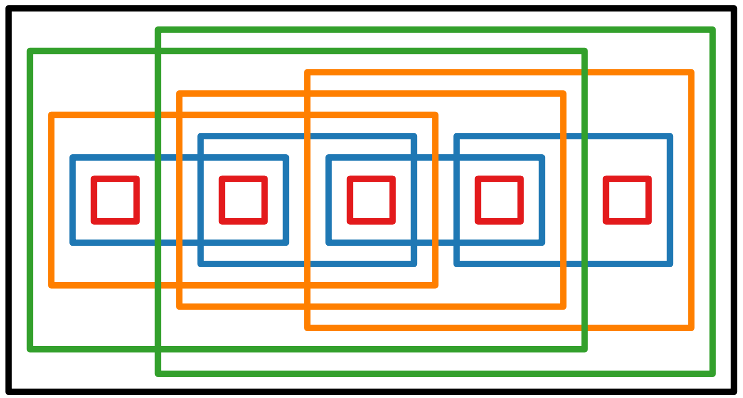
Heute:

meint hier das Arbeiten mit einer Tabelle,
nicht das Schreiben eines Computerprogramms.

- Dynamisches Programmieren

Vergleich





Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in **disjunkte** Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in **überlappende** Teilinstanzen,

  d.h. Teilinstanzen haben oft dieselben Teilteilinstanzen.

  Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.

Teile und Herrsche:

- top-down
- eher für Entscheidungs- oder Berechnungsprobleme

Dynamisches Programmieren:

- meist bottom-up
- meist für Optimierungsprobleme

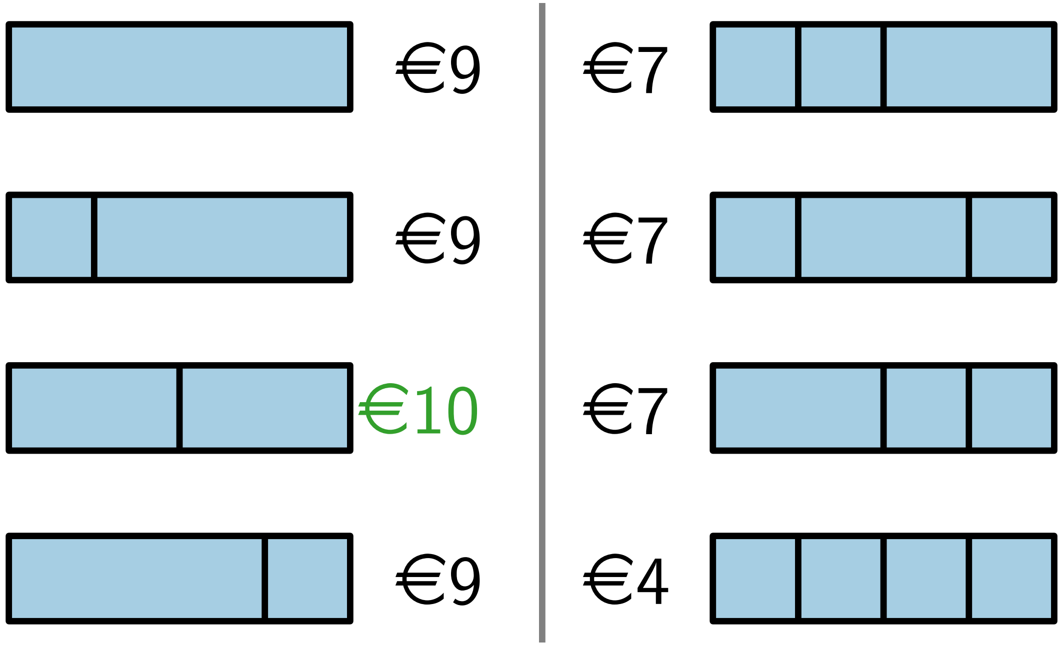
Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)
4. Optimale Lösung aus berechneter Information konstruieren

Das Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

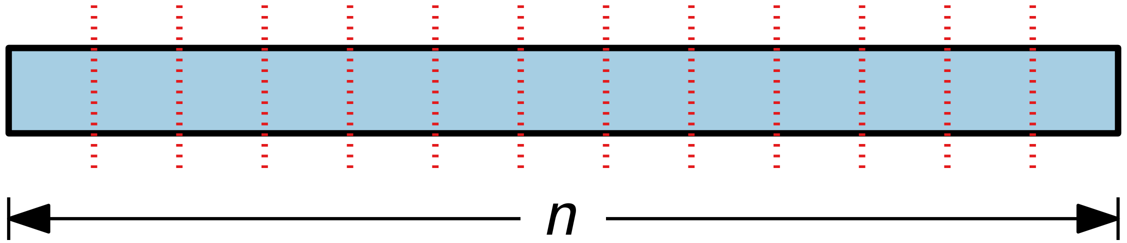
Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?



Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Rohe Gewalt

Frage. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Oh, mein Gott!
Das ist ja **exponentiell!**

Antwort. Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene *Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

*) Genauer: die gesuchte Zahl ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* der Zahl n, die angibt, auf wie viele Arten man n als Summe von natürlichen Zahlen schreiben kann.
Es gilt $p(n) \approx e^{\pi\sqrt{2n/3}} \big/ (4n\sqrt{3}) \;\in\; \Theta^*\!\left((13{,}00195\ldots)^{\sqrt{n}}\right)$.

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient q_i [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

€9

Greedy:

- Berechne für $i = 1, \ldots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i / i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

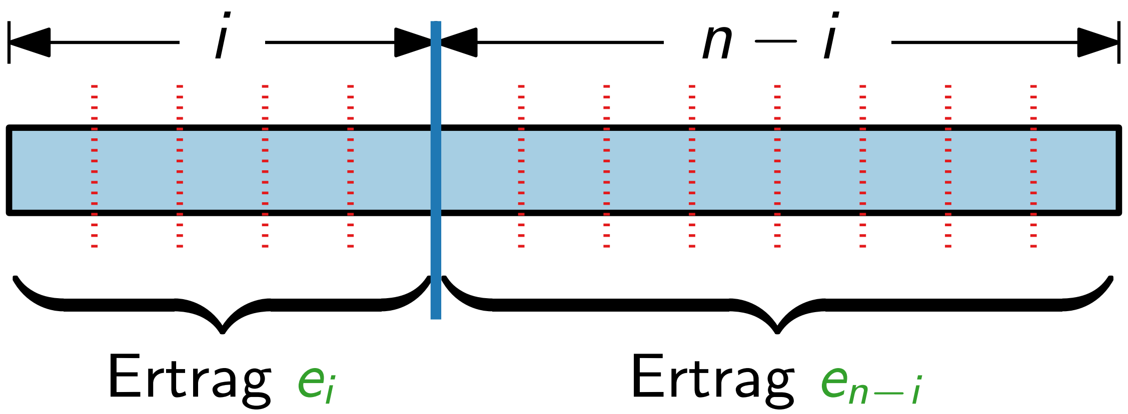
Liefert dieser Greedy-Algorithmus immer das Optimum?

Ja? Beweisen!

Nein? Gegenbeispiel!

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der **optimalen Teilstruktur**!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in **unabhängige** Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

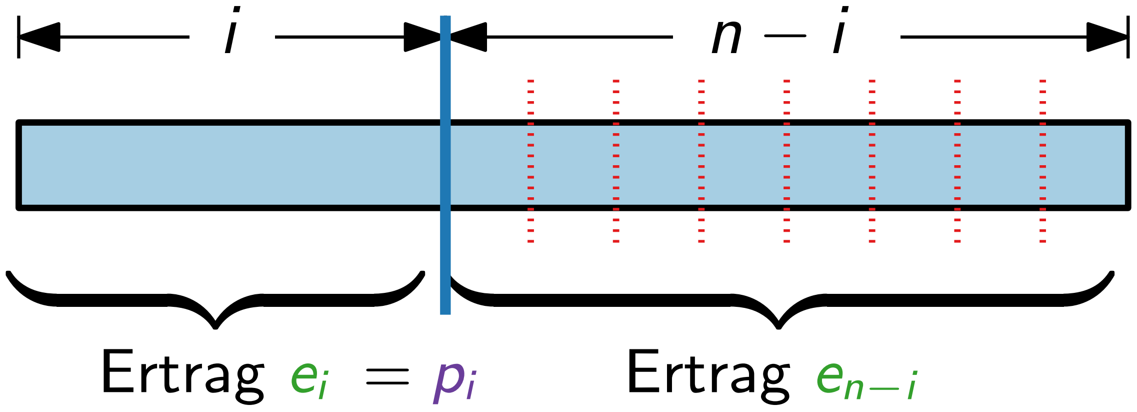
$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \dots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \dots,\ \ p_{n-1} + e_1\ \}$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}, \quad \text{wobei } e_0 := 0.$$

Vorteil: Wert einer optimalen Lösung ist Summe aus einer Zahl der Eingabe und *einem* Wert einer optimalen Teillösung.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit. Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\textsc{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\textsc{StangenZerlegung}(p, n)$.

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(\boxed{n-i}) = 1 + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} A(j)}^{1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}} = 2^n$$

Beweis?!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  e = new int[0 ... n]
  e[0] = 0
  for i = 1 to n do
    e[i] = −∞
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)
```

```
HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
  if e[n] > −∞ then return e[n]
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + HauptStangenZerlegung(p, n − i, e)}
  e[n] = q; return q
```

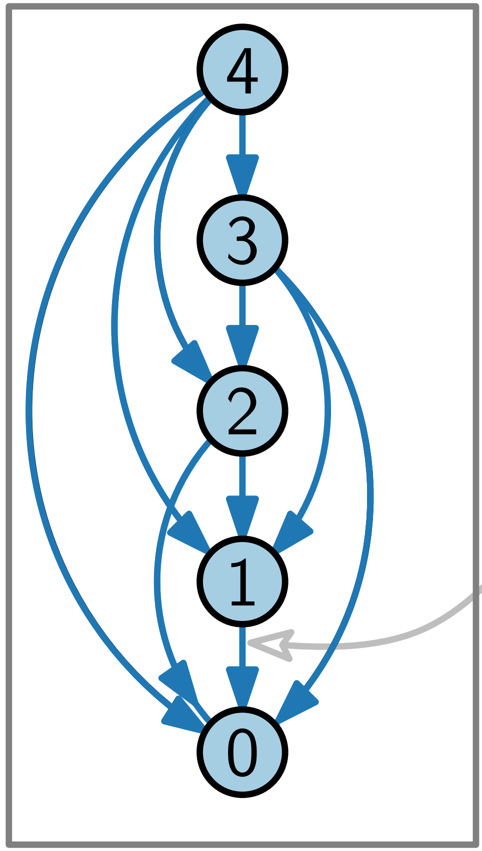
Laufzeit?

- Wie letzte Folie?
- Asymptotisch schneller?

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

```
BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)
  e = new int[0 ... n]
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
    q = −∞
    for i = 1 to j do
      q = max{q, p[i] + e[j − i]}
    e[j] = q
  return q
```

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benutzt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

Beob. Die Anzahl der Kanten im Graphen ist proportional zur Laufzeit des DP (Anzahl Additionen).

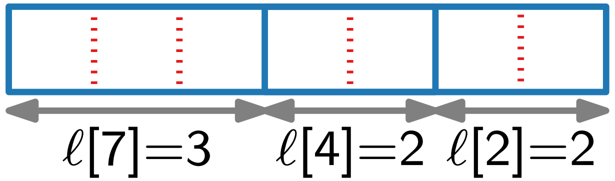
Satz. BottUpSZerl() und MemoSZerl() laufen in $\mathcal{O}(n^2)$ Zeit.

4. Optimale Lösung aus berechneten Informationen konstruieren

ERWEITERTEBOTTOMUPZERLEGUNG(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)

- $e[0] = 0$
- **for** $j = 1$ **to** n **do**
  - $q = -\infty$
  - **for** $i = 1$ **to** j **do**
    - **if** $q < p[i] + e[j-i]$ **then**
      - $q = p[i] + e[j-i]$
      - $\ell[j] = i$ // merke Länge des linkesten Teilstücks
  - $e[j] = q$

$\Big\}\; q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$



GIBZERLEGUNGAUS(int[] p, int n)

- $\ell =$ **new** int$[0 \ldots n]$; $e =$ **new** int$[0 \ldots n]$
- ERWEITERTEBOTTOMUPZERLEGUNG(p, e, ℓ, n)
- **while** $n > 0$ **do**
  - print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$ // gib wiederholt Länge des linkesten // Teilstücks des Reststabs aus

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph G
mit $s, t \in V(G)$, $s \neq t$, aber t von s erreichbar.

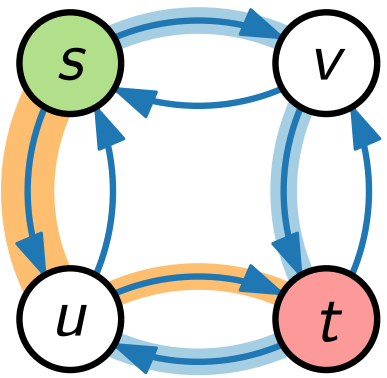
Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,
d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit
$v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s-u-Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s-u-Weg!



Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ⚡*
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

*) Es ist NP-schwer für (G, s, t, k) zu entscheiden, ob G einen einfachen s-t-Weg der Länge k enthält. (Vgl. Hamilton-Weg!)

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gerichteter **kreisfreier** Graph G mit Kantengewichten $w\colon G(E) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s, t \in V(G)$, $s \neq t$, aber t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beobachtung 1. In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beobachtung 2. *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:

Angenommen, ein längster s-t-Weg π geht durch u, d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

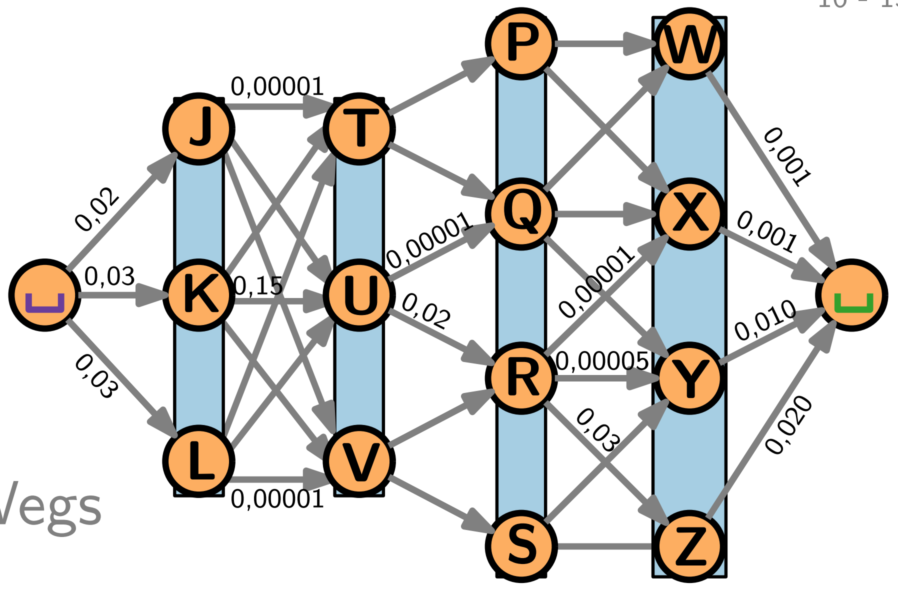
Dann gilt:

π_{su} ist längster s-u-Weg; π_{ut} ist längster u-t-Weg –

sonst wäre π kein längster s-t-Weg.

Außerdem gilt $V(\pi_{su}) \cap V(\pi_{ut}) = \{u\}$;
sonst gäbe es einen Kreis!

Algorithmus nach Fahrplan



1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_s \;=\; 0 \qquad\qquad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

$$d_v \;=\; \max_{u\colon\, uv \in E(G)} d_u + w(u,v)$$

so!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)
   - G topologisch sortieren
   - d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$
   - **for**-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Übrigens: *Kürzeste* Wege in kreisfreien Graphen kann man genauso berechnen (mit min statt max und $+\infty$ statt $-\infty$).

Genauso kann man auch das „T9-Problem“ lösen (mit $\cdot$ statt $+$).

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

- Ketten von Matrixmultiplikationen
- Längste gemeinsame Teilfolge (in Zeichenketten)
- Optimale binäre Suchbäume