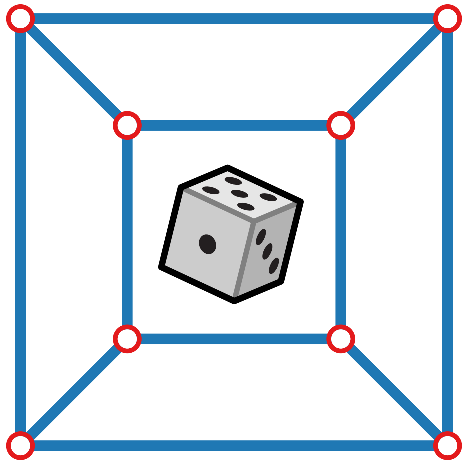
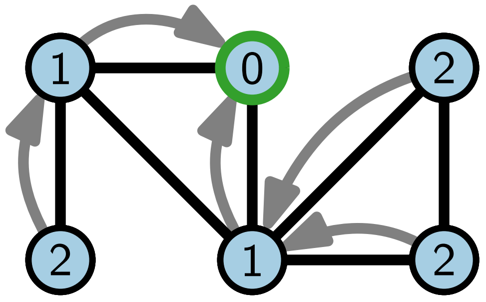
Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 18:
Graphen und Breitensuche

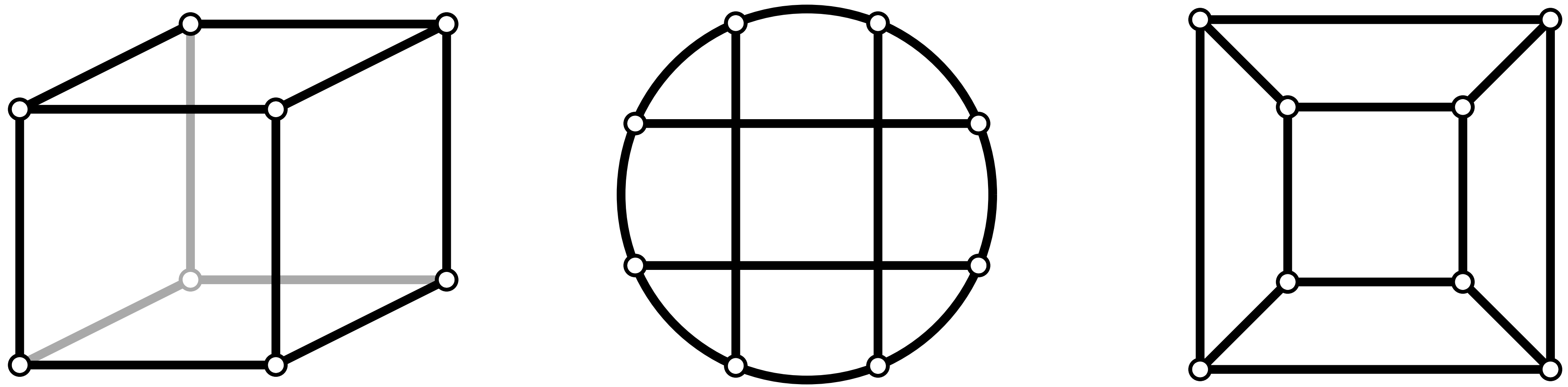




Alexander Wolff

Wintersemester 2024

Was ist das?



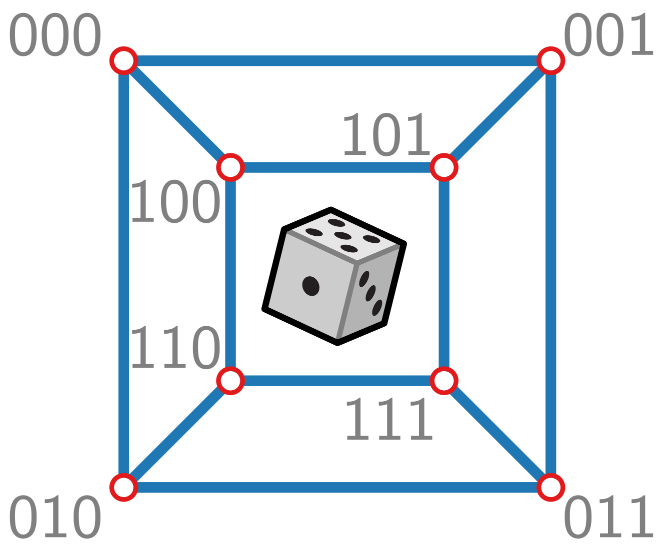
Ein (und derselbe) **Graph**; der dreidimensionale Hyperwürfel.

Was ist ein Graph?

Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ **Kantenmenge**.

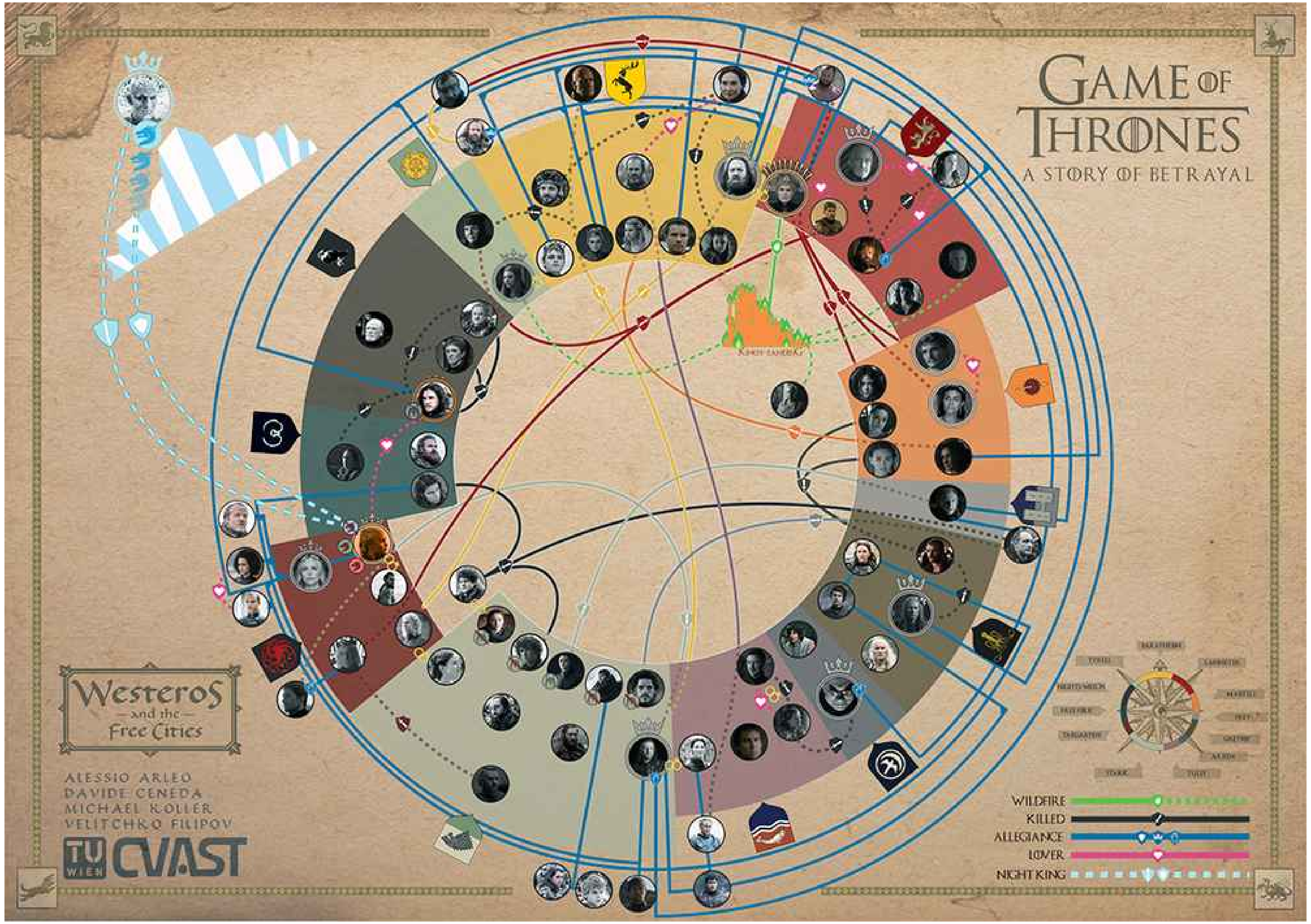
$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$



Ein **gerichteter** Graph ist ein Paar (V, E) , wobei

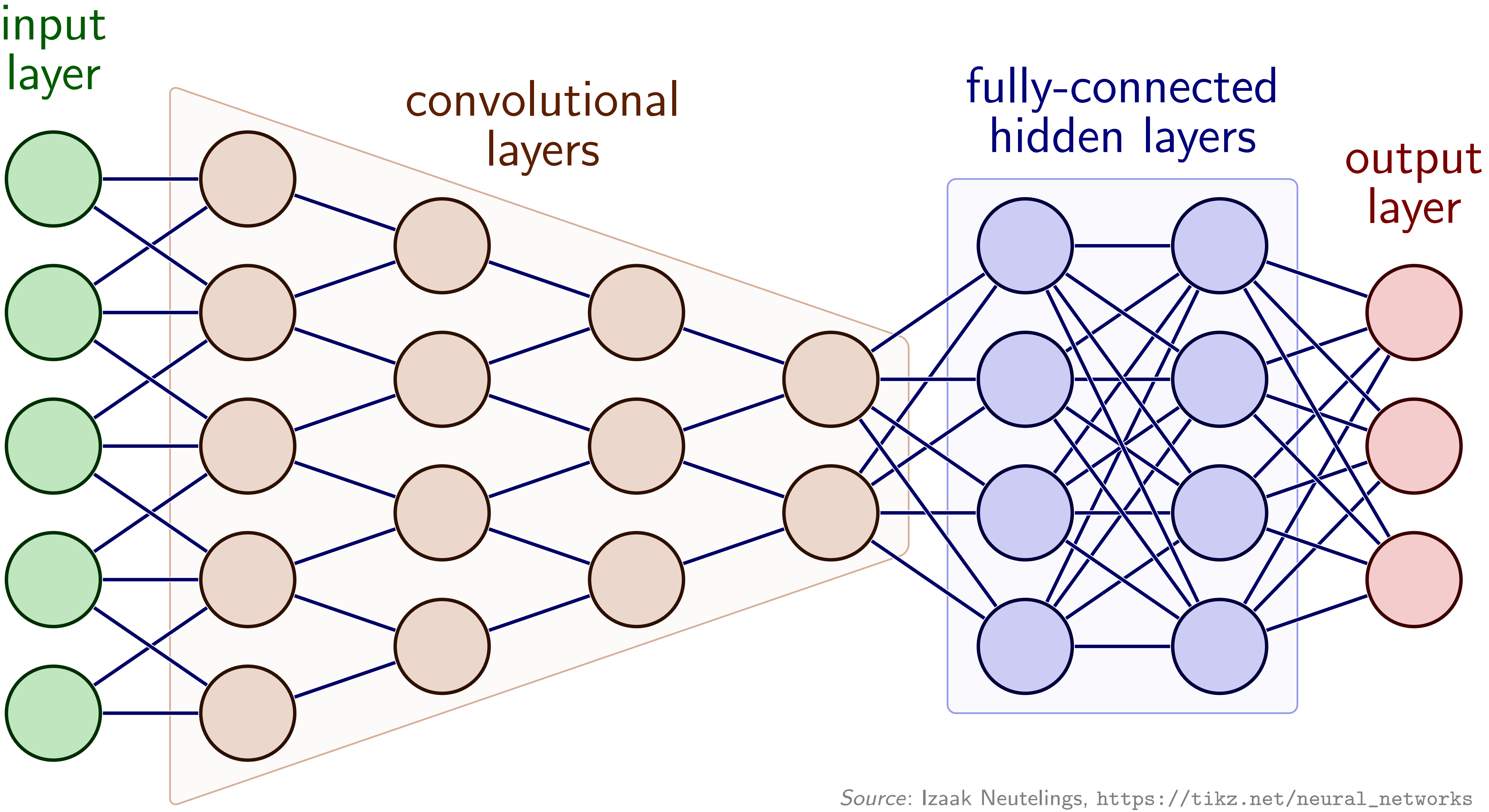
- V **Knotenmenge** und
- $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ **Kantenmenge**.

Soziale Netzwerke – Verhältnisse



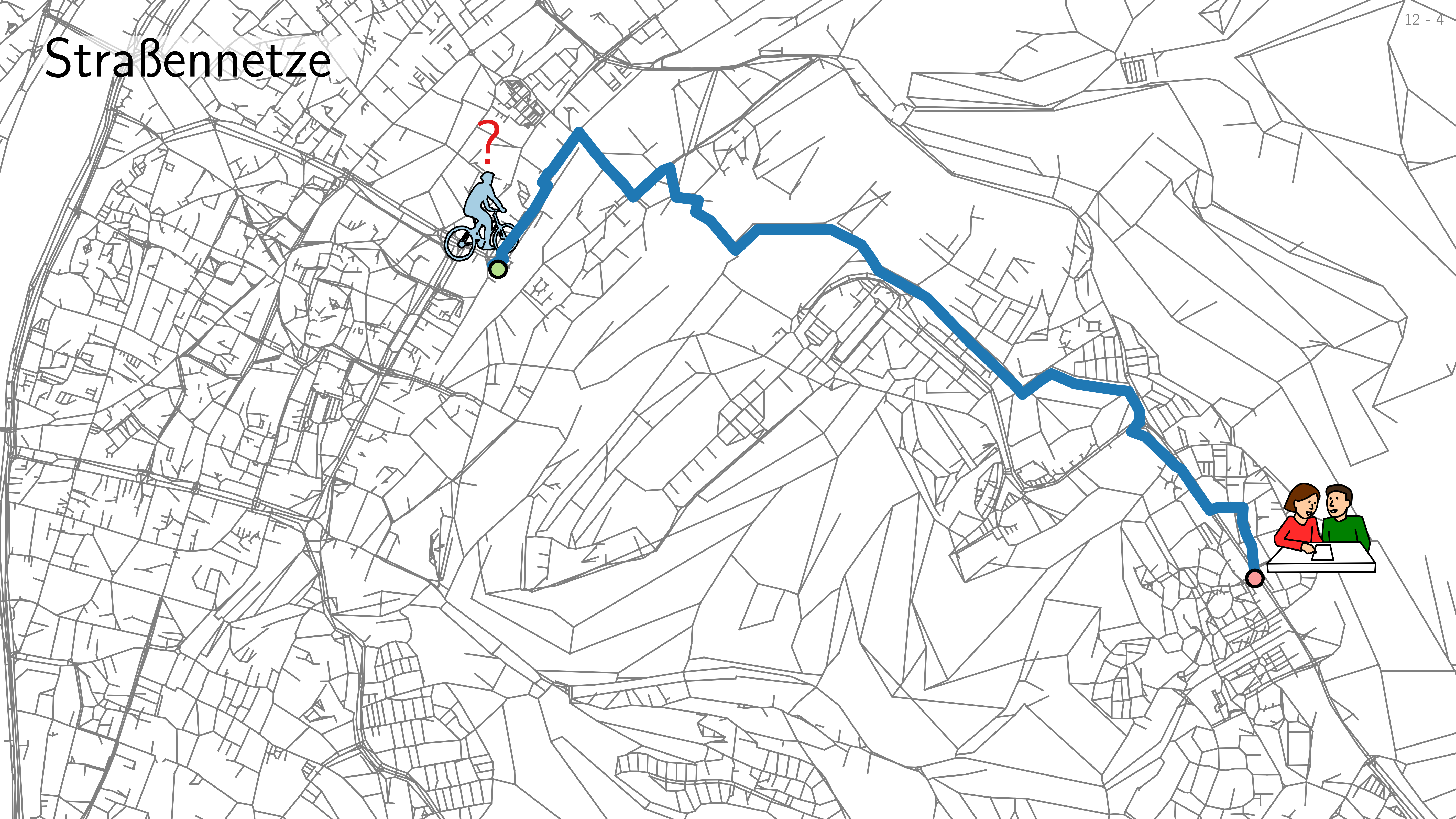
Velitchko Filipov, Davide Ceneda, Michael Koller, Alessio Arleo, and Silvia Miksch, GD Contest 2018

Neuronale Netzwerke



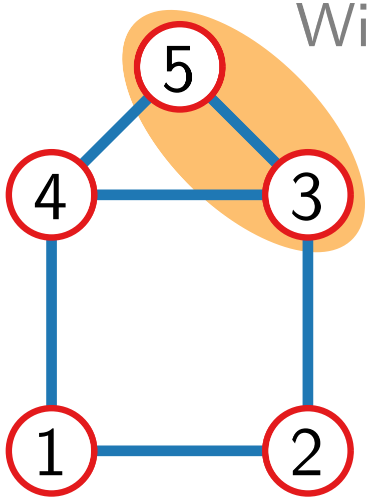
Source: Izaak Neutelings, `https://tikz.net/neural_networks`

Straßennetze

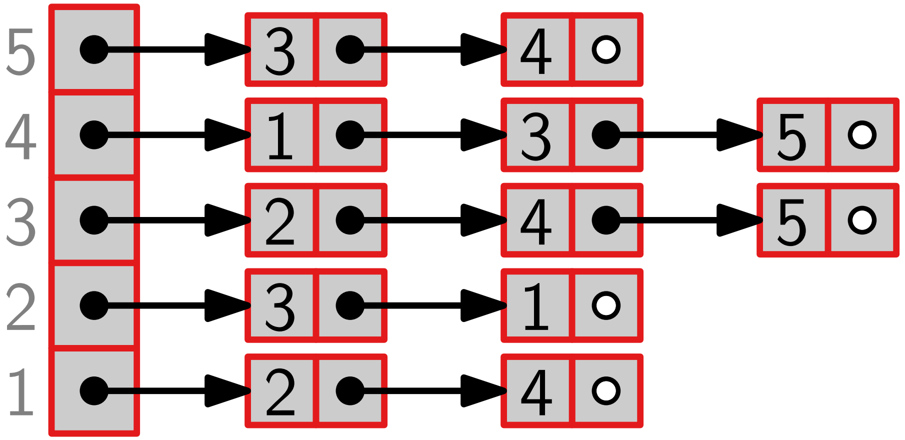


Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind **adjazent**.



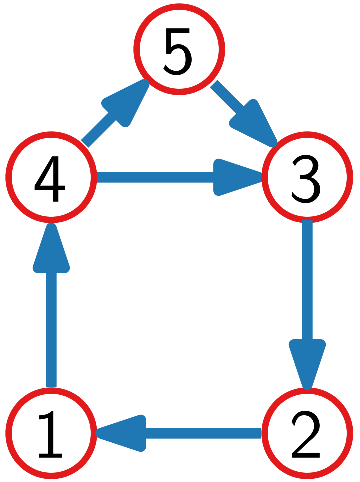
ungerichteter Graph



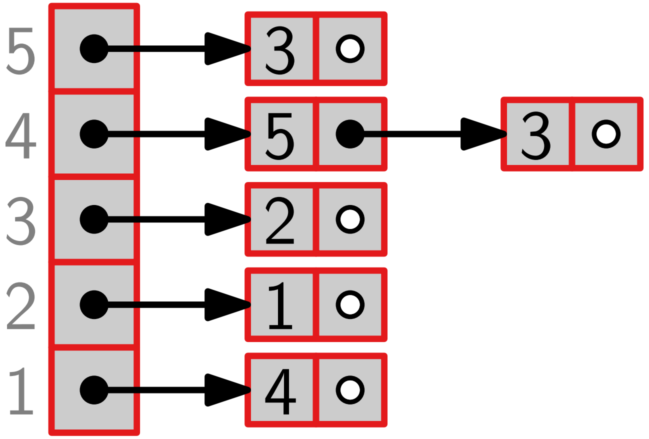
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



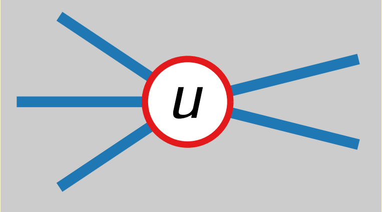
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0

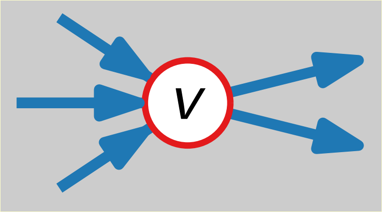
$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \; 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des **zweifachen Abzählens:**

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist **inzident** zu ihren Endknoten.

Ein Knoten ist **inzident** zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

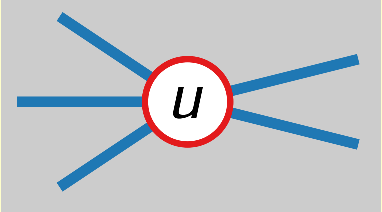
Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg(v)$

Aus Sicht der Kanten: $2 \cdot |E|$

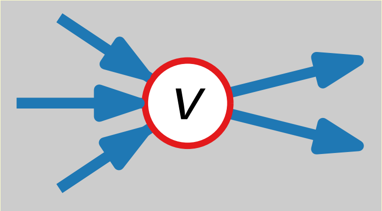
also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

✓

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)}_{\Rightarrow\ \textit{gerade!}}$

$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg(v)$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\text{ung}}|$ ist *gerade!* $\square$

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede **Kante** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{P}$

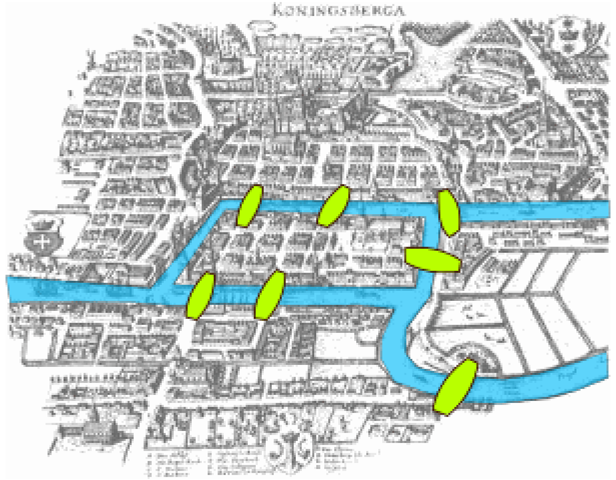
2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

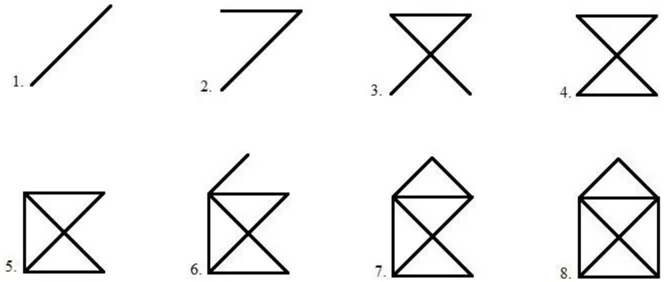
   $\mathcal{NP}$-schwer

Königsberger Brückenproblem



Bogdan Giușcă, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Das Haus vom Nikolaus



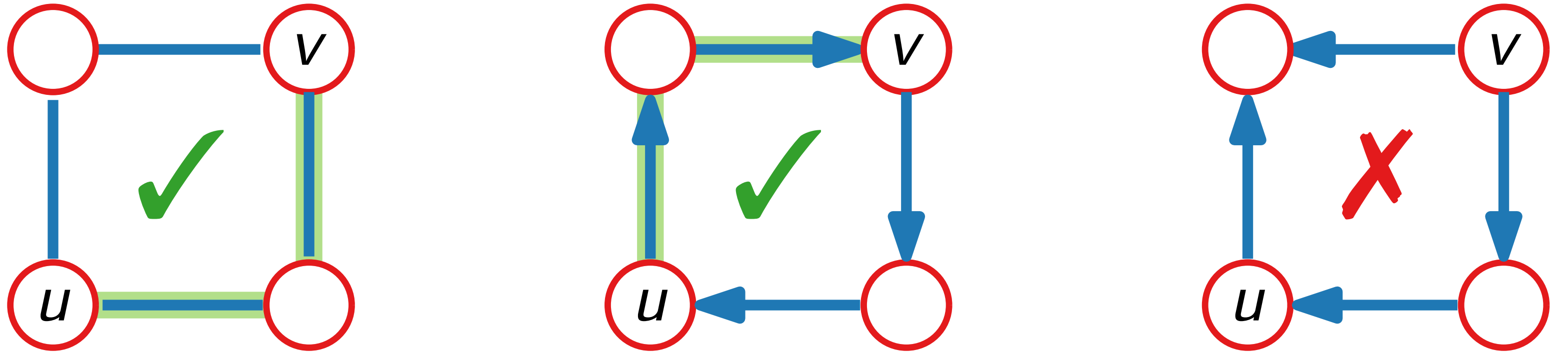
https://www.skizzen-zeichnungen.de/anleitung-zeichnen-vom-haus-vom-nikolaus/

Kapitän Nemo, Public domain, via Wikimedia Commons

Zusammenhang

Def. Ein (un)gerichteter **Pfad** von einem Knoten u zu einem Knoten v ist eine Folge von Kanten, die in u beginnt und in v endet.

Def. Ein Knoten v ist von einem Knoten u aus **erreichbar**, wenn es einen (un)gerichteten Pfad von u nach v gibt.



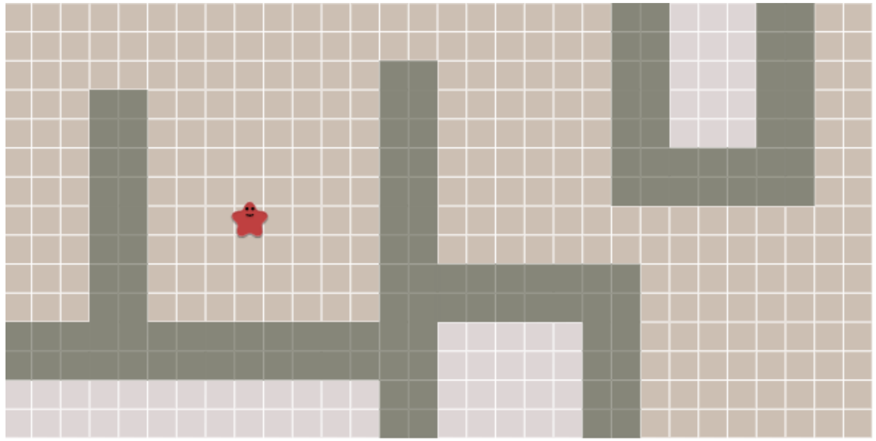
Def. Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jedes Knotenpaar voneinander aus erreichbar ist.

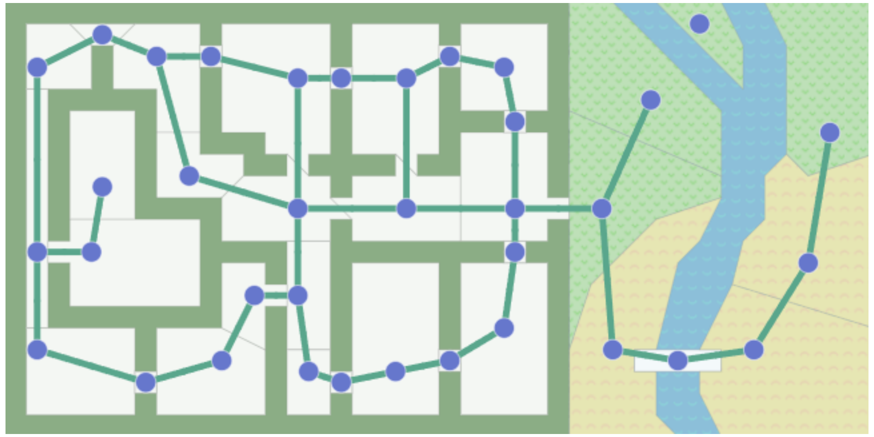
Def. Ein gerichteter Graph heißt **(schwach) zusammenhängend**, wenn der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist.

Def. Einen maximalen zusammenhängenden Teilgraphen nennt man eine **Zusammenhangskomponente**.

Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Wie finde ich heraus, welche Knoten von einem Startknoten s aus erreichbar sind?



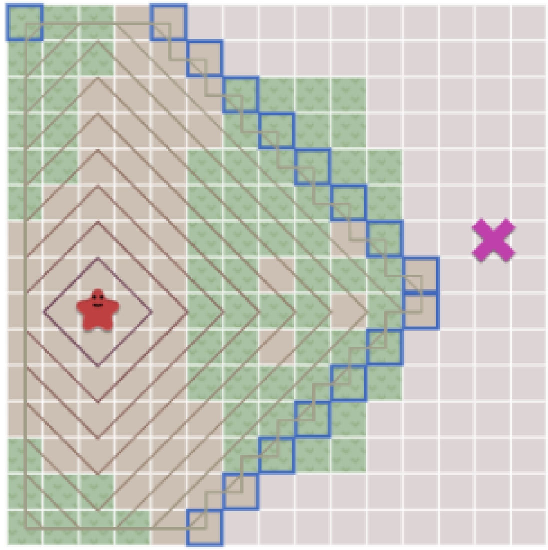


Amit Patel, "Introduction to the A^* Algorithm", Red Blob Games, 2014, https://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

1. wellenförmige Ausbreitung ab s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

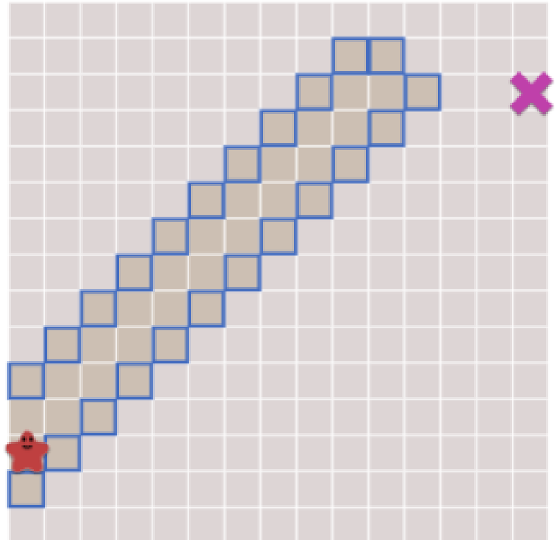
   heute



2. von s möglichst schnell weit weg

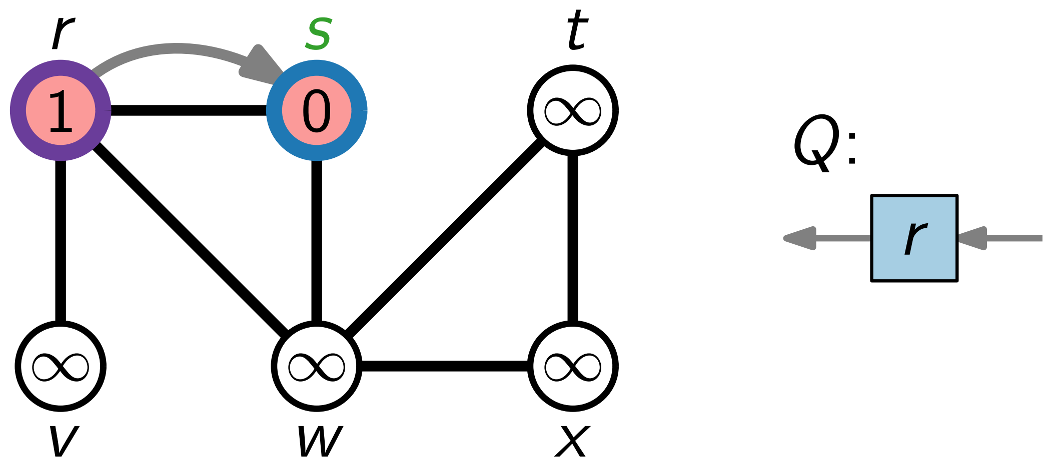
   Tiefensuche (depth-first search, DFS)

   nächstes Mal



Breitensuche

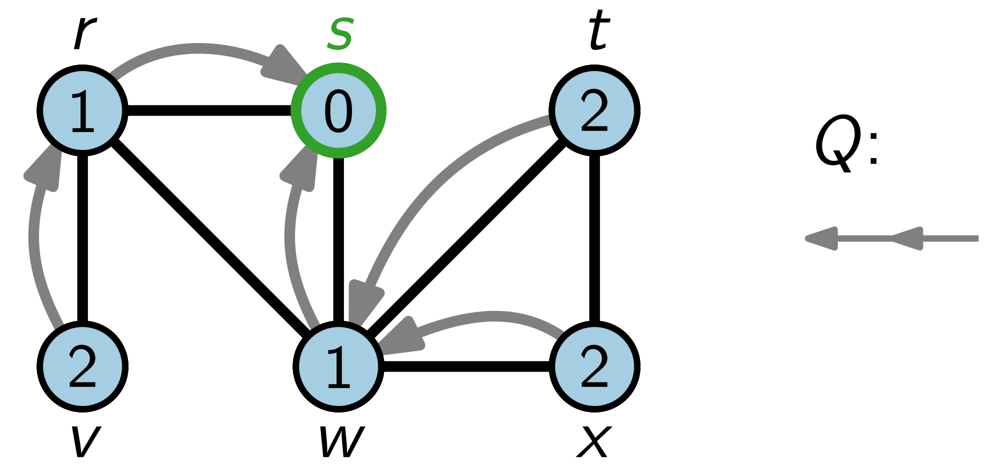
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = red
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
```




```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil        Vorgänger
  s.color = red
  s.d = 0
```

Breitensuche

BFS(Graph G, Vertex s)
  INITIALIZE(G, s)
  Q = new QUEUE()
  Q.ENQUEUE(s)
  while not Q.EMPTY() **do**
    $u = Q$.DEQUEUE()
    foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
      if $v.color == white$ **then**
        $v.color = red$
        $v.d = u.d + 1$
        $v.\pi = u$
        Q.ENQUEUE(v)
    $u.color = blue$

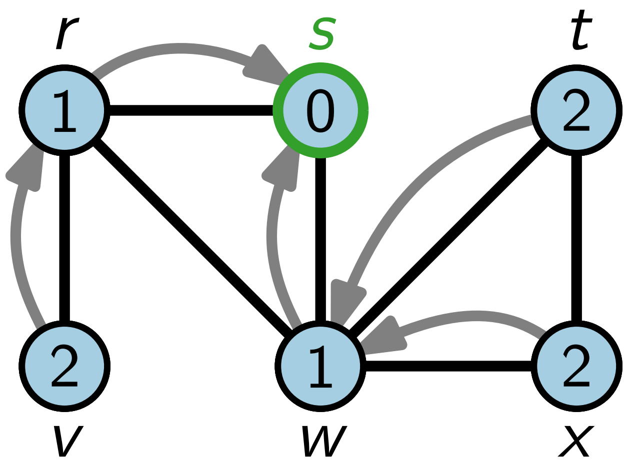


INITIALIZE(Graph G, Vertex s)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.d = \infty$
    $u.\pi = nil$ Vorgänger
  $s.color = red$
  $s.d = 0$

Demo.
https://algo.uni-trier.de/demos/graphtraversal.html

Breitensuche

BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() **do**
    $u = Q$.Dequeue()
    foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
      if $v.color == white$ **then**
        $v.color = red$
        $v.d = u.d + 1$
        $v.\pi = u$
        Q.Enqueue(v)
    $u.color = blue$



Q:

Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.d = \infty$
    $u.\pi = nil$ Vorgänger
  $s.color = red$
  $s.d = 0$

Laufzeit?

$$\underbrace{\mathcal{O}(|V|)}_{\text{Initialize}} + \underbrace{\mathcal{O}(|V|)}_{\text{En-/Dequeues}} + \underbrace{\mathcal{O}(|E|)}_{\text{Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)}} = \mathcal{O}(|V| + |E|)$$

Beob. über Knotengrade!

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

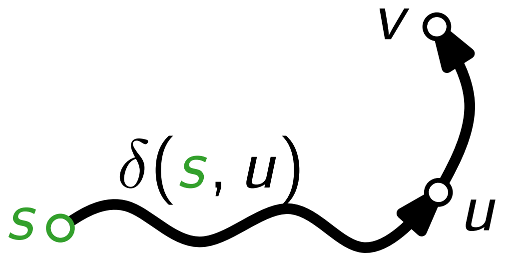
Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$\underbrace{v.d}_{\text{berechneter Abstand von } s} = \underbrace{\delta(s, v)}_{\text{tatsächlicher Abstand von } s}.$$

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.
$\Downarrow$
Kürzester s-v-Weg hat Länge $\leq \delta(s, u) + 1$.

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach $\mathrm{BFS}(G, s)$ für alle $v \in V$ gilt:

$$v.d = \delta(s, v).$$

berechneter Abstand von s — **tatsächlicher** Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 2. Fall: u ist **nicht** von s erreichbar (d.h. $\nexists$ s-u-Weg)

$\Rightarrow \delta(s, u) = \infty$
$\Rightarrow \delta(s, v) \leq \infty + 1$ ✓

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$
✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anzahl k von Enqueue-Operationen.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = red
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = blue
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

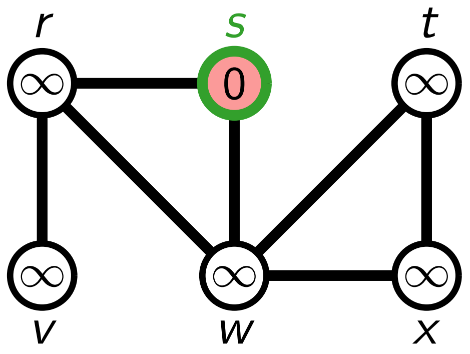
$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v): ✓

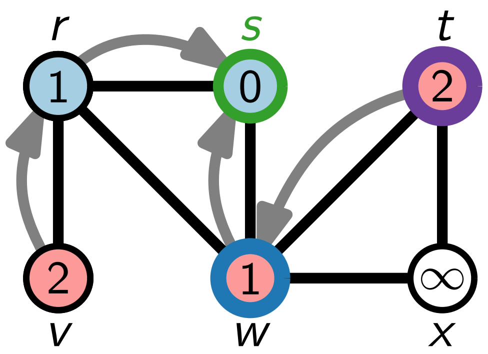
v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \underbrace{\geq}_{\text{Induktionsannahme für } u} \delta(s, u) + 1 \underbrace{\geq \delta(s, v)}_{\text{Lemma 1}}$$

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$)

Jetzt ist v rot. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr. □





Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:
(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und
(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \dots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korollar. Angenommen u wird früher als v in Q eingefügt, dann gilt $u.d \leq v.d$, wenn v in Q eingefügt wird.

Beweis. Folgt aus Lemma 3 und der Tatsache, dass jeder Knoten $\leq 1\times$ einen endlichen d-Wert bekommt.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G.
Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt:
es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also $\boxed{\text{(i)}}$ zu zeigen.

Lemma 2 $\Rightarrow$ $v.d \geq \delta(s, v)$. Noch z.z.: $v.d \leq \delta(s, v)$.

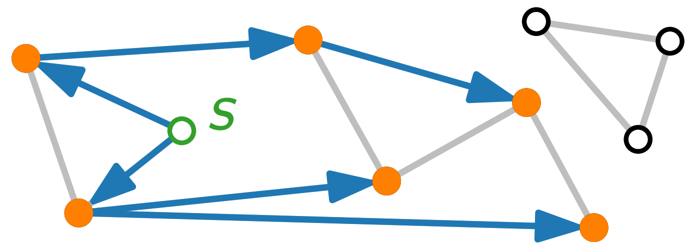
Widerspruchsbeweis mit Wahl des „kleinsten Schurken“.

Siehe Kapitel 22.2 [CLRS].

BFS-Bäume

Betrachte den **Vorgänger-Graphen** $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $\boxed{V_\pi} = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $\boxed{E_\pi} = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Behauptung: G_π ist ein **Kürzeste-Wege-Baum** (oder **BFS-Baum**), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis: Folgt aus (ii) und (iii) im Hauptsatz. $\square$