



Julius-Maximilians-

UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für

INFORMATIK I

Algorithmen & Komplexität



Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2024/25

17. Vorlesung

Nächstes Paar

Themen für den 3. Zwischentest (Do, 16.1.25)

- Rot-Schwarz-Bäume (R-S-Eigenschaften, Höhe)
- Augmentieren von Datenstrukturen
- Nächstes Paar (Teile und Herrsche)
- Amortisierte Analyse
- Graphen und Breitensuche

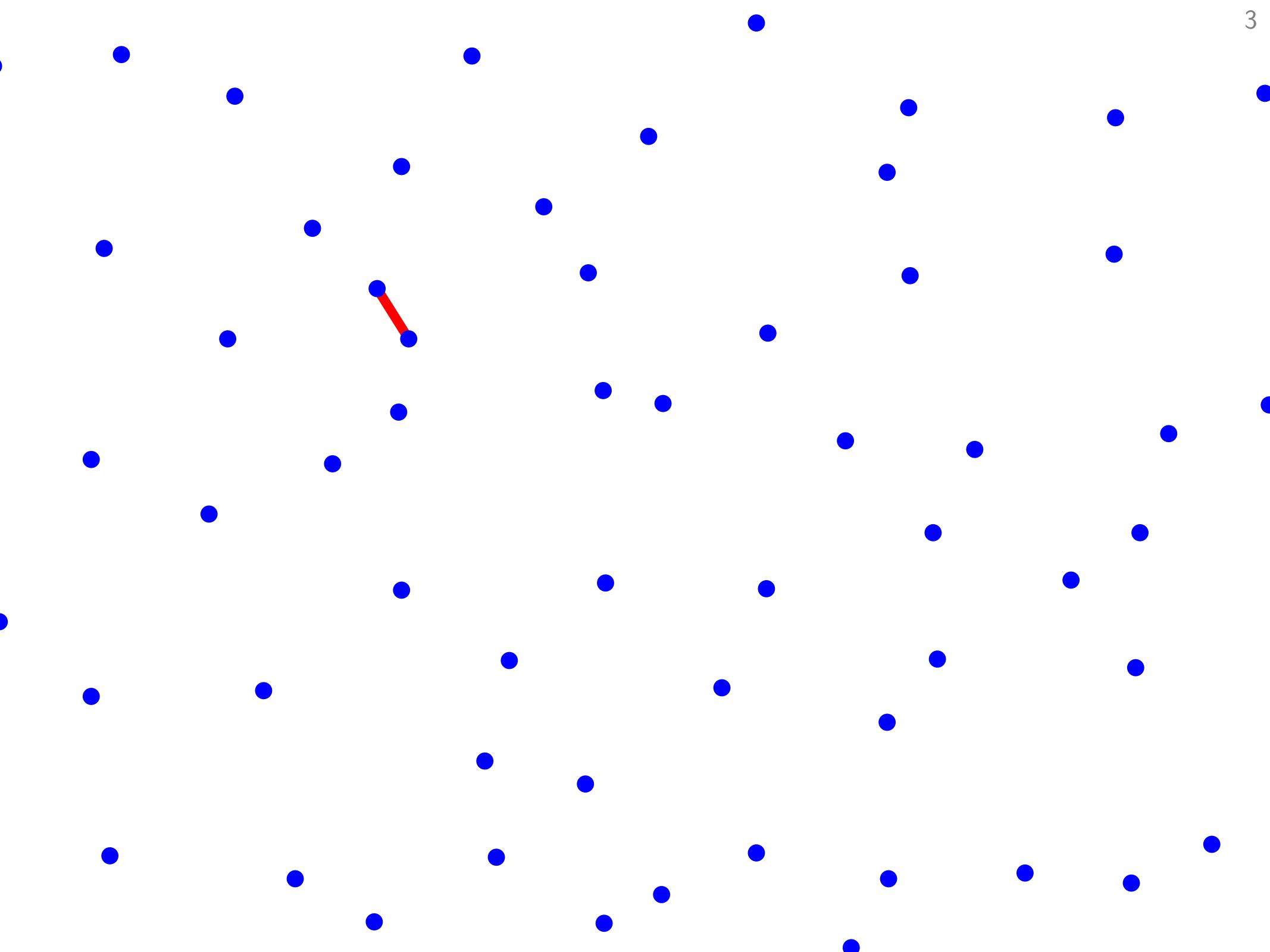
das

nächste

Wo

ist

Paar?



Problem:

- Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene,
jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .

Problem:

- Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene,
jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .
Finde: Punktpaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem
(euklidischen) Abstand.

Problem:

- Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene,
jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .
Finde: Punktpaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem
(euklidischen) Abstand.
- **Def.** Euklidischer Abstand von p und q ist
$$d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}.$$

Problem:

- Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene,
jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .
Finde: Punktpaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem
(euklidischen) Abstand.
- **Def.** Euklidischer Abstand von p und q ist
$$d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}.$$

Lösung:

Problem:

- Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene,
jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .
Finde: Punktpaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem
(euklidischen) Abstand.
- **Def.** Euklidischer Abstand von p und q ist
$$d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}.$$

Lösung:

- Gehe durch alle $\binom{n}{2}$ Punktpaare und berechne ihren Abstand.
- Gib ein Paar mit kleinstem Abstand zurück.

Problem:

- Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene, jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .
Finde: Punktpaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem (euklidischen) Abstand.
- **Def.** Euklidischer Abstand von p und q ist $d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$.

Lösung:**Laufzeit:**

- Gehe durch alle $\binom{n}{2}$ Punktpaare und berechne ihren Abstand.
- Gib ein Paar mit kleinstem Abstand zurück.

Problem:

Gegeben: Menge P von n Punkten in der Ebene,
jeder Punkt $p \in P$ als (x_p, y_p) .

Finde: Punktpaar $\{p, q\} \subseteq P$ mit kleinstem
(euklidischen) Abstand.

Def. Euklidischer Abstand von p und q ist
 $d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$.

Lösung:**Laufzeit:** $\Theta(n^2)$

- Gehe durch alle $\binom{n}{2}$ Punktpaare und berechne ihren Abstand.
- Gib ein Paar mit kleinstem Abstand zurück.

Mach's besser!

- Entwurfsparadigma:**
- inkrementell?
 - randomisiert?
 - Teile und Herrsche?

Mach's besser!

- Entwurfsparadigma:**
- inkrementell?
 - randomisiert?
 - Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Mach's besser!

- Entwurfsparadigma:**
- inkrementell?
 - randomisiert?
 - Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Lösung:

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?
– randomisiert?
– Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Lösung:

- Sortiere (nach x-Koordinate).

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?
– randomisiert?
– Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Lösung:

- Sortiere (nach x-Koordinate).
- Berechne Abstände aller *aufeinanderfolgender* Punktpaare.

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?
– randomisiert?
– Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Lösung:

- Sortiere (nach x-Koordinate).
- Berechne Abstände aller *aufeinanderfolgender* Punktpaare.
- Bestimme das Minimum dieser Abstände.

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?
– randomisiert?
– Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Lösung:

- Sortiere (nach x-Koordinate).
- Berechne Abstände aller *aufeinanderfolgender* Punktpaare.
- Bestimme das Minimum dieser Abstände.

Strukturelle Einsicht:

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?
– randomisiert?
– Teile und Herrsche?

Spezialfall:



Lösung:

- Sortiere (nach x-Koordinate).
- Berechne Abstände aller *aufeinanderfolgender* Punktpaare.
- Bestimme das Minimum dieser Abstände.

Strukturelle Einsicht:

Kandidatenmenge der Größe $n - 1$,
die gesuchtes Objekt enthält.

Mach's besser!

Entwurfsparadigma: – inkrementell?

– randomisiert?

– Teile und Herrsche?!

Spezialfall:

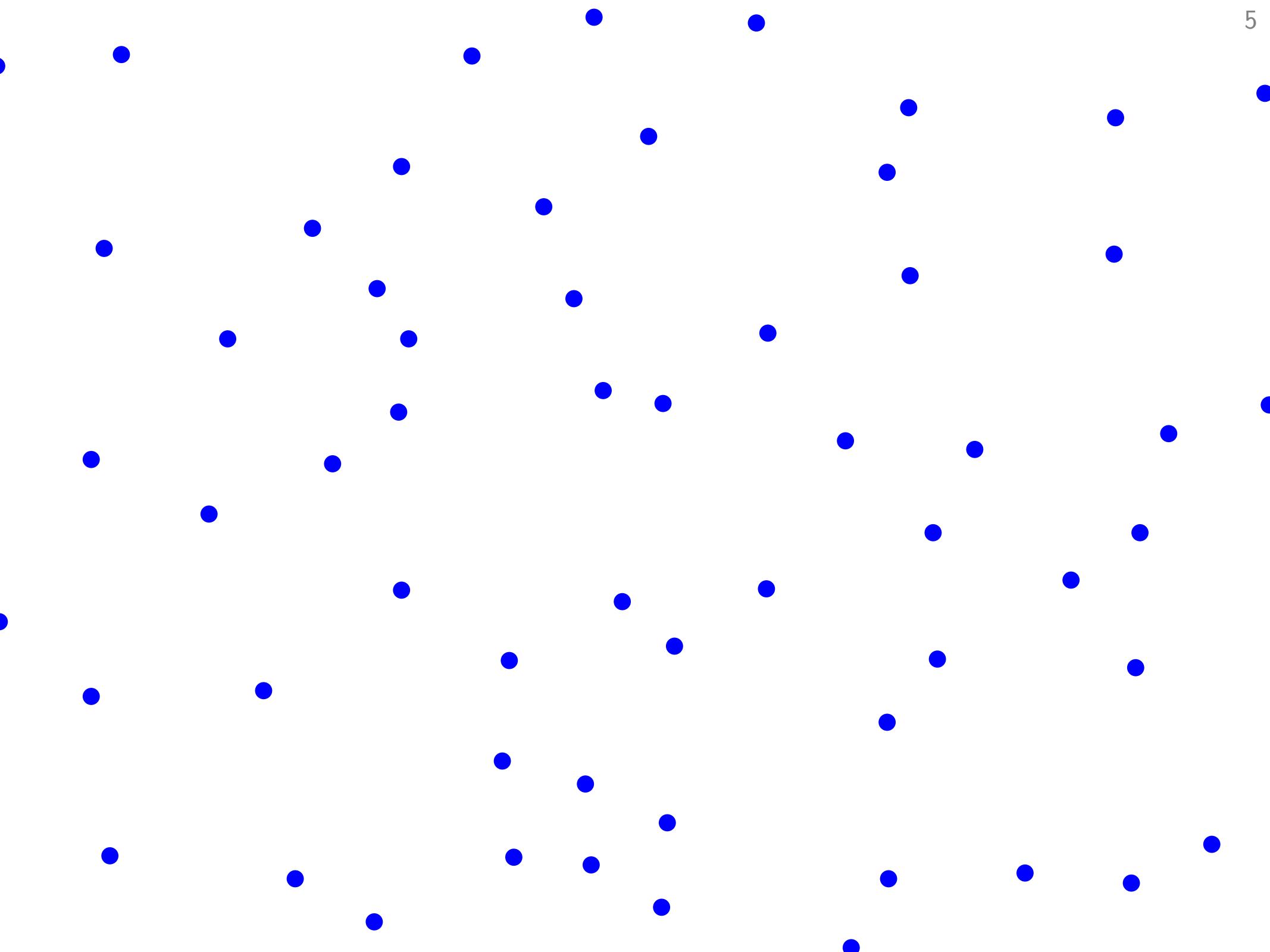


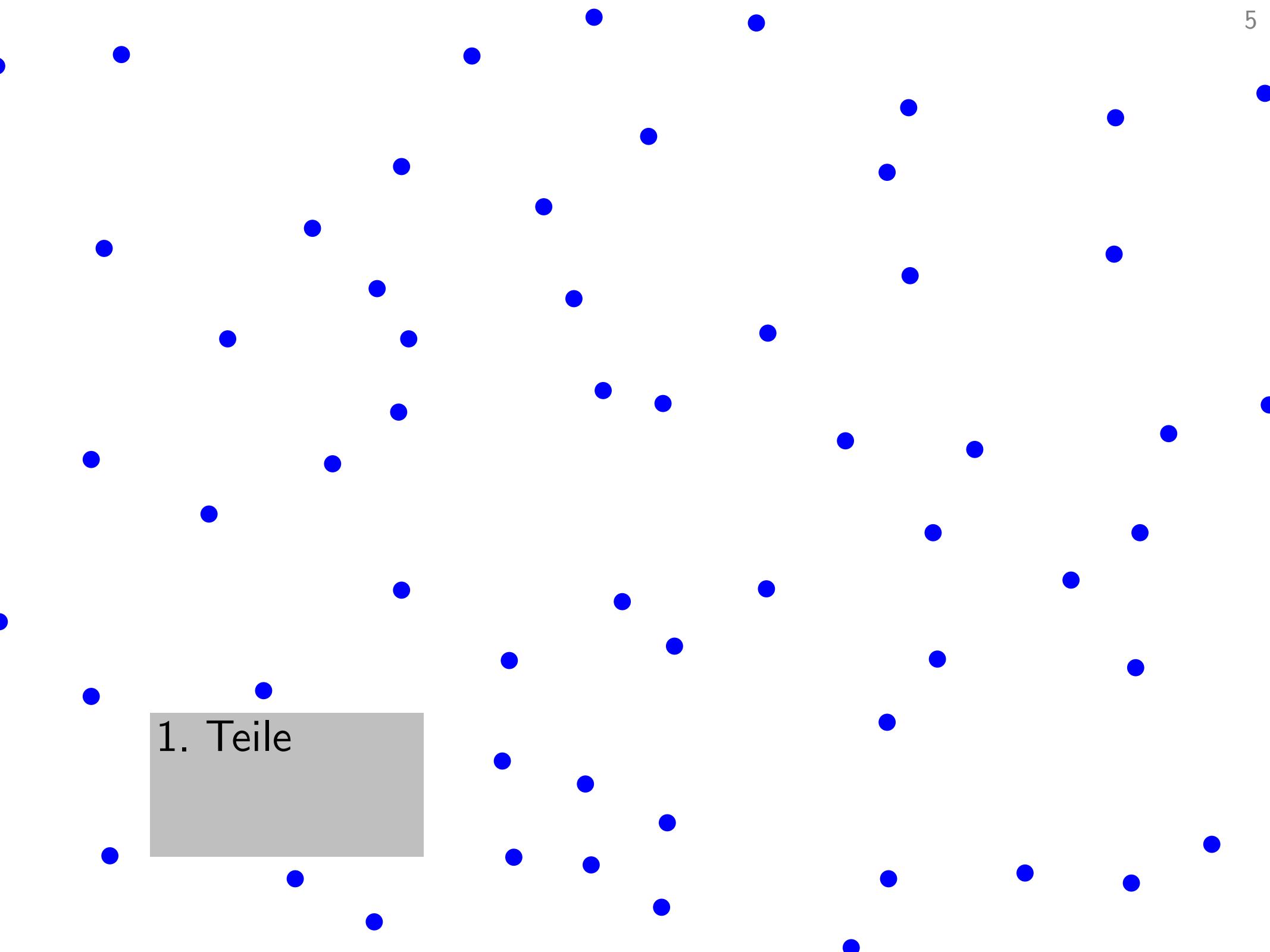
Lösung:

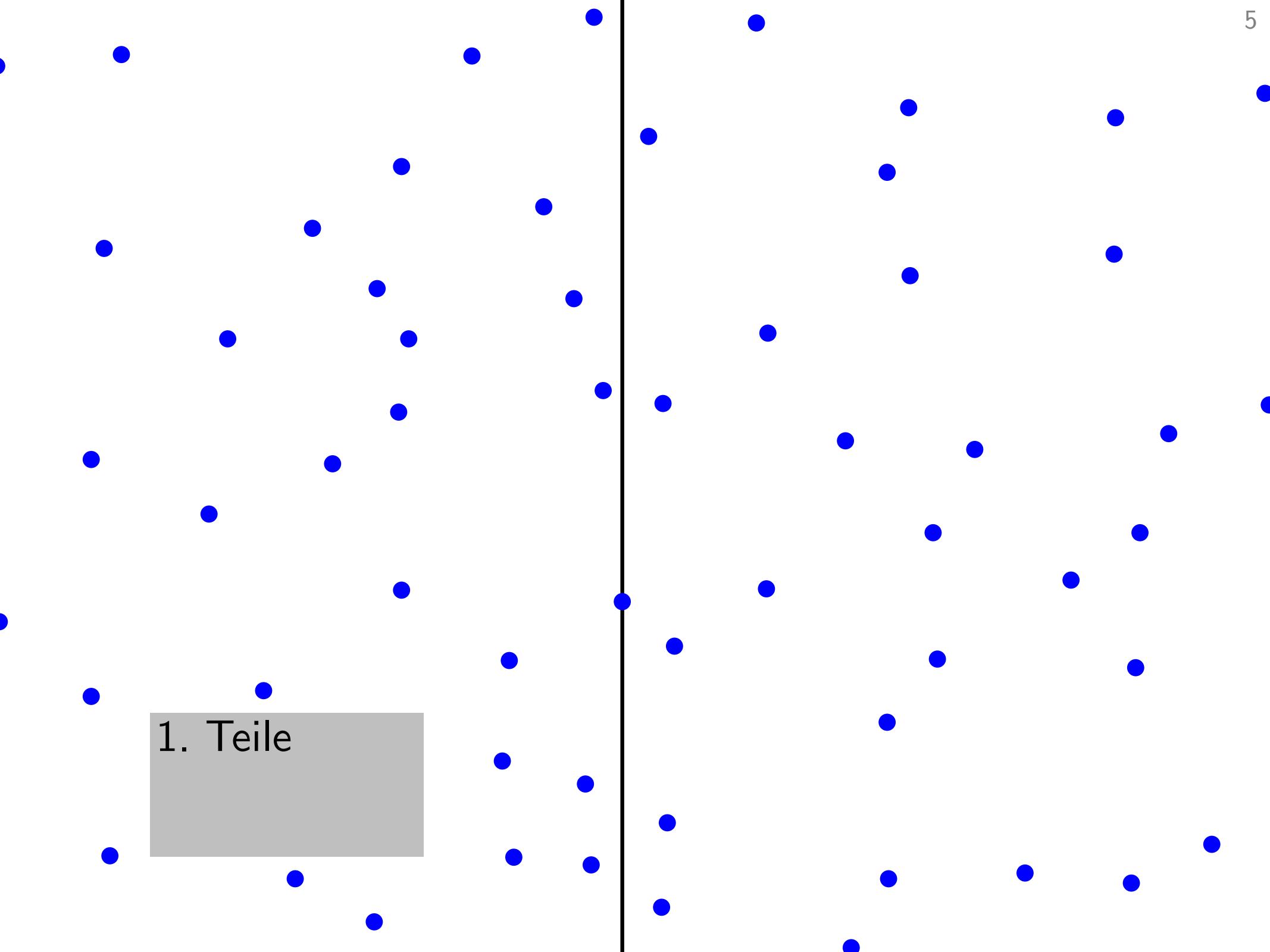
- Sortiere (nach x-Koordinate).
- Berechne Abstände aller *aufeinanderfolgender* Punktpaare.
- Bestimme das Minimum dieser Abstände.

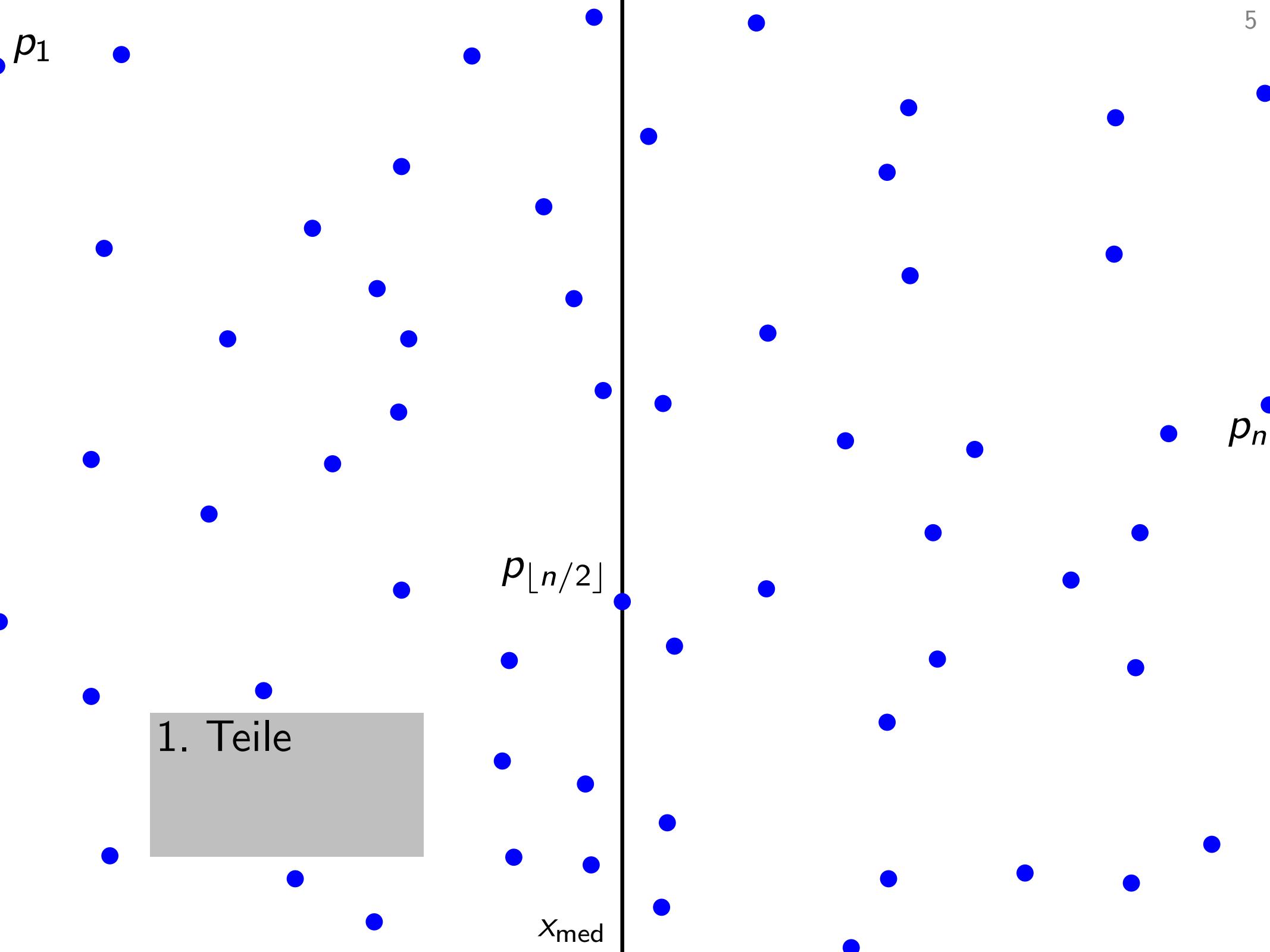
Strukturelle Einsicht:

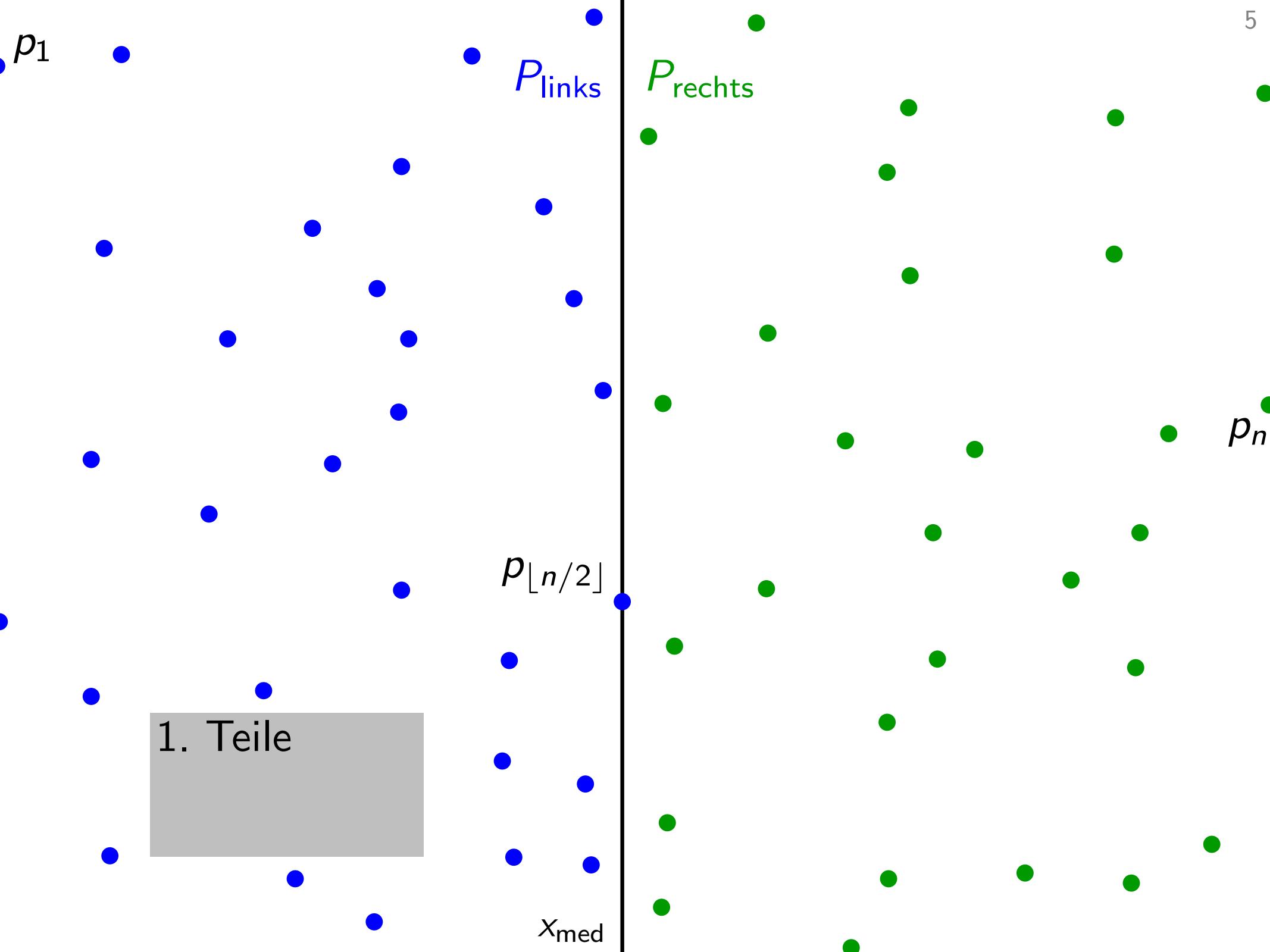
Kandidatenmenge der Größe $n - 1$,
die gesuchtes Objekt enthält.

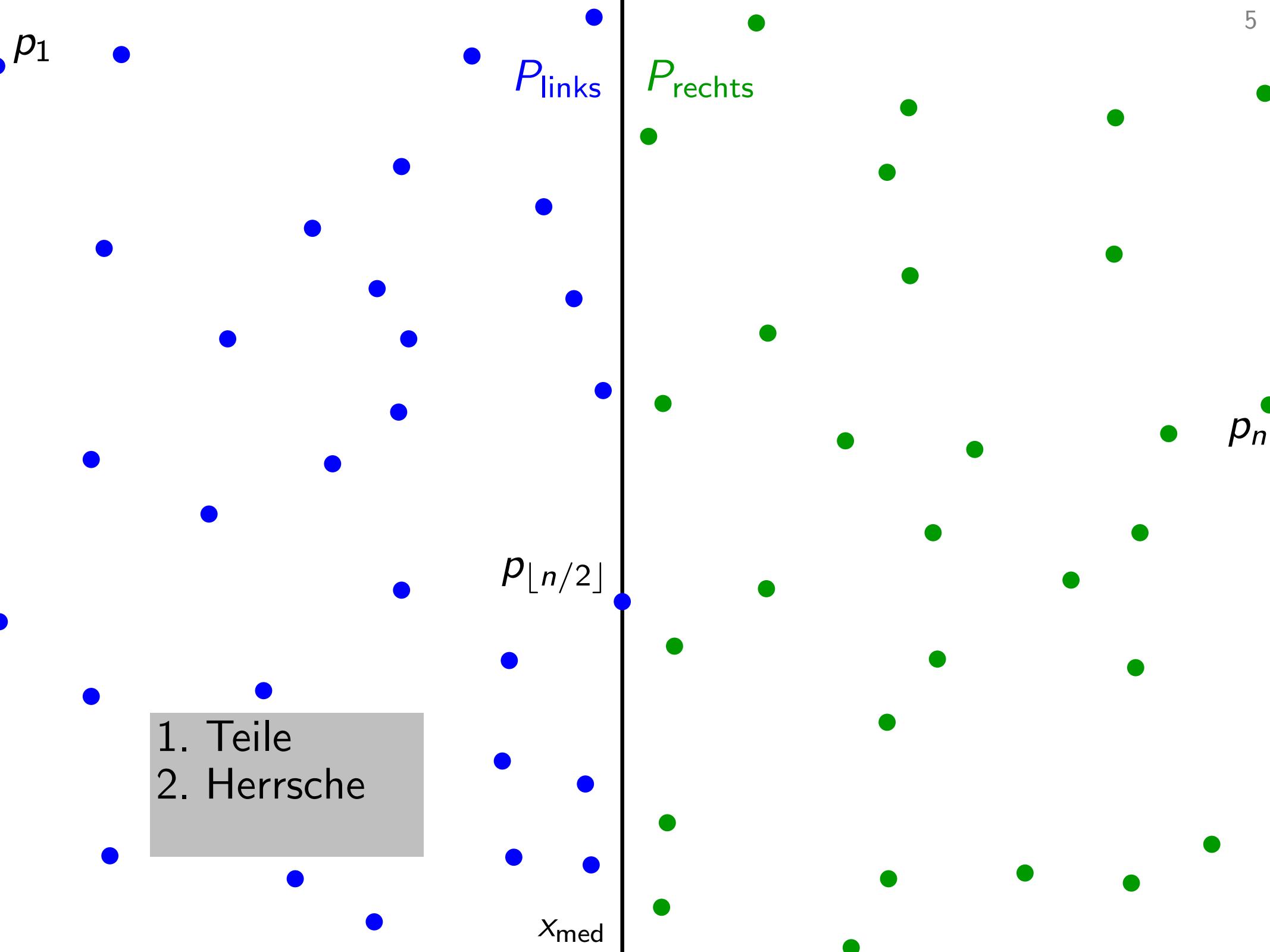


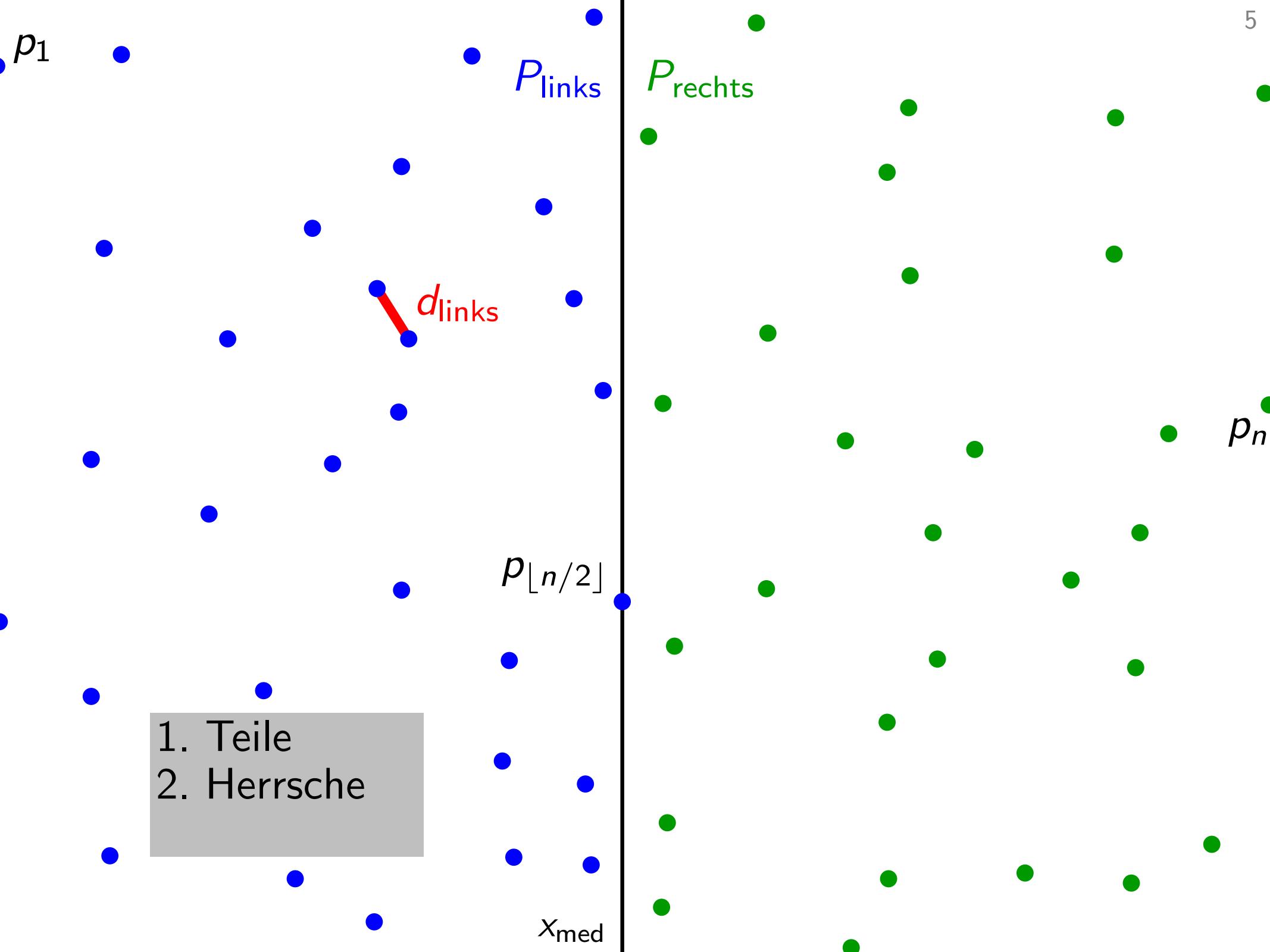


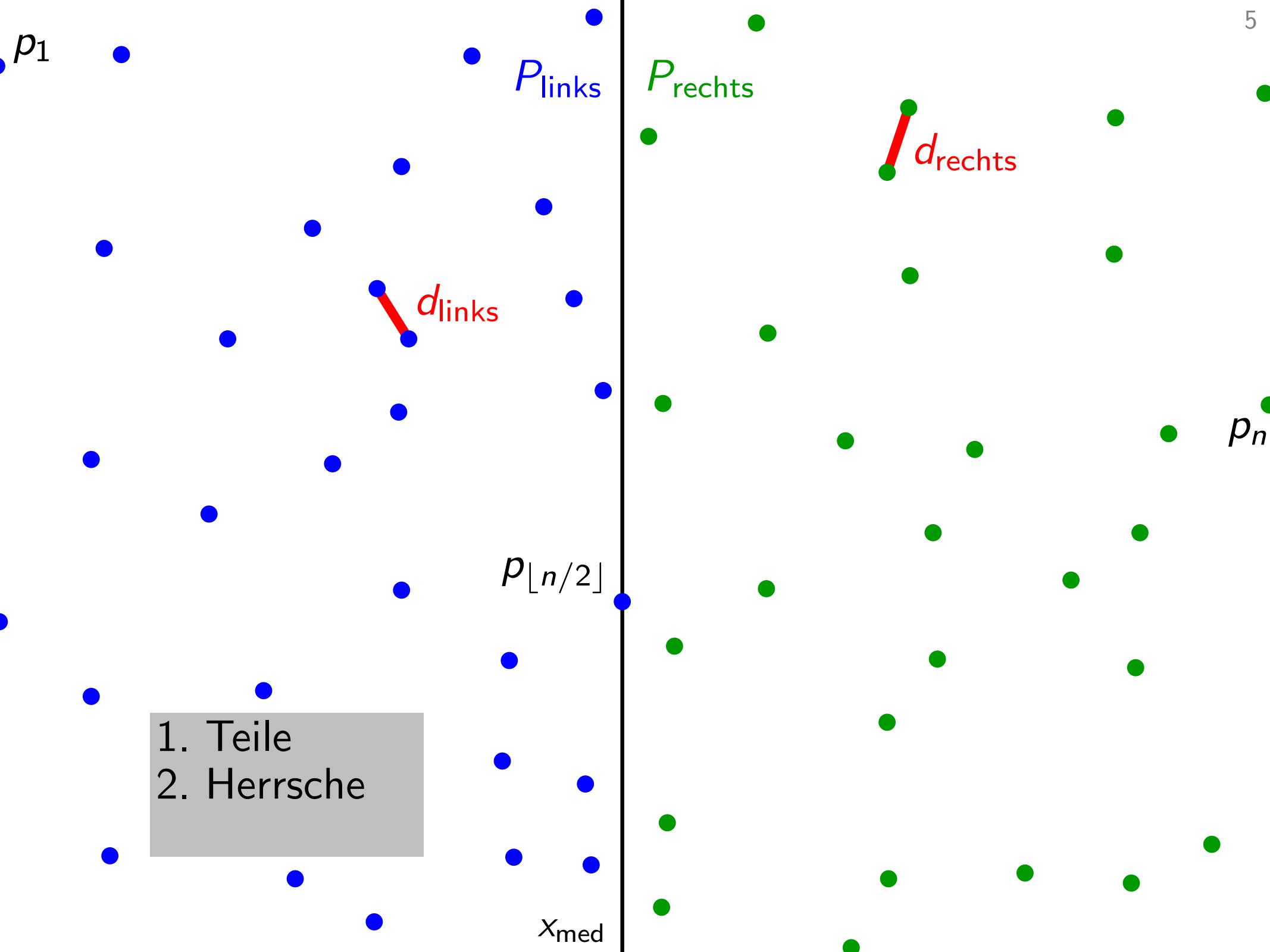


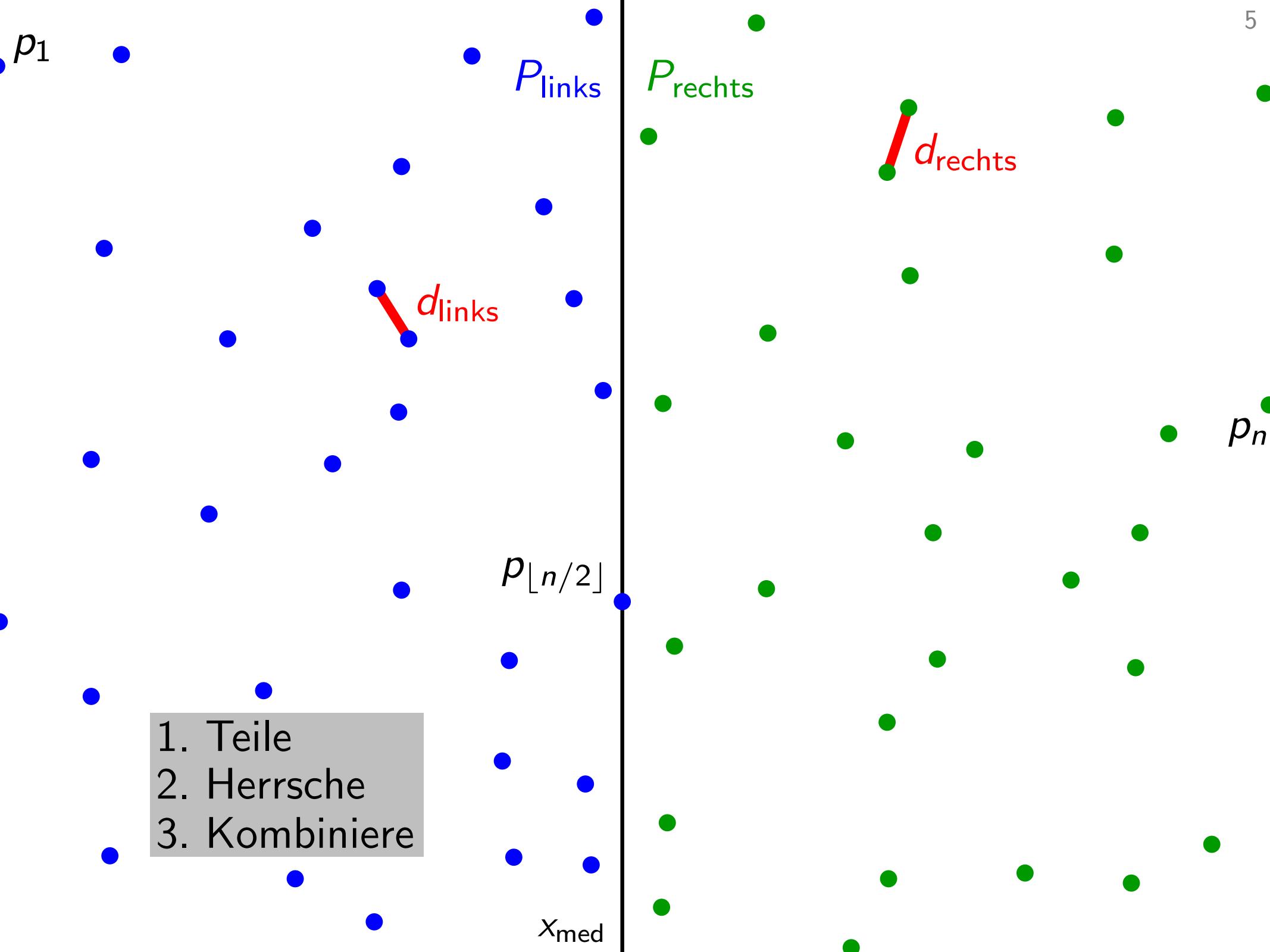


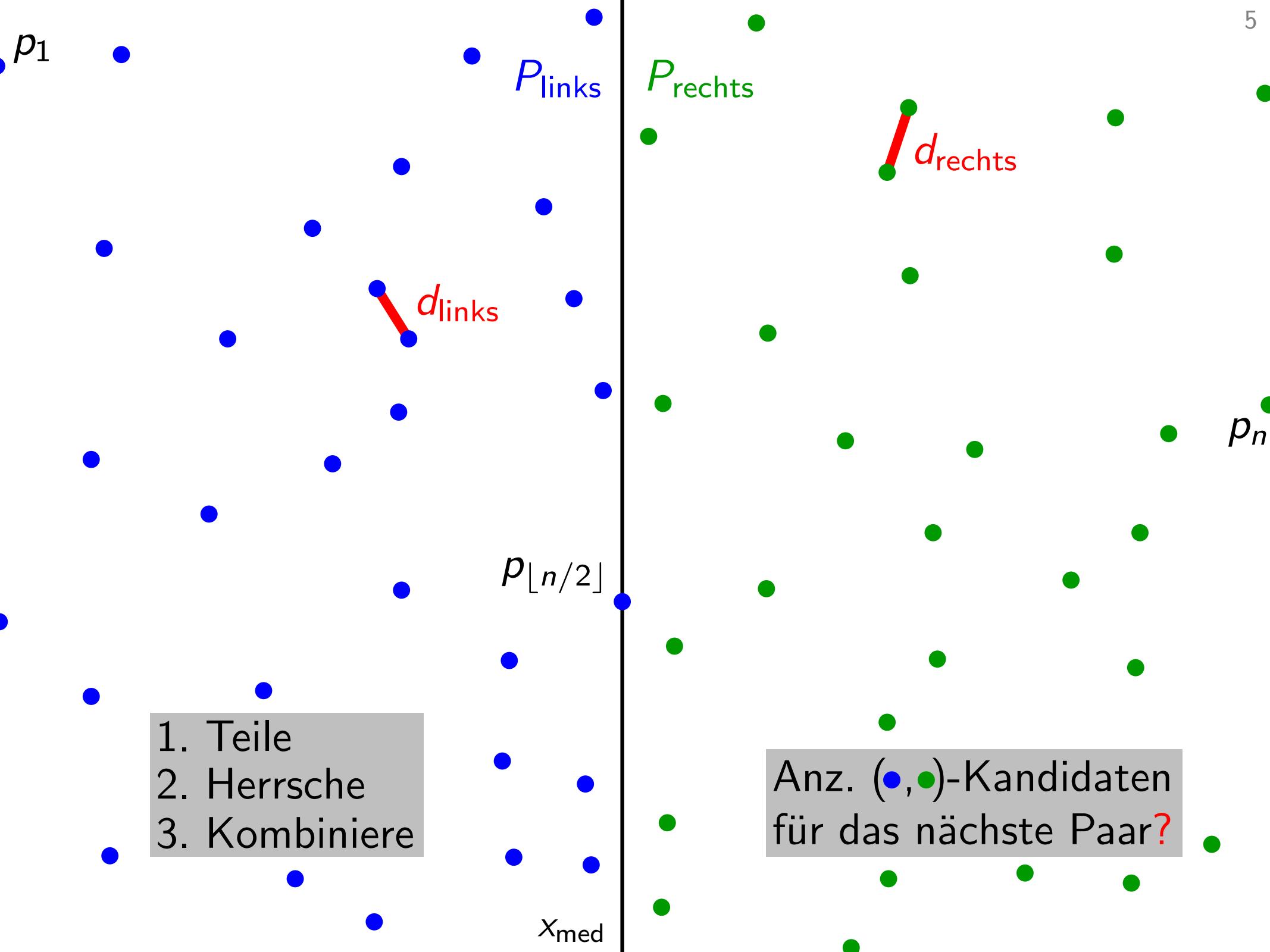


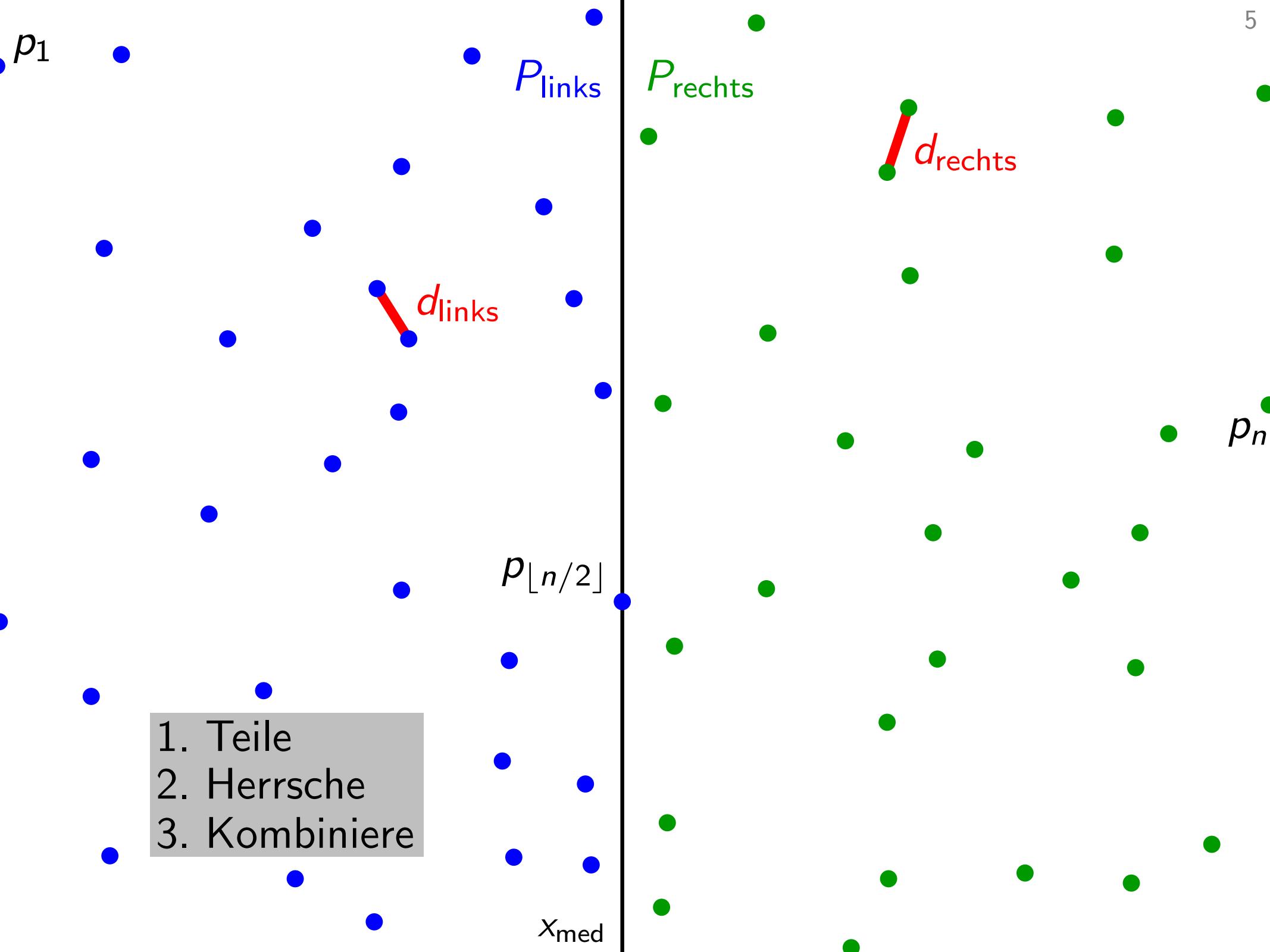


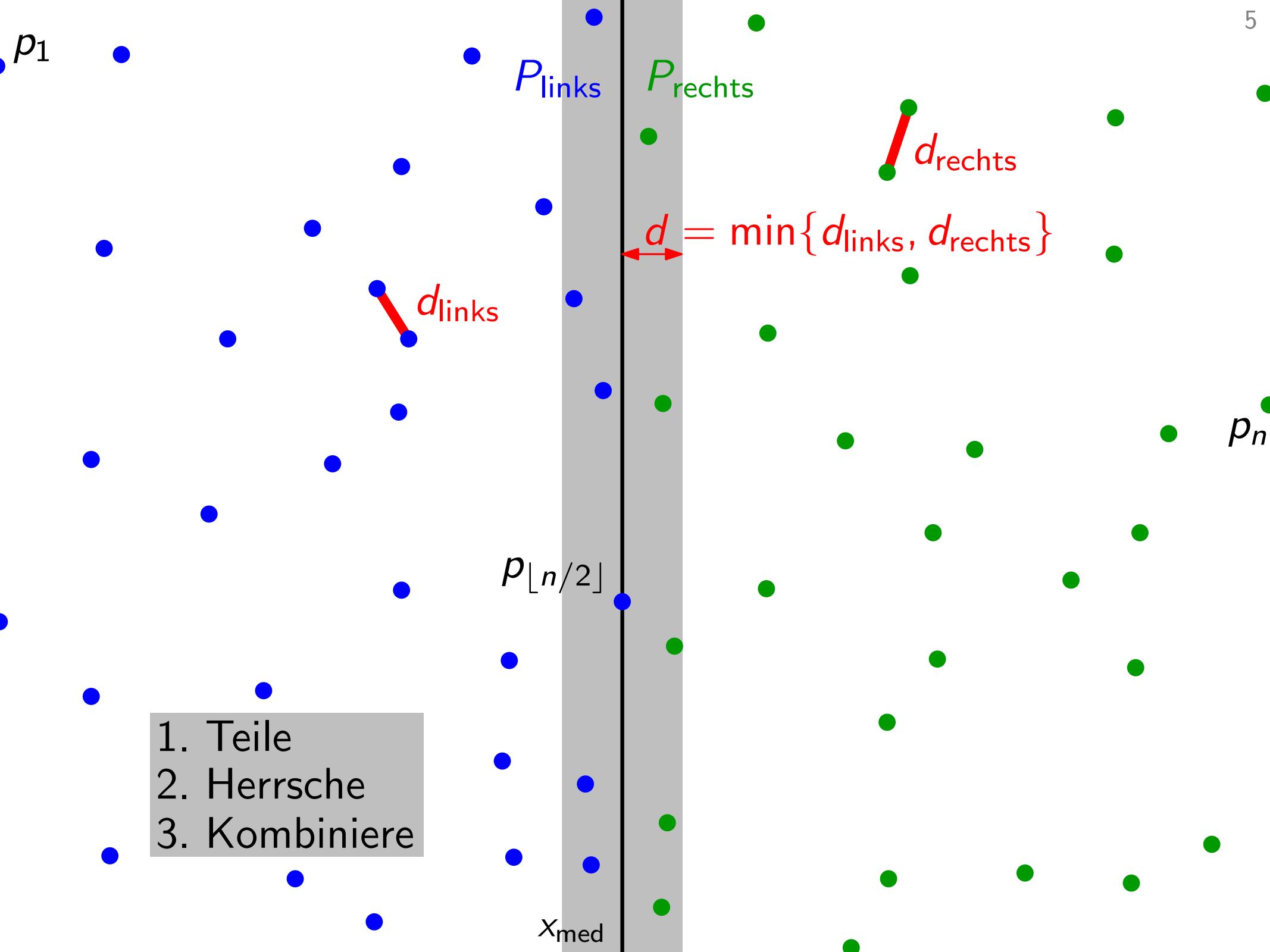


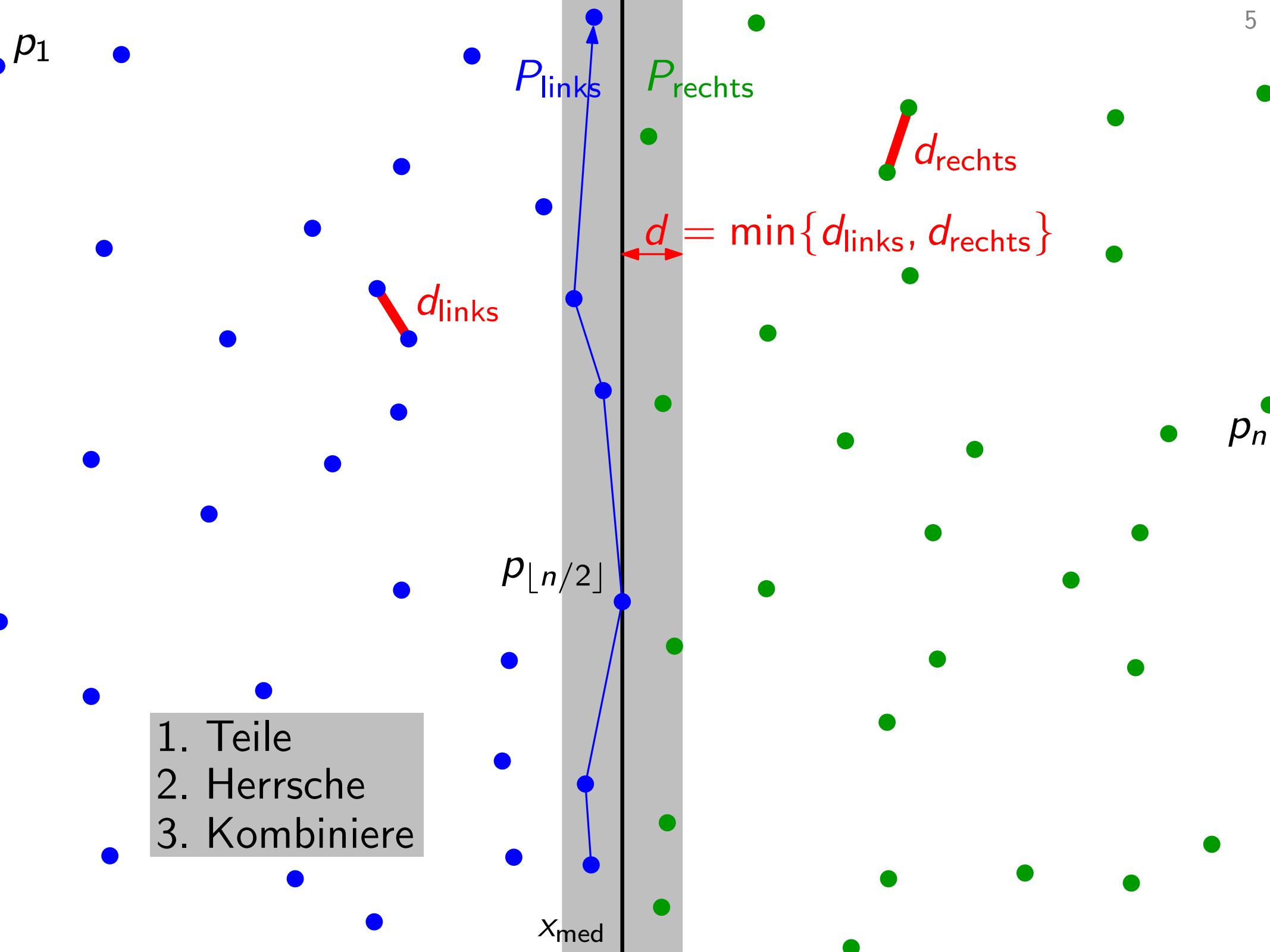


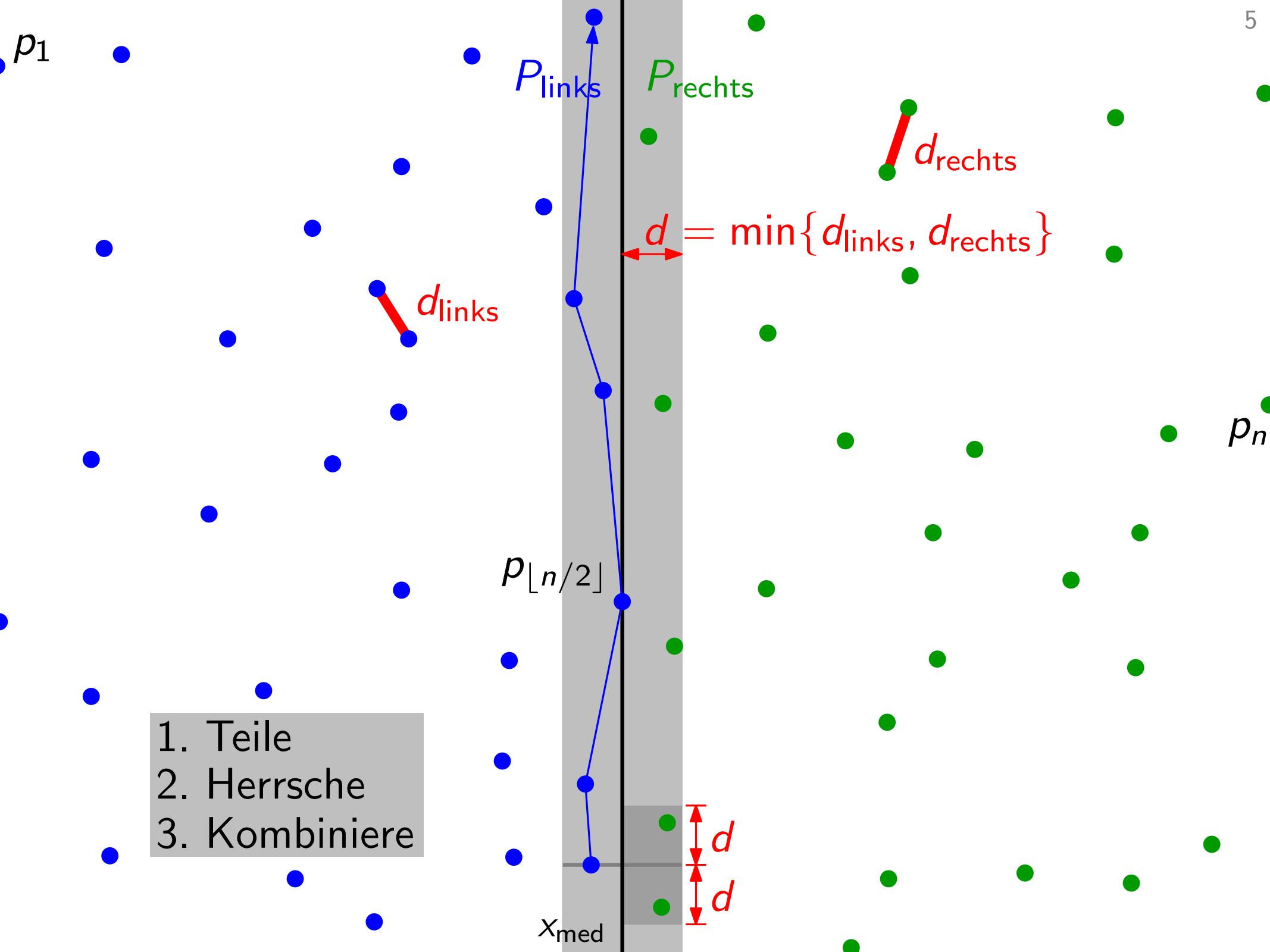


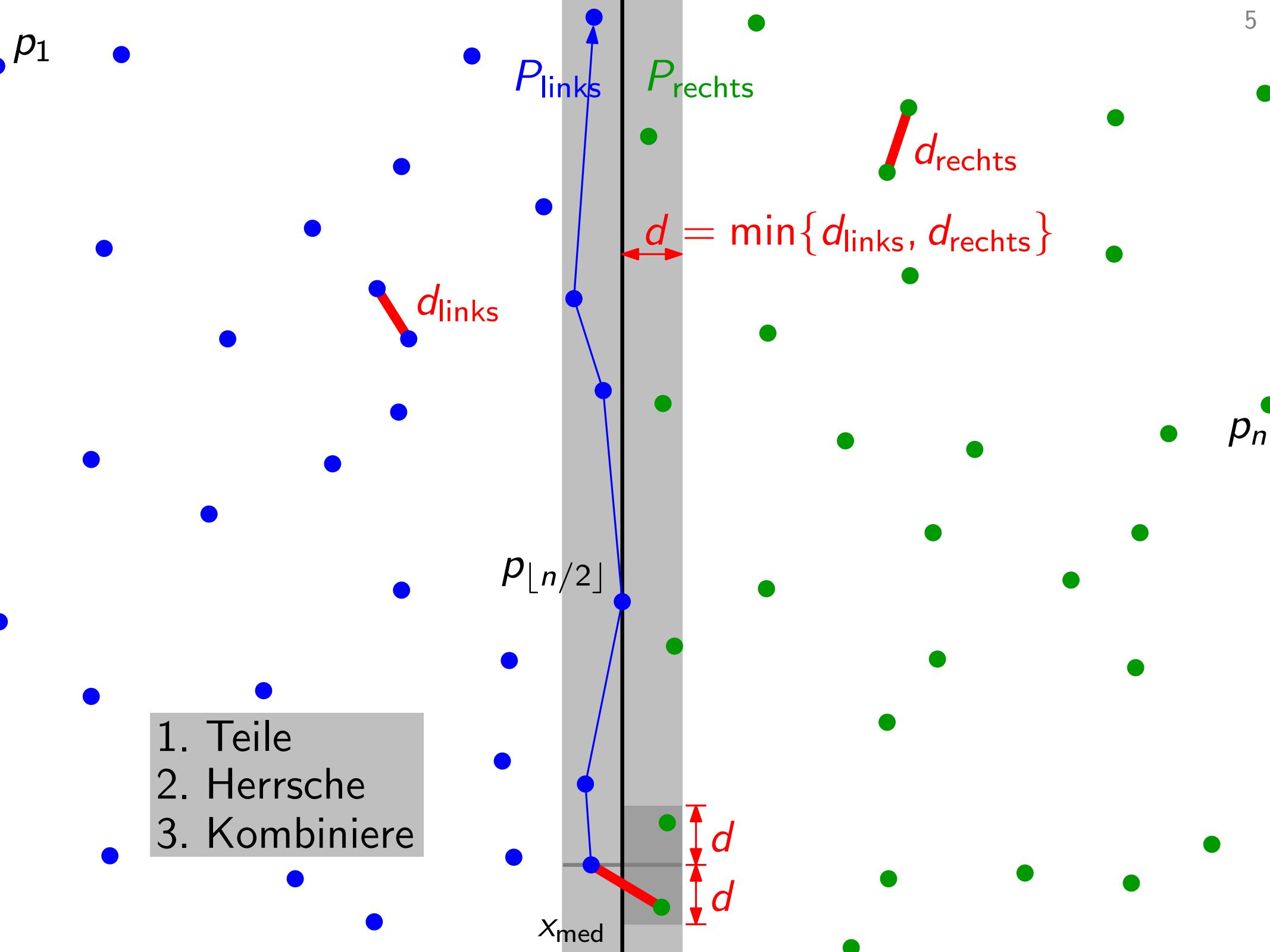


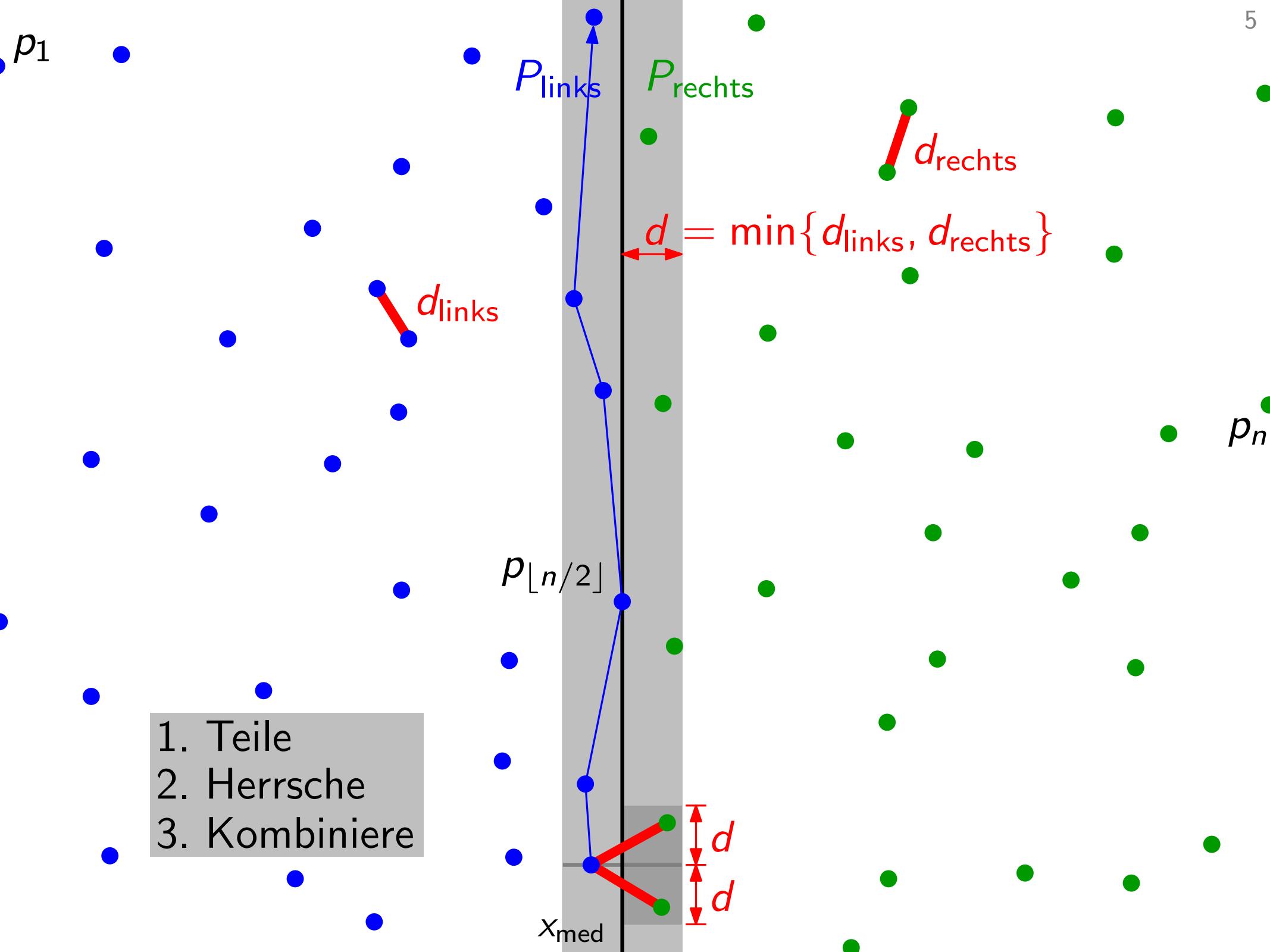


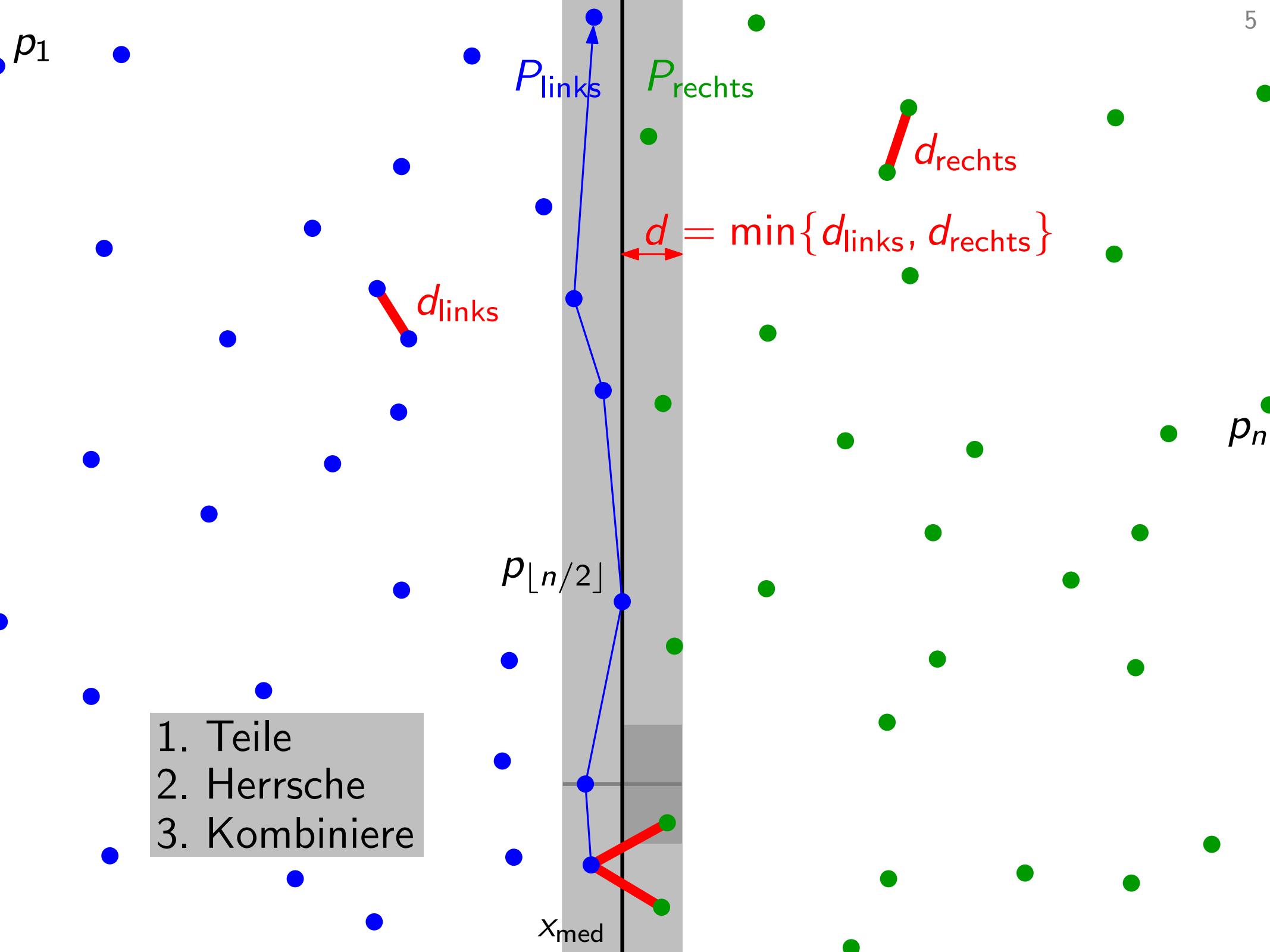


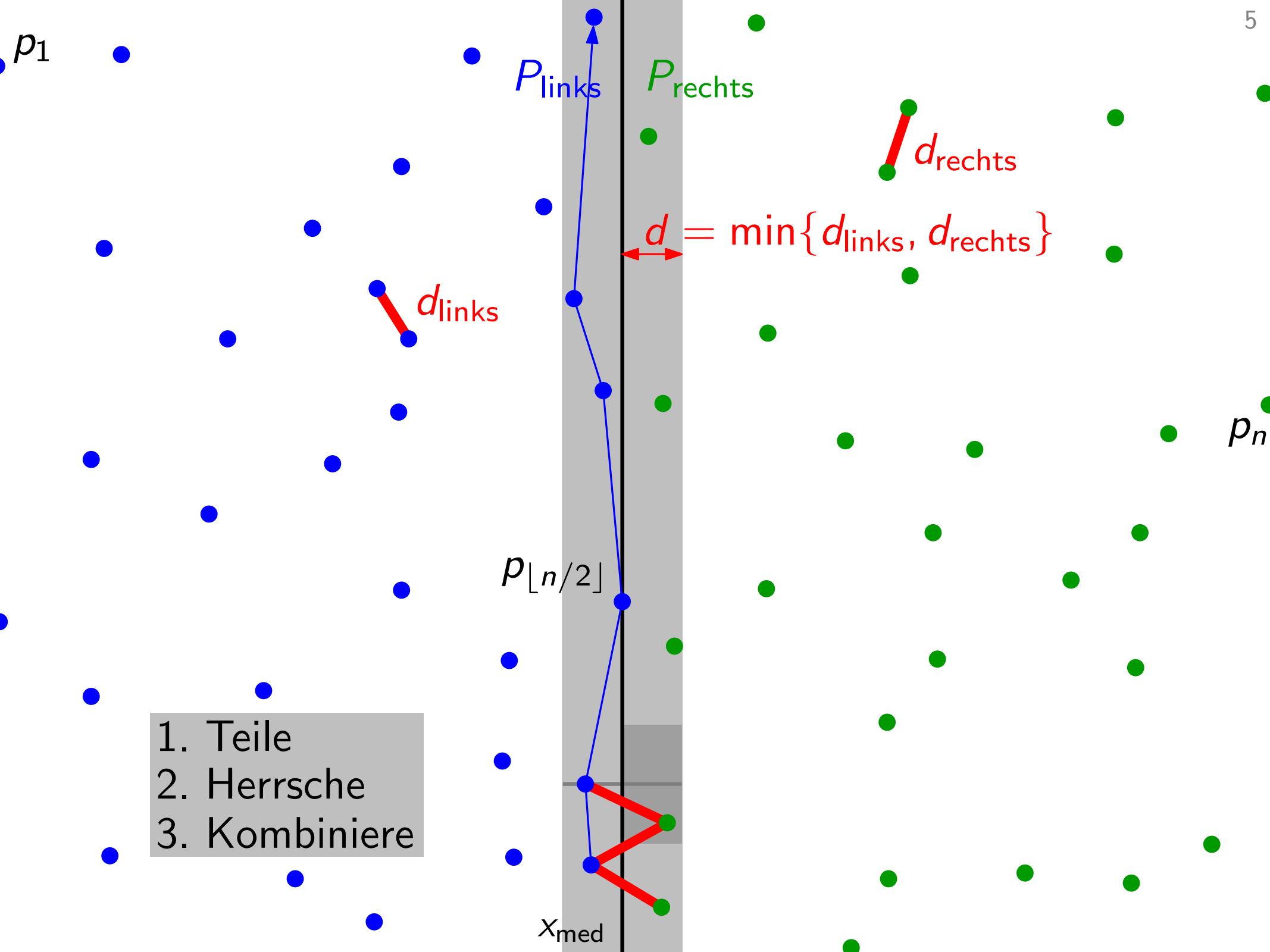


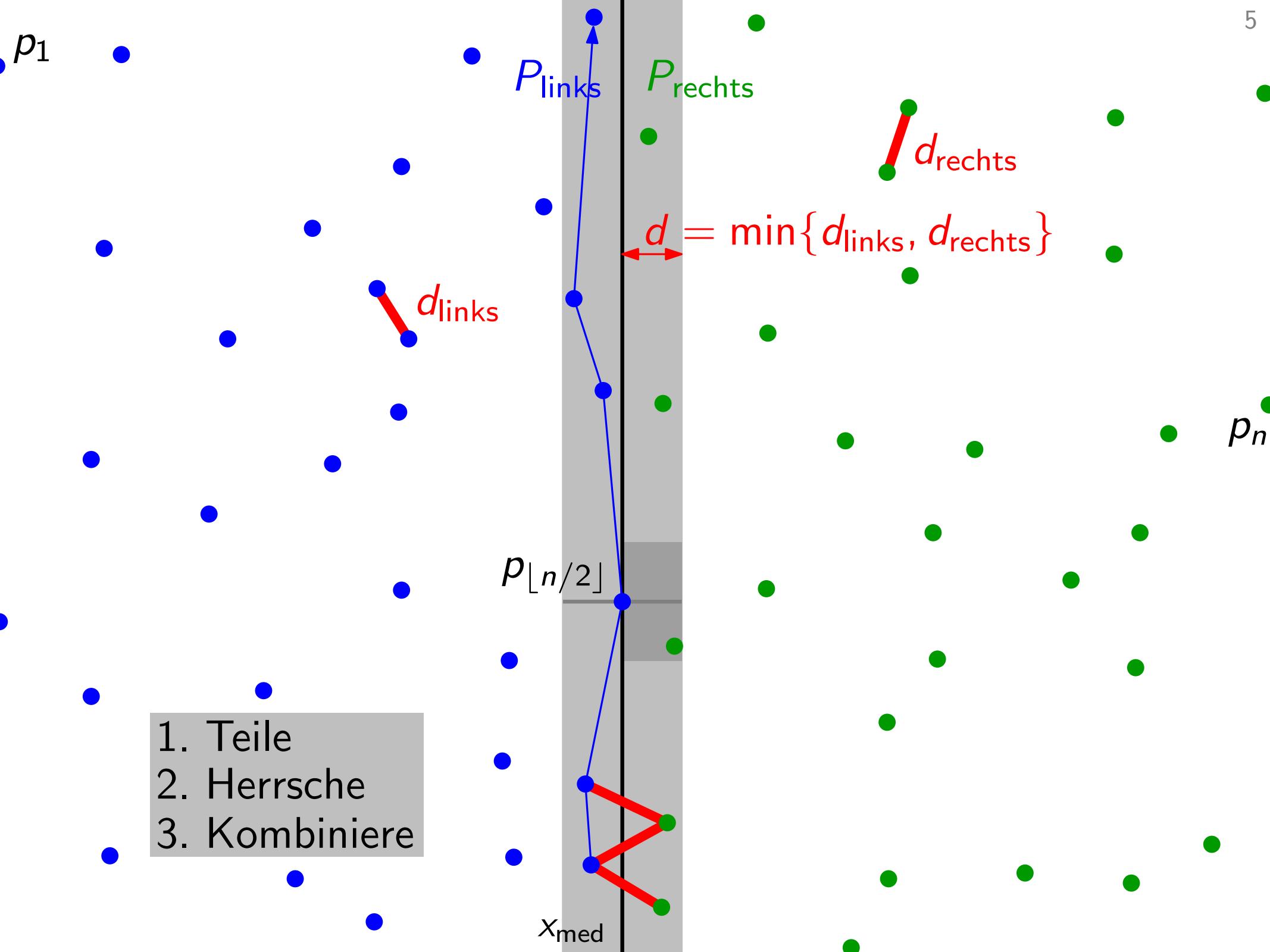


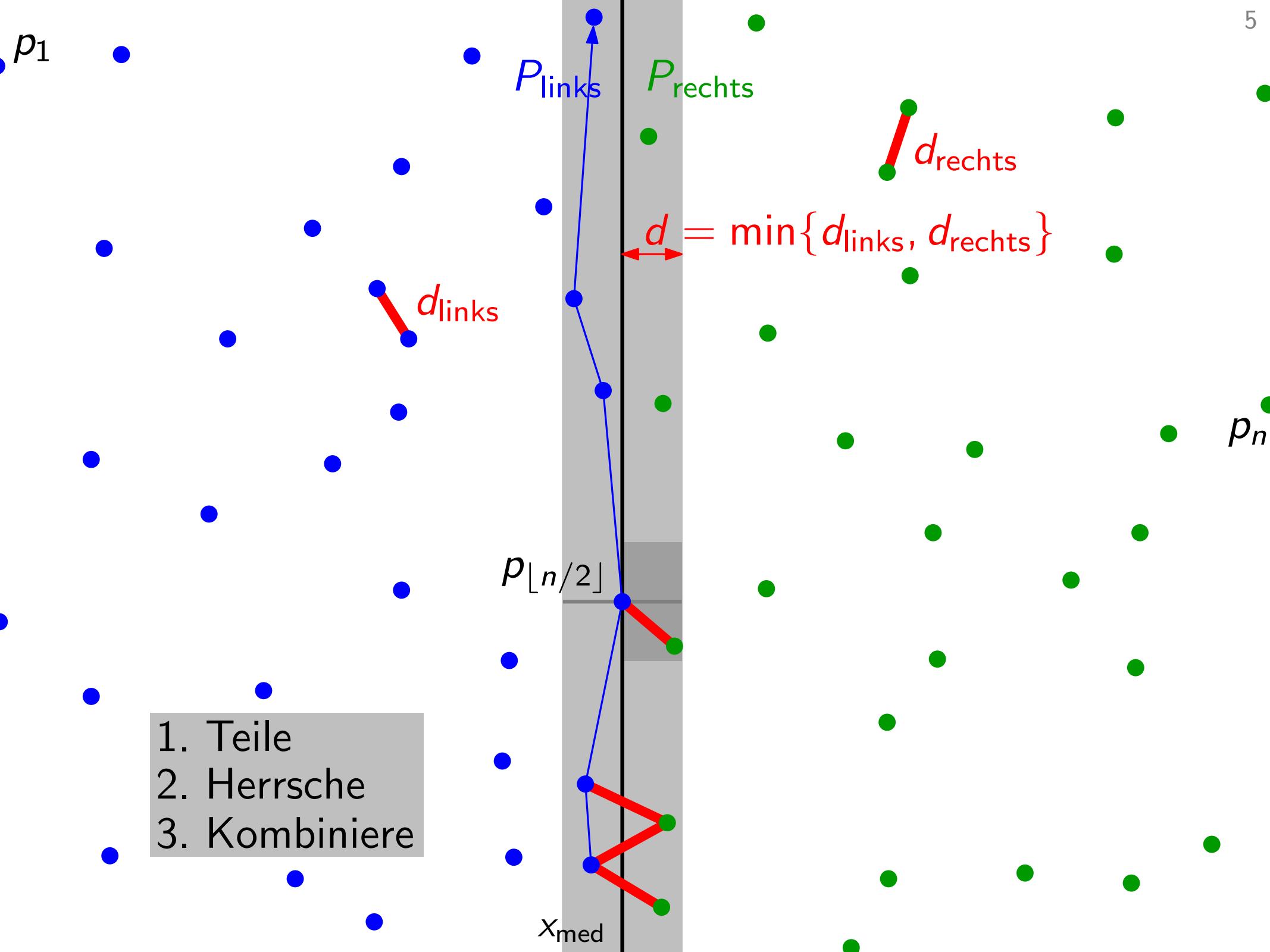


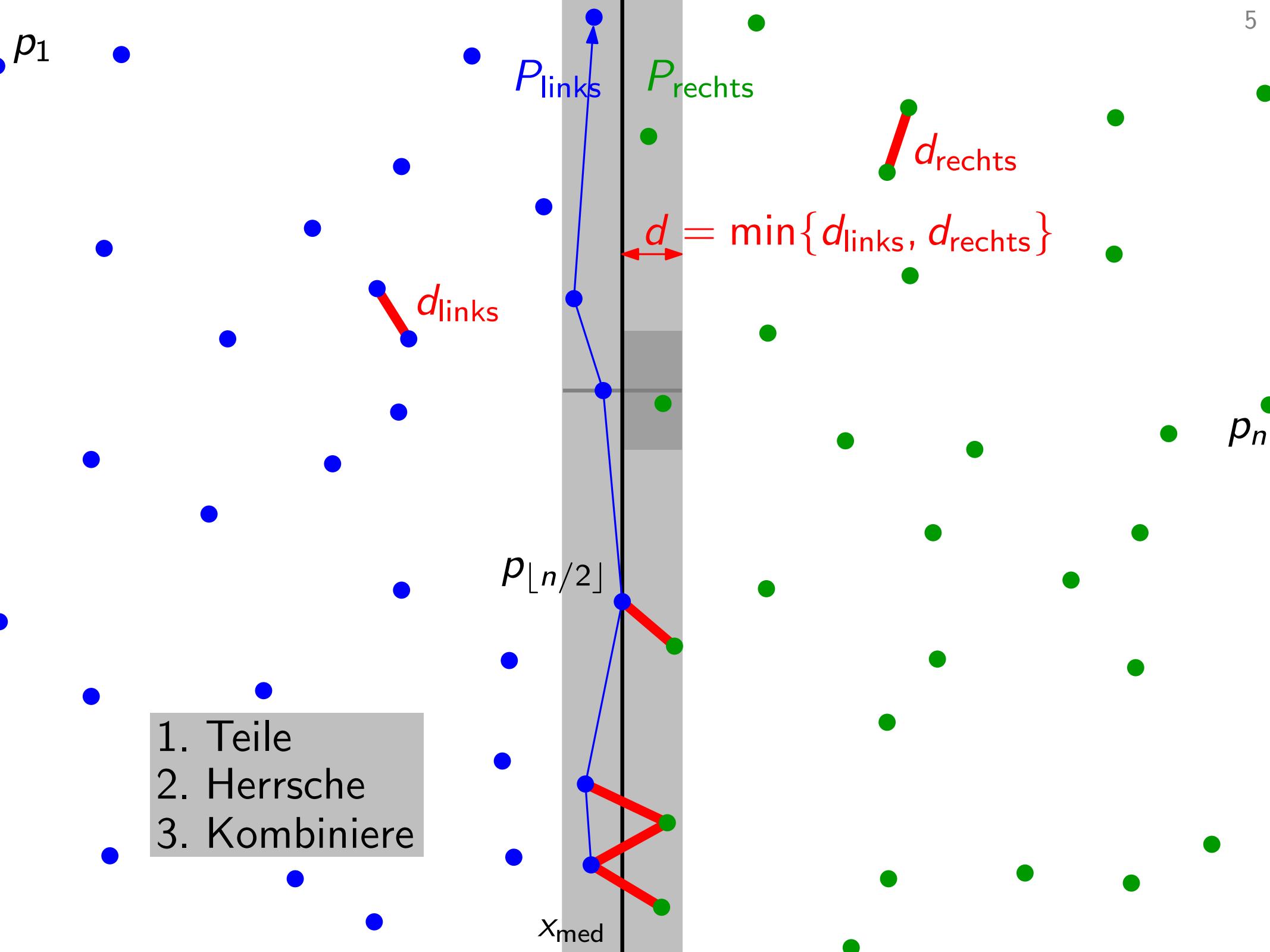


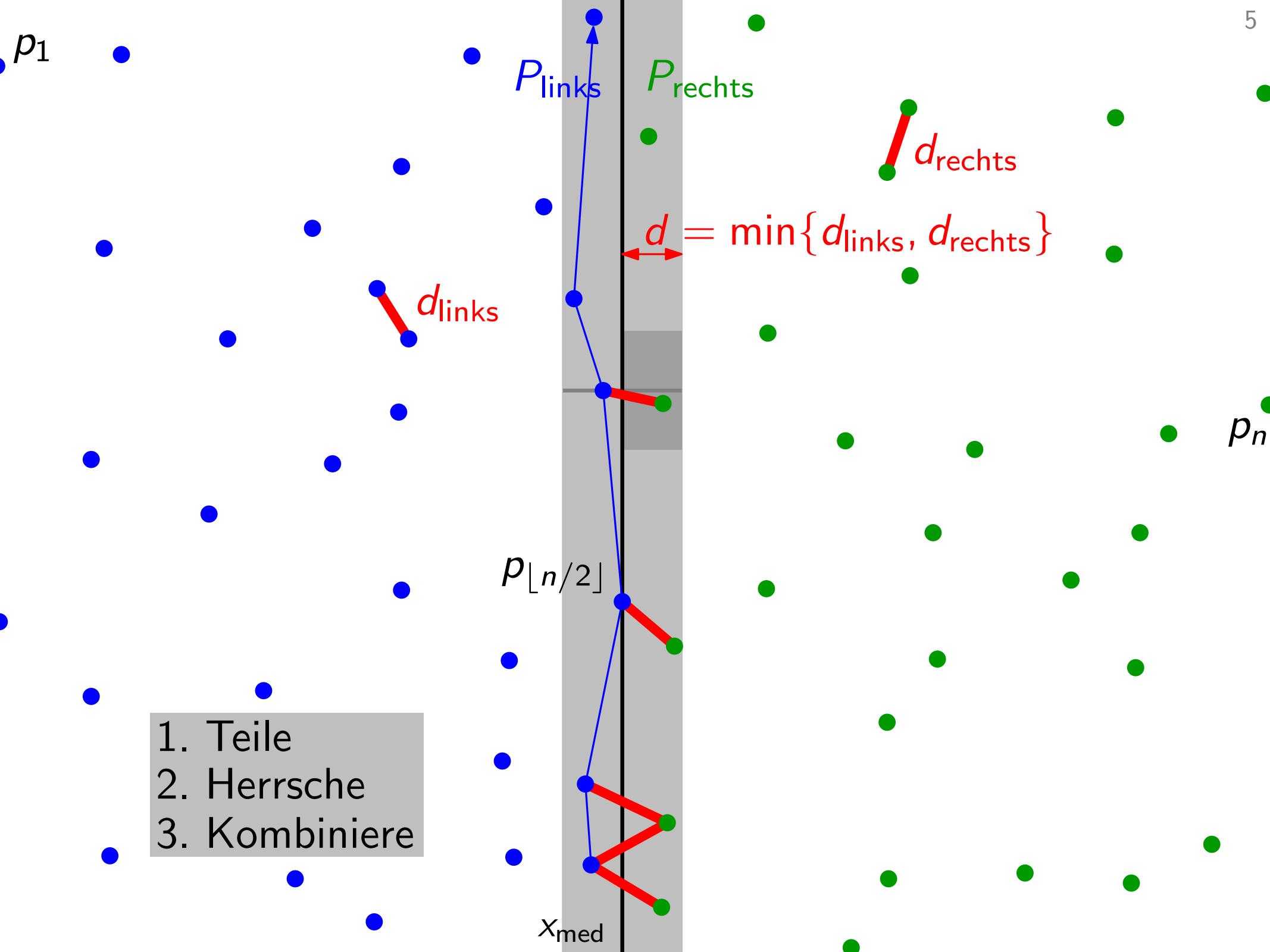


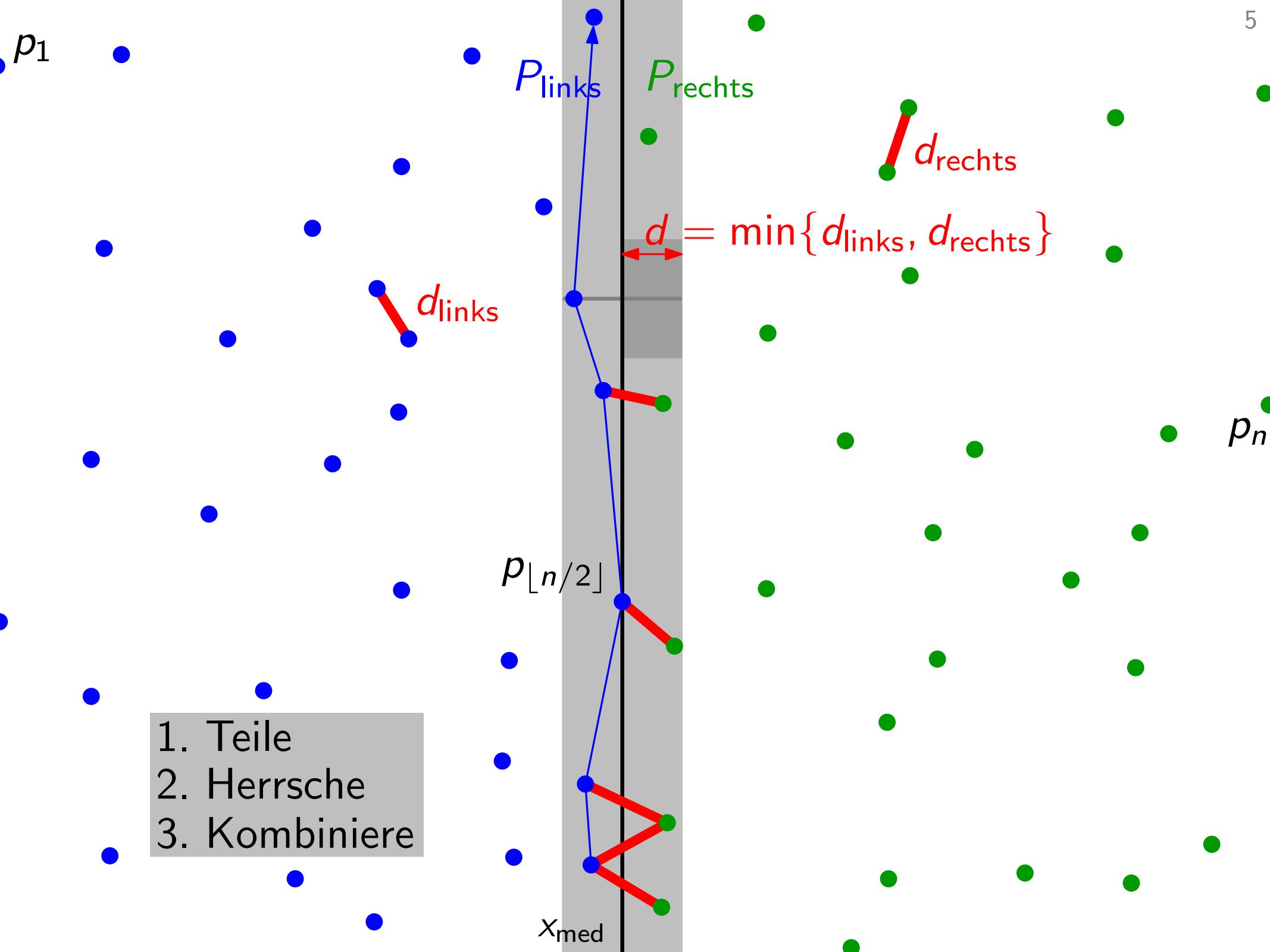


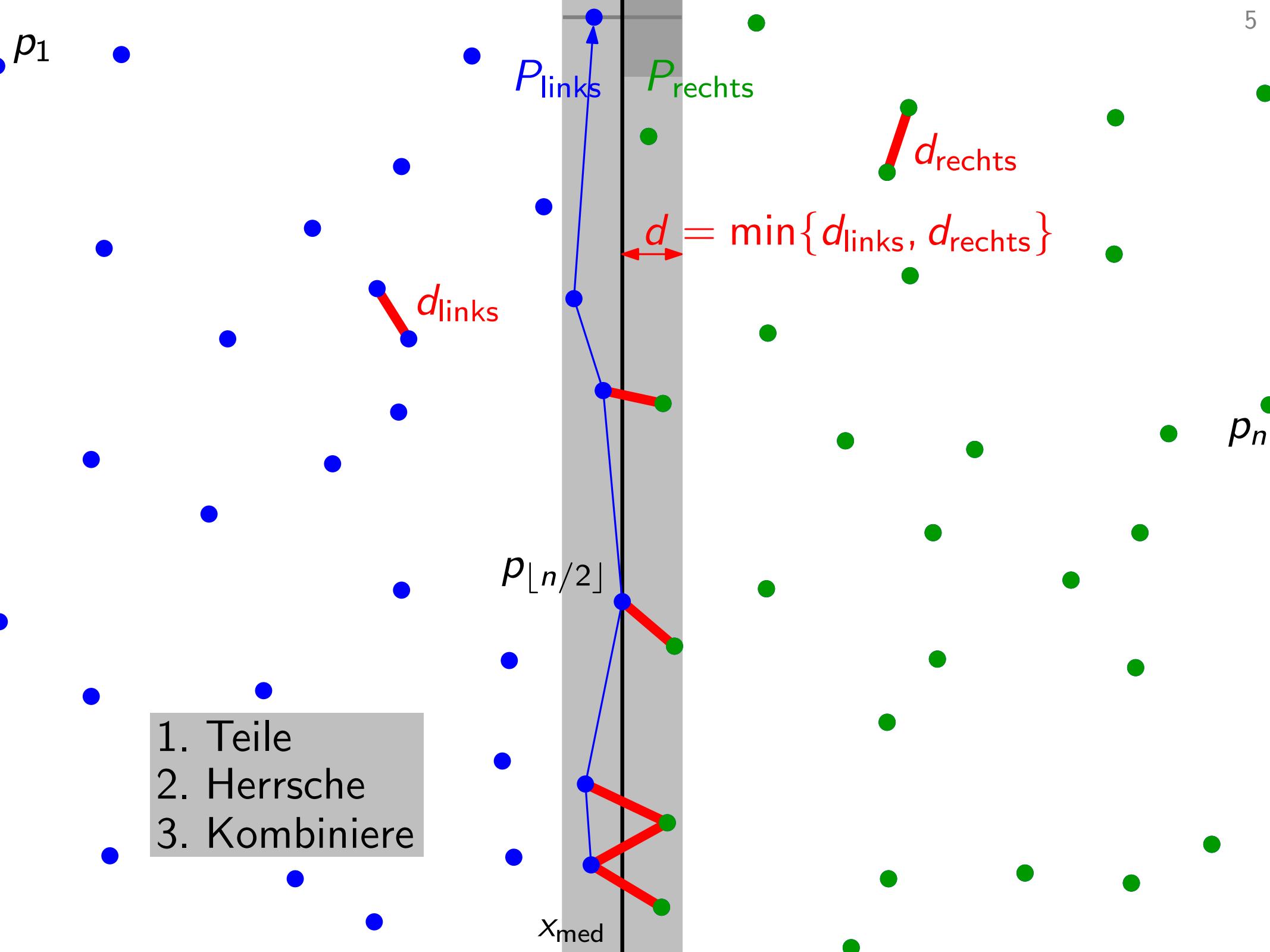


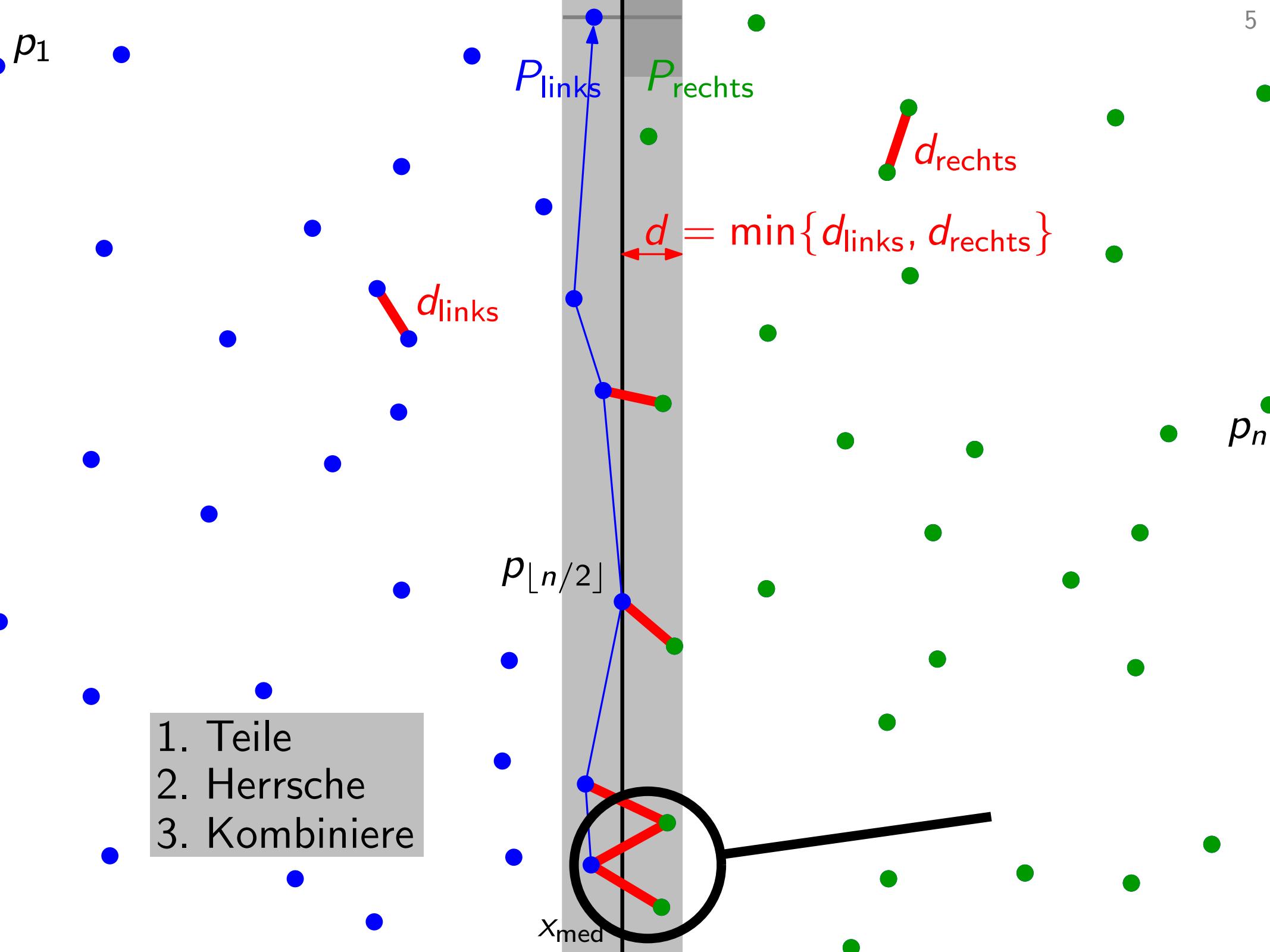


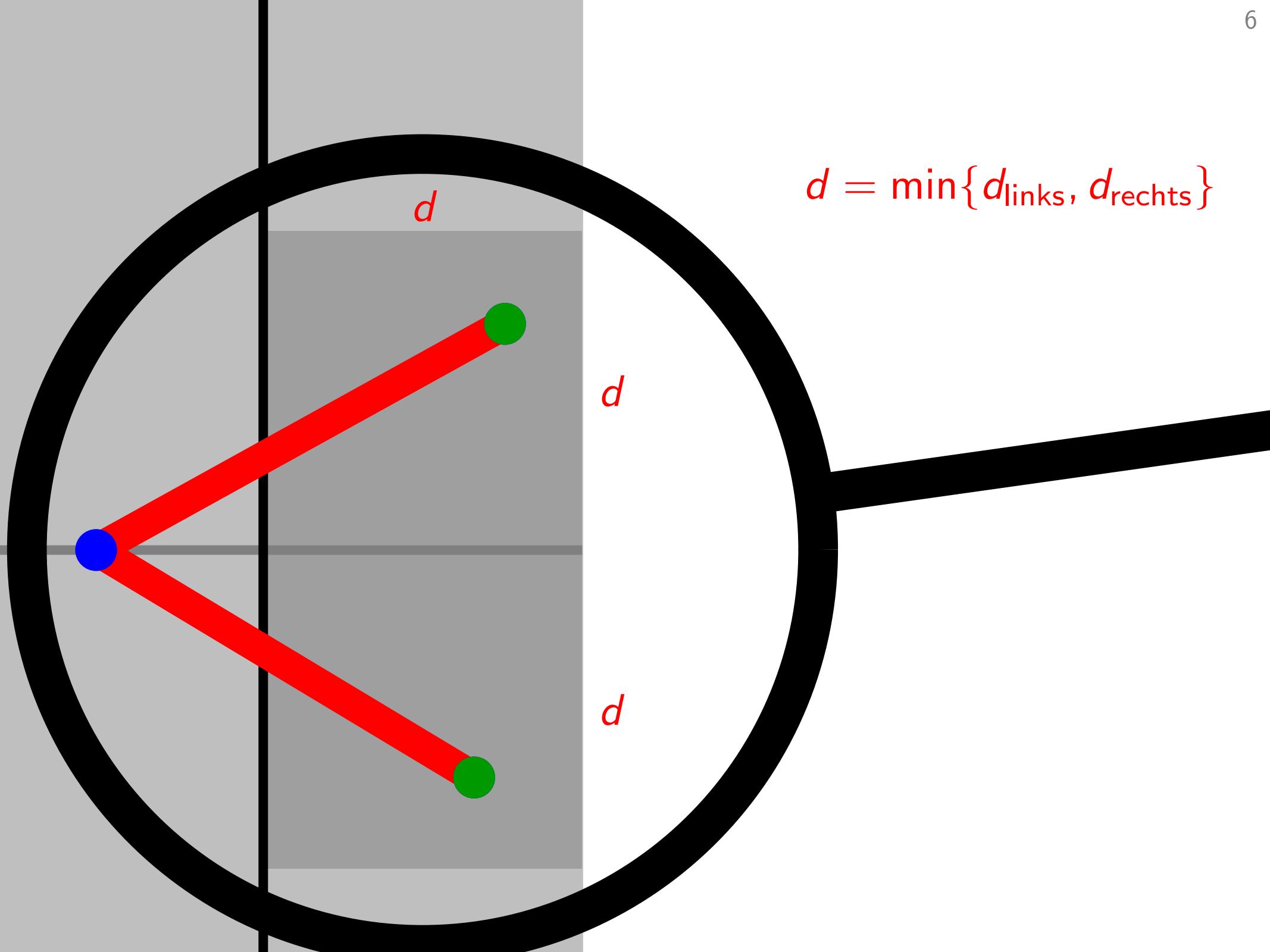


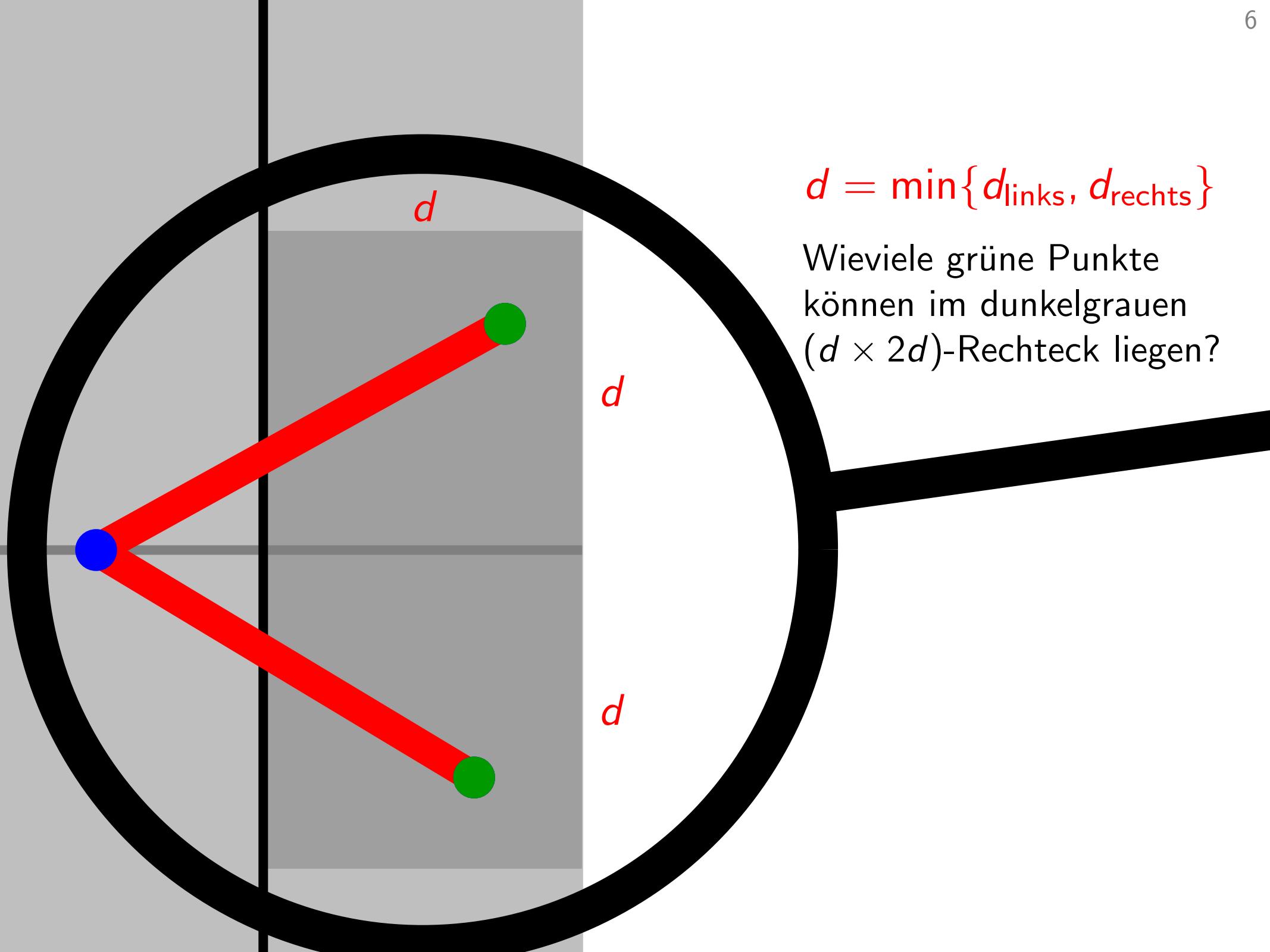






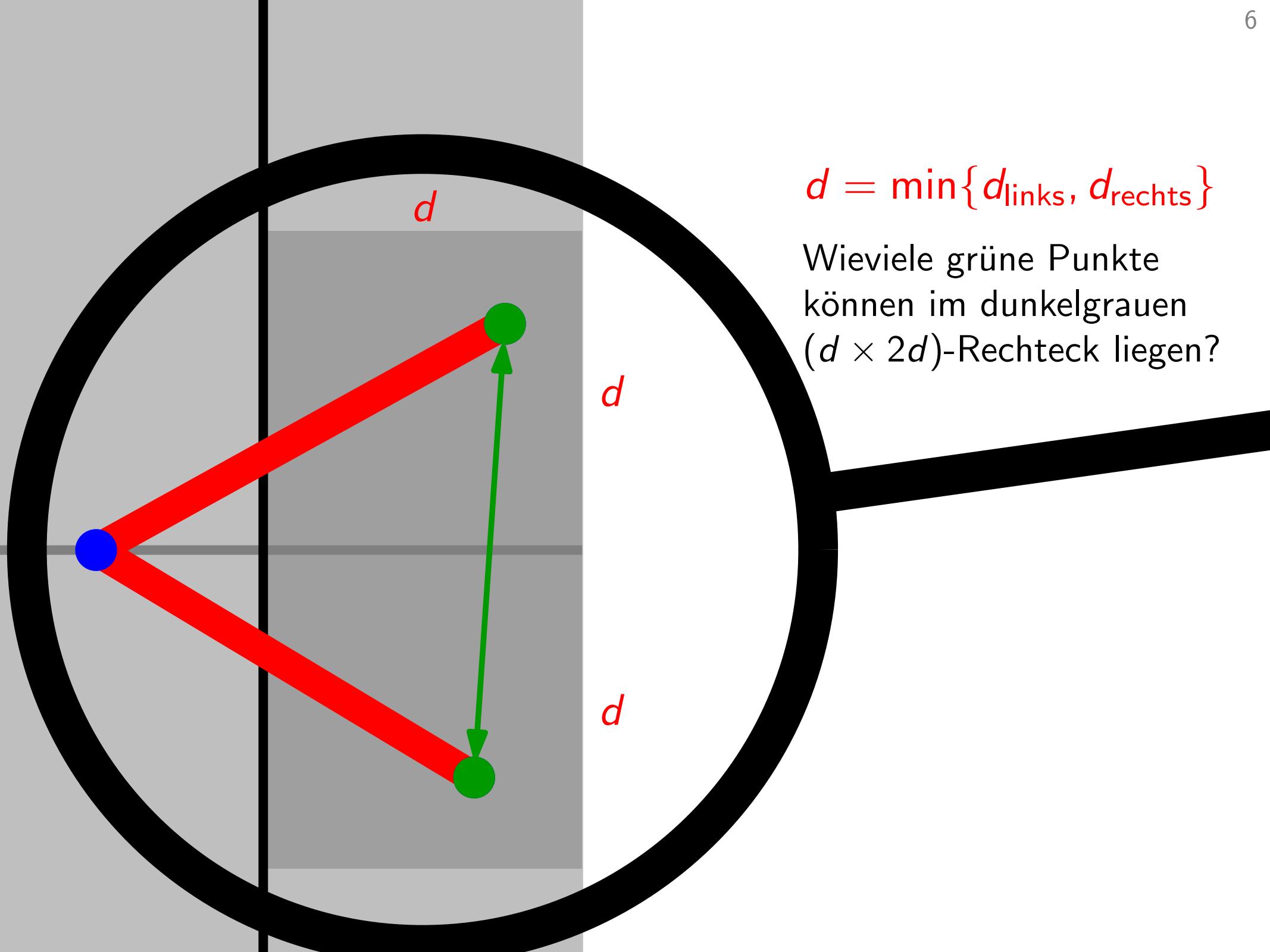






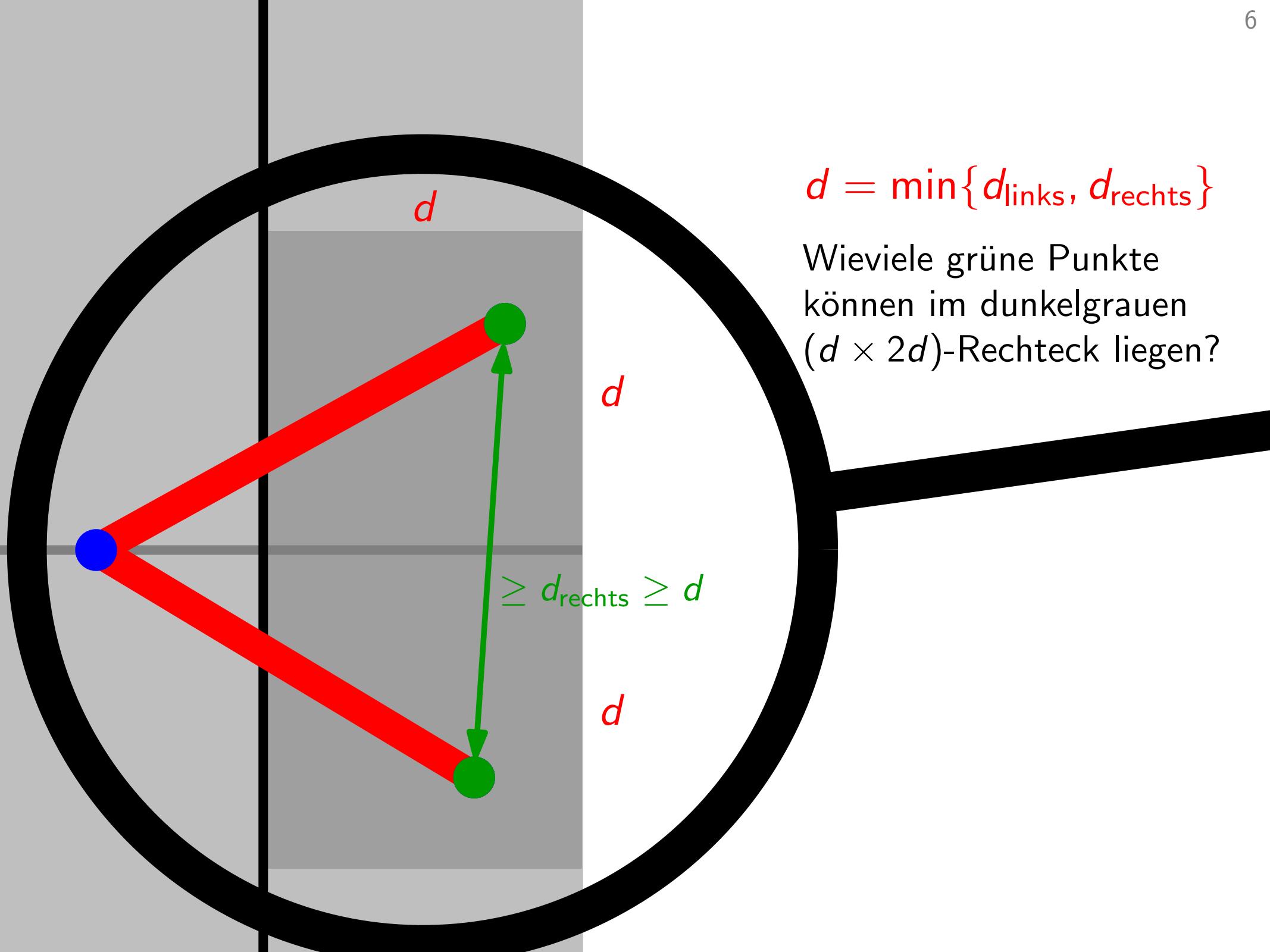
$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

Wieviele grüne Punkte
können im dunkelgrauen
($d \times 2d$)-Rechteck liegen?



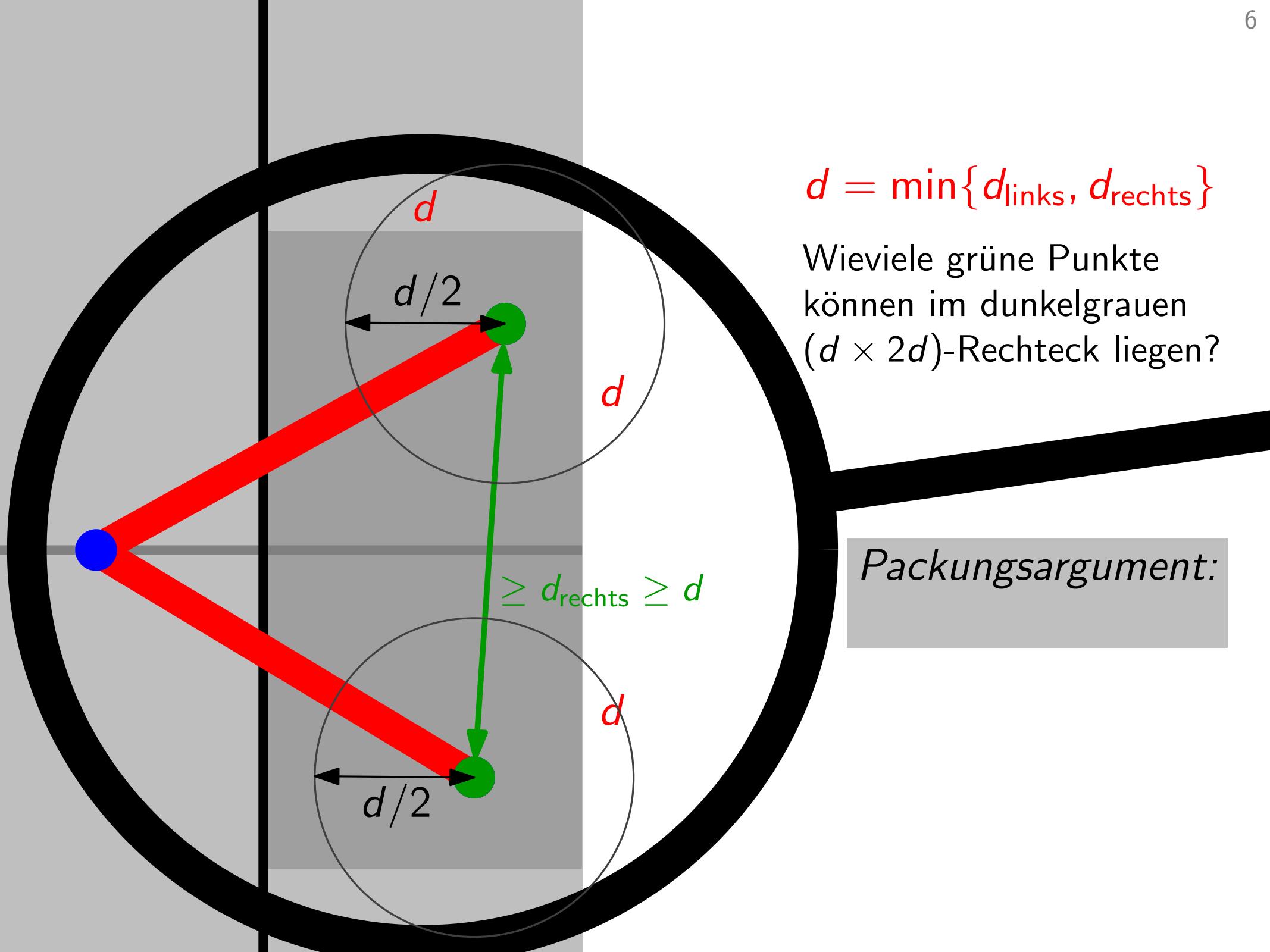
$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

Wieviele grüne Punkte können im dunkelgrauen $(d \times 2d)$ -Rechteck liegen?



$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

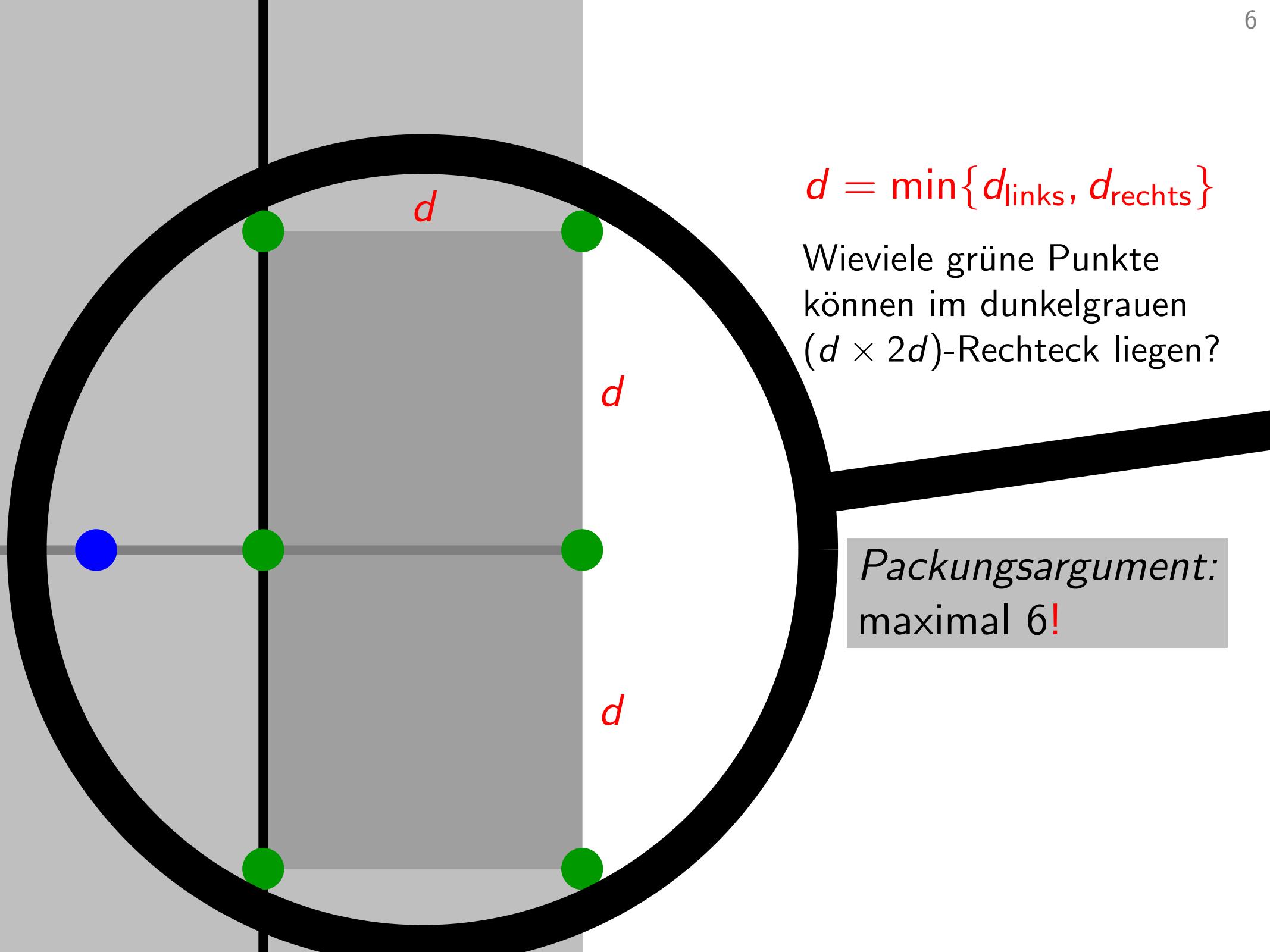
Wieviele grüne Punkte können im dunkelgrauen $(d \times 2d)$ -Rechteck liegen?



$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

Wieviele grüne Punkte
können im dunkelgrauen
($d \times 2d$)-Rechteck liegen?

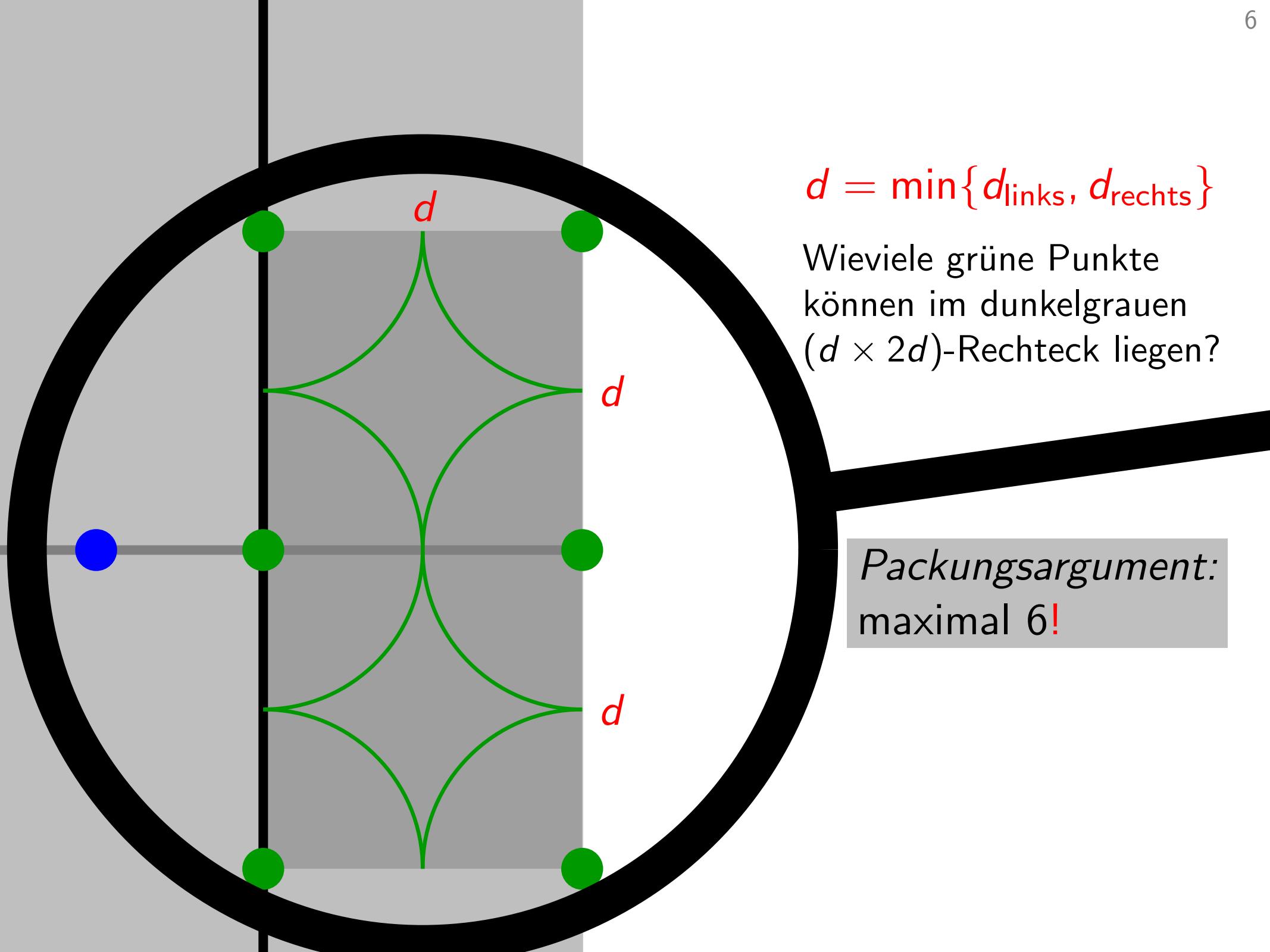
Packungsargument:



$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

Wieviele grüne Punkte
können im dunkelgrauen
($d \times 2d$)-Rechteck liegen?

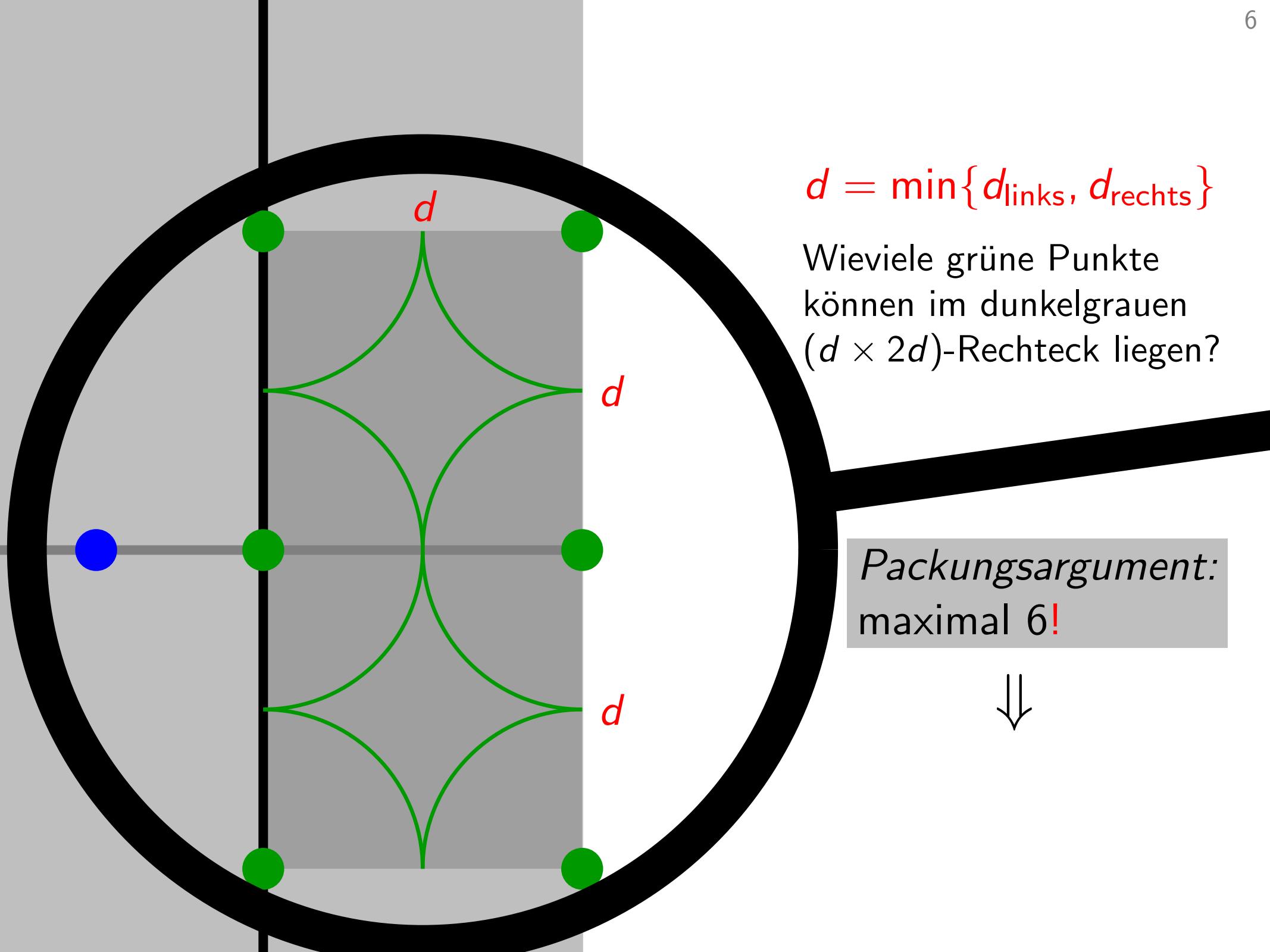
Packungsargument:
maximal 6!



$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

Wieviele grüne Punkte
können im dunkelgrauen
($d \times 2d$)-Rechteck liegen?

Packungsargument:
maximal 6!

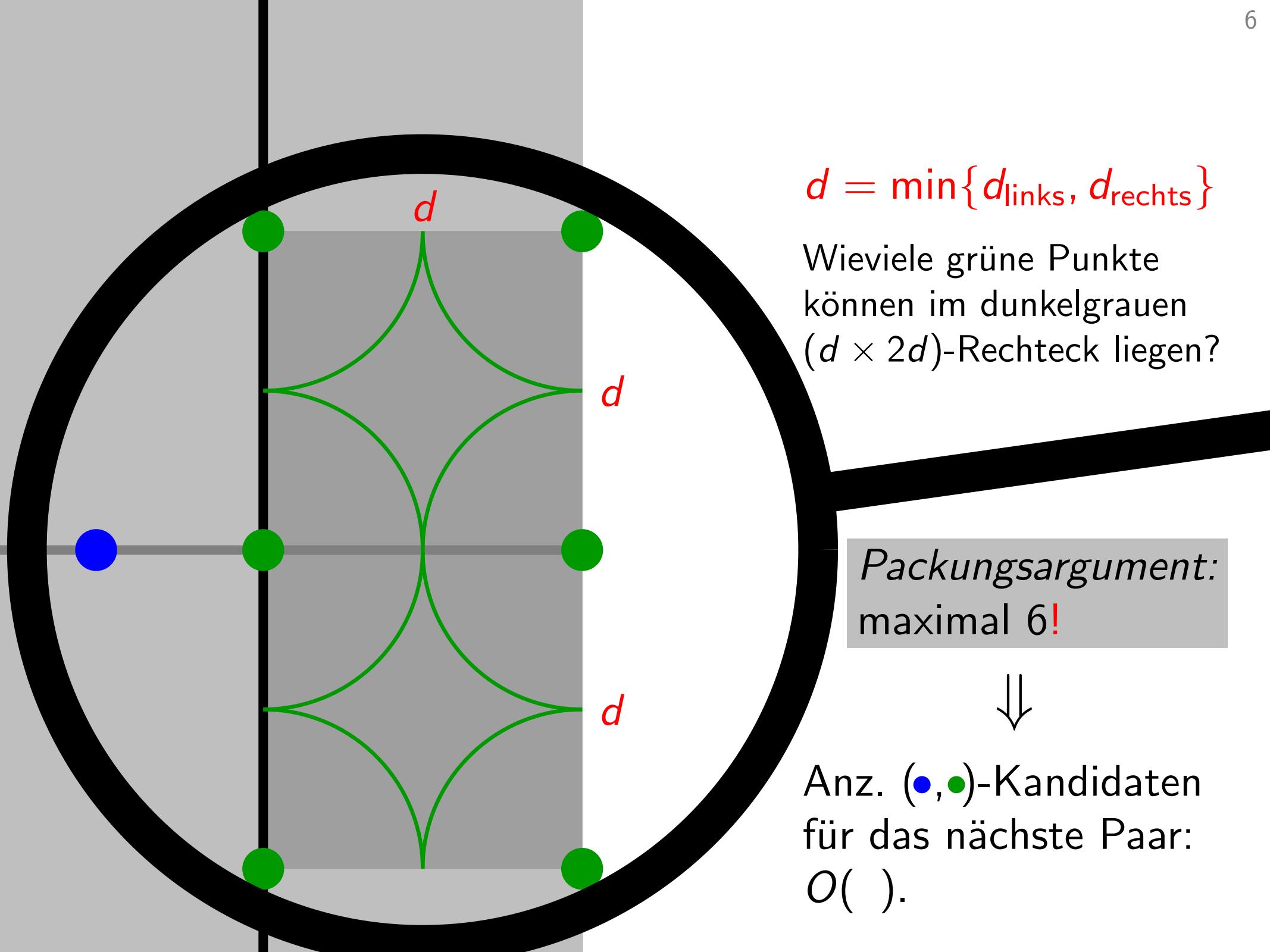


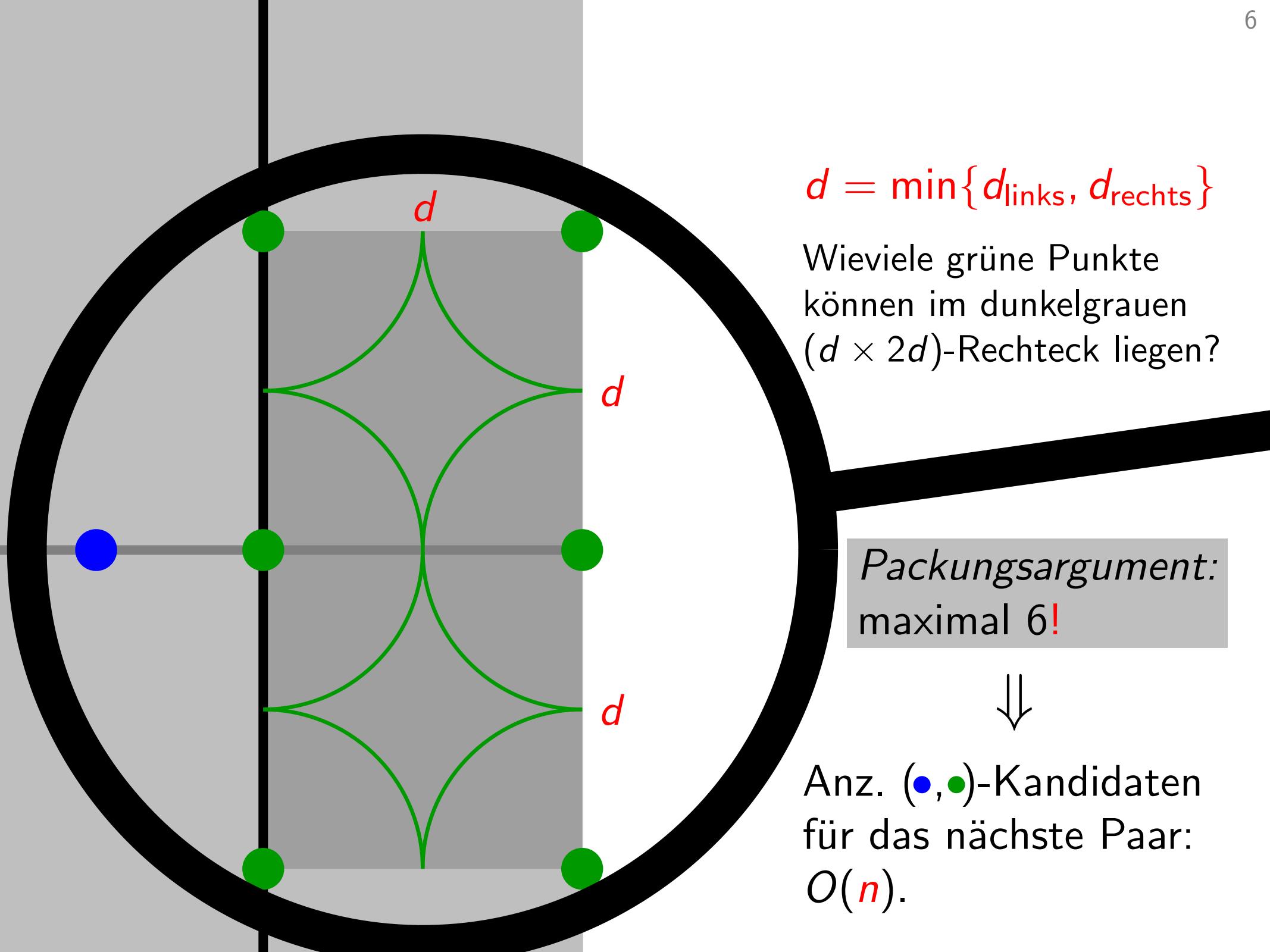
$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

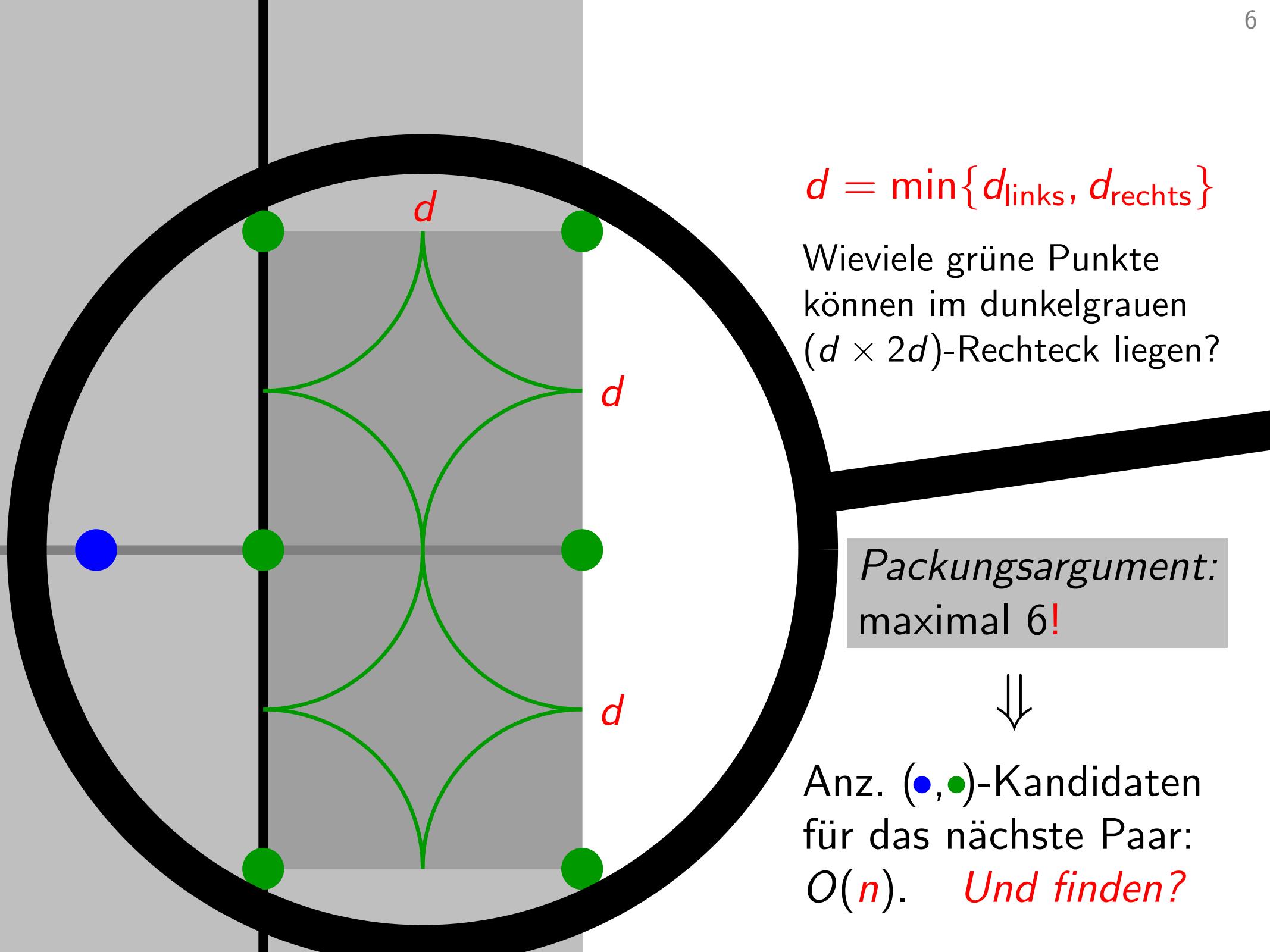
Wieviele grüne Punkte
können im dunkelgrauen
($d \times 2d$)-Rechteck liegen?

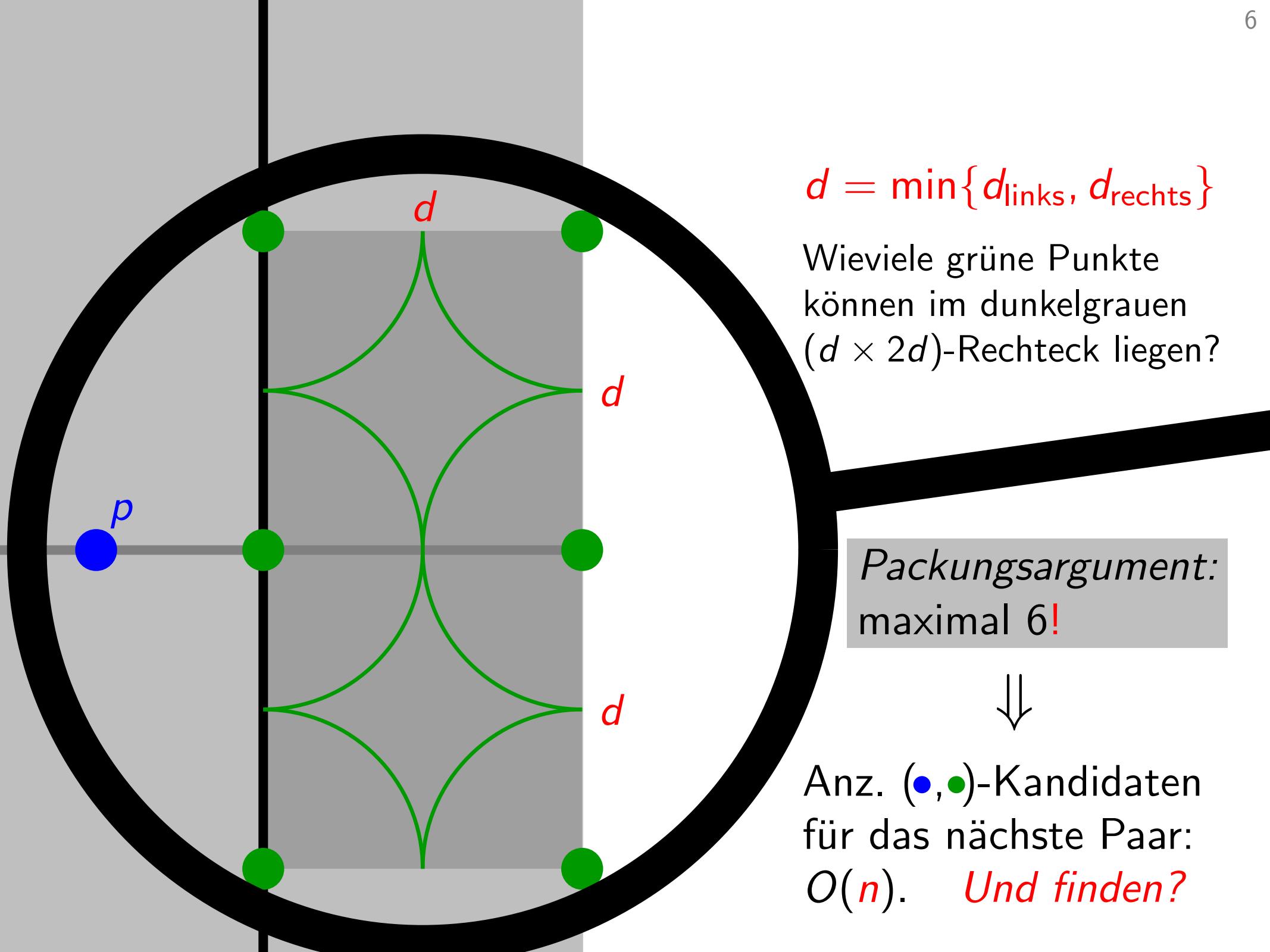
Packungsargument:
maximal 6!







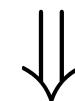




$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

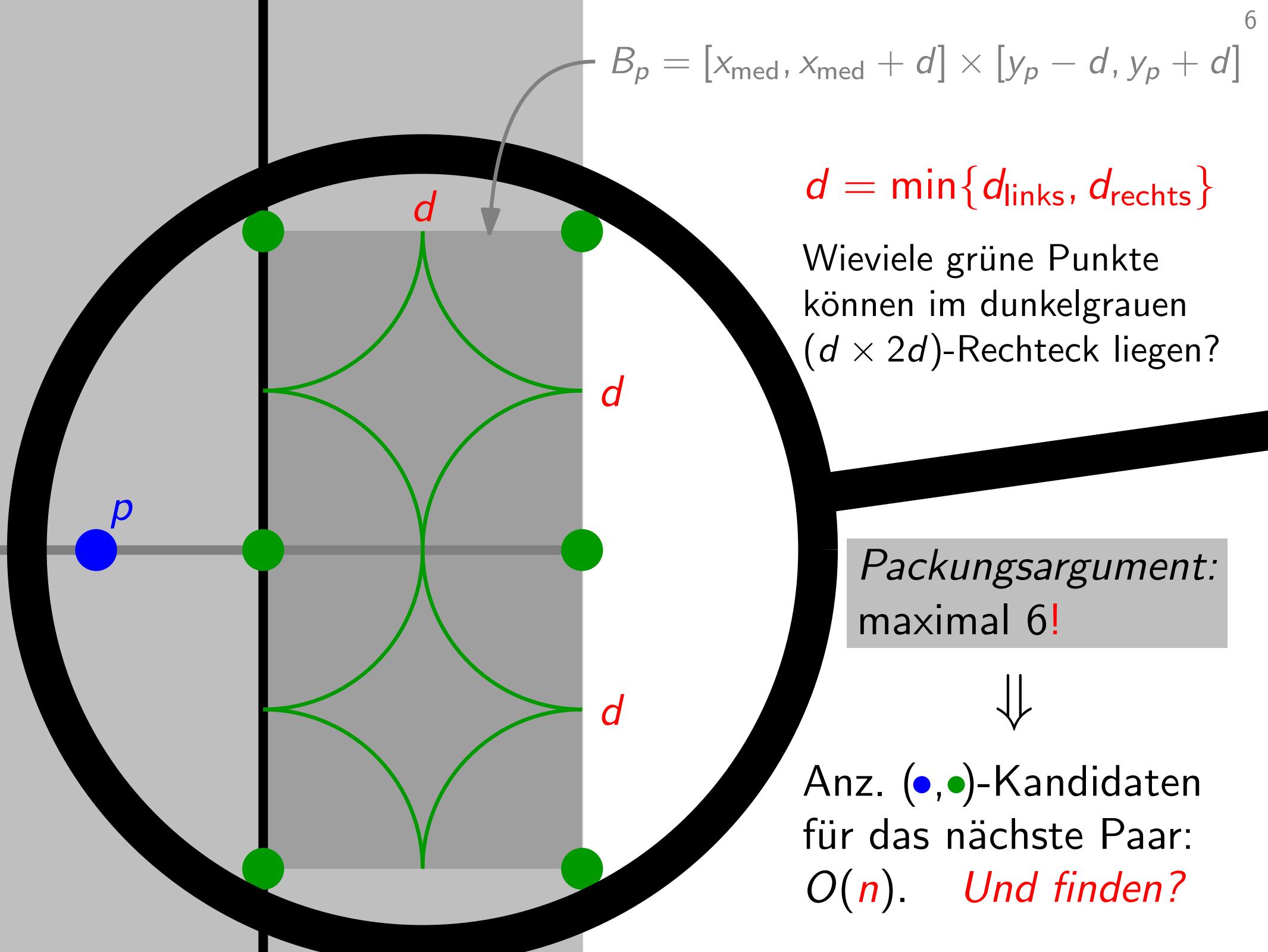
Wieviele grüne Punkte können im dunkelgrauen $(d \times 2d)$ -Rechteck liegen?

Packungsargument:
maximal 6!



Anz. (\bullet, \bullet) -Kandidaten für das nächste Paar:
 $O(n)$. *Und finden?*

$$B_p = [x_{\text{med}}, x_{\text{med}} + d] \times [y_p - d, y_p + d]$$



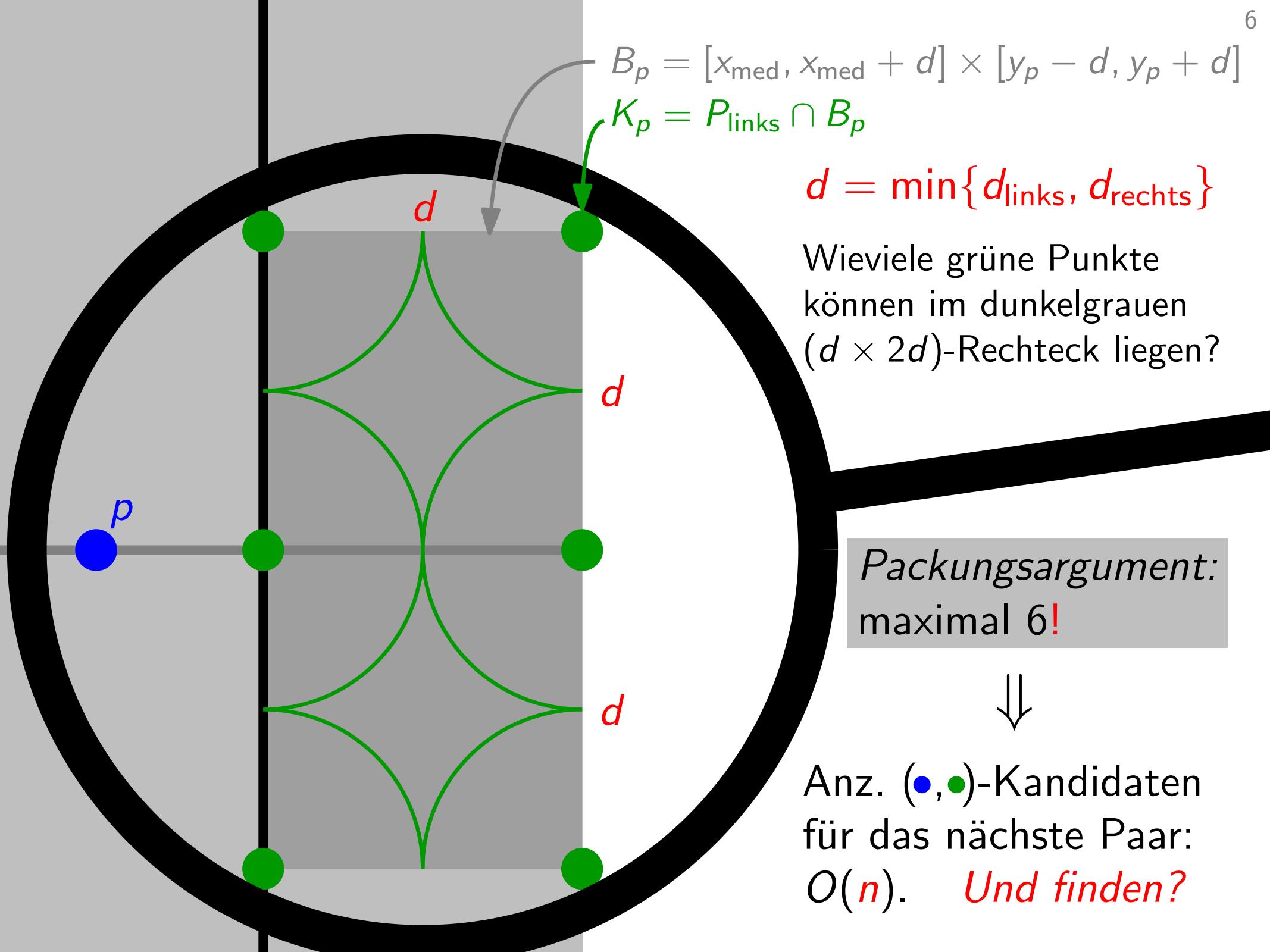
$$d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$$

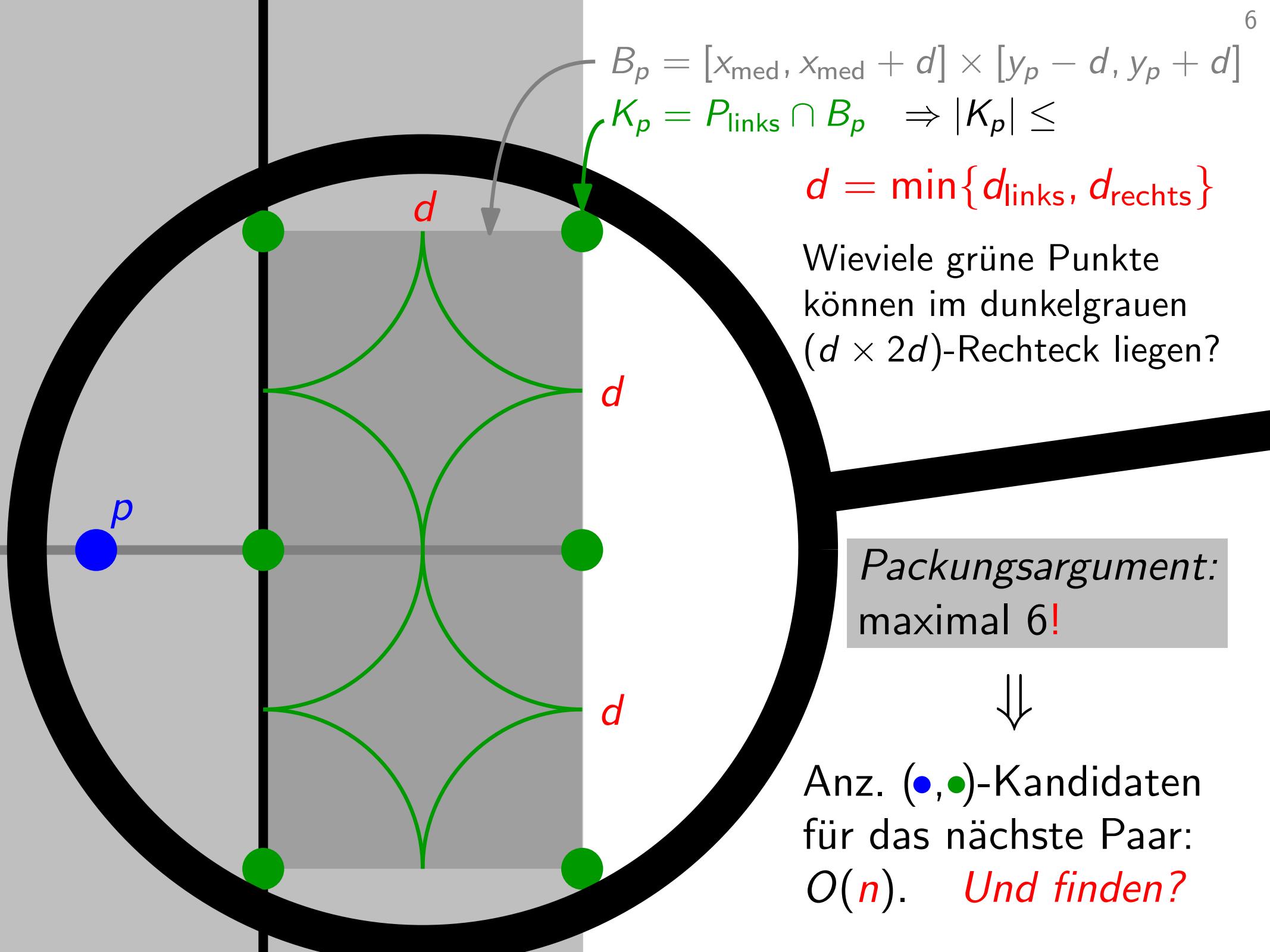
Wieviele grüne Punkte können im dunkelgrauen $(d \times 2d)$ -Rechteck liegen?

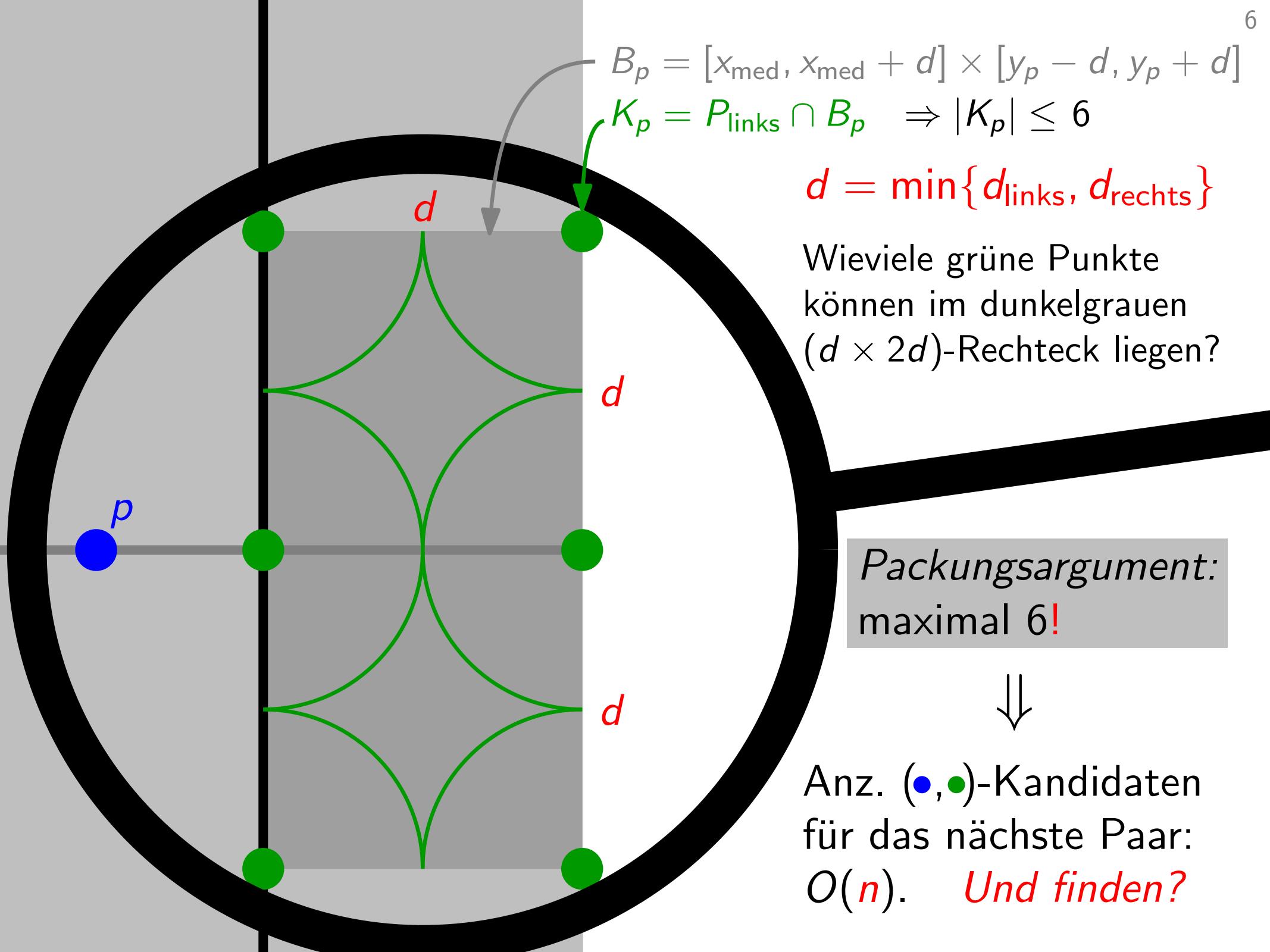
*Packungsargument:
maximal 6!*



Anz. (\bullet, \bullet) -Kandidaten für das nächste Paar:
 $O(n)$. *Und finden?*







Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}, P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
 - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
 - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
 - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
 - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
 - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
 - Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entsprach.)

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
 - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
 - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
 - Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entsprach.)
Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
 - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
 - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
 - Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entsprach.)
Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).
 - Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.

Algorithmus

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
3. Herrsche:
bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}
4. Kombiniere:
 - $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
 - Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
 - Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)
Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).
 - Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
 - Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus $T(n) = \begin{cases} \text{Laufzeit des rekursiven Teils,} \\ \text{d.h. ohne Vorverarbeitung (1.)} \end{cases}$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate
- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

$O(1)$

- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

$O(1)$

- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.
- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

$O(1)$

- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

$O(n \log n)$

- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entspr.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$).

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.

- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

$O(1)$

- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

$O(n \log n)$

- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entsprach.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$). }

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.

- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

$O(1)$

- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

$O(n \log n)$

- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entsprach.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$). $\left. \right\} O(n)$

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.

- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Algorithmus

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$, $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}

d_{rechts}

P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$

$O(1)$

- Sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate

$O(n \log n)$

- Seien $P_{\text{links}}^=$ die Punkte im grauen Streifen in P_{links} . ($P_{\text{rechts}}^=$ entsprach.)

Für jeden Punkt p in $P_{\text{links}}^=$ gehe in $P_{\text{rechts}}^=$ bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$). $\left. \right\} O(n)$

- Bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}^=$ und $q \in K_p$.

- Gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück.

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:

$$a = b = 2, f(n) = O(n \log n).$$

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:

$$a = b = 2, f(n) = O(n \log n).$$

Betrachte $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:

$$a = b = 2, f(n) = O(n \log n).$$

Betrachte $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

Gilt $f \in \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{1-\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \\ \Theta(n^1) & \\ \Omega(n^{1+\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \end{array} \right\}$?

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:

$$a = b = 2, f(n) = O(n \log n).$$

Betrachte $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

Gilt $f \in \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{1-\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \\ \Theta(n^1) & \\ \Omega(n^{1+\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \end{array} \right\}$?

Nein, $f: n \mapsto O(n \log n)$ passt in keinen der drei Fälle.



Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:

$$a = b = 2, f(n) = O(n \log n).$$

Betrachte $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

Gilt $f \in \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{1-\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \\ \Theta(n^1) & \\ \Omega(n^{1+\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \end{array} \right\}$?

Nein, $f: n \mapsto O(n \log n)$ passt in keinen der drei Fälle.



Die Rekursionsbaummethode liefert...

Laufzeit

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + O(n \log n)$$

Also $T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n)$

Rekursionsgleichung mit Master-Theorem lösen?

Bestimme Parameter für das Theorem:

$$a = b = 2, f(n) = O(n \log n).$$

Betrachte $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

Gilt $f \in \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{1-\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \\ \Theta(n^1) & \\ \Omega(n^{1+\varepsilon}) & \text{für ein } \varepsilon > 0 \end{array} \right\}$?

Nein, $f: n \mapsto O(n \log n)$ passt in keinen der drei Fälle.



Die Rekursionsbaummethode liefert... $T(n) = O(n \log^2 n)$.

Noch besser?

$$T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate $O(n \log n)$

- gehe „gleichzeitig“ durch P_{links} und P_{rechts} :
 - für jeden Punkt p in P_{links} gehe in P_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$;
 - halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$)
- bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
- gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

Noch besser?

$$T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate $O(n \log n)$

- gehe „gleichzeitig“ durch P_{links} und P_{rechts} :
 - für jeden Punkt p in P_{links} gehe in P_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$;
 - halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$)
- bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
- gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

Noch besser?

$$T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$

2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$

3. Herrsche:

bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 $?$! d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- sortiere P_{links} und P_{rechts} nach y-Koordinate $O(n \log n)$

- gehe „gleichzeitig“ durch P_{links} und P_{rechts} :
 - für jeden Punkt p in P_{links} gehe in P_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$;
 - halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$)
- bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
- gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

$O(n)$

Noch besser!

$$T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^2 n)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
 u. $P' = P$ nach y-Koordinate $\rightarrow p'_1, \dots, p'_n$ mit $y'_1 \leq \dots \leq y'_n$

2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
 P' in P'_{links} und P'_{rechts} (sortiert nach y-Koordinate)

3. Herrsche:
 bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- gehe „gleichzeitig“ durch P'_{links} und P'_{rechts} :
 für jeden Punkt p in P'_{links} gehe in P'_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$)
- bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P'_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
- gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

$O(n)$

Noch besser!

$$T(n) \approx 2T(n/2) + O(n \log n) = O(n \log^{\otimes} n)$$

1. Sortiere P nach x-Koordinate $\rightarrow p_1, \dots, p_n$ mit $x_1 \leq \dots \leq x_n$
 u. $P' = P$ nach y-Koordinate $\rightarrow p'_1, \dots, p'_n$ mit $y'_1 \leq \dots \leq y'_n$

2. Teile: P in $P_{\text{links}} = \{p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ und $P_{\text{rechts}} = P \setminus P_{\text{links}}$
 P' in P'_{links} und P'_{rechts} (sortiert nach y-Koordinate)

3. Herrsche:
 bestimme rekursiv kleinsten Abstand d_{links} v. Paaren in P_{links}
 d_{rechts} P_{rechts}

4. Kombiniere:

- $d = \min\{d_{\text{links}}, d_{\text{rechts}}\}$
- gehe „gleichzeitig“ durch P'_{links} und P'_{rechts} :
 für jeden Punkt p in P'_{links} gehe in P'_{rechts} bis y-Koord. $y_p + d$; halte die letzten 6 Punkte im grauen Streifen aufrecht ($\rightarrow K_p$)
- bestimme Min. d_{mitte} über alle $d(p, q)$ mit $p \in P'_{\text{links}}$ und $q \in K_p$
- gib Min. von d_{mitte} , d_{links} und d_{rechts} (und entspr. Paar) zurück

$O(n)$

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung ($2 \times$ Sortieren)

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung ($2 \times$ Sortieren) $O(n \log n)$

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $O(n \log n)$
2. Teilen

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $O(n \log n)$
 2. Teilen $O(n)$

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $O(n \log n)$
2. Teilen $O(n)$
3. Herrschen

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $O(n \log n)$
 2. Teilen $O(n)$
 3. Herrschen $2T(n/2)$

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung ($2 \times$ Sortieren) $O(n \log n)$
2. Teilen $O(n)$
3. Herrschen $2T(n/2)$
4. Kombinieren

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $O(n \log n)$
2. Teilen $O(n)$
3. Herrschen $2T(n/2)$
4. Kombinieren $O(n)$

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) $O(n \log n)$

2. Teilen $O(n)$

3. Herrschen $2T(n/2)$

4. Kombinieren $O(n)$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} T(n) =$$

Zusammenfassung

- | | |
|-----------------------------------|---------------|
| 1. Vorverarbeitung (2× Sortieren) | $O(n \log n)$ |
| 2. Teilen | $O(n)$ |
| 3. Herrschen | $2T(n/2)$ |
| 4. Kombinieren | $O(n)$ |
- $T(n) = O(n \log n)$ [MergeSort-Rek.!]

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren)	$O(n \log n)$	
2. Teilen	$O(n)$	
3. Herrschen	$2T(n/2)$	
4. Kombinieren	$O(n)$	
		$T(n) = O(n \log n)$ [MergeSort-Rek.]

Gesamtlaufzeit

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren)	$O(n \log n)$	
2. Teilen	$O(n)$	
3. Herrschen	$2T(n/2)$	
4. Kombinieren	$O(n)$	
<hr/>		
Gesamtlaufzeit	$O(n \log n)$	

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren)	$O(n \log n)$	
2. Teilen	$O(n)$	
3. Herrschen	$2T(n/2)$	
4. Kombinieren	$O(n)$	
<hr/>		
Gesamtlaufzeit	$O(n \log n)$	

Speicherplatzbedarf?

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren)	$O(n \log n)$	
2. Teilen	$O(n)$	
3. Herrschen	$2T(n/2)$	
4. Kombinieren	$O(n)$	
<hr/>		
Gesamtlaufzeit	$O(n \log n)$	

Speicherplatzbedarf?

$O(n),$

Zusammenfassung

1. Vorverarbeitung (2× Sortieren)	$O(n \log n)$	
2. Teilen	$O(n)$	
3. Herrschen	$2T(n/2)$	
4. Kombinieren	$O(n)$	
<hr/>		
Gesamtlaufzeit	$O(n \log n)$	

Speicherplatzbedarf?

$O(n)$, wenn P' *in situ* in P'_{links} und P'_{rechts} zerlegt wird.

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $\textcolor{red}{o}(n \log n)$ Zeit lösen –

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Wie?

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen a_1, \dots, a_n in eine Menge von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?

Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

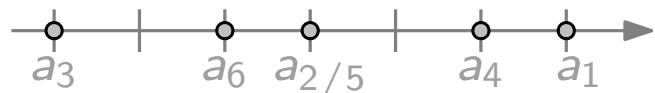
Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen a_1, \dots, a_n in eine Menge von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?



Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

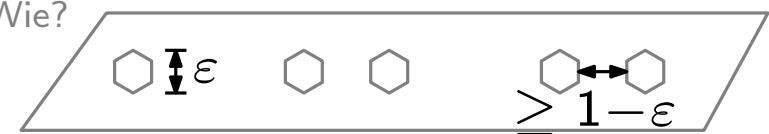
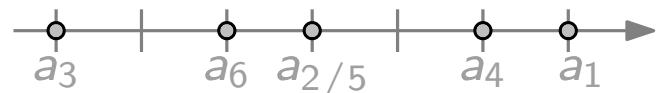
Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen a_1, \dots, a_n in eine Menge von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?



Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

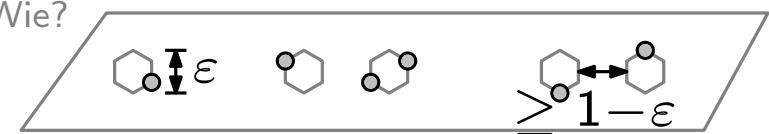
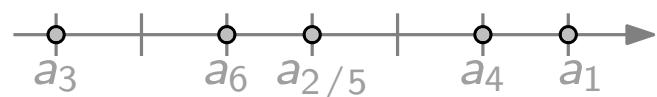
Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↗

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen a_1, \dots, a_n in eine Menge von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?



Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

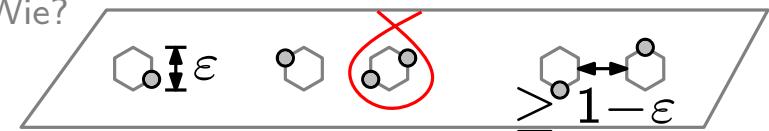
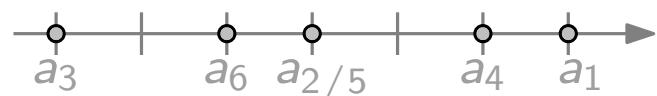
Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↛

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen a_1, \dots, a_n in eine Menge von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?



Ist die Laufzeit $O(n \log n)$ optimal?

Def. *Element-Uniqueness-Problem (für natürliche Zahlen)*

Gegeben eine Folge a_1, \dots, a_n von n Zahlen,
kommt jede Zahl nur einmal vor, d.h. $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$?

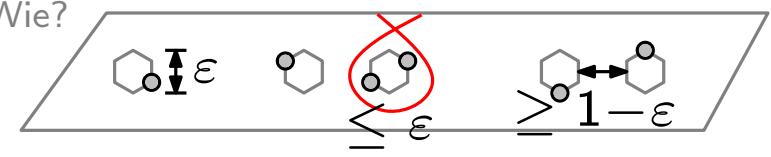
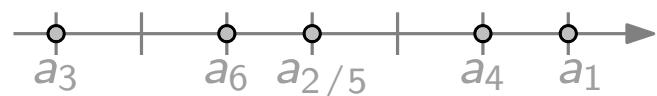
Satz. Das Element-Uniqueness-Problem kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden –
wenn man als Rechenmodell das sogenannte
algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Was bedeutet das für das Problem *Nächstes Paar*?

Angenommen wir könnten Nächstes Paar in $o(n \log n)$ Zeit lösen – dann auch Element Uniqueness! ↛

Wie? Teste, ob das nächste Paar Abstand 0 hat!

Genaugenommen muss man die Zahlen a_1, \dots, a_n in eine Menge von (paarweise verschiedenen!) Punkten der Ebene transformieren, aber auch das geht! – Wie?



Das heißt. . .

Satz. Das Problem Nächstes Paar kann nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ Zeit gelöst werden, wenn man als Rechenmodell das algebraische Entscheidungsbaummodell zugrunde legt.

Kor. Unser $O(n \log n)$ -Zeit-Algorithmus für das Problem Nächstes Paar ist asymptotisch optimal, wenn man. . . .

Üben, üben, üben.

Üben, üben, üben.

- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.

Üben, üben, üben.

- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.
- Implementieren Sie einen einfachen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der im Herrsche-Schritt *alle* (quadratisch vielen) (●, ●)-Kandidaten testet.

Üben, üben, üben.

- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.
- Implementieren Sie einen einfachen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der im Herrsche-Schritt *alle* (quadratisch vielen) (●, ●)-Kandidaten testet. *(Ist der schneller als der Brute-Force-Alg.?)*

Üben, üben, üben.

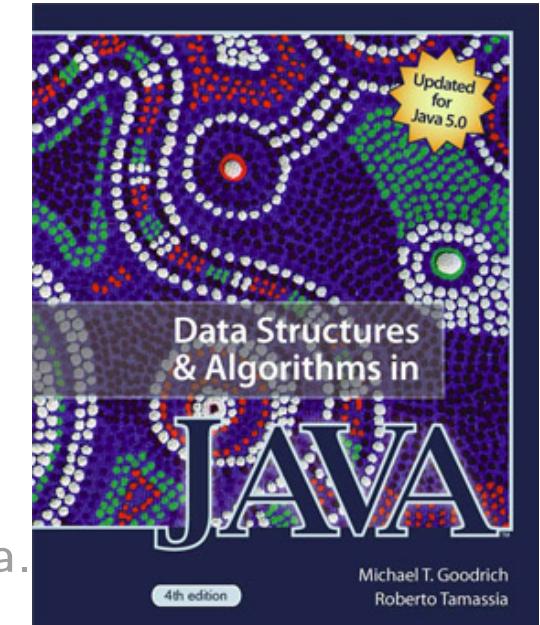
- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.
- Implementieren Sie einen einfachen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der im Herrsche-Schritt *alle* (quadratisch vielen) (●, ●)-Kandidaten testet. *(Ist der schneller als der Brute-Force-Alg.?)*
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log^2 n)$ Zeit läuft!

Üben, üben, üben.

- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.
- Implementieren Sie einen einfachen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der im Herrsche-Schritt *alle* (quadratisch vielen) (●, ●)-Kandidaten testet. *(Ist der schneller als der Brute-Force-Alg.?)*
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log^2 n)$ Zeit läuft!
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log n)$ Zeit läuft!

Üben, üben, üben.

- Implementieren Sie die einfache Brute-Force-Lösung in Java.
- Implementieren Sie einen einfachen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der im Herrsche-Schritt *alle* (quadratisch vielen) (●, ●)-Kandidaten testet. *(Ist der schneller als der Brute-Force-Alg.?)*
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log^2 n)$ Zeit läuft!
- Implementieren Sie den hier vorgestellten Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in $O(n \log n)$ Zeit läuft!



Goodrich & Tamassia:
Data Structures & Algorithms in Java.
Wiley, 4. Aufl., 2005 (5. Aufl., 2010)

Algorithmen & Datenstrukturen

Lernziele: In dieser Veranstaltung haben Sie schon gelernt...

Algorithmen & Datenstrukturen

Lernziele: In dieser Veranstaltung haben Sie schon gelernt...

- die Effizienz von Algorithmen zu messen und miteinander zu vergleichen,
- grundlegende Algorithmen und Datenstrukturen in Java zu implementieren,
- selbst Algorithmen und Datenstrukturen zu entwerfen sowie
- deren Korrektheit und Effizienz zu beweisen.

Algorithmen & Datenstrukturen

Lernziele: In dieser Veranstaltung haben Sie schon gelernt...

- die Effizienz von Algorithmen zu messen und miteinander zu vergleichen,
- grundlegende Algorithmen und Datenstrukturen in Java zu implementieren,
- selbst Algorithmen und Datenstrukturen zu entwerfen sowie
- deren Korrektheit und Effizienz zu beweisen.

Inhalt:

- Grundlagen und Analysetechniken
- Sortierverfahren
- Java
- Datenstrukturen
- Graphenalgorithmen
- Systematisches Probieren

Algorithmen & Datenstrukturen

Lernziele: In dieser Veranstaltung haben Sie schon gelernt...

- die Effizienz von Algorithmen zu messen und miteinander zu vergleichen,
- grundlegende Algorithmen und Datenstrukturen in Java zu implementieren,
- selbst Algorithmen und Datenstrukturen zu entwerfen sowie
- deren Korrektheit und Effizienz zu beweisen.

Inhalt: • Grundlagen und Analysetechniken

- Sortierverfahren

- Java

- Datenstrukturen

- Graphenalgorithmen

- Systematisches Probieren

Todo

Algorithmen & Datenstrukturen

Lernziele: In dieser Veranstaltung haben Sie schon gelernt...

- die Effizienz von Algorithmen zu messen und miteinander zu vergleichen,
- grundlegende Algorithmen und Datenstrukturen in Java zu implementieren,
- selbst Algorithmen und Datenstrukturen zu entwerfen sowie
- deren Korrektheit und Effizienz zu beweisen.

Inhalt: • Grundlagen und Analysetechniken

- Sortierverfahren

- Java

- Datenstrukturen

- Graphenalgorithmen (kürzeste Wege, min. Spannbäume)
- Systematisches Probieren (dynamisches Progr., Greedy-Alg.)

Todo