Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 15:
Augmentieren von Datenstrukturen

Alexander Wolff

Wintersemester 2024

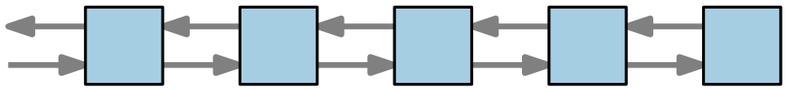
Plan

Wir kennen schon eine ganze Reihe von Datenstrukturen:

- Stapel

- Schlange

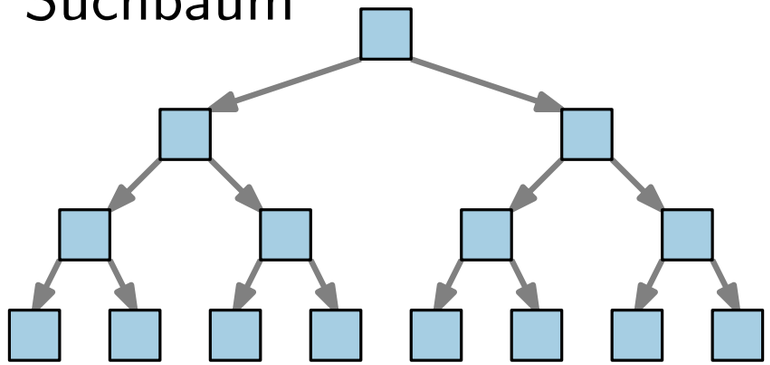
- doppelt verkettete Liste



- Hashtabelle

- Heap

- binärer Suchbaum



Allerdings gibt es viele Situationen,
wo keine davon **genau** passt.

Herangehensweise: **Augmentieren** von Datenstrukturen

d.h. wir verändern Datenstrukturen, indem wir extra Information hinzufügen und aufrechterhalten.

Ein Beispiel

Bestimme für eine dynamische Menge von Zahlen den **Mittelwert**.

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - Beliebig, z.B. Liste
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Summe der Elemente (sum)
   - Anzahl der Elemente ($size$)
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?
   - konstanter Aufwand beim Einfügen und Löschen
4. Implementiere neue Operationen!

```
int MEAN()
    return sum/size
```

Übung.
Tun Sie das gleiche für die Standardabweichung

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}.$$

Neues Beispiel

Wir wollen das Auswahlproblem für dynamische Mengen lösen.

D.h. wir wollen zu jedem Zeitpunkt effizient

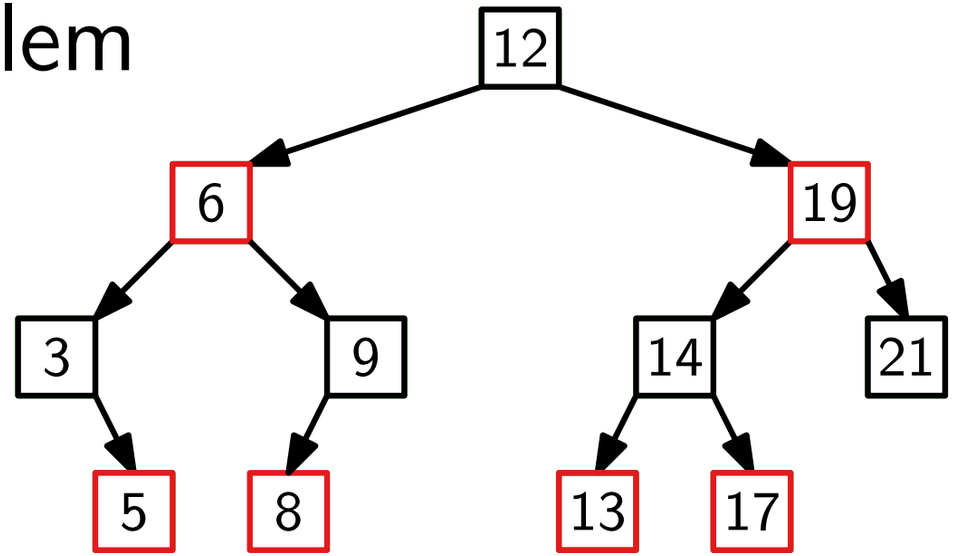
- das i.-kleinste Element (z.B. den Median): ptr $\textsc{Select}(\text{int } i)$
- den **Rang** eines Elements: int $\textsc{Rank}(\text{ptr } x)$

in einer dynamischen Menge bestimmen können.

Fahrplan:

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung?
4. Implementiere neue Operationen!

Das dynamische Auswahlproblem



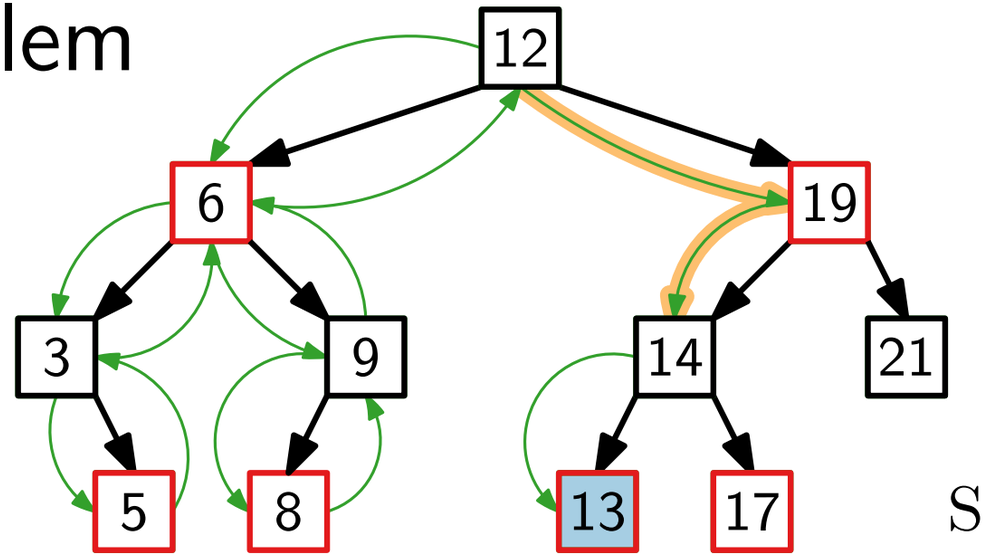
1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in \mathcal{O}(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - gar keine?
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung?
   - gar keiner
4. Implementiere neue Operationen! Laufzeit? Abschätzung bestmöglich?

```
Node SELECT(int i):                    O(i · h)
  x = MINIMUM()
  while x ≠ nil and i > 1 do
      x = SUCCESSOR(x)                 O(h)
      i = i − 1
  return x
```

```
int RANK(Node x):                      O(rank · h)
  i = 0
  while x ≠ nil do
      x = PREDECESSOR(x)               O(h)
      i = i + 1
  return i
```

Das dynamische Auswahlproblem

1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in \mathcal{O}(\log n)$



SELECT(7)

2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - gar keine?
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung?
   - gar keiner
4. Implementiere neue Operationen!

Laufzeit?

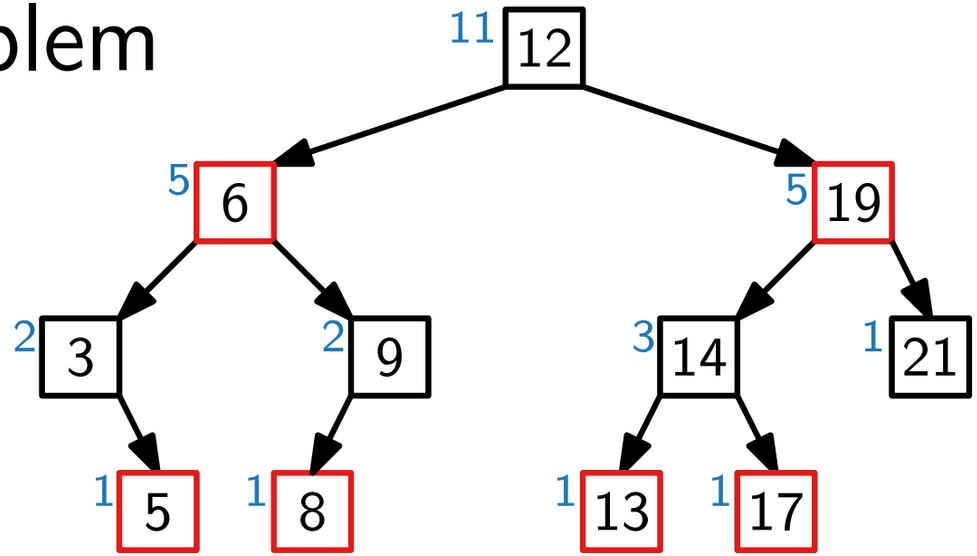
Node SELECT(int i): $\mathcal{O}(i+h)$

```
x = MINIMUM()
while x ≠ nil and i > 1 do
    x = SUCCESSOR(x)   O(h)
    i = i − 1
return x
```

int RANK(Node x): $\mathcal{O}(rank+h)$

```
i = 0
while x ≠ nil do
    x = PREDECESSOR(x)   O(h)
    i = i + 1
return i
```

Das dynamische Auswahlproblem



1. Welche Ausgangsdatenstruktur?
   - balancierte binäre Suchbäume
     z.B. Rot-Schwarz-Bäume
     $\Rightarrow$ Baumhöhe $h \in \mathcal{O}(\log n)$
2. Welche Extrainformation aufrechterhalten?
   - Größen der Teilbäume:
     für jeden Knoten v, speichere $v.size$
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung? später...
4. SELECT(Node $x = root$, int i): $\mathcal{O}(h)$

```
r = x.left.size + 1
if i == r then return x
else
    if i < r then
        return SELECT(x.left, i)
    else
        return SELECT(x.right, i − r)
```

RANK(Node x): $\mathcal{O}(h)$

```
r = x.left.size + 1
y = x
while y ≠ root do
    if y == y.p.right then
        r = r + y.p.left.size + 1
    y = y.p
return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von RANK()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von x im Teilbaum mit Wurzel y.

y-Rang(x)

1.) Initialisierung

Vor 1. Iteration gilt $y = x \Rightarrow y\text{-Rang}(x) = x.left.size + 1$. ✓

```
RANK(Node x):
    r = x.left.size + 1
    y = x
    while y ≠ root do
    |   if y == y.p.right then
    |   |   r = r + y.p.left.size + 1
    |   y = y.p
    return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von RANK()

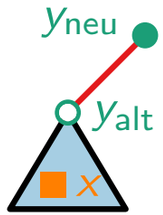
Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von x im Teilbaum mit Wurzel y.

y-Rang(x)

1.) Initialisierung ✓

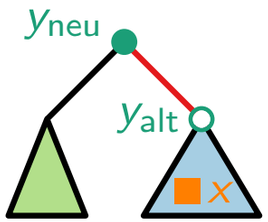
2.) Aufrechterhaltung ✓

Annahme: Invariante galt zu Beginn der aktuellen Iteration.
Zu zeigen: Invariante gilt dann auch am Ende der aktuellen Iteration.



1. Fall: y war linkes Kind.
   $\Rightarrow$ y-Rang von x bleibt gleich.

2. Fall: y war rechtes Kind.
   $\Rightarrow$ y-Rang von x erhöht sich um Größe des li. Teilbaums von y plus 1 (für y selbst).




```
RANK(Node x):
    r = x.left.size + 1
    y = x
    while y ≠ root do
        if y == y.p.right then
            r = r + y.p.left.size + 1
        y = y.p
    return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

Korrektheit von RANK()

Invariante: Zu Beginn jeder Iteration der while-Schleife ist r der Rang von x im Teilbaum mit Wurzel y.

y-Rang(x)

1.) Initialisierung ✓

2.) Aufrechterhaltung ✓

3.) Terminierung ✓

Bei Schleifenabbruch: $y = root$.
$\Rightarrow r = y\text{-Rang}(x) = \text{Rang}(x)$.

Zusammenfassung:

Die Methode RANK() liefert wie gewünscht den Rang des übergebenen Knotens.

```
RANK(Node x):
    r = x.left.size + 1
    y = x
    while y ≠ root do
        if y == y.p.right then
            r = r + y.p.left.size + 1
        y = y.p
    return r
```

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

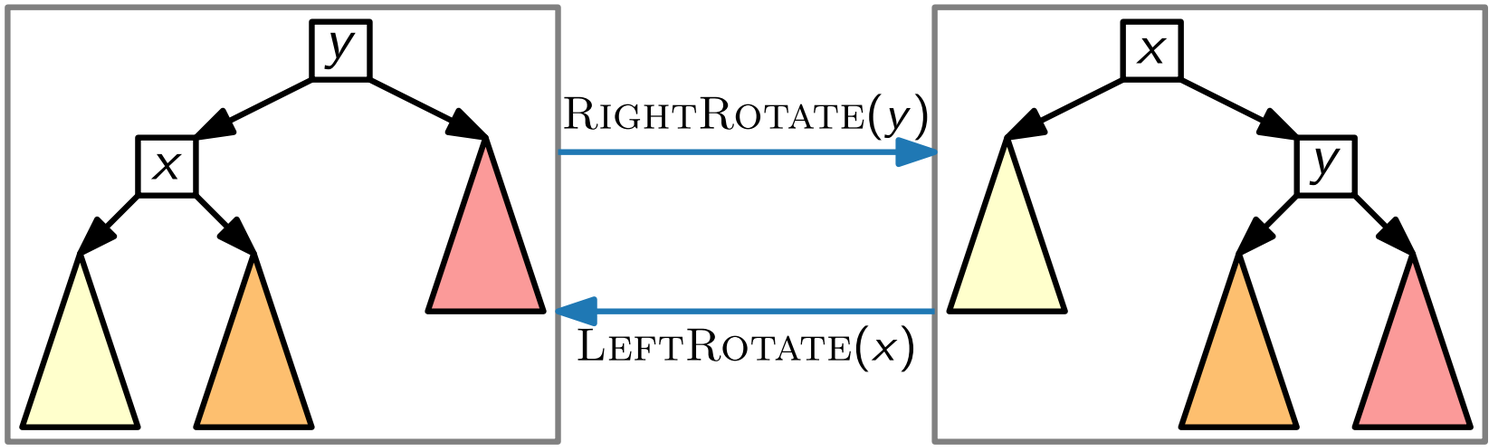
3. Aufwand zur Aufrechterhaltung der Extrainformation?

RBInsert() geht in zwei Phasen vor:

zusätzliche Laufzeit fürs Einfügen: $\mathcal{O}(h)$

Phase I: Suche die Stelle, wo der neue Knoten z eingefügt wird.
Für alle Knoten y auf dem Weg von der Wurzel zu z: Erhöhe $y.size$ um 1.
Laufzeit $\mathcal{O}(h)$

Phase II (RBInsertFixup): Strukturänderung nur in ≤ 2 Rotationen:
Laufzeit $\mathcal{O}(1)$



Welche Befehle müssen wir an RightRotate(Node y) anhängen, damit nach der Rotation alle $size$-Einträge wieder stimmen?

$$x.size = y.size$$
$$y.size = y.left.size + y.right.size + 1$$

(vorausgesetzt, dass $T.nil.size = 0$)

RBDelete() kann man analog „upgraden“.

Ergebnis

Satz. Das dynamische Auswahlproblem kann man so lösen, dass $\textsc{Select}()$ und $\textsc{Rank}()$ sowie alle gewöhnlichen Operationen für dynamische Mengen in einer Menge von n Elementen in $\mathcal{O}(\log n)$ Zeit laufen.

Verallgemeinerung

Satz. Sei f Knotenattribut eines R-S-Baums mit n Knoten.

Falls für jeden Knoten v gilt:

$f(v)$ lässt sich aus Information in v, $v.left$, $v.right$ (inklusive $f(v.left)$ und $f(v.right)$) in konstanter Zeit berechnen.

$$\Downarrow$$

Dann kann man beim Einfügen und Löschen einzelner Knoten den Wert von f in allen Knoten aufrechterhalten, ohne die asymptotischen Laufzeit $\mathcal{O}(\log n)$ der UPDATE-Operationen zu verändern.

Beweisidee. Im Prinzip wie im Spezialfall $f \equiv size$.

Allerdings ist es im Prinzip möglich, dass sich die Veränderungen von einem gewissen veränderten Knoten bis in die Wurzel hochpropagieren.

[Details Kapitel 14.2, CLRS]

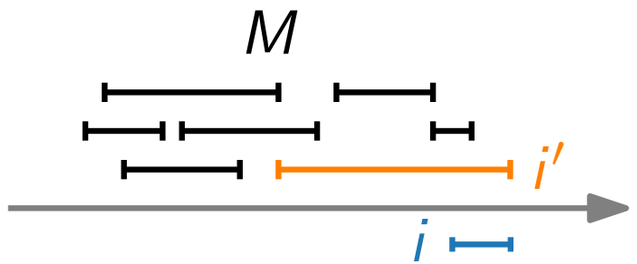
Noch ein Beispiel

zur Augmentierung von Rot-Schwarz-Bäumen [CLRS, Kapitel 14.3]):

Intervall-Baum

verwaltet eine Menge M von Intervallen und bietet Operationen:

- ptr INSERT (Interval i)
- DELETE(ptr x)
- ptr SEARCH(Interval i) neu



liefert ein Element mit Interval $i' \in M$ mit $i \cap i' \neq \emptyset$,
falls ein solches existiert, sonst nil.