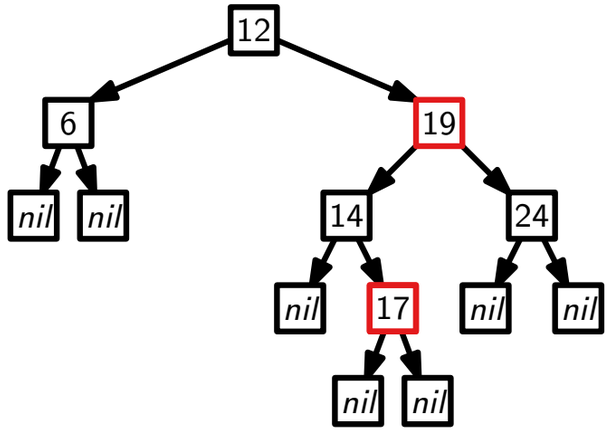
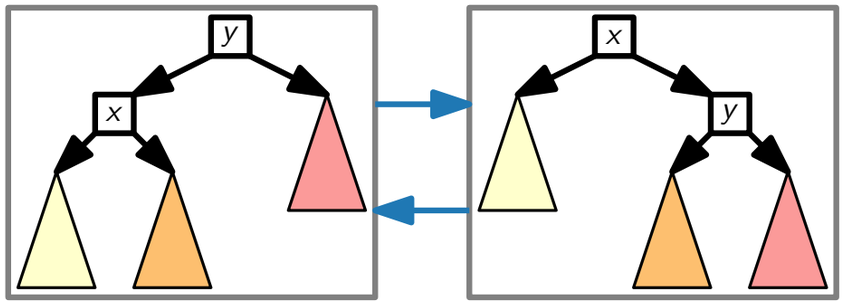
Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen



Vorlesung 14:
Rot-Schwarz-Bäume



Tim Hegemann

Wintersemester 2024

Dynamische Menge

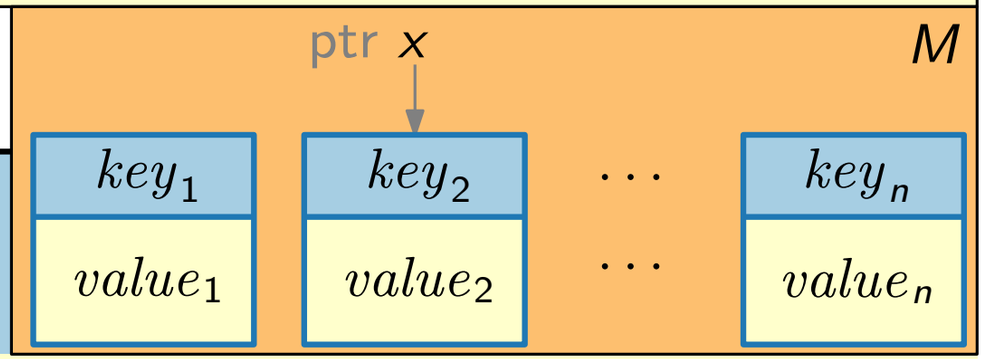
Abstrakter Datentyp: Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer Menge M, wobei jedes Element $x \in M$ aus einem Schlüssel $x.key$ und einem Wert $x.value$ besteht.

Beliebiges Objekt

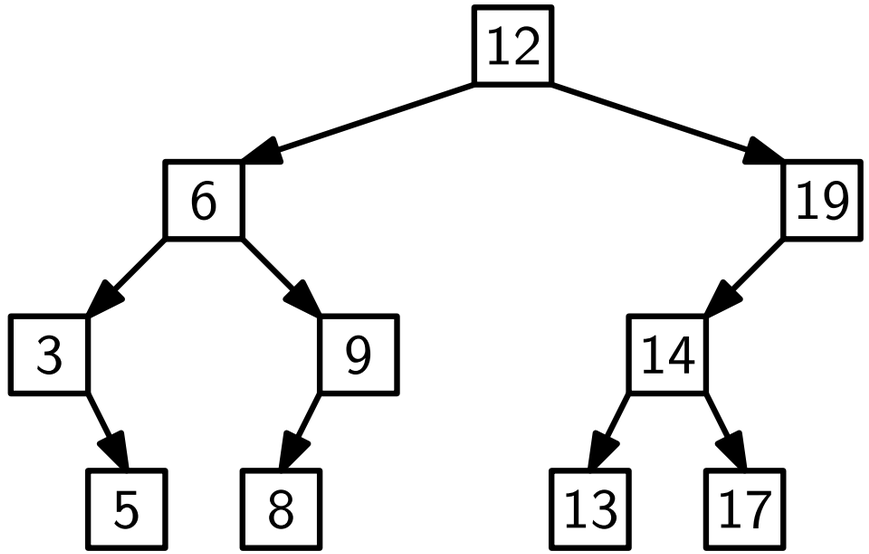
Operation	Funktionalität
ptr INSERT(key k, value v)	**Veränderungen**
DELETE(ptr x)	
ptr SEARCH(key k)	**Anfragen**
ptr MINIMUM()	
ptr MAXIMUM()	
ptr PREDECESSOR(ptr x)	
ptr SUCCESSOR(ptr x)	

Pointer



Binäre Suchbäume

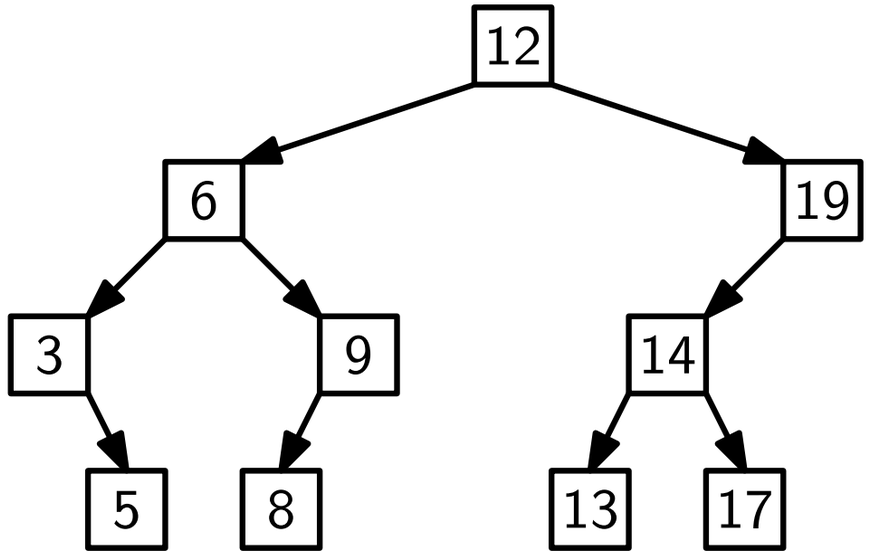
Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.



Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

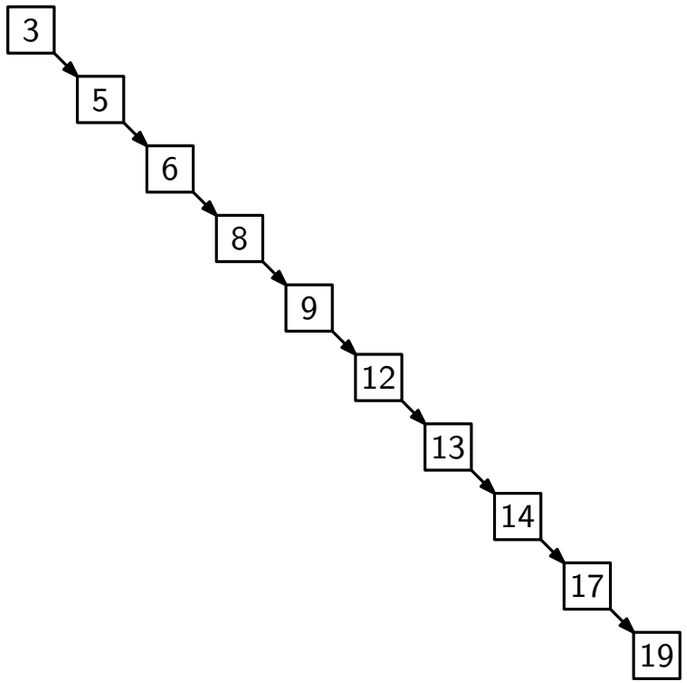
Aber:

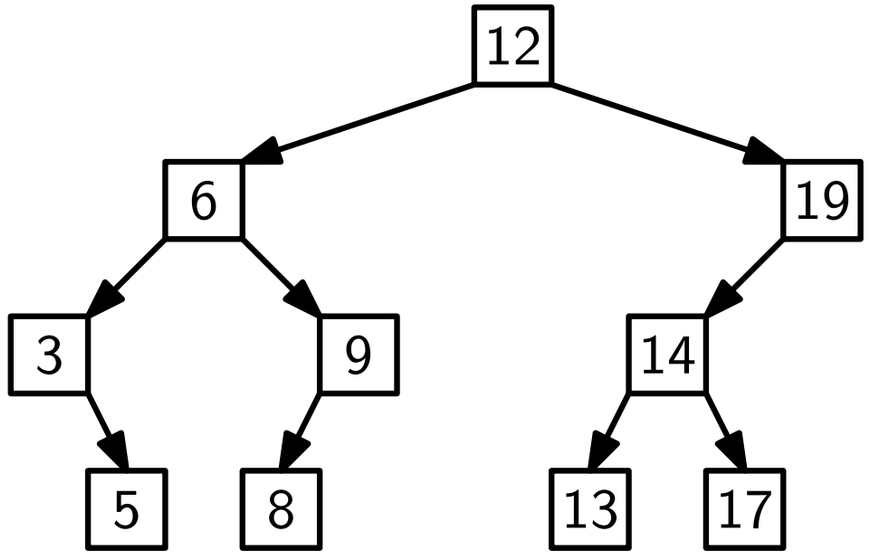


Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber:

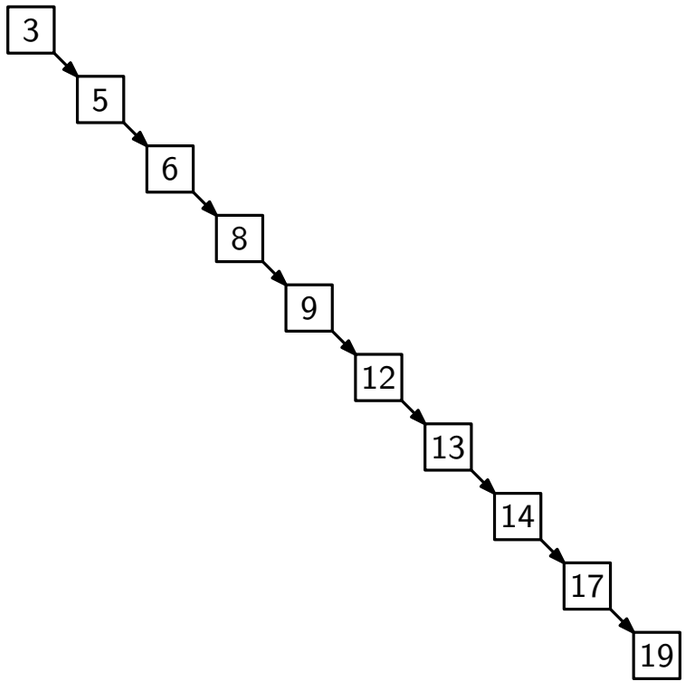


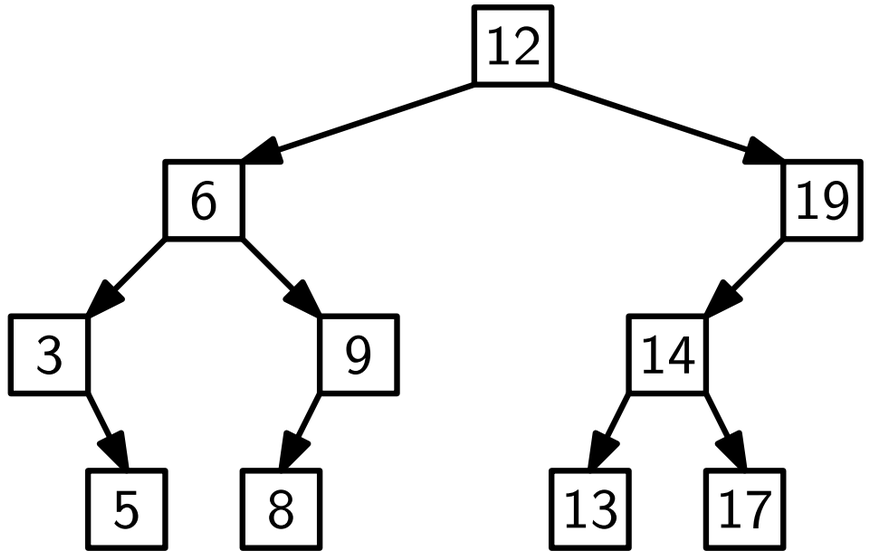


Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.



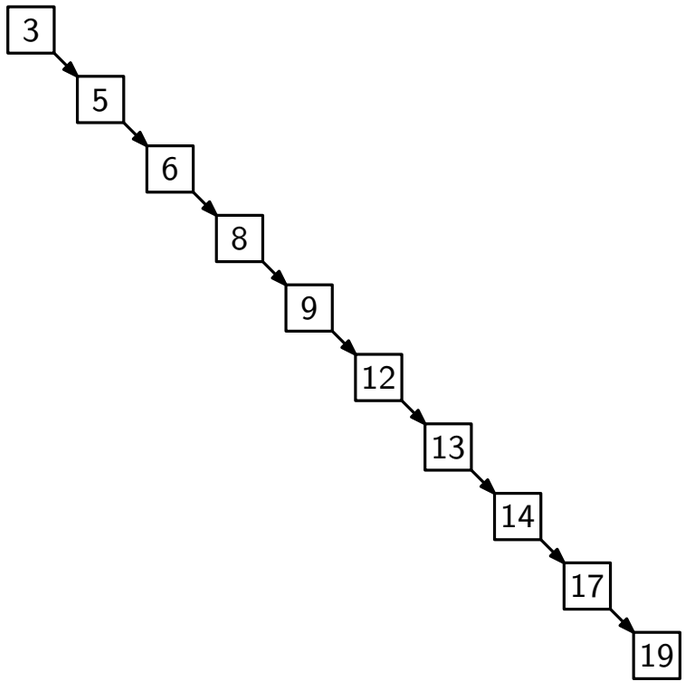


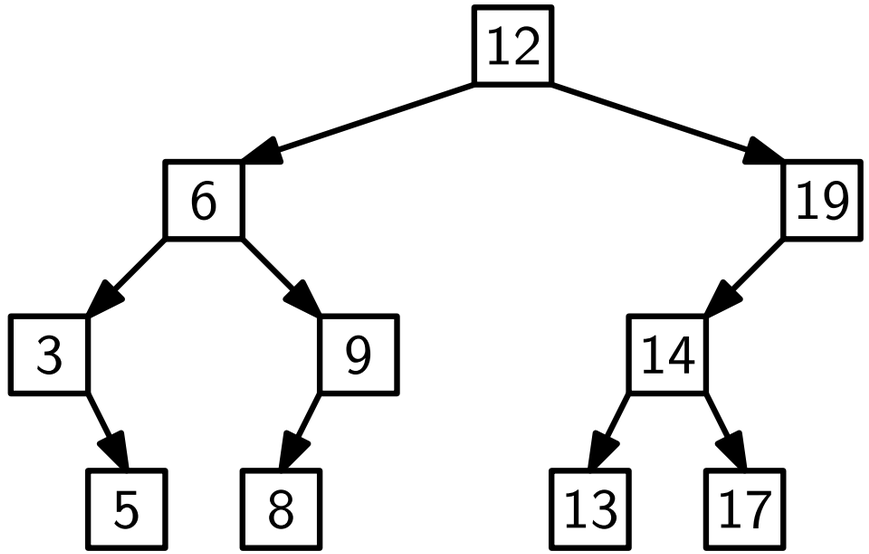
Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel:



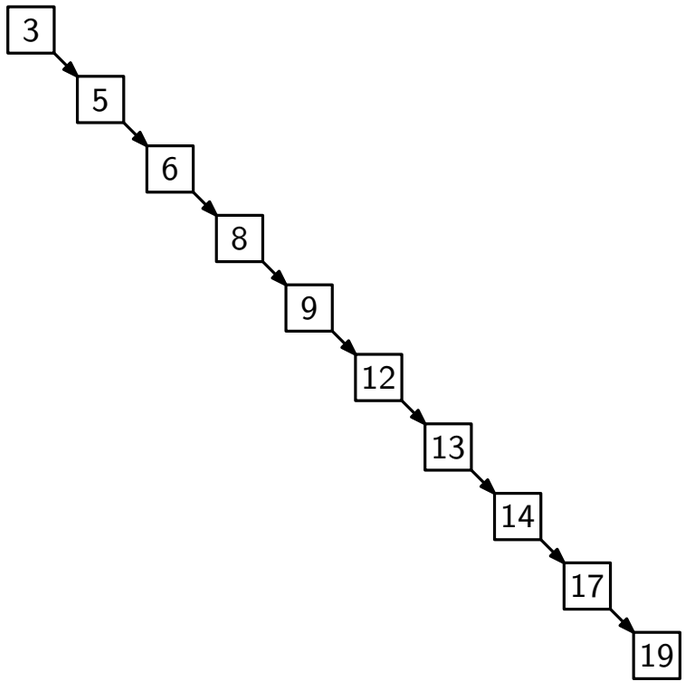


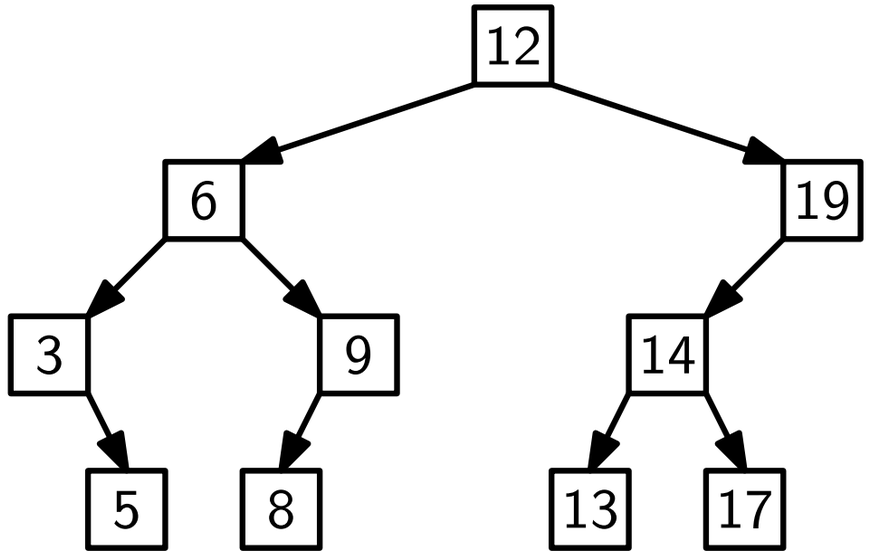
Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume **balancieren**



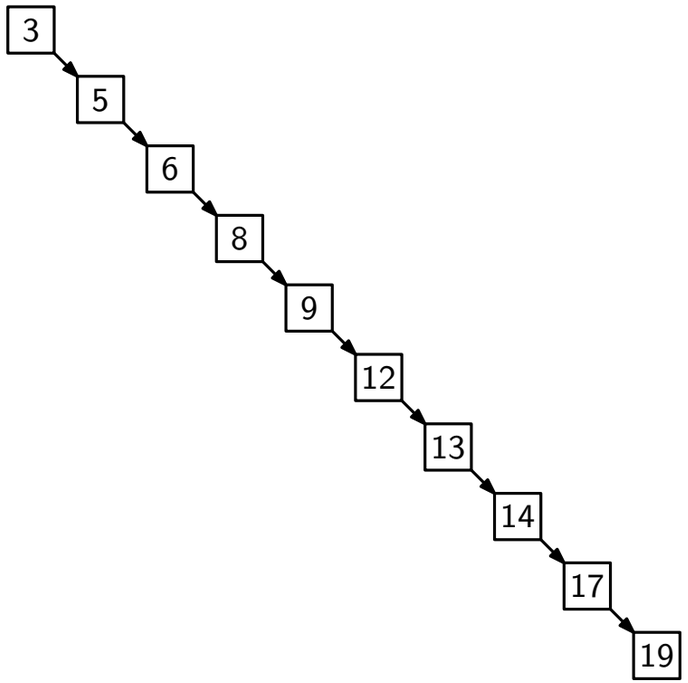


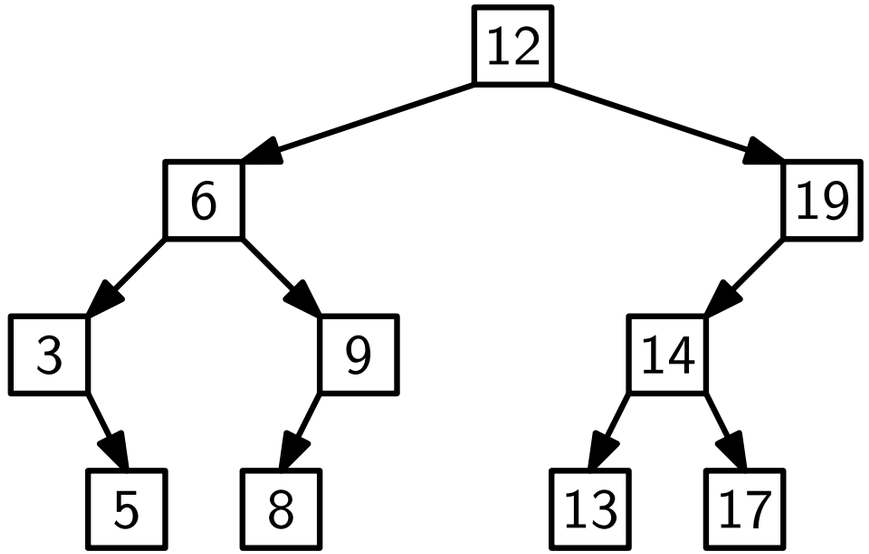
Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume **balancieren** $\Rightarrow$ $h \in \mathcal{O}(\log n)$



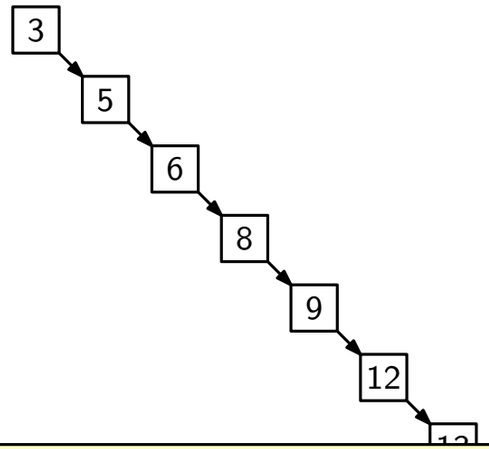


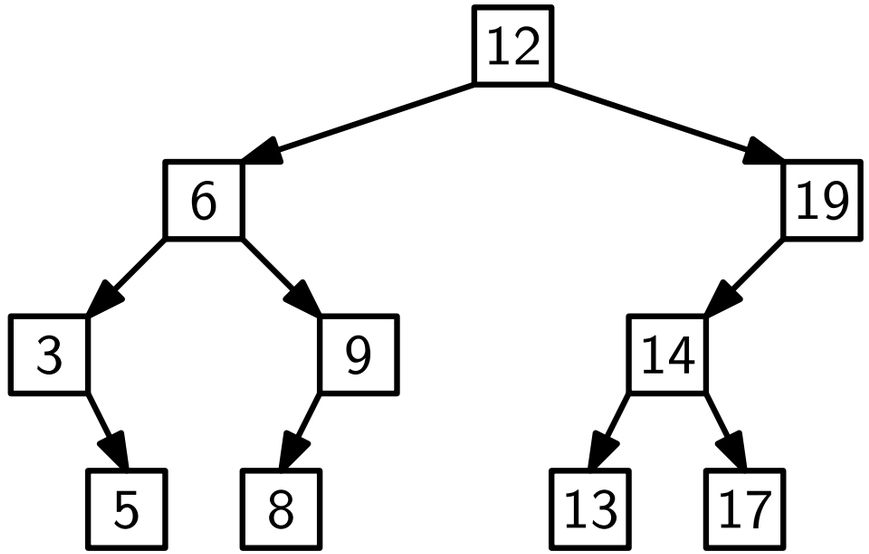
Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume **balancieren** $\Rightarrow$ $h \in \mathcal{O}(\log n)$





Binärer-Suchbaum-Eigenschaft. Für jeden Knoten v gilt:
alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
rechten $\geq$

Balanciermethoden

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) des linken
und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

Balanciermethoden

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) des linken
und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe**

für jeden Knoten ist die Höhe
des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

Balanciermethoden

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) des linken
und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe**

für jeden Knoten ist die Höhe
des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Grad**

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten
können verschieden viele Kinder haben.

Balanciermethoden

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) des linken
und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe**

für jeden Knoten ist die Höhe
des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Grad**

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten
können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe**

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil
schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Balanciermethoden

Beispiele

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) des linken
und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe**

für jeden Knoten ist die Höhe
des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Grad**

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten
können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe**

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil
schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Balanciermethoden

Beispiele

$BB[\alpha]$-Bäume

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) des linken
und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe**

für jeden Knoten ist die Höhe
des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Grad**

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten
können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe**

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil
schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Balanciermethoden

Beispiele

nach **Gewicht** — $BB[\alpha]$-Bäume

für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe** — AVL-Bäume

für jeden Knoten ist die Höhe des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Grad**

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe**

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil **schlechter** Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Balanciermethoden

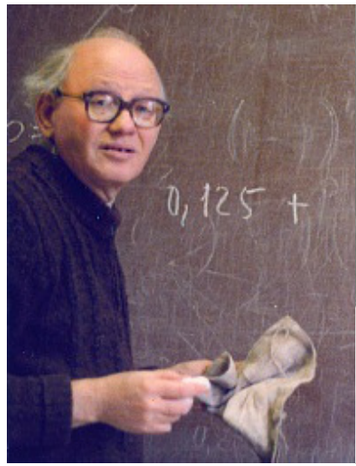
Beispiele

nach **Gewicht** — $BB[\alpha]$-Bäume

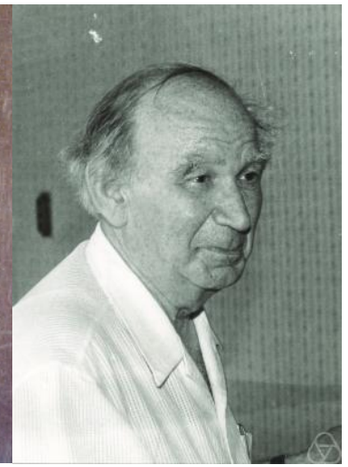
für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe** — AVL-Bäume

für jeden Knoten ist die Höhe des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.



Georgi M. **A**delson-**V**elski
1922–2014



Jewgeni M. **L**andis
1921–1997

nach **Grad**

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe**

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil **schlechter** Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Fotos: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University (G. A-L), Konrad Jacobs / wikipedia (Landis)

Balanciermethoden

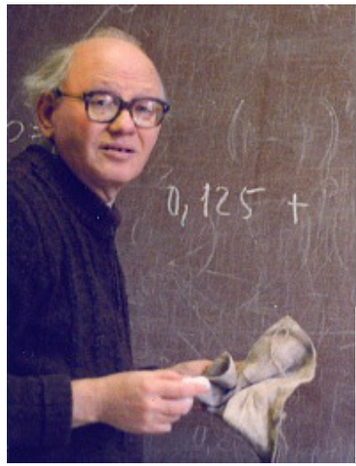
Beispiele

nach **Gewicht** — $BB[\alpha]$-Bäume

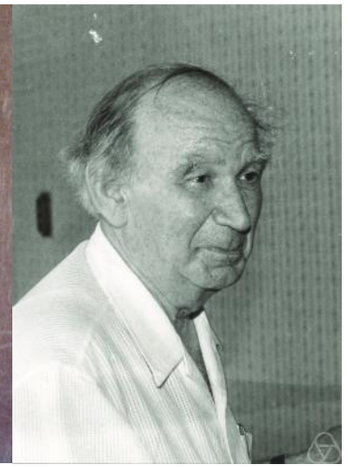
für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe** — AVL-Bäume

für jeden Knoten ist die Höhe des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.



Georgi M. **A**delson-**V**elski
1922–2014



Jewgeni M. **L**andis
1921–1997

nach **Grad** — $(2, 3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe**

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil **schlechter** Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Fotos: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University (G. A-L), Konrad Jacobs / wikipedia (Landis)

Balanciermethoden

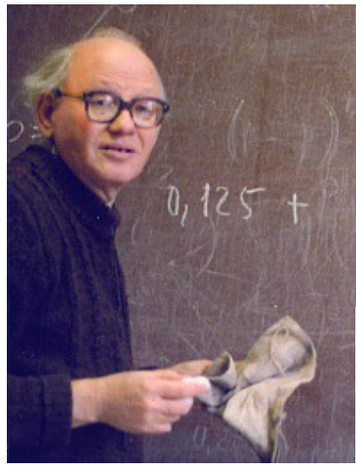
Beispiele

nach **Gewicht** — $BB[\alpha]$-Bäume

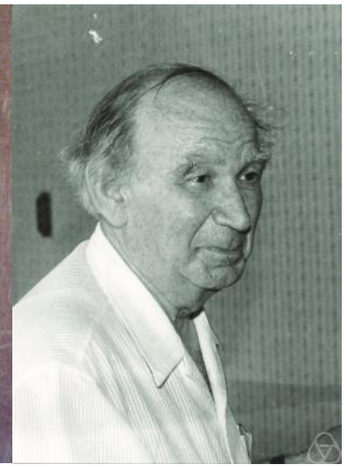
für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe** — AVL-Bäume

für jeden Knoten ist die Höhe des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.



Georgi M. **A**delson-**V**elski
1922–2014



Jewgeni M. **L**andis
1921–1997

nach **Grad** — $(2,3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe** — Rot-Schwarz-Bäume

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil **schlechter** Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Fotos: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University (G. A-L), Konrad Jacobs / wikipedia (Landis)

Balanciermethoden

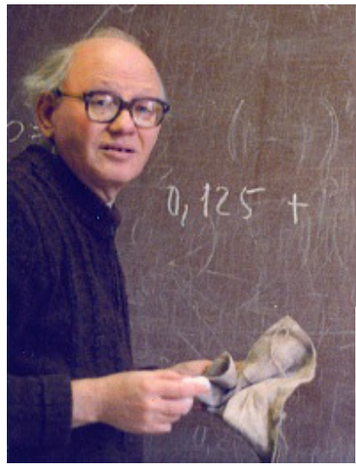
Beispiele

nach **Gewicht** — $BB[\alpha]$-Bäume

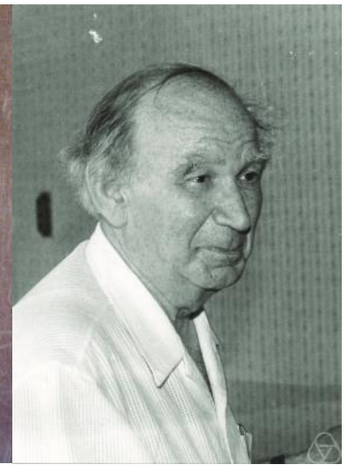
für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.

nach **Höhe** — AVL-Bäume

für jeden Knoten ist die Höhe des linken und rechten Teilbaums ungefähr gleich.



Georgi M. **A**delson-**V**elski
1922–2014



Jewgeni M. **L**andis
1921–1997

nach **Grad** — $(2, 3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe** — Rot-Schwarz-Bäume

jeder Knoten ist entweder **gut** oder **schlecht**; der Anteil **schlechter** Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Fotos: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University (G. A-L), Konrad Jacobs / wikipedia (Landis)

Rot-Schwarz-Bäume: Anwendungen

Red–black trees are also particularly valuable in functional programming, where they are one of the most common persistent data structures, used to construct associative arrays and sets that can retain previous versions after mutations. The persistent version of red–black trees requires $O(\log n)$ space for each insertion or deletion, in addition to time.

Rot-Schwarz-Bäume: Anwendungen

Red–black trees are also particularly valuable in functional programming, where they are one of the most common persistent data structures, used to construct associative arrays and sets that can retain previous versions after mutations. The persistent version of red–black trees requires $O(\log n)$ space for each insertion or deletion, in addition to time.

JAVA 8 improvements

The inner representation of the HashMap has changed a lot in JAVA 8. Indeed, the implementation in JAVA 7 takes 1k lines of code whereas the implementation in JAVA 8 takes 2k lines. Most of what I've said previously is true except the linked lists of entries. In JAVA8, you still have an array but it now stores Nodes that contains the exact same information as Entries and therefore are also linked lists:

Here is a part of the Node implementation in JAVA 8:

```
static class Node<K,V> implements Map.Entry<K,V> {
     final int hash;
     final K key;
     V value;
     Node<K,V> next;
```

So what's the big difference with JAVA 7? Well, Nodes can be extended to TreeNodes. A TreeNode is a red-black tree structure that stores really more information so that it can add, delete or get an element in O(log(n)).

Rot-Schwarz-Bäume: Anwendungen

Red–black trees are also particularly valuable in functional programming, where they are one of the most common persistent data structures, used to construct associative arrays and sets that can retain previous versions after mutations. The persistent version of red–black trees requires $O(\log n)$ space for each insertion or deletion, in addition to time.

JAVA 8 improvements

The inner representation of the HashMap has changed a lot in JAVA 8. Indeed, the implementation in JAVA 7 takes 1k lines of code whereas the implementation in JAVA 8 takes 2k lines. Most of what I've said previously is true except the linked lists of entries. In JAVA8, you still have an array but it now stores Nodes that contains the exact same information as Entries and therefore are also linked lists:

Here is a part of the Node implementation in JAVA 8:

```
static class Node<K,V> implements Map.Entry<K,V> {
     final int hash;
     final K key;
     V value;
     Node<K,V> next;
```

So what's the big difference with JAVA 7? Well, Nodes can be extended to TreeNodes. A TreeNode is a red-black tree structure that stores really more information so that it can add, delete or get an element in O(log(n)).

Red Black Trees are from a class of self balancing BSTs and as answered by others, any such self balancing tree can be used. I would like to add that Red-black trees are widely used as system symbol tables. For example they are used in implementing the following:

- Java: java.util.TreeMap , java.util.TreeSet .
- C++ STL: map, multimap, multiset.
- Linux kernel: completely fair scheduler, linux/rbtree.h

Rot-Schwarz-Bäume: Anwendungen

Red–black trees are also particularly valuable in functional programming, where they are one of the most common persistent data structures, used to construct associative arrays and sets that can retain previous versions after mutations. The persistent version of red–black trees requires $O(\log n)$ space for each insertion or deletion, in addition to time.

Data indexing in database engines uses RB trees directly or indirectly.

For example, MySQL uses B+ trees, which can be seen as a type of B tree. **An RB tree is similar in structure to a B tree of order 4**.

JAVA 8 improvements

The inner representation of the HashMap has changed a lot in JAVA 8. Indeed, the implementation in JAVA 7 takes 1k lines of code whereas the implementation in JAVA 8 takes 2k lines. Most of what I've said previously is true except the linked lists of entries. In JAVA8, you still have an array but it now stores Nodes that contains the exact same information as Entries and therefore are also linked lists:

Here is a part of the Node implementation in JAVA 8:

```
static class Node<K,V> implements Map.Entry<K,V> {
     final int hash;
     final K key;
     V value;
     Node<K,V> next;
```

So what's the big difference with JAVA 7? Well, Nodes can be extended to TreeNodes. A TreeNode is a red-black tree structure that stores really more information so that it can add, delete or get an element in O(log(n)).

Red Black Trees are from a class of self balancing BSTs and as answered by others, any such self balancing tree can be used. I would like to add that Red-black trees are widely used as system symbol tables. For example they are used in implementing the following:

- Java: java.util.TreeMap , java.util.TreeSet .
- C++ STL: map, multimap, multiset.
- Linux kernel: completely fair scheduler, linux/rbtree.h

Rot-Schwarz-Bäume: Anwendungen

Completely Fair Scheduler

From Wikipedia, the free encyclopedia

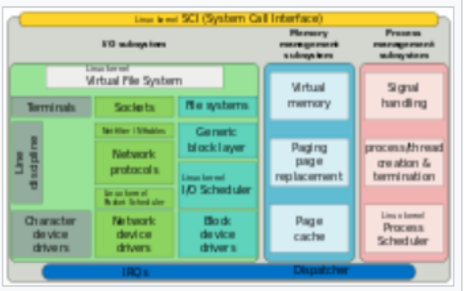
The **Completely Fair Scheduler** (**CFS**) is a process scheduler that was merged into the 2.6.23 (October 2007) release of the Linux kernel and is the default scheduler of the tasks of the `SCHED_NORMAL` class (i.e., tasks that have no real-time execution constraints). It handles CPU resource allocation for executing processes, and aims to maximize overall CPU utilization while also maximizing interactive performance.

In contrast to the previous O(1) scheduler used in older Linux 2.6 kernels, which maintained and switched run queues of active and expired tasks, the CFS scheduler implementation is based on per-CPU run queues, whose nodes are time-ordered schedulable entities that are kept sorted by red–black trees. The CFS does away with the old notion of per-priorities fixed time-slices and instead it aims at giving a fair share of CPU time to tasks (or, better, schedulable entities).[1][2]

Completely Fair Scheduler

Original author(s)	Ingo Molnár
Developer(s)	Linux kernel developers
Written in	C
Operating system	Linux kernel
Type	process scheduler
License	GPL-2.0
Website	kernel.org

Contents [hide]



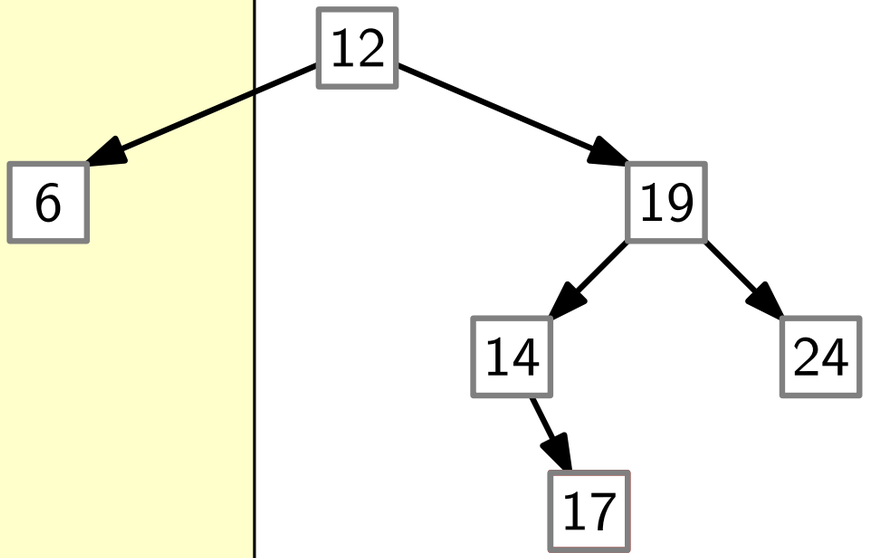
Location of the "Completely Fair Scheduler" (a process scheduler) in a simplified structure of the Linux kernel.

Algorithm

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

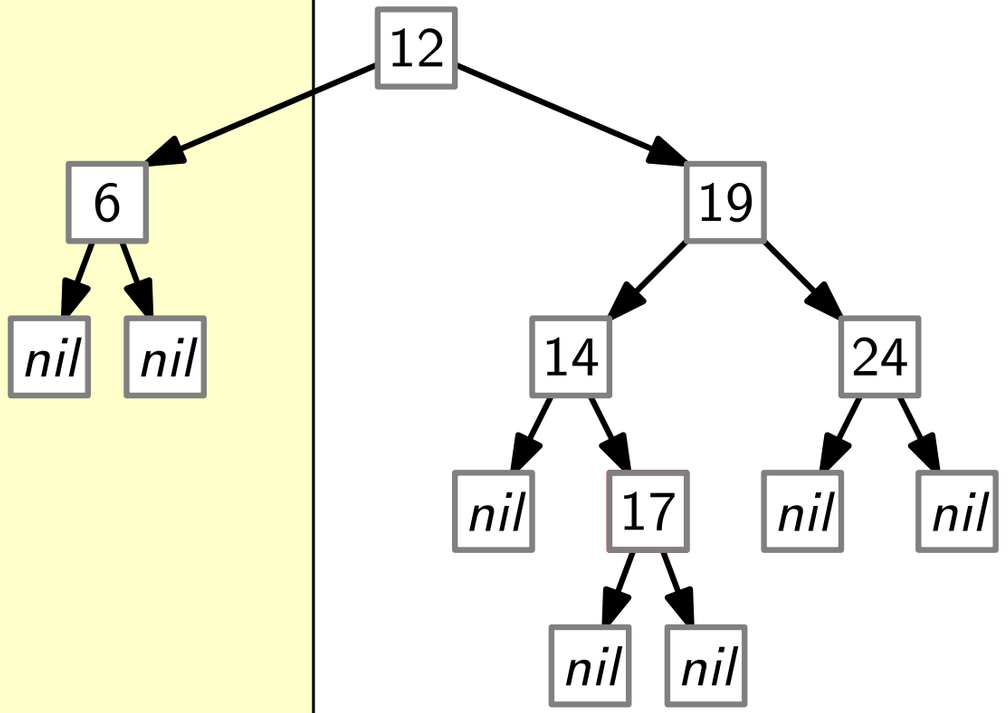
Rot-Schwarz-Eigenschaften:



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

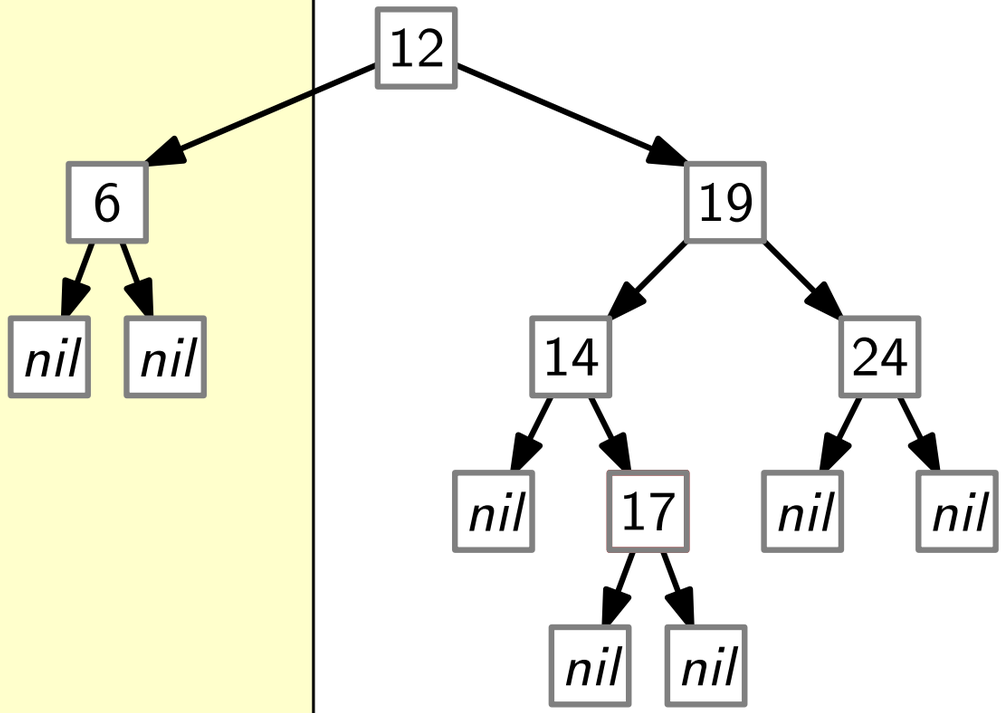


Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

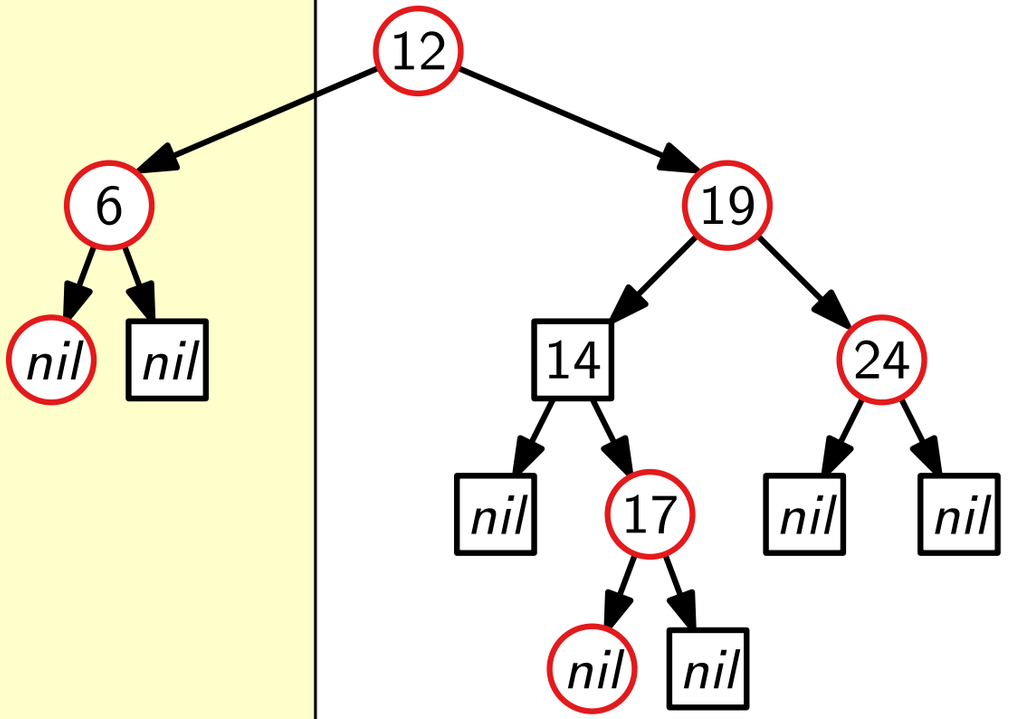


Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.



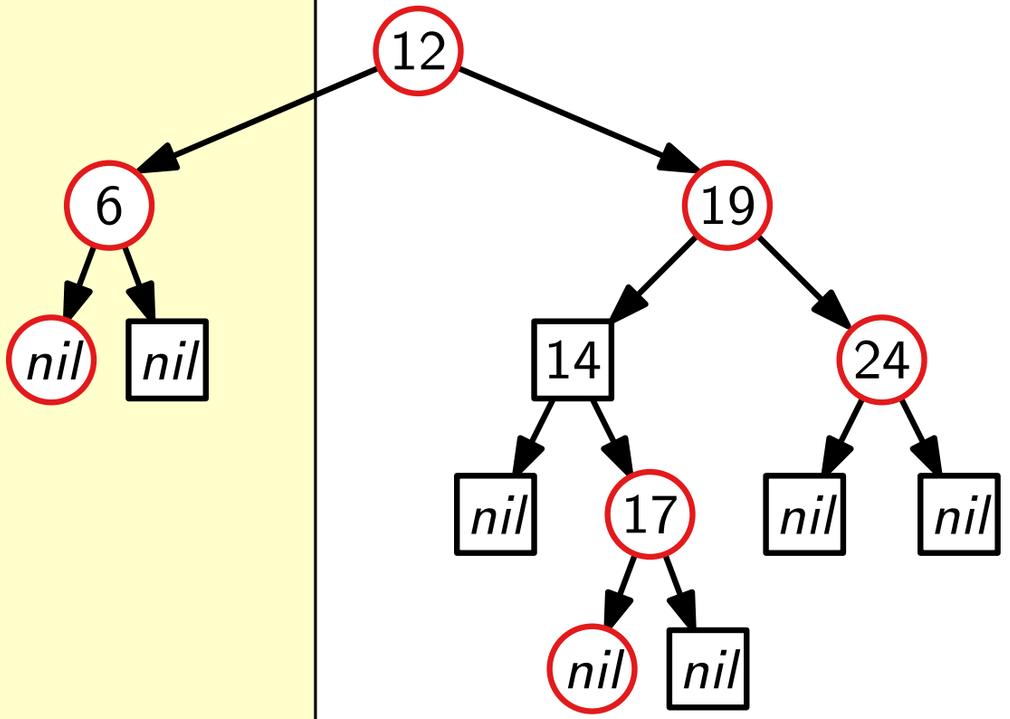
Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.



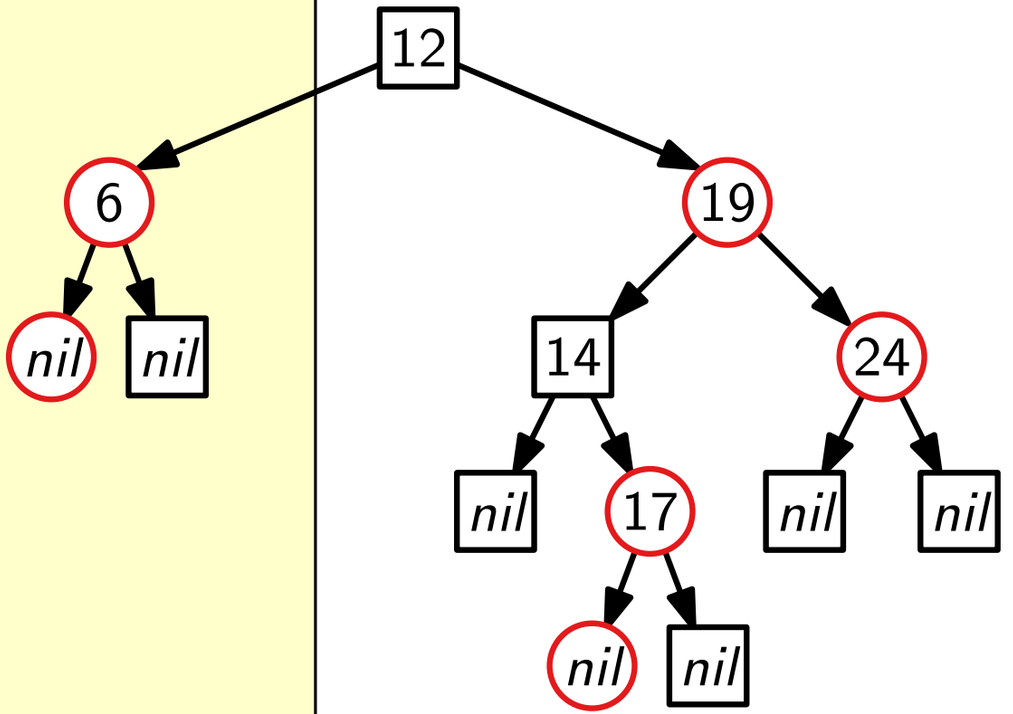
Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

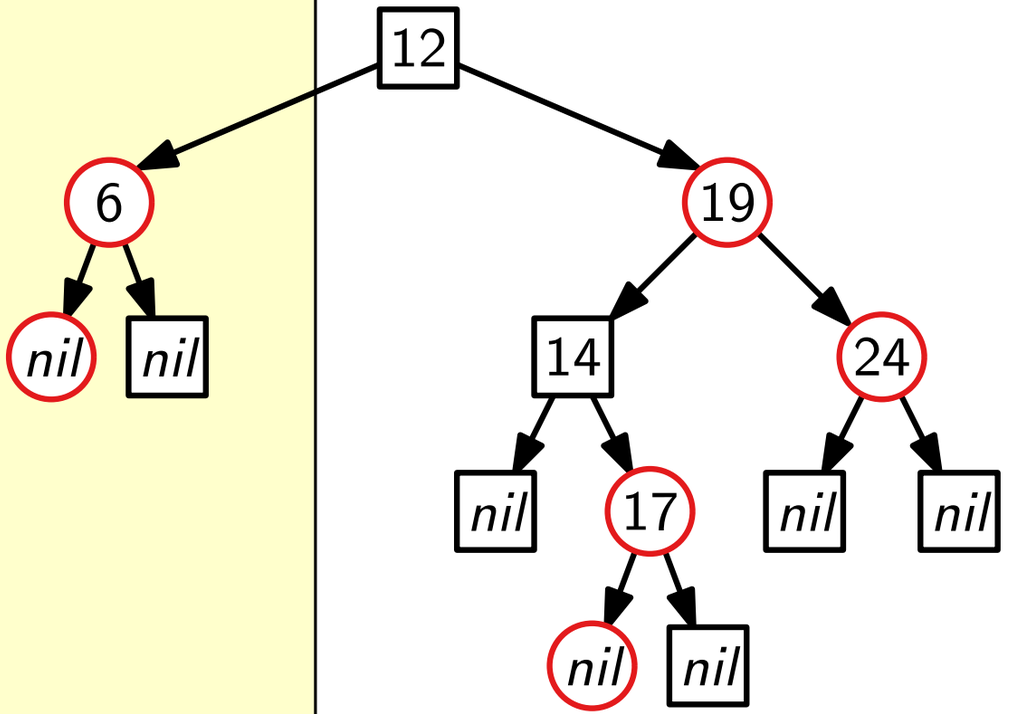
Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

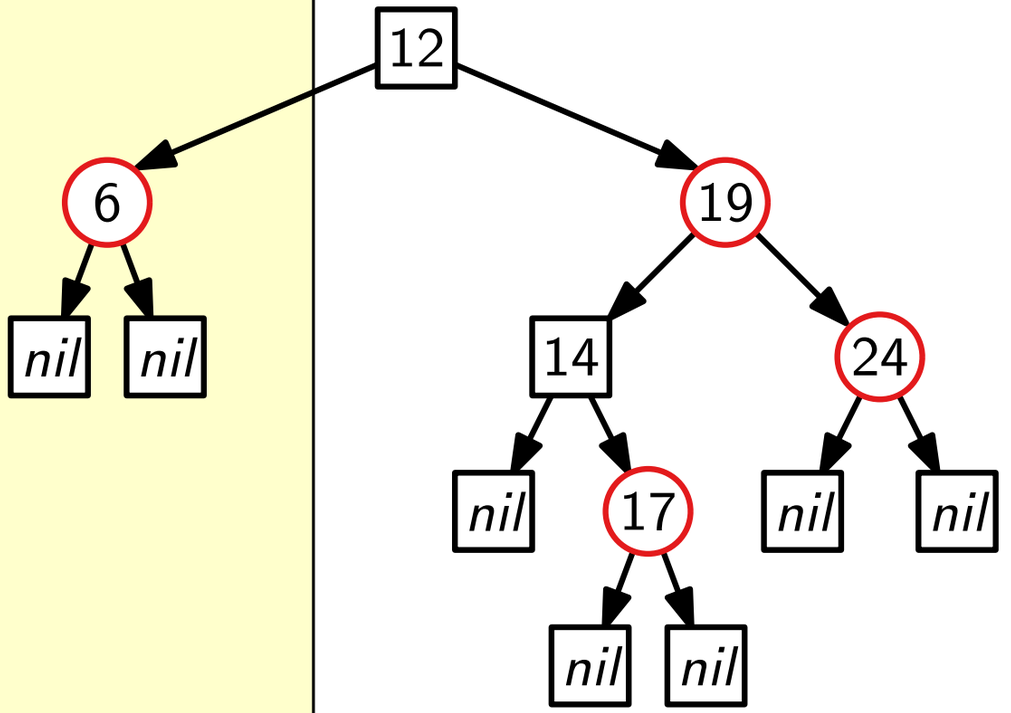
Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

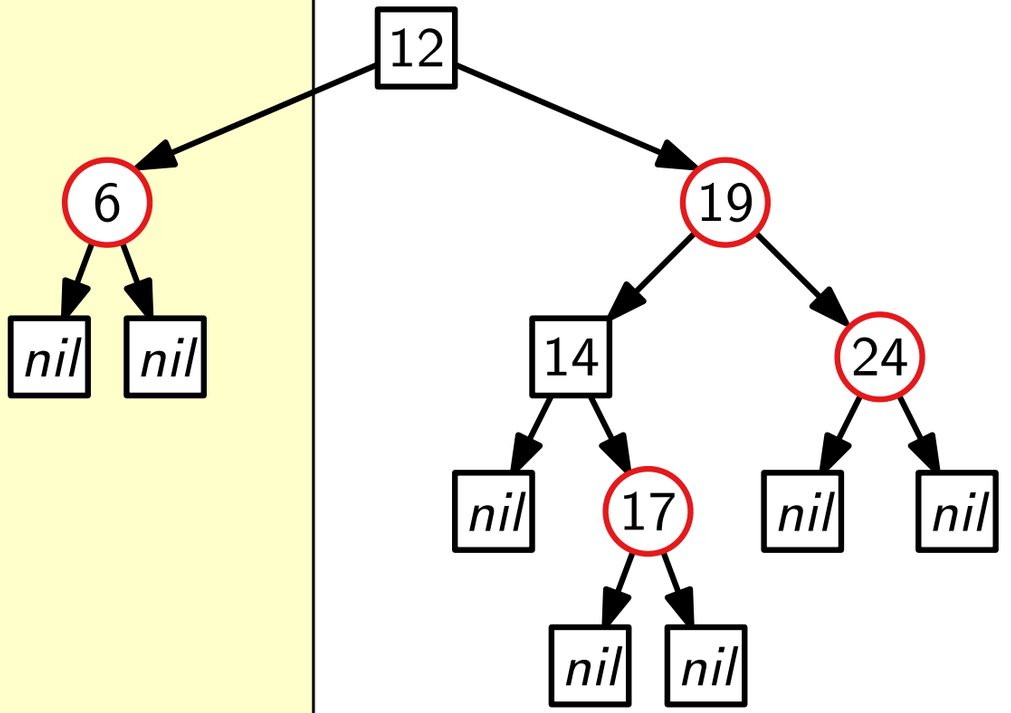
Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

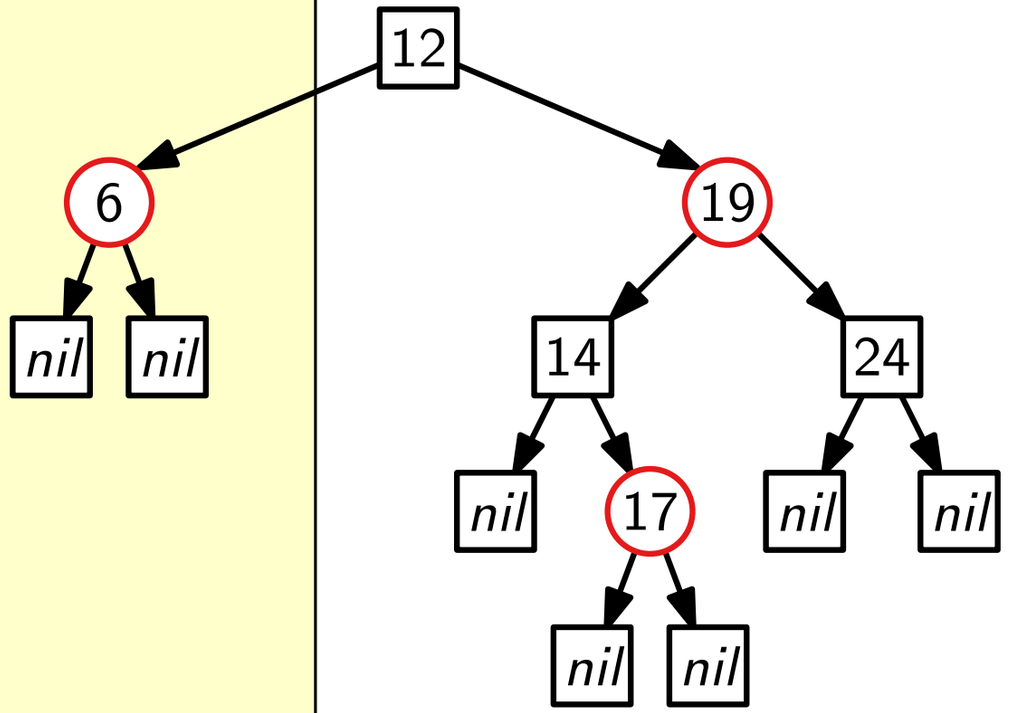
Rot-Schwarz-Eigenschaften:

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

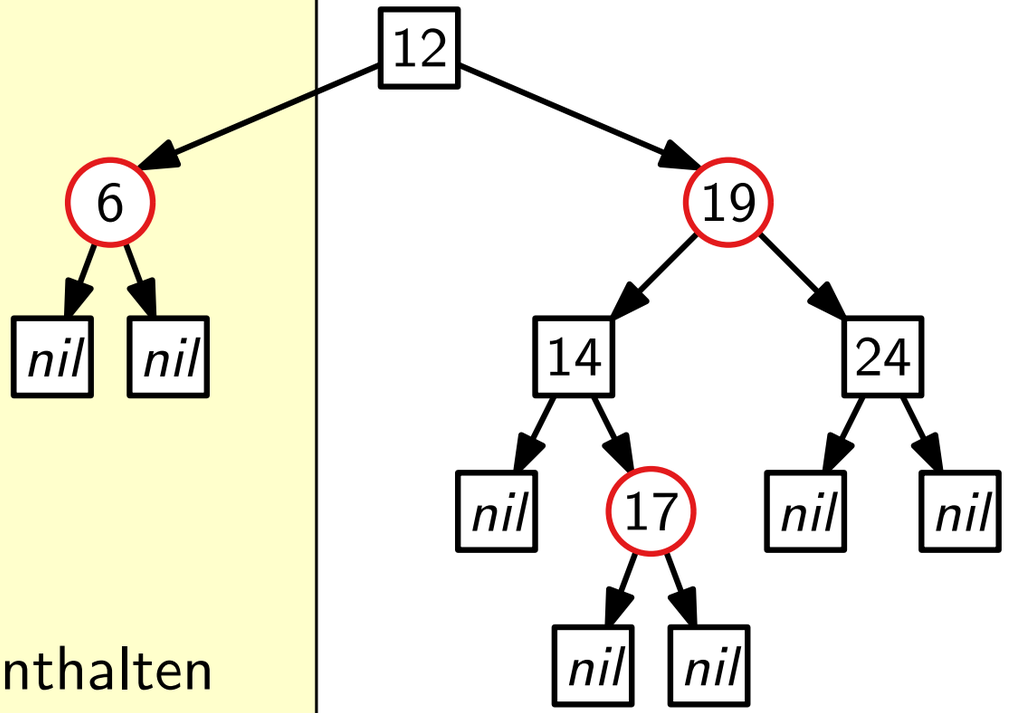
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

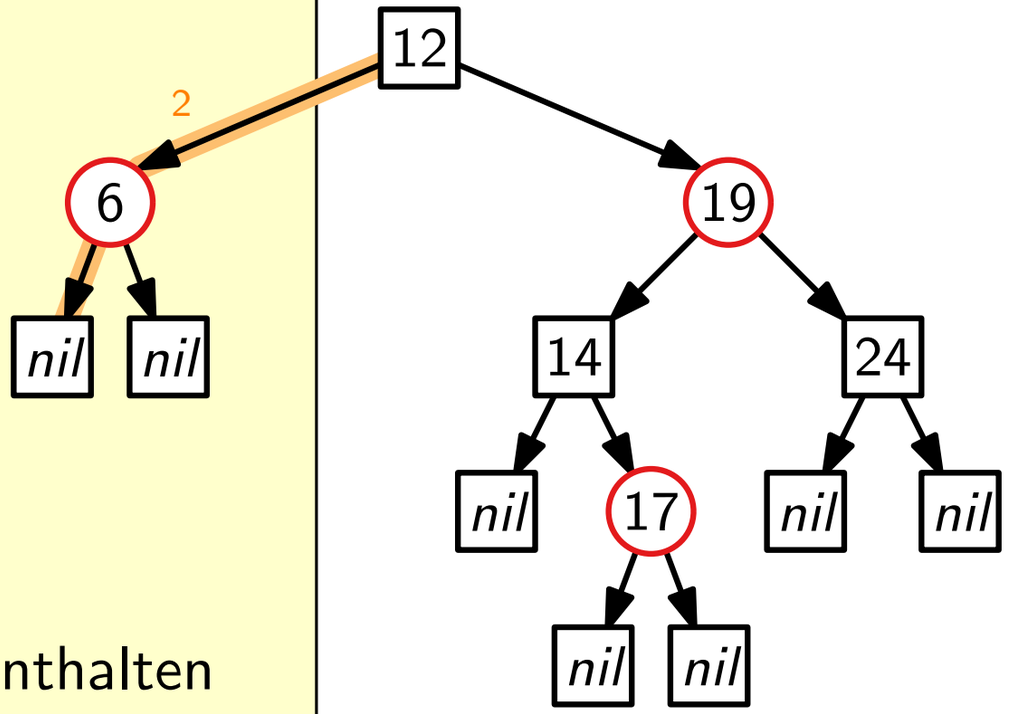
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

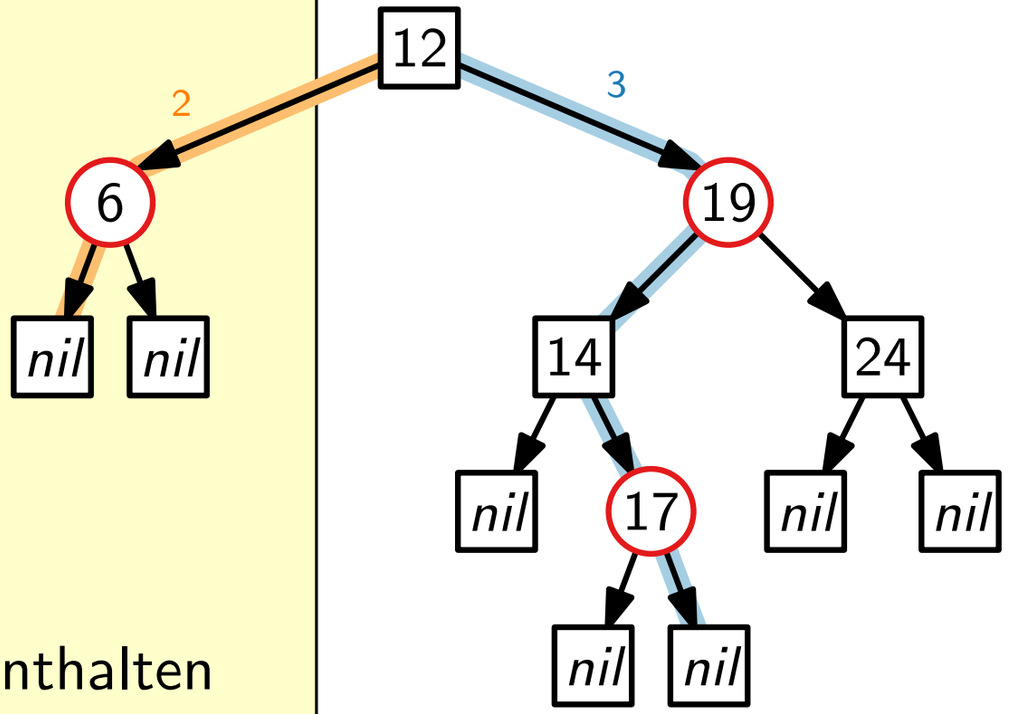
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

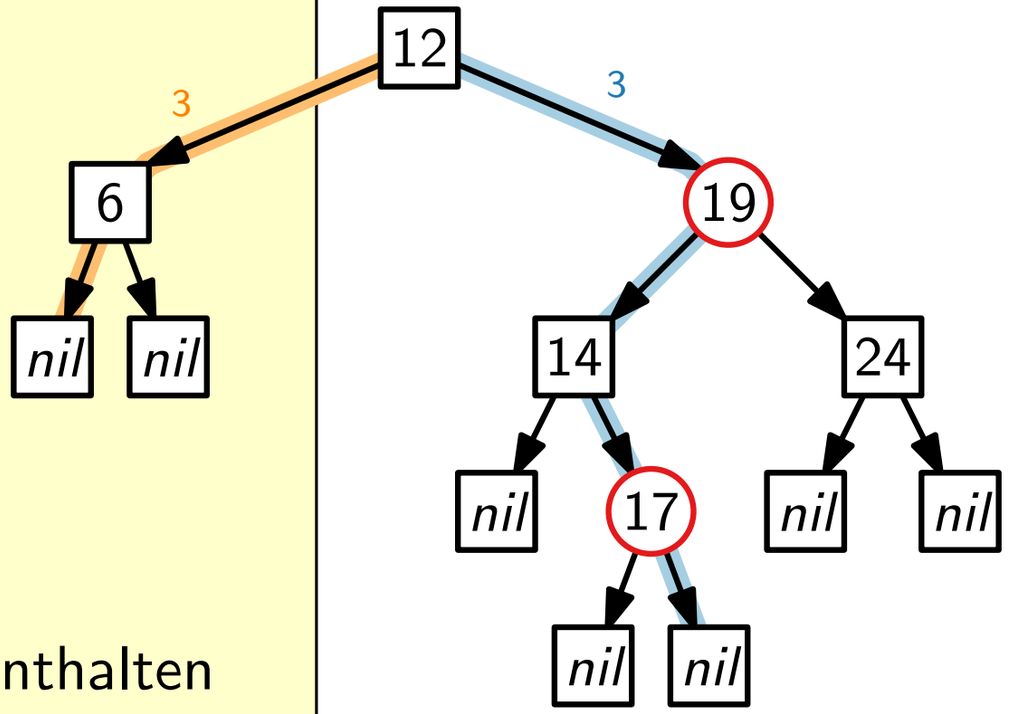
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

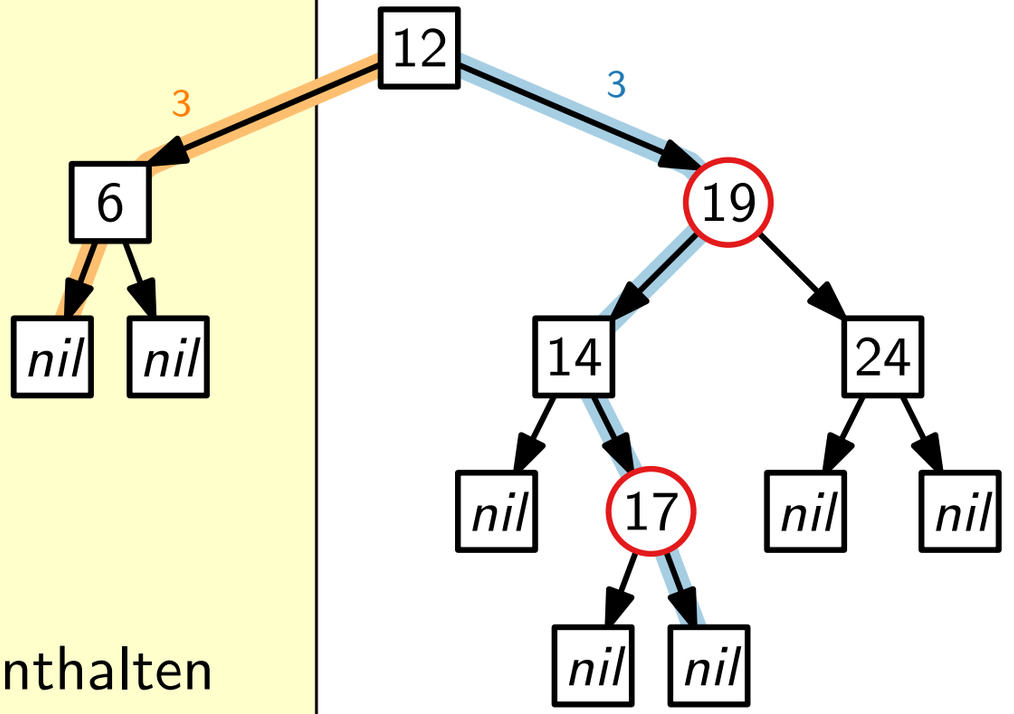
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.



Aus **(E4)** folgt:

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

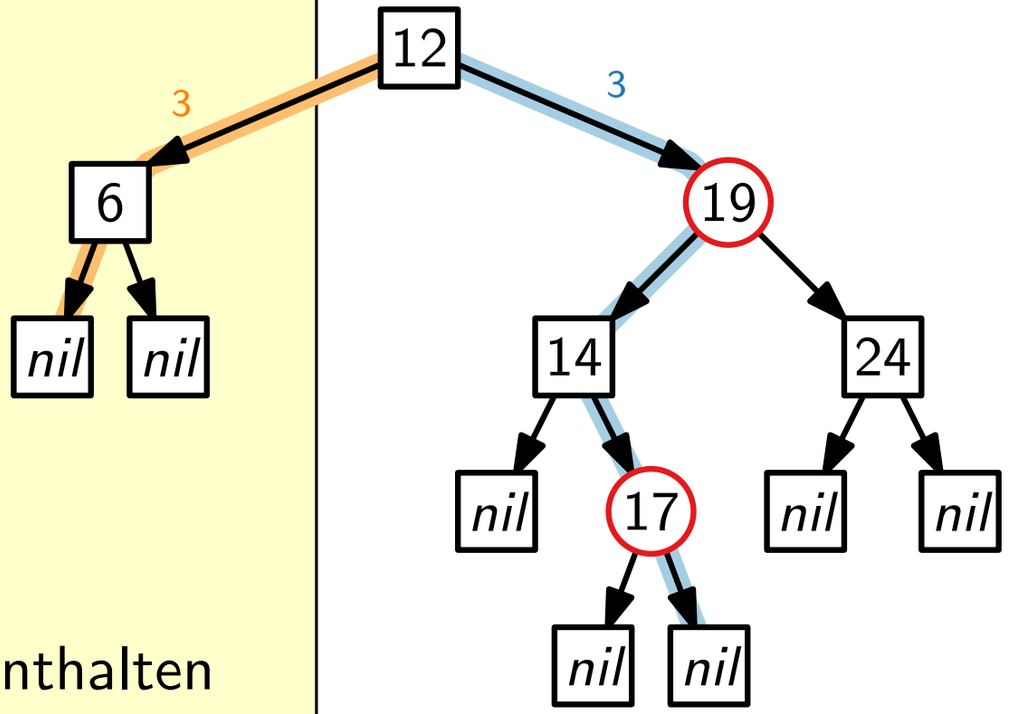
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

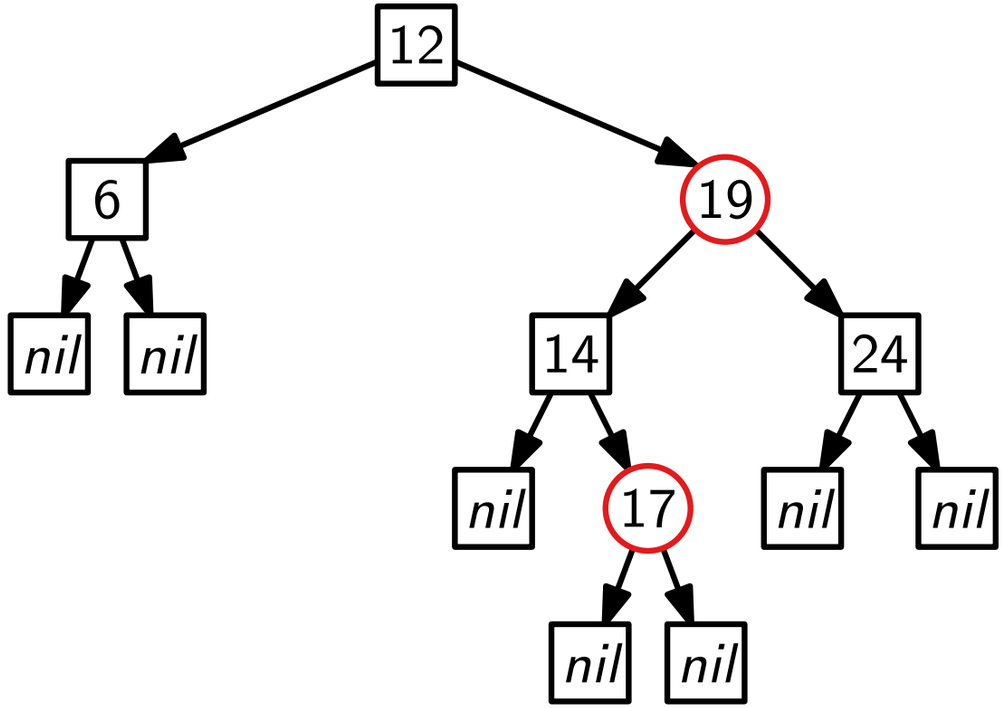
(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.



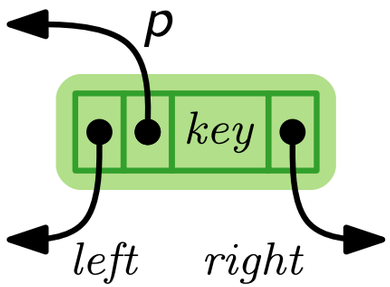
Aus **(E4)** folgt: Auf keinem Wurzel-Blatt-Pfad folgen zwei rote Knoten direkt auf einander.

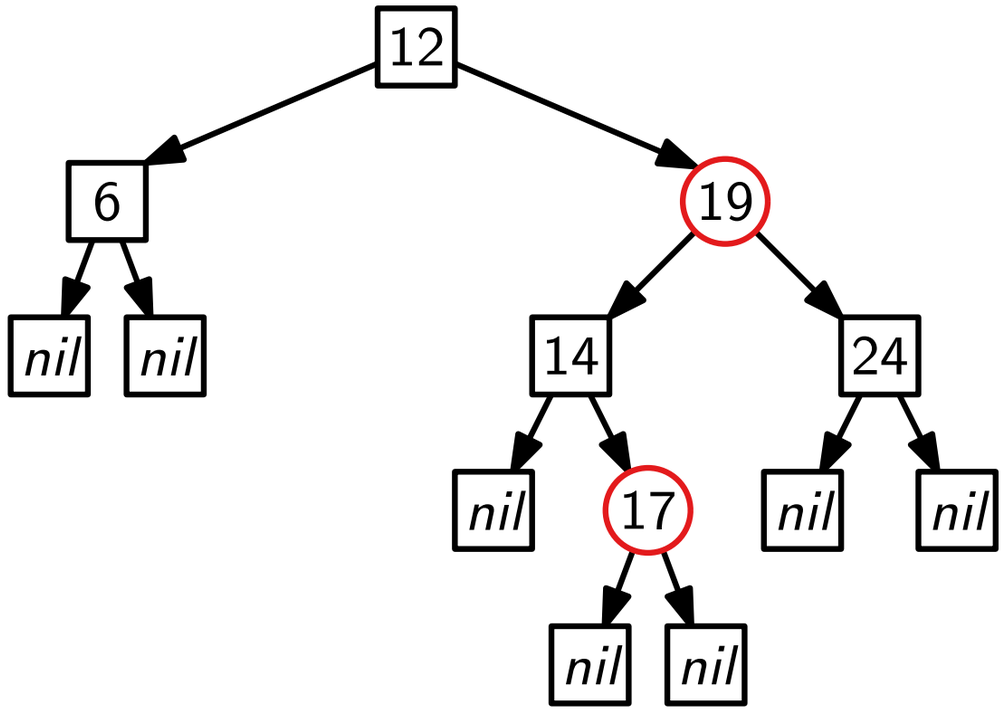
Technisches Detail



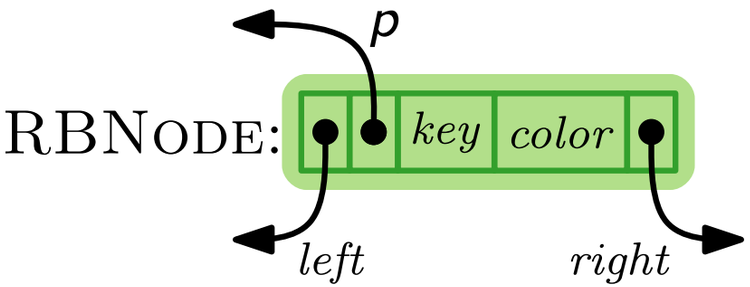
Technisches Detail

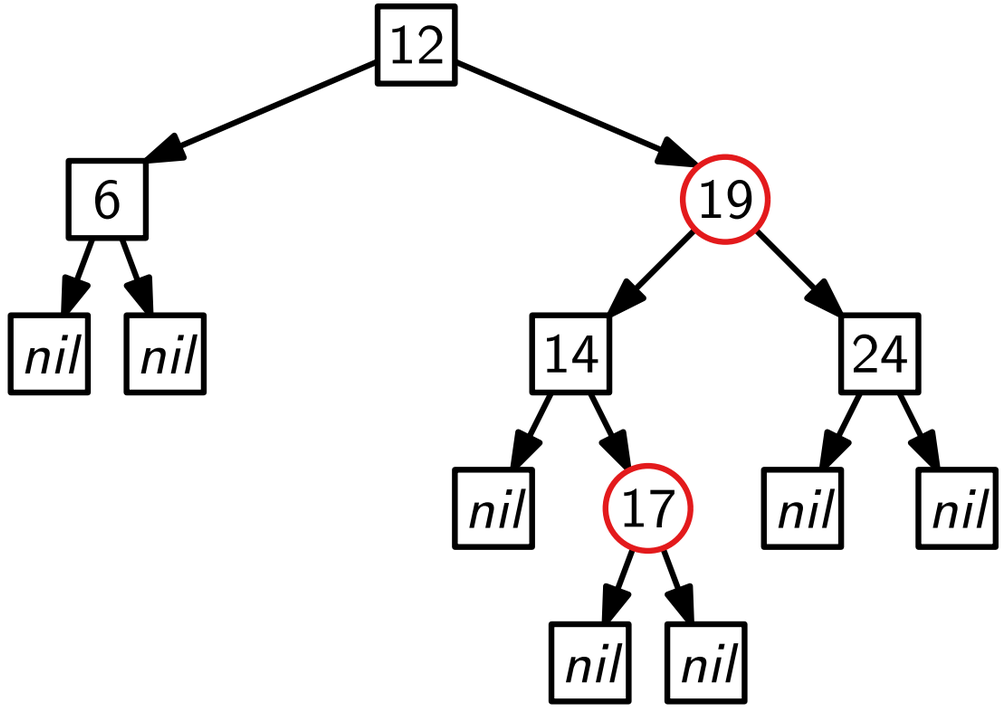
NODE:



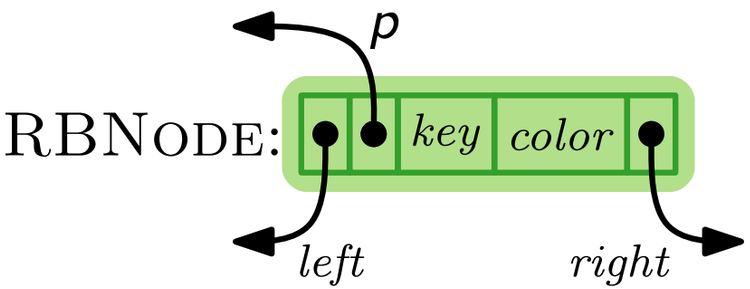


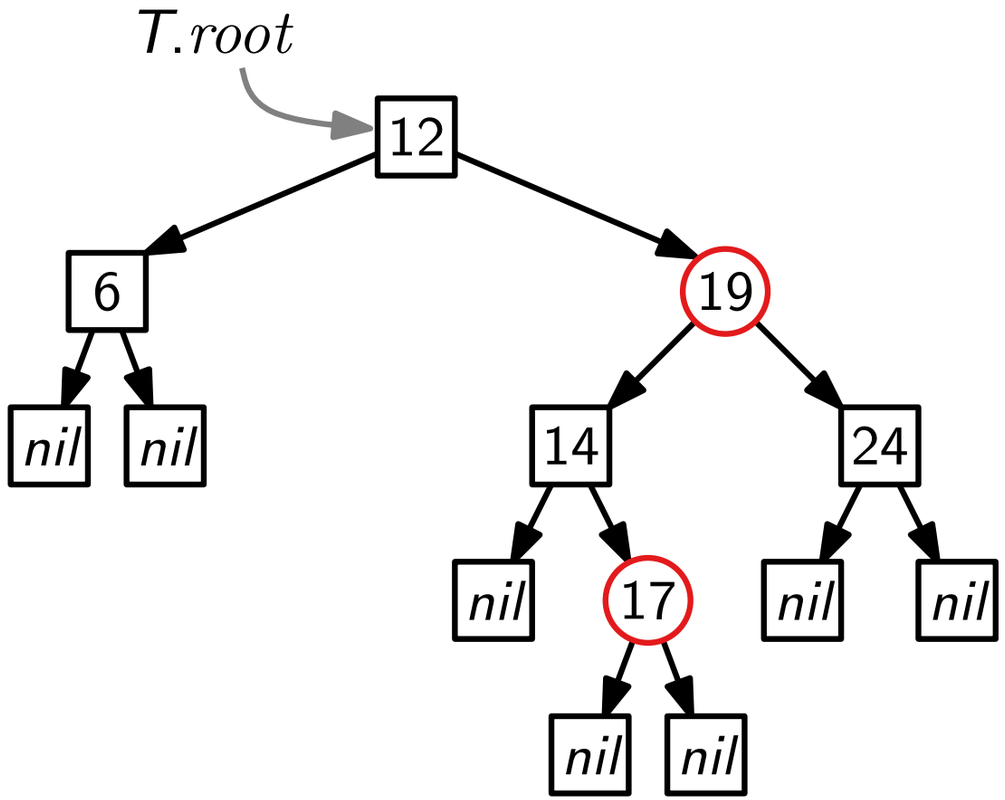
Technisches Detail



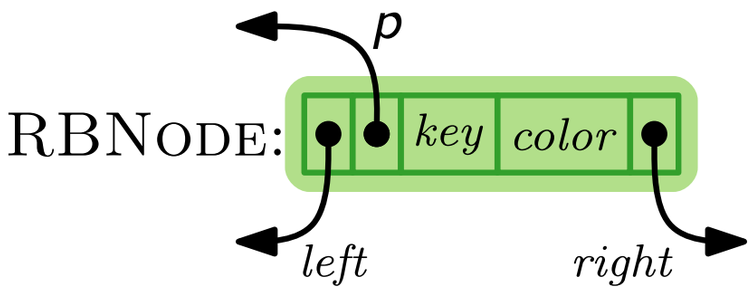


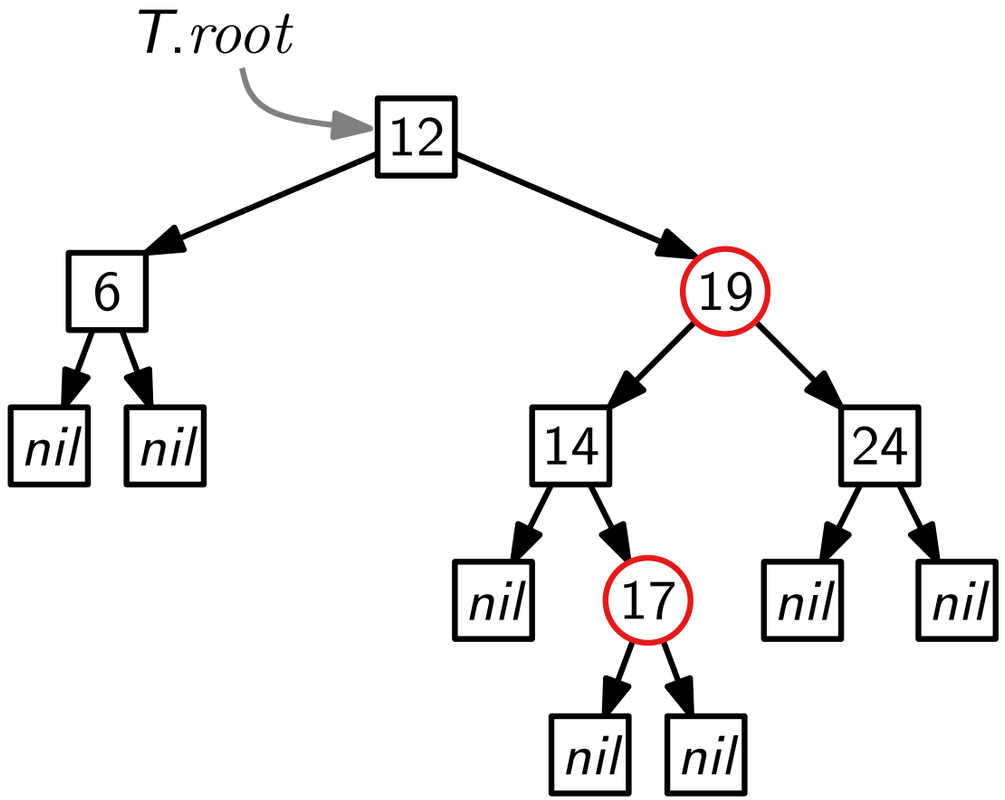
Technisches Detail





Technisches Detail

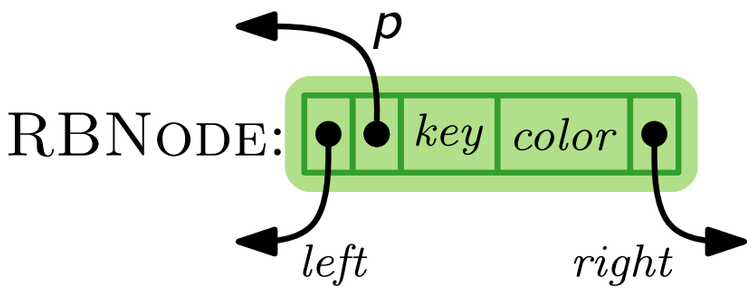


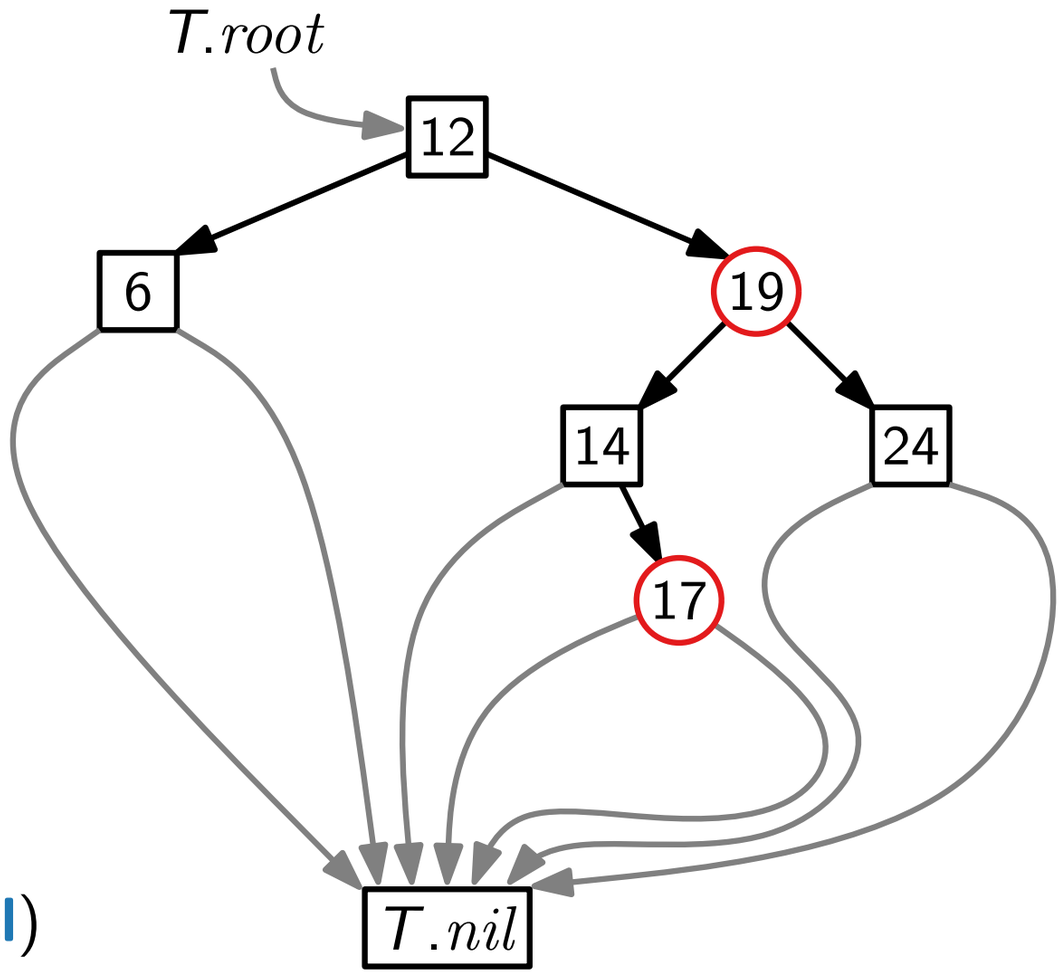


Dummy-Knoten (engl. **sentinel**)

$T.nil$

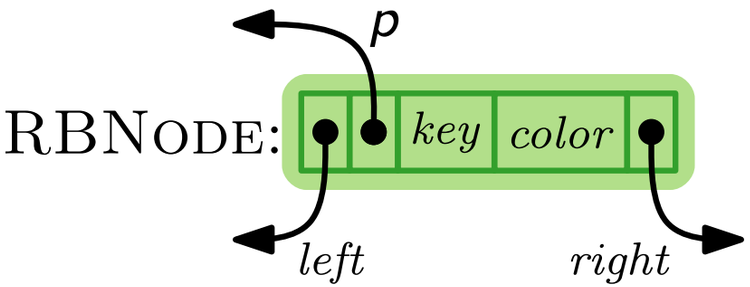
Technisches Detail

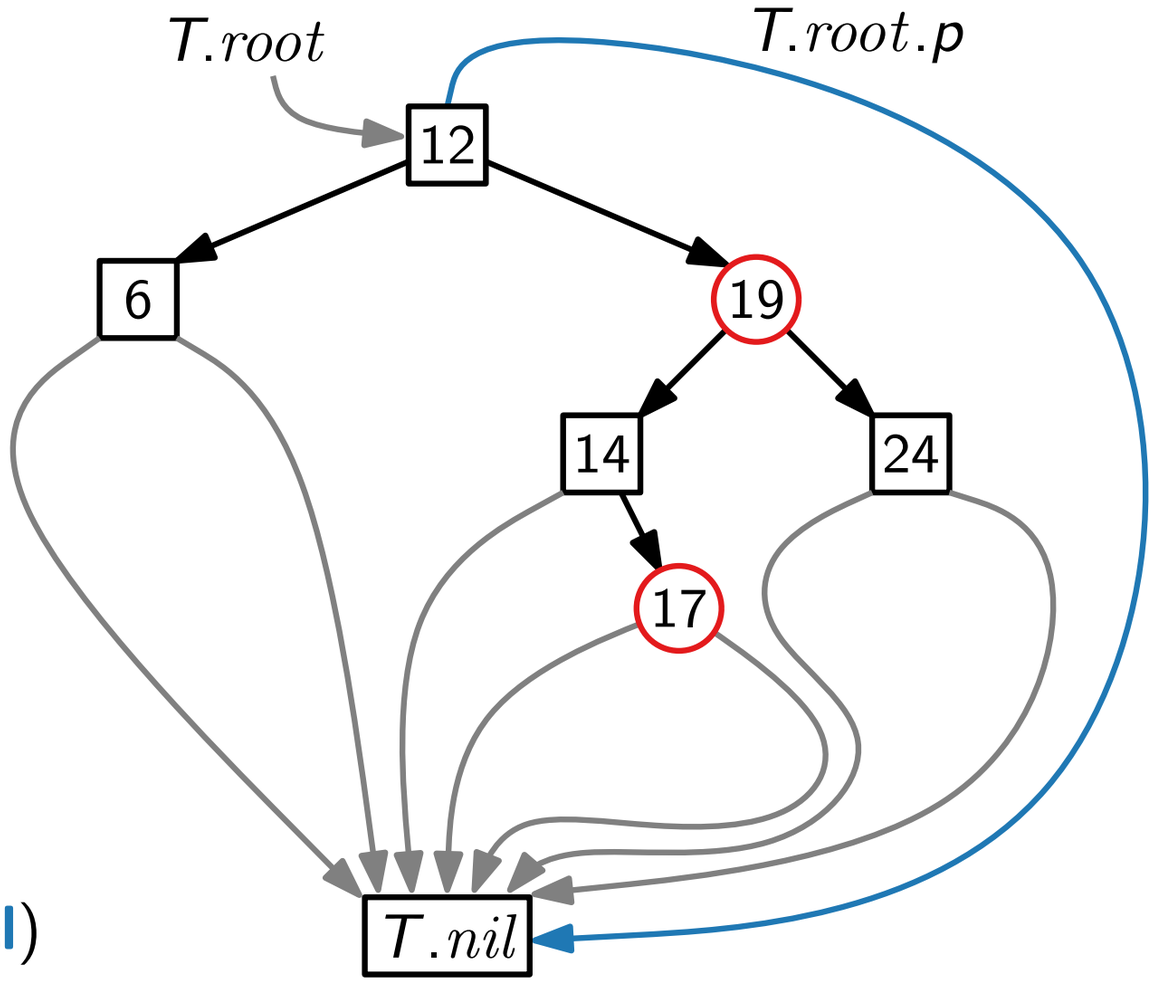




Dummy-Knoten (engl. **sentinel**)

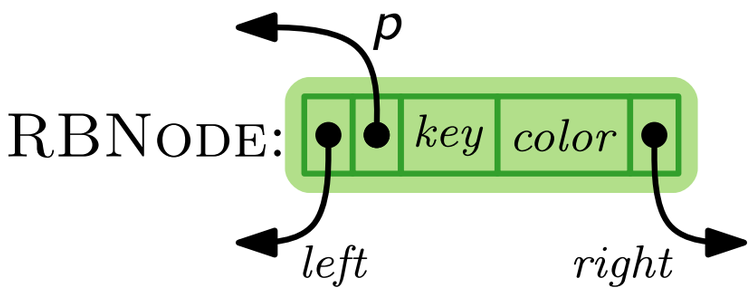
Technisches Detail

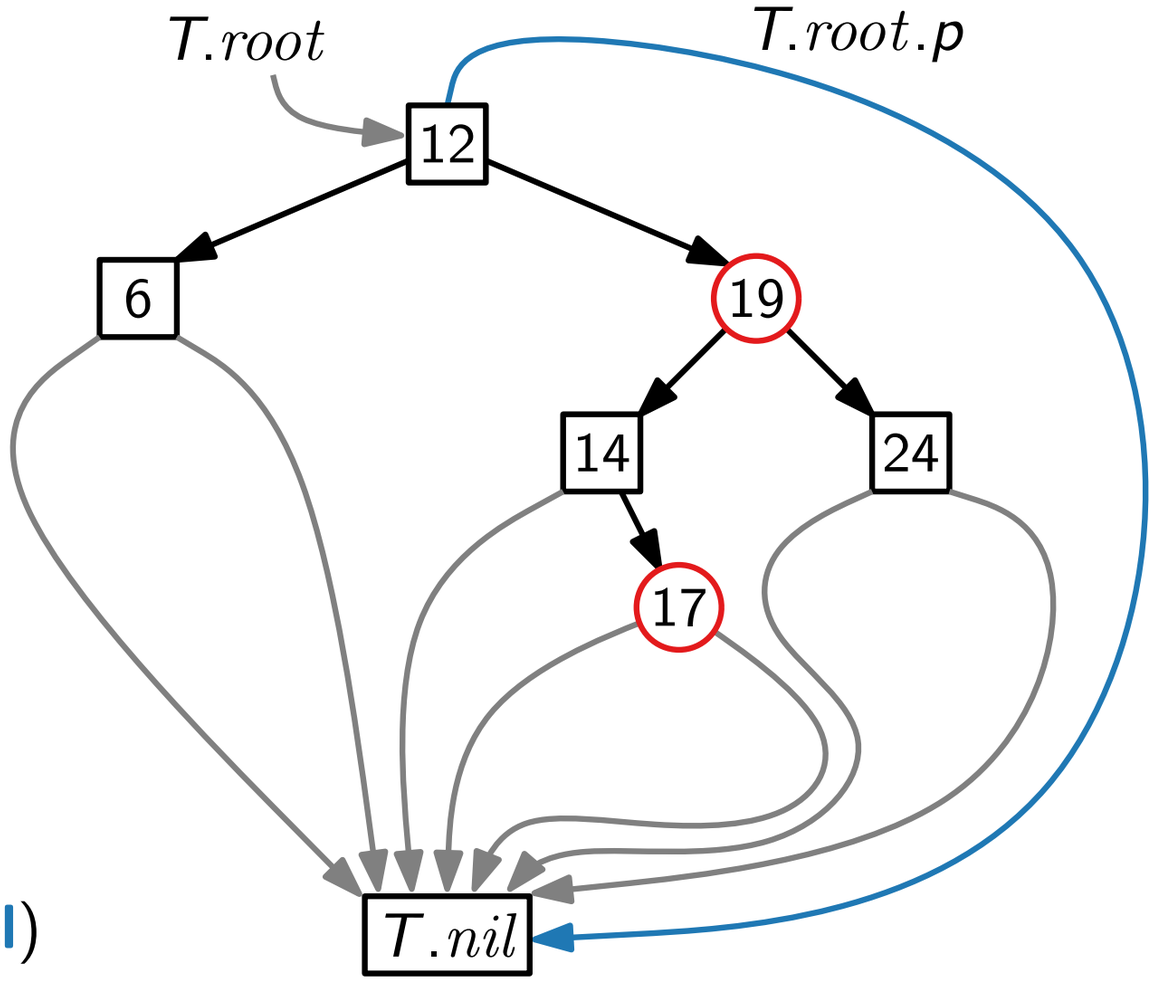




Dummy-Knoten (engl. **sentinel**)

Technisches Detail

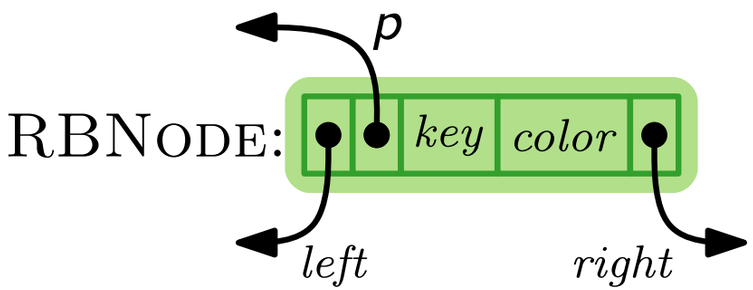


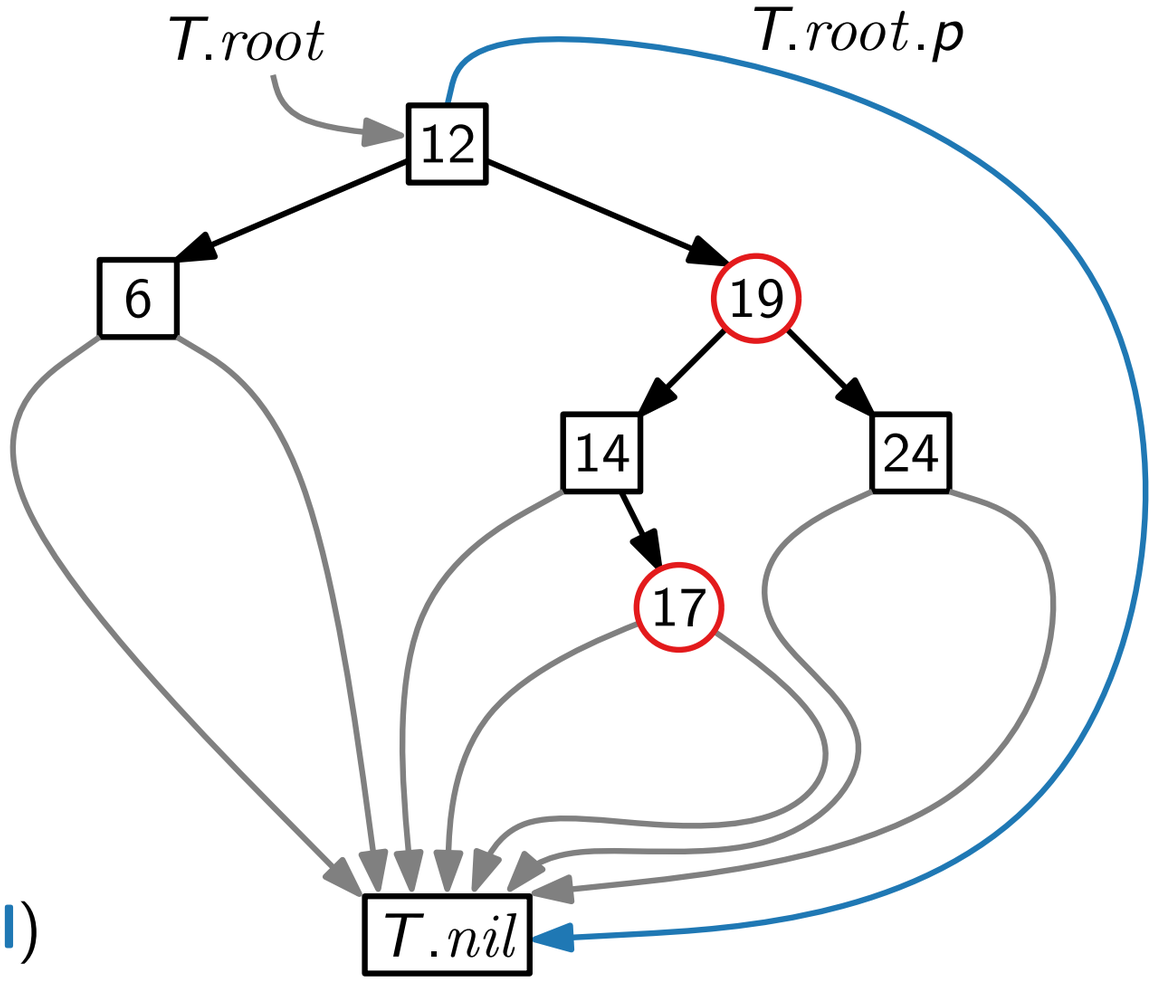


Dummy-Knoten (engl. **sentinel**)

Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können.

Technisches Detail



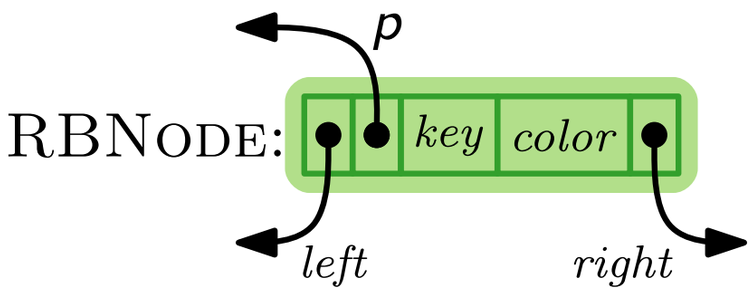


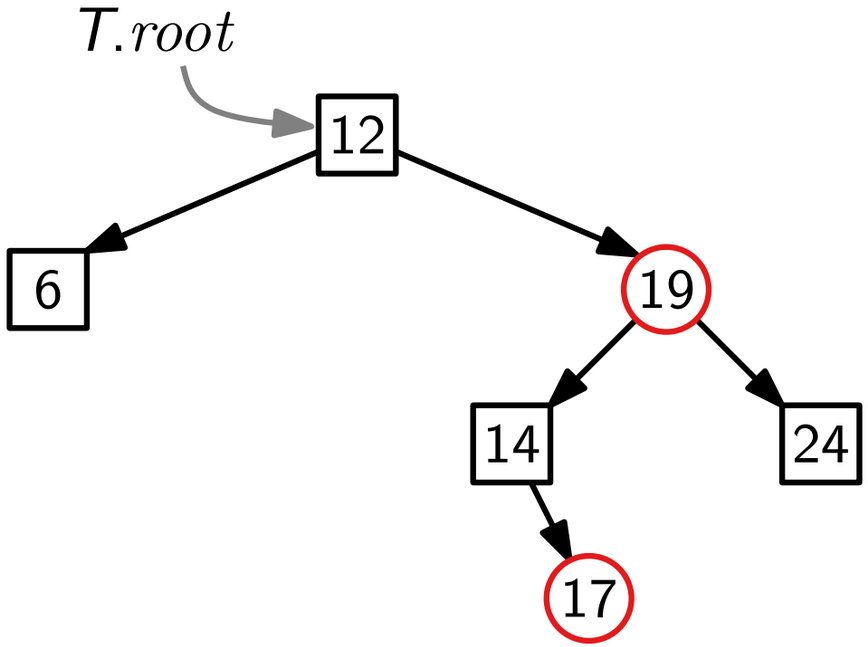
Dummy-Knoten (engl. **sentinel**)

Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können.

(Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

Technisches Detail

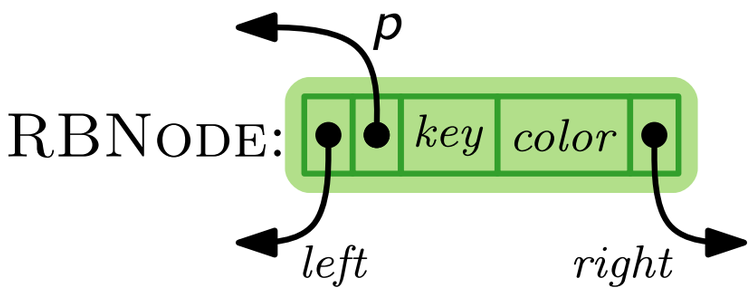


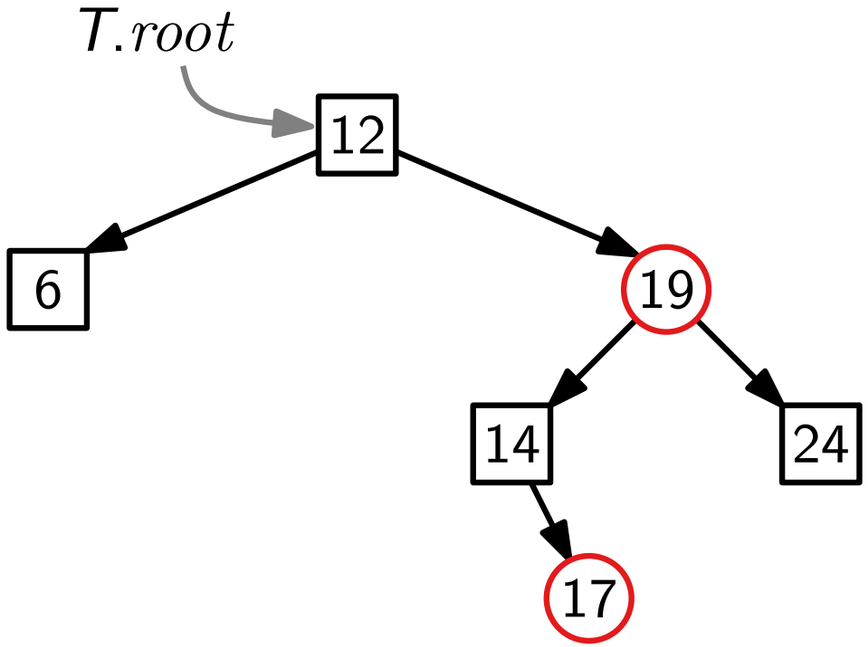


Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können.

(Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

Technisches Detail





Achtung: **(E3)** ist hier erfüllt, weil es sich auf den Dummy-Knoten bezieht!

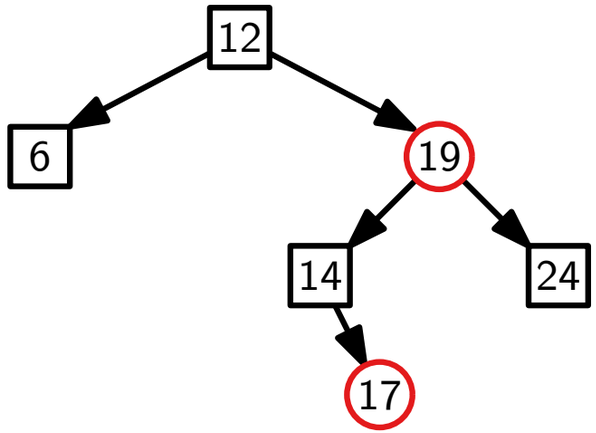
(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. *nil*

Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können.

(Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

(Schwarz-) Höhe

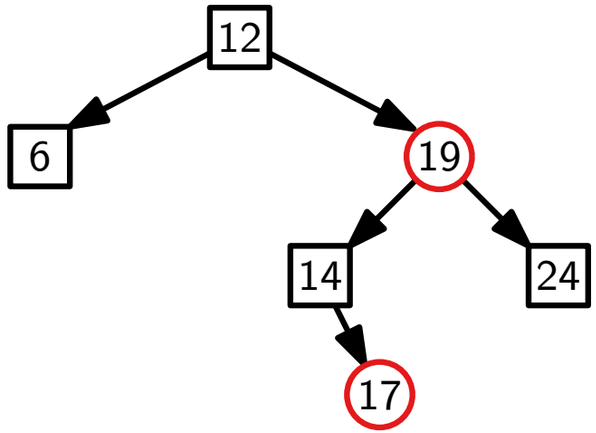
Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

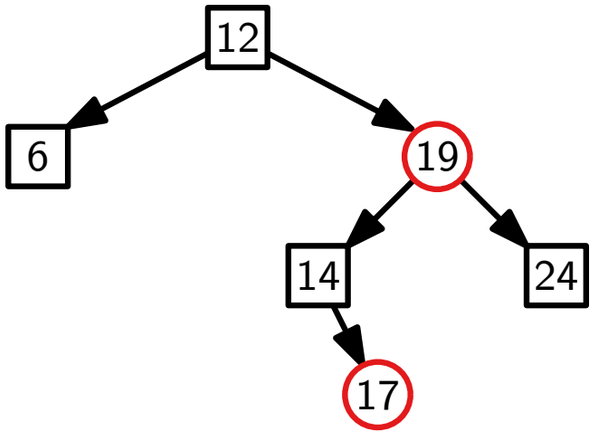


(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19

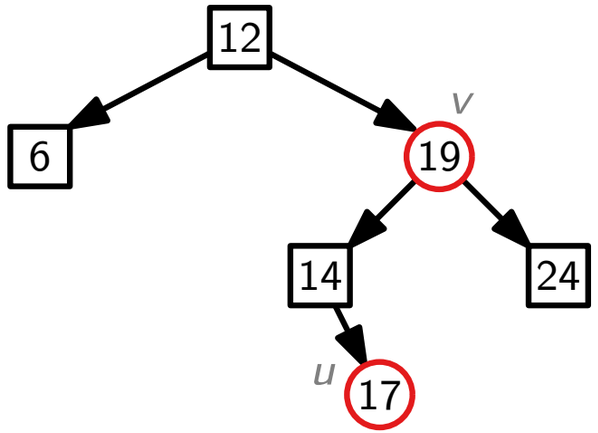


(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19

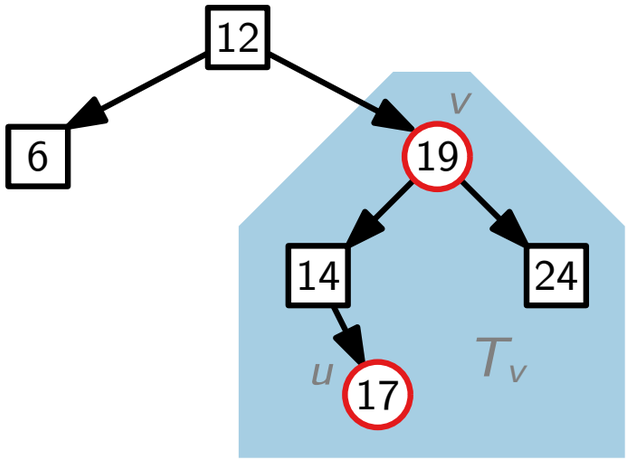


(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19

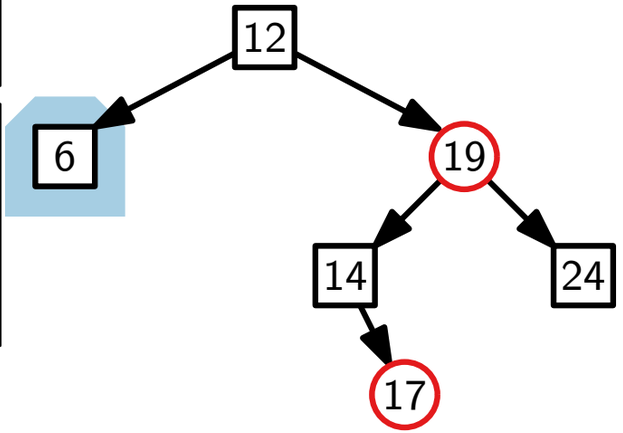


(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.



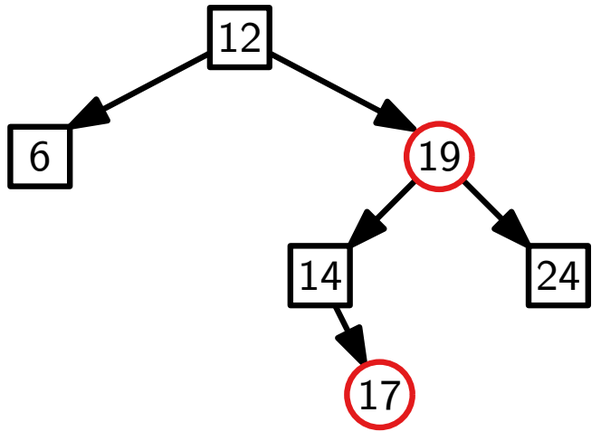
(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.



(Schwarz-) Höhe

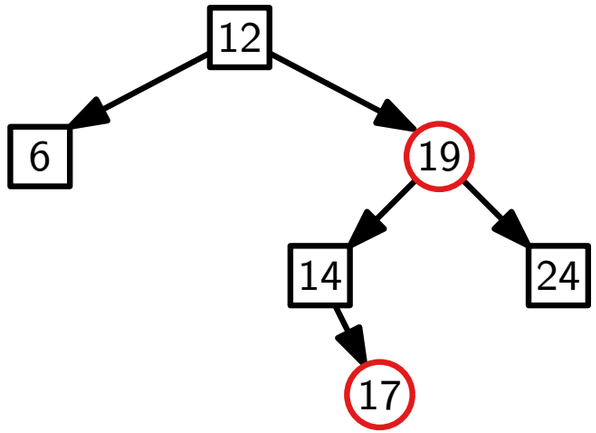
Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Höhe** Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

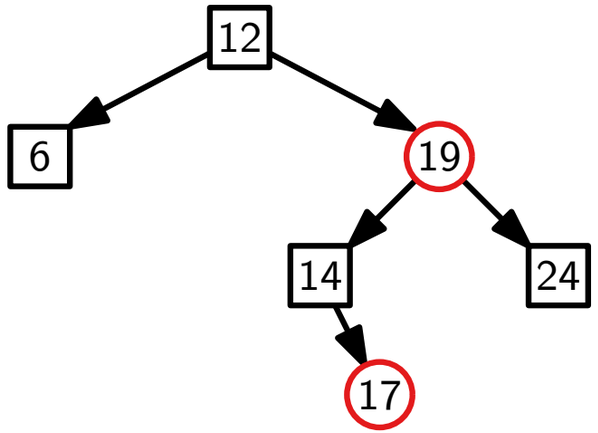
Definition. Sei T ein Baum.
Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Höhe** Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

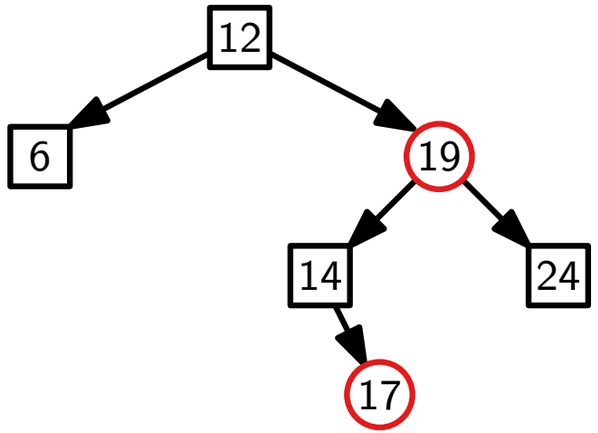
Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Höhe** Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!)



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

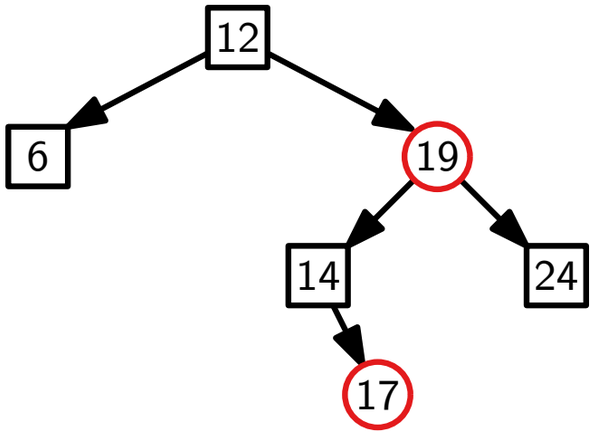
Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!)



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

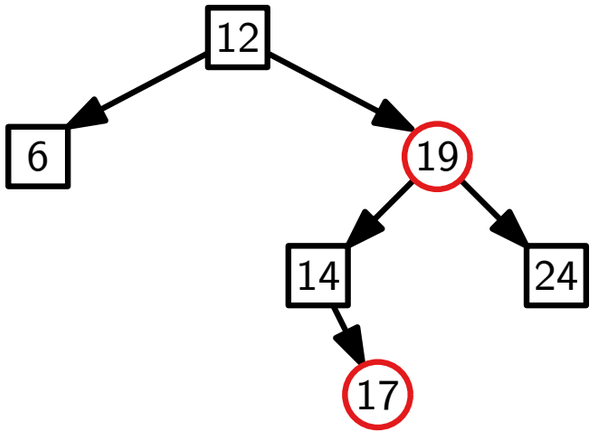
Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

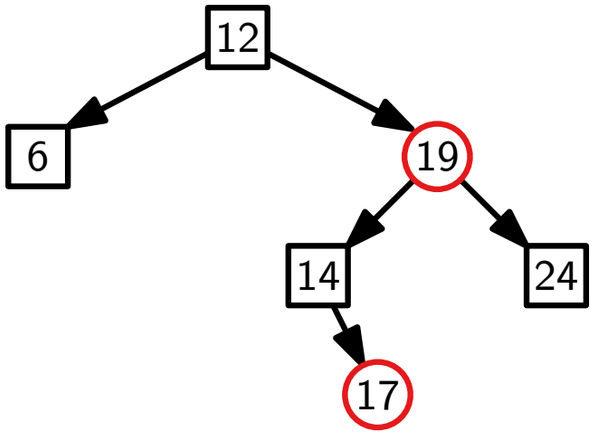
Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

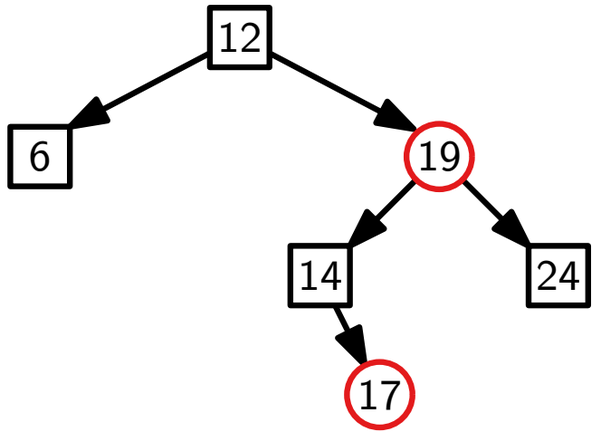
Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$



(Schwarz-) Höhe

Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

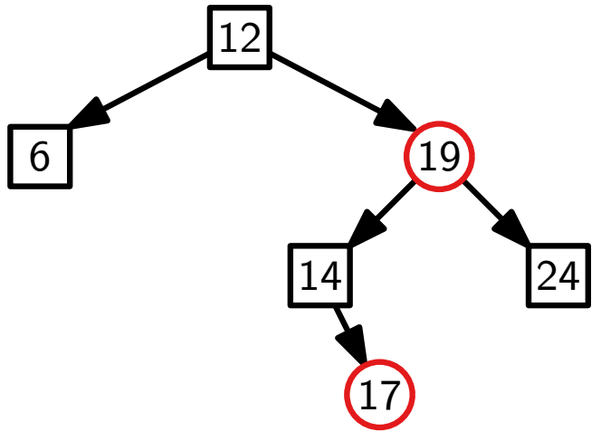
Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v)



(Schwarz-) Höhe

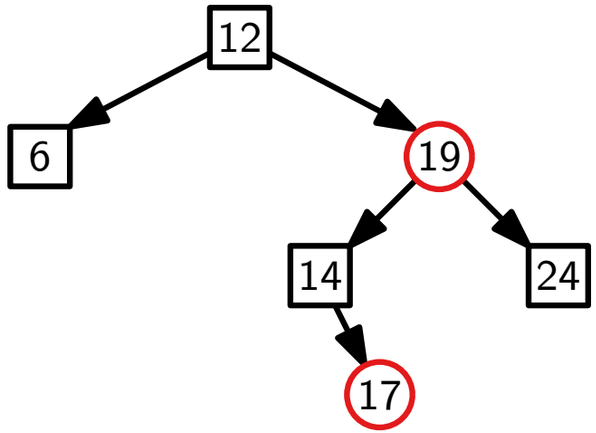
Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.



Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v) $\leq$

(Schwarz-) Höhe

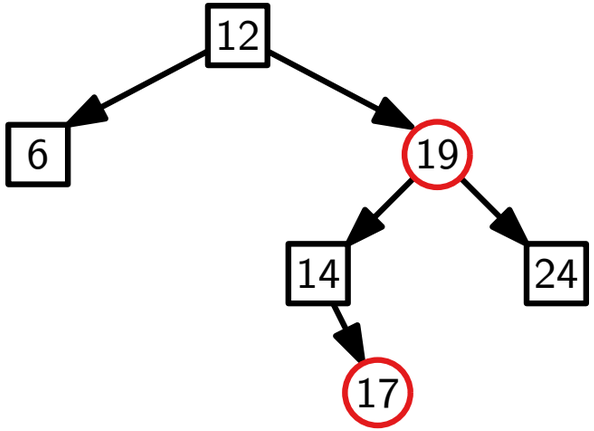
Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.



Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v) $\leq 2 \cdot$ sHöhe(v).

(Schwarz-) Höhe

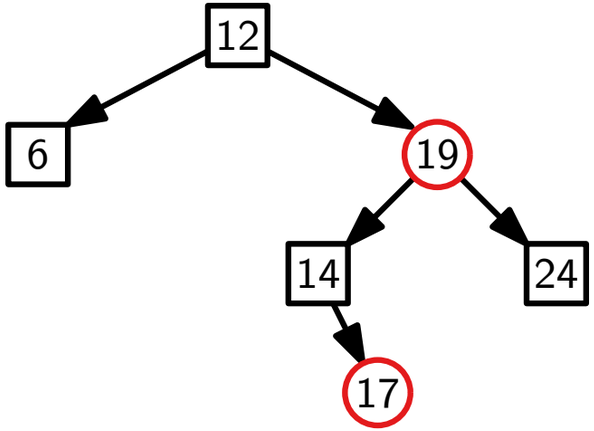
Definition. Die **Länge** eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Definition. Sei T ein Baum. Knoten u ist **unter** Knoten v, wenn u in dem Teilbaum T_v von T mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: 17 ist unter 19 , 14 ist **nicht** unter 6.

Definition. Die **Höhe** eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition'. Die **Schwarz-Höhe** sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten auf jedem Pfad zu einem Blatt (exkl. *nil*-Knoten) in T_v.



Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow \text{sHöhe}(v) \leq \text{Höhe}(v) \overset{\text{(E4)}}{\leq} 2 \cdot \text{sHöhe}(v)$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2 \log_2(n+1)$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:

T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

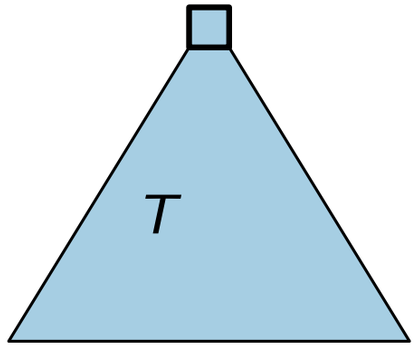
Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:

T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



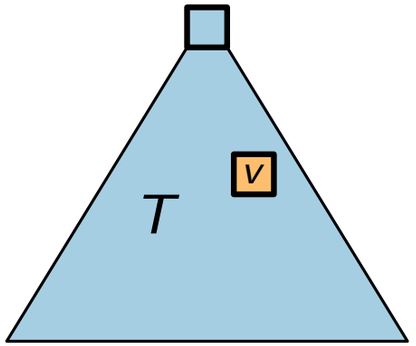
Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:

T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

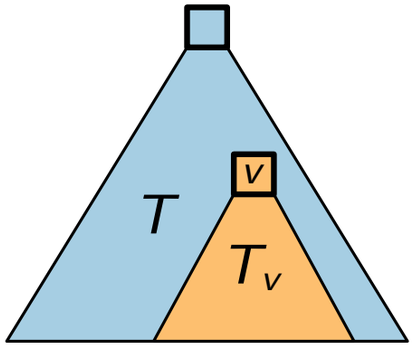


Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



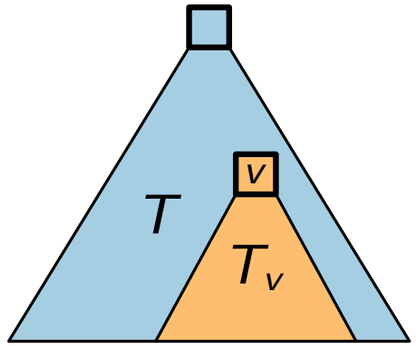
Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).



Höhe $\in \Theta(\log n)$

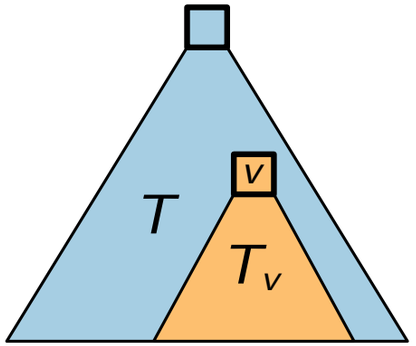
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$.



Höhe $\in \Theta(\log n)$

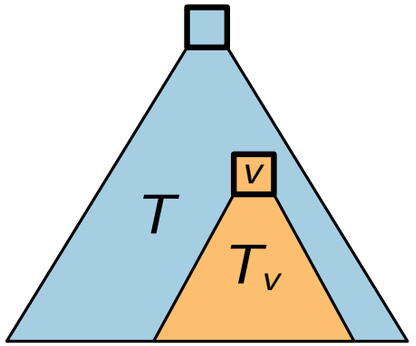
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

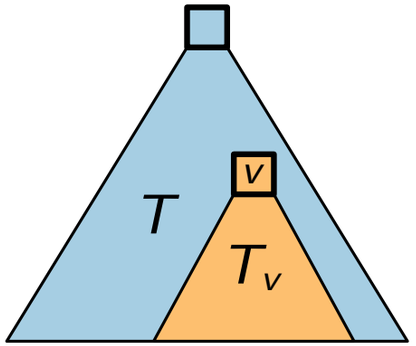
Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$



Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

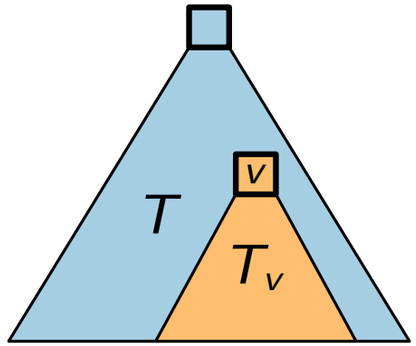
Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

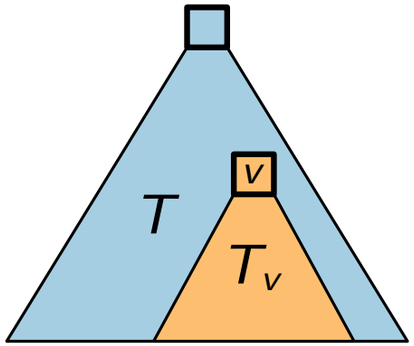
Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

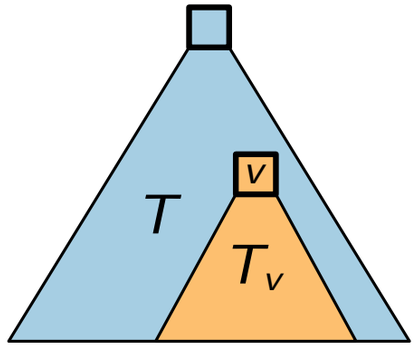
Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

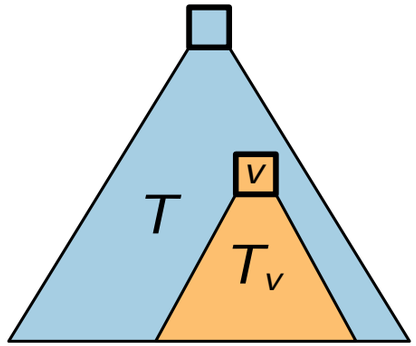
Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

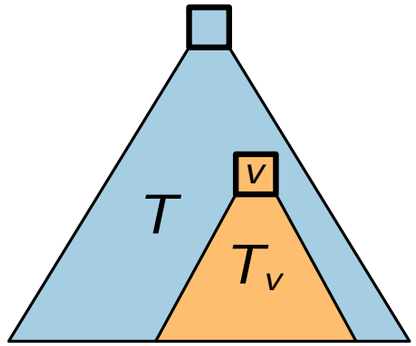
Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

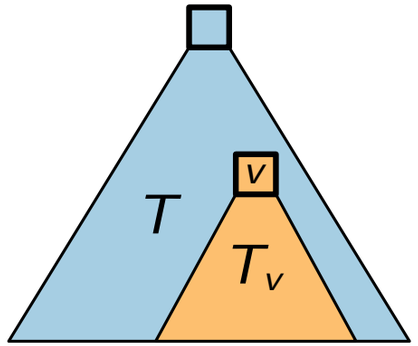
Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

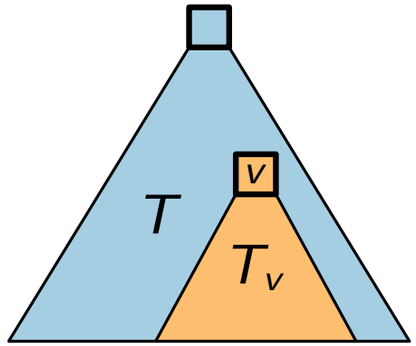
Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

$\Rightarrow$ # innere Knoten von T_v ist mind.
$2 \cdot (2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1) + 1 =$

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

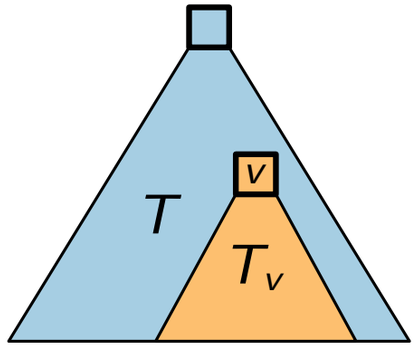
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

$\Rightarrow$ # innere Knoten von T_v ist mind.
$2 \cdot (2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1) + 1 =$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

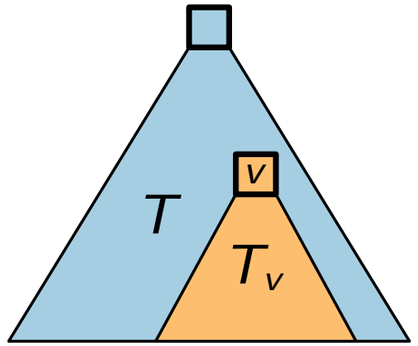
$\Rightarrow$ # innere Knoten von T_v ist mind.
$2 \cdot (2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1) + 1 =$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Anz. innerer Knoten unter einem Kind von v (IA)

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

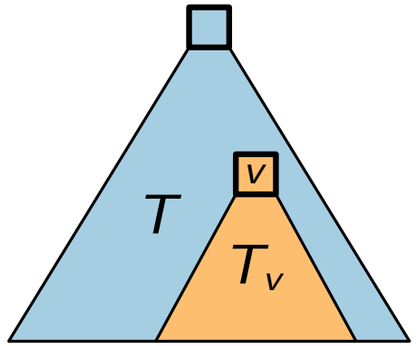
$\Rightarrow$ # innere Knoten von T_v ist mind.
$2 \cdot (2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1) + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1.$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Anz. innerer Knoten unter einem Kind von v (IA)

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.



Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

$\Rightarrow$ # innere Knoten von T_v ist mind.
$2 \cdot (2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1) + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1.$ ✓

sHöhe der Kinder von v ist mind.

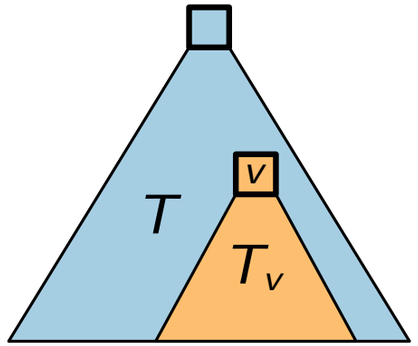
Anz. innerer Knoten unter einem Kind von v (IA)

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $T_v = T.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
T_v hat $0 = 2^0 - 1$ innere Knoten. ✓

Höhe(v)>0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.
$\Rightarrow$ # innere Knoten von T_v ist mind.
$2 \cdot (2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1) + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$. ✓

sHöhe der Kinder von v ist mind. $\text{sHöhe}(v)-1$

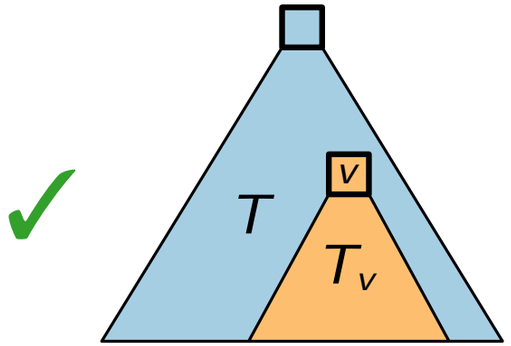
Anz. innerer Knoten unter einem Kind von v (IA)

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



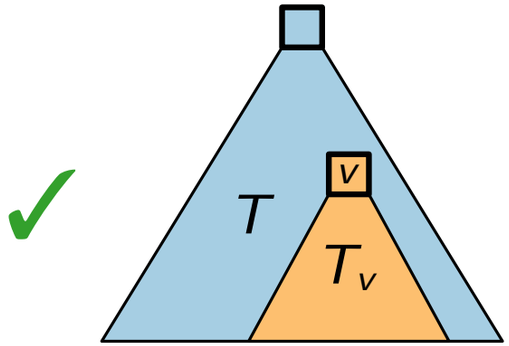
$v = T.root \Rightarrow$

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



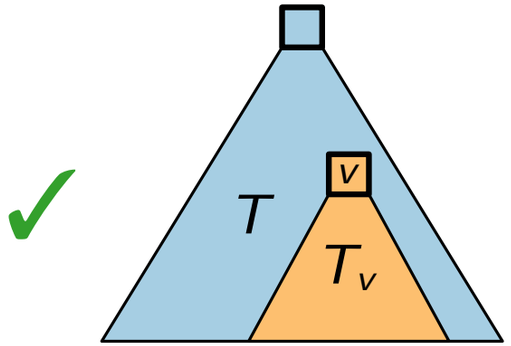
$v = T.root \Rightarrow$ # innere Knoten$(T) \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



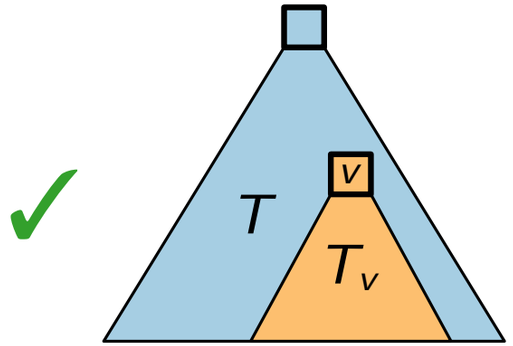
$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$

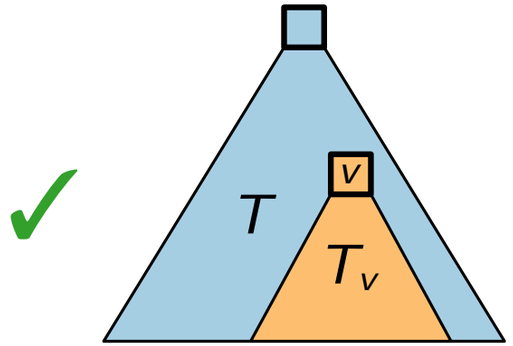
$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq$

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

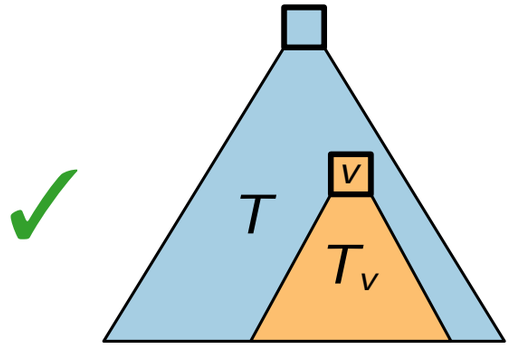
$$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$$

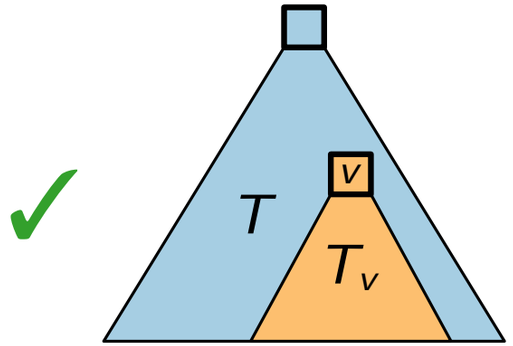
Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt:

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$$

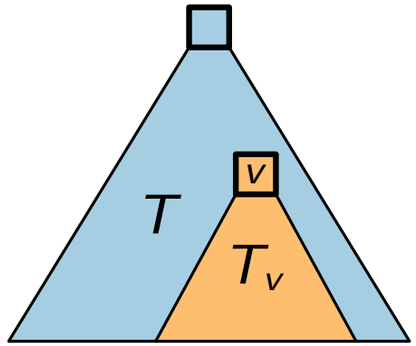
Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt: $\text{Höhe}(T) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(T)$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$$

Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt: $\text{Höhe}(T) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(T)$.

$$\Rightarrow \text{Höhe}(T) \leq 2\log_2(n+1)$$

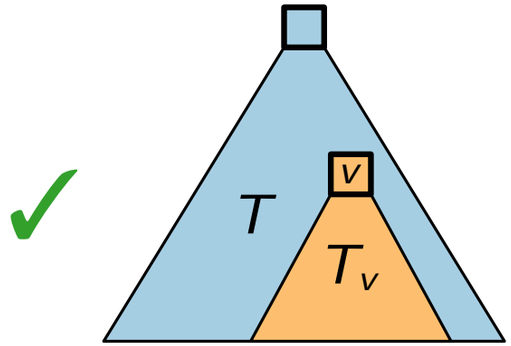
□

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$

$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt: $\text{Höhe}(T) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(T)$.

$\Rightarrow \text{Höhe}(T) \leq 2\log_2(n+1)$ □

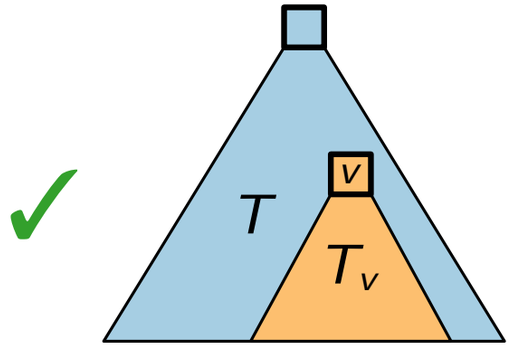
Also: Rot-Schwarz-Bäume sind **balanciert**!

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$

$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt: $\text{Höhe}(T) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(T)$.

$\Rightarrow \text{Höhe}(T) \leq 2\log_2(n+1)$ □

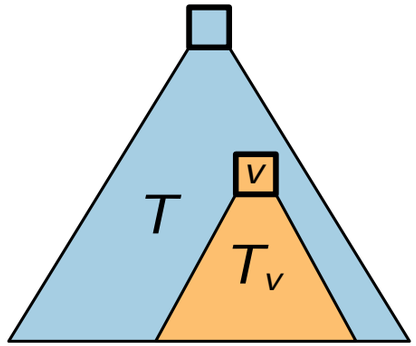
Also: Rot-Schwarz-Bäume sind **balanciert**! Fertig?!

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$$

Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt: $\text{Höhe}(T) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(T)$.

$$\Rightarrow \text{Höhe}(T) \leq 2\log_2(n+1)$$ □

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind **balanciert**! Fertig?!

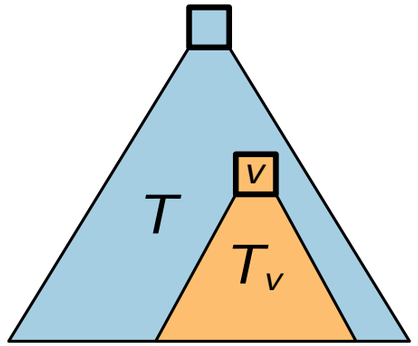
Nein:

Höhe $\in \Theta(\log n)$

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis.

Behauptung: Für jeden Knoten v von T gilt:
T_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.



$$v = T.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(T)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(T)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(T) \leq \log_2(n+1)$$

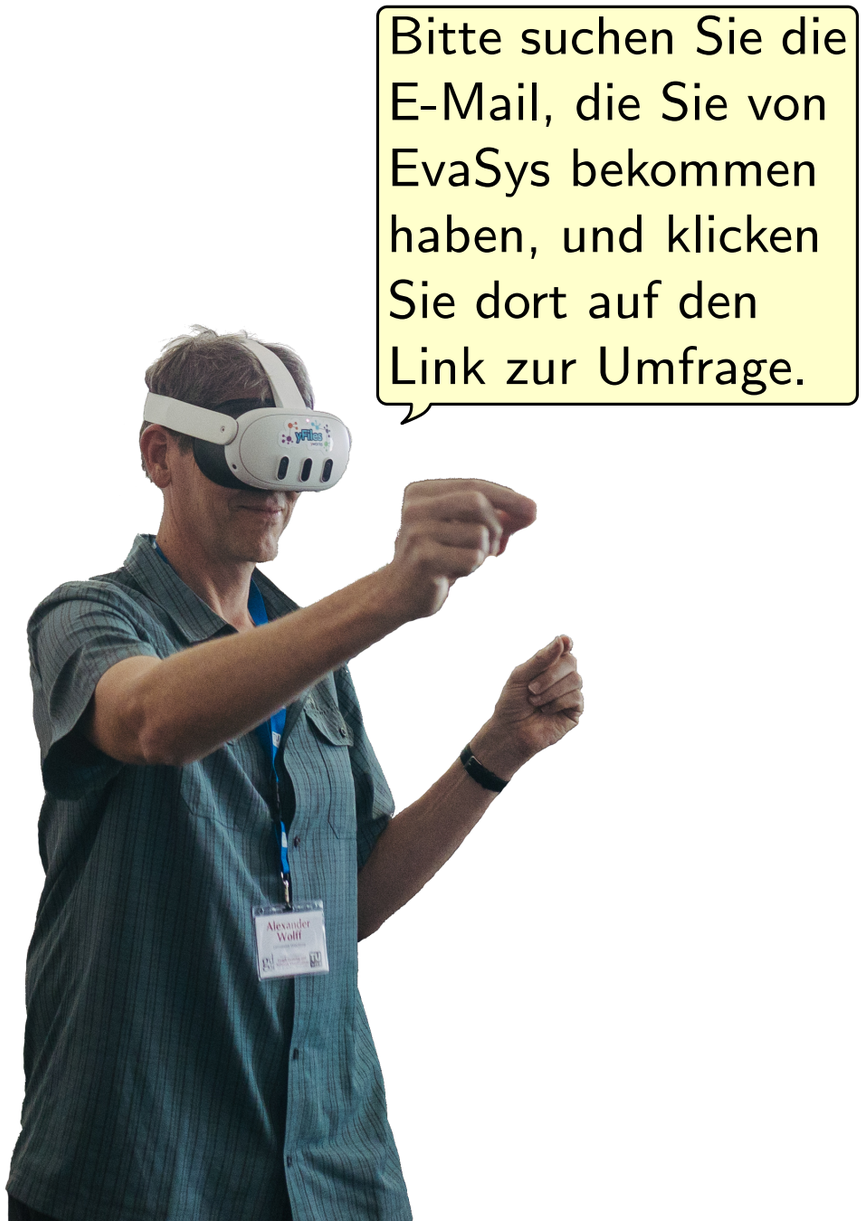
Wegen R-S-Eig. **(E4)** gilt: $\text{Höhe}(T) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(T)$.

$$\Rightarrow \text{Höhe}(T) \leq 2\log_2(n+1)$$ □

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind **balanciert**! Fertig?!

Nein: INSERT & DELETE können Rot-Schwarz-Eigenschaft **verletzen!**

Vorlesungsumfrage – jetzt!



Vorlesungsumfrage – jetzt!

All questions are optional. Should a question not be applicable to a course, you can leave the answer open.

1 Course as a whole

1.1 Please rate the course as a whole.

very good ○ ○ ○ ○ ○ insufficient

2 Lecture

2.1 The lecturer is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

2.2 The supplied lecture materials (writings on the blackboard, presentation slides, videos, additional literature) are well prepared and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

2.3 Portions of the lecture were held online (live stream, recorded lecture) and helped improve the lecture.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no online parts

3 Exercises

3.1 The tutor is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no exercises

3.2 The exercises are comprehensible and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all | ○ no exercises

Vorlesungsumfrage – jetzt!

Bitte suchen Sie die E-Mail, die Sie von EvaSys bekommen haben, und klicken Sie dort auf den Link zur Umfrage.

All questions are optional. Should a question not be applicable to a course, you can leave the answer open.

1 Course as a whole

1.1 Please rate the course as a whole.

very good ○ ○ ○ ○ ○ insufficient

2 Lecture

2.1 The lecturer is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do

2.2 The supplied lecture materials (writings on the blackboard, presentation slides, videos, additional literature) are well prepared and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do

2.3 Portions of the lecture were held online (live stream, recorded lecture) and helped improve the

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

3 Exercises

3.1 The tutor is well prepared and presents the material in a way that is easy to understand.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

3.2 The exercises are comprehensible and improve my understanding of the course contents.

completely agree ○ ○ ○ ○ ○ do not agree at all

4. Additional remarks

4.1 What did you especially like in this course?

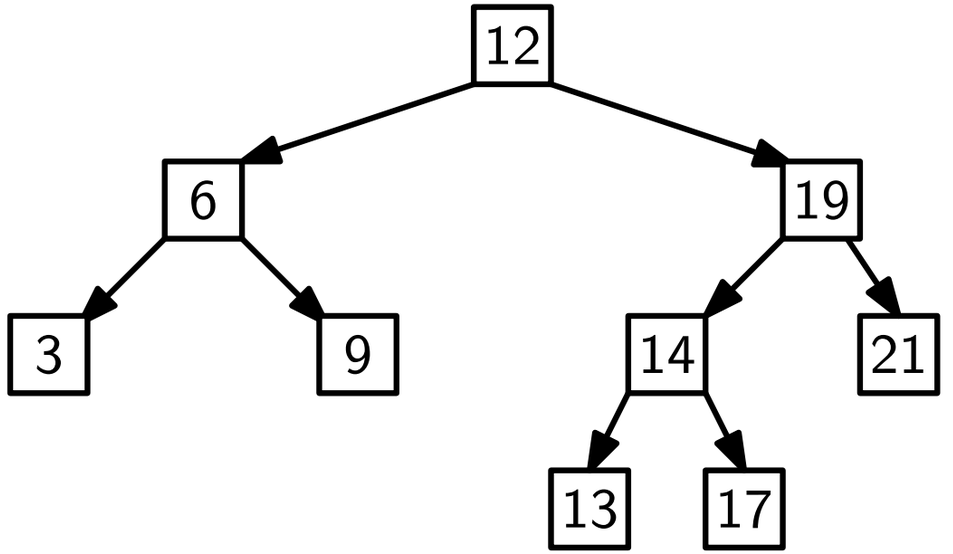
4.2 From your perspective, what could be improved? What do you criticize?

Zum Beispiel:

– Folien
– Übungsaufgaben
– Roter Faden?
– Beweise?
– Reaktion auf Fragen?
– Buch zur Vorlesung?
– Zwischentests
– Aufgaben in der VL
– ...

Einfügen

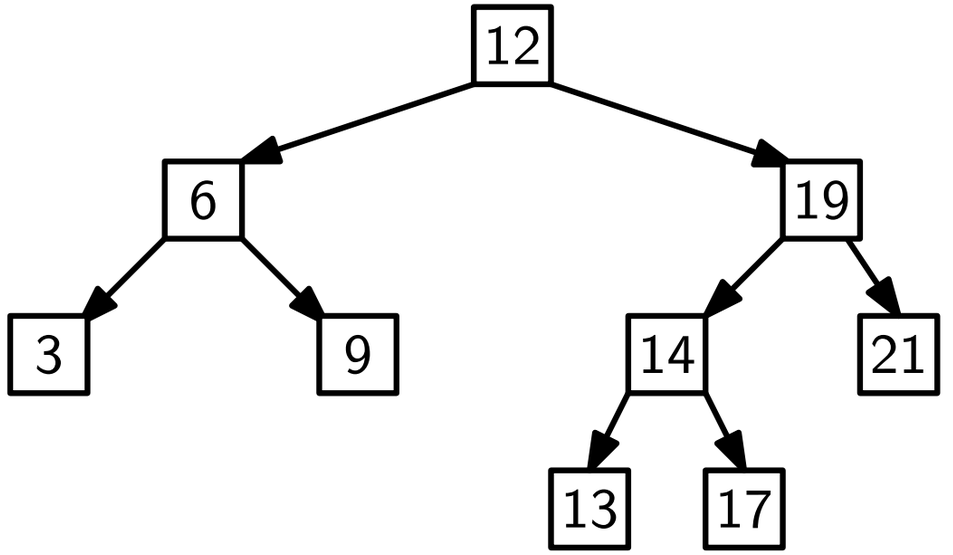
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



Einfügen

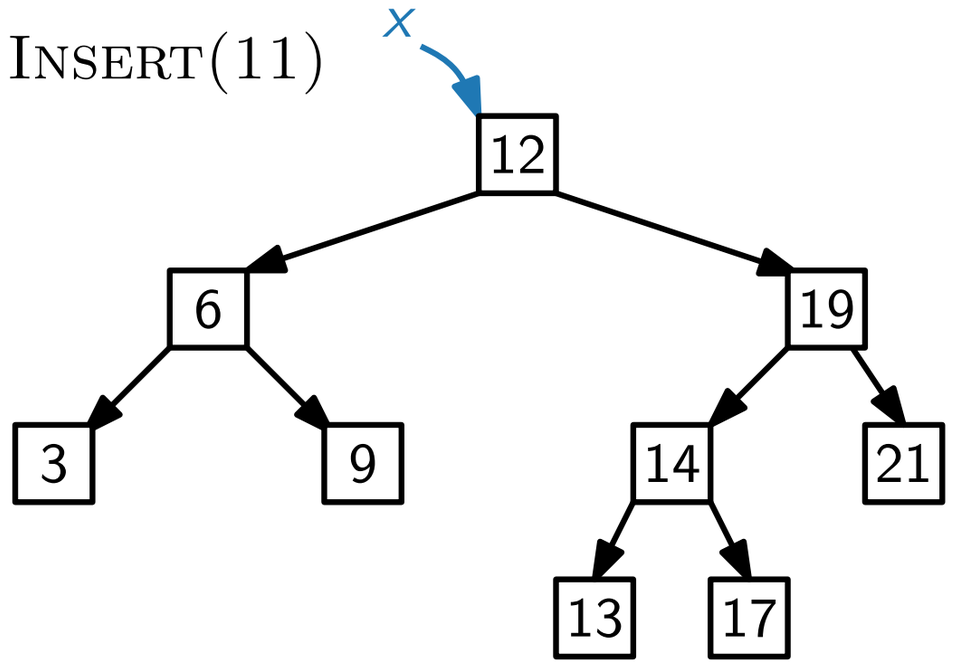
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```

INSERT(11)



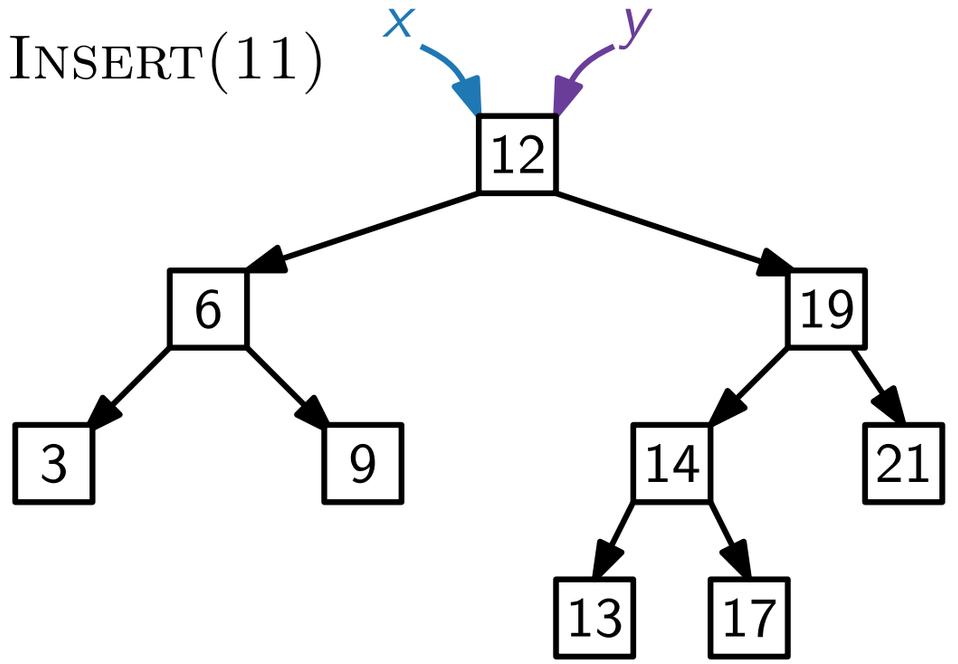
Einfügen

```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



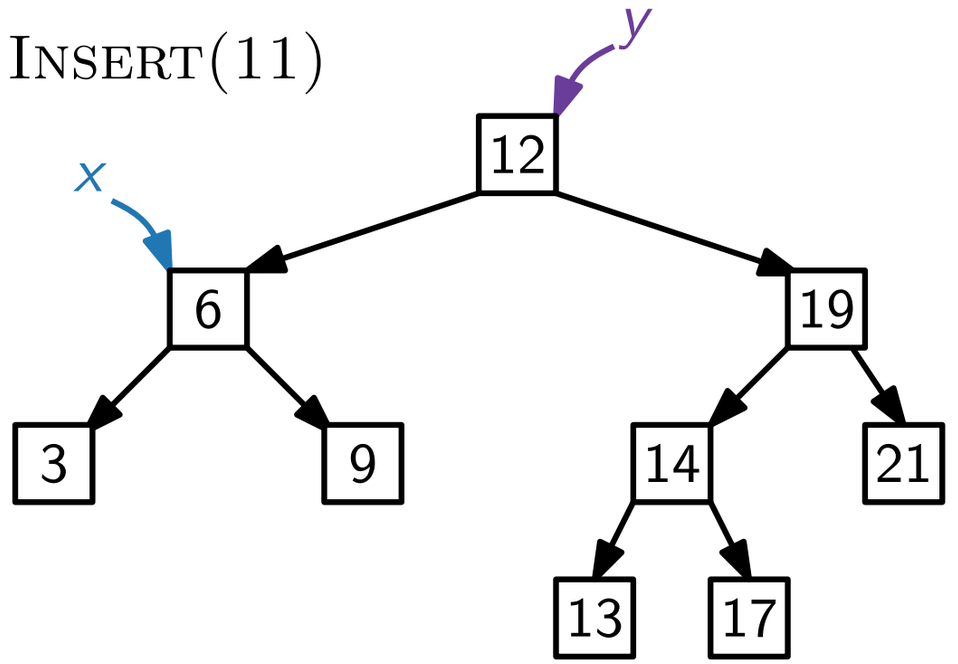
Einfügen

```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



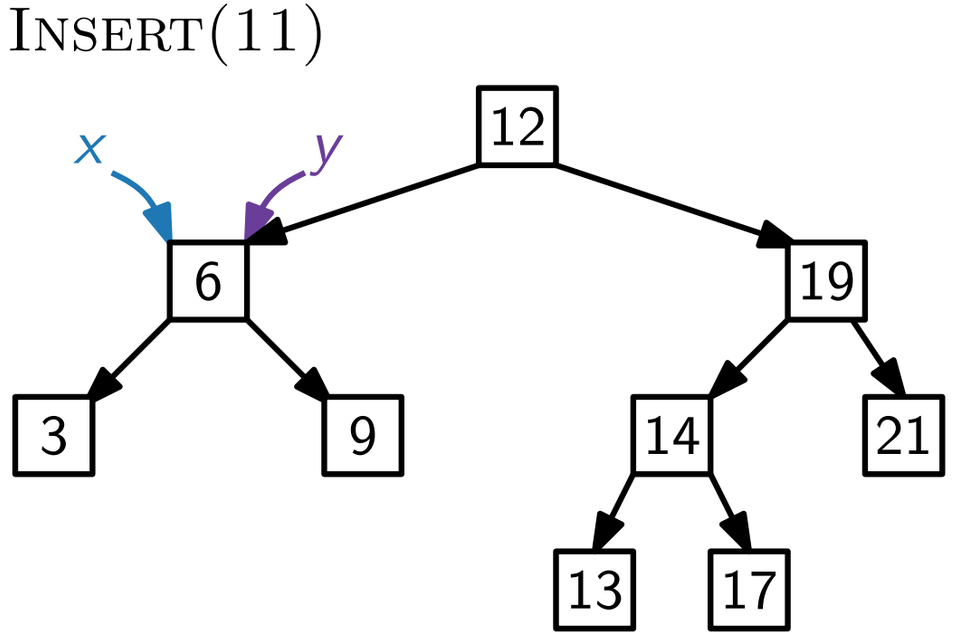
Einfügen

```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



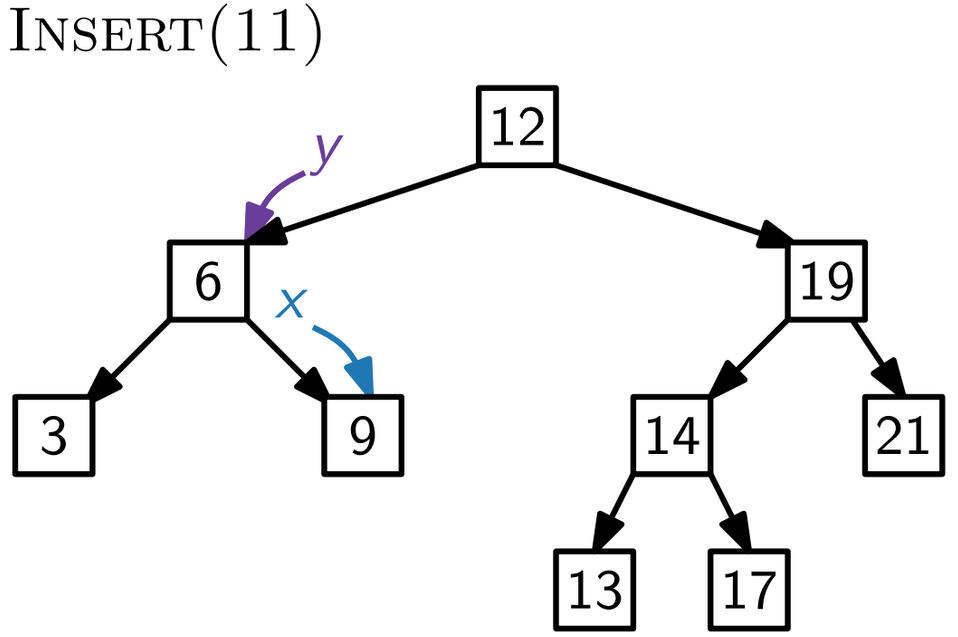
Einfügen

```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



Einfügen

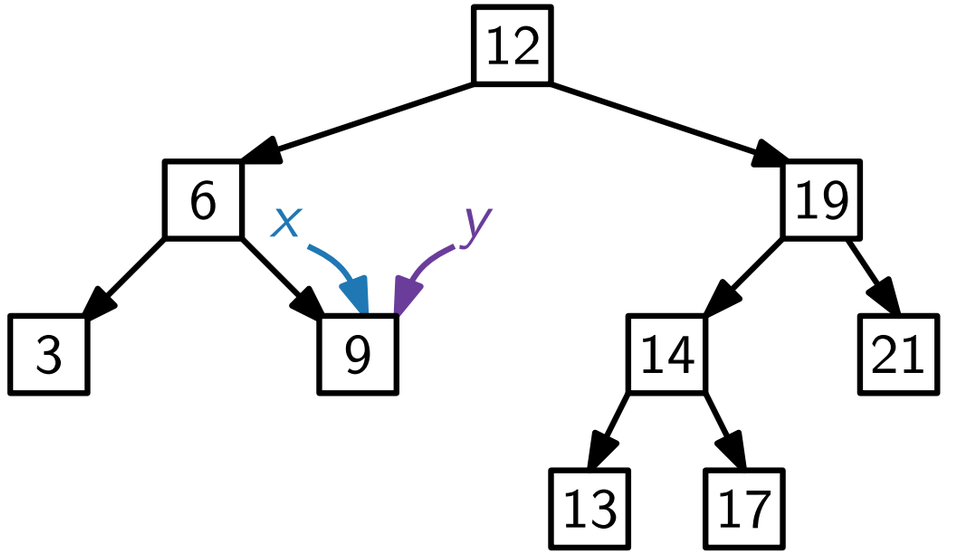
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



Einfügen

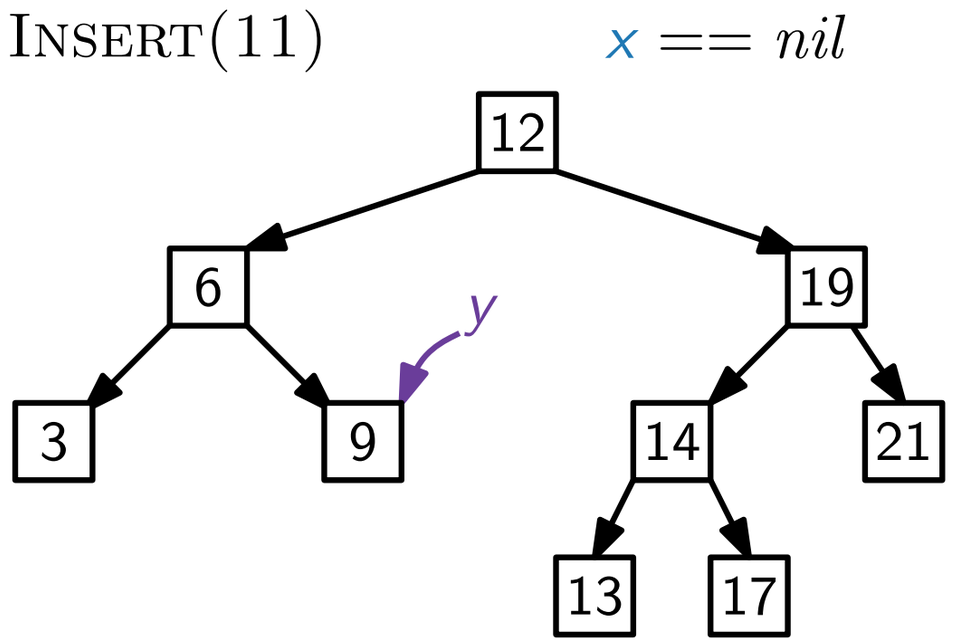
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```

INSERT(11)



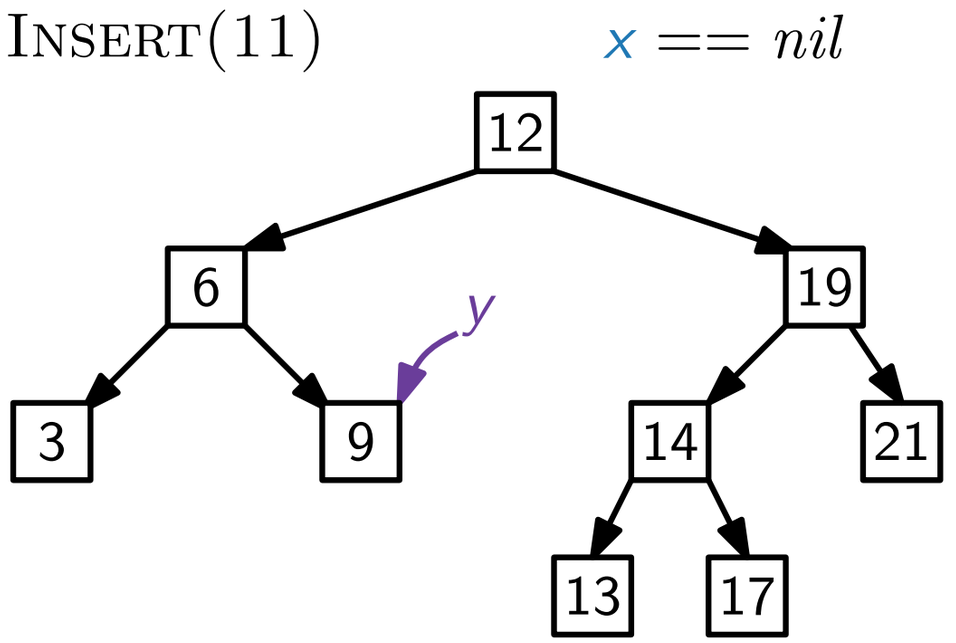
Einfügen

```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```



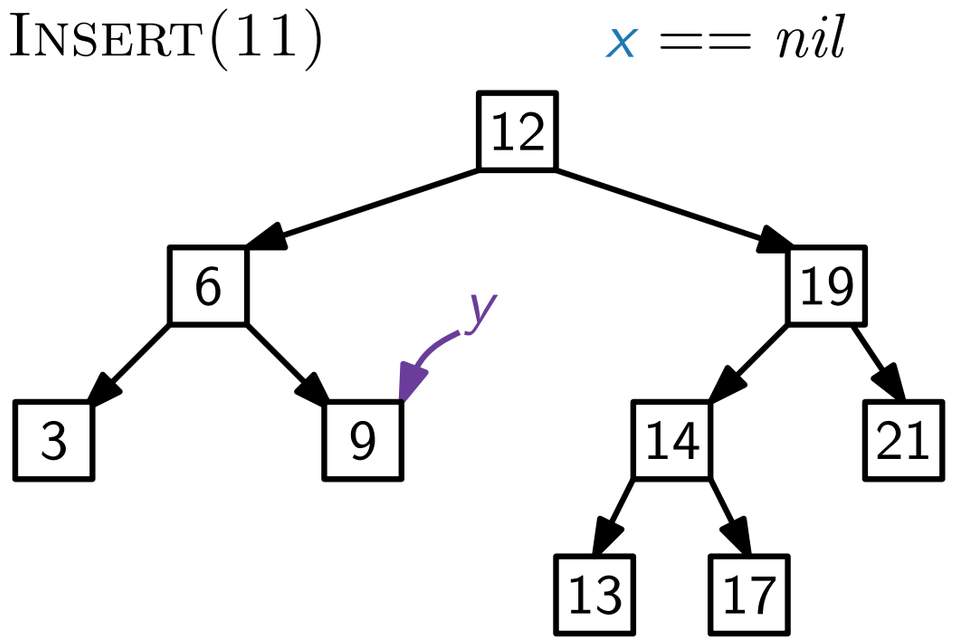
Einfügen

```
Node INSERT(key k)
y =    nil
x = root
while x ≠    nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new    Node(k, y)
if y ==    nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else              y.right = z

return z
```



Einfügen

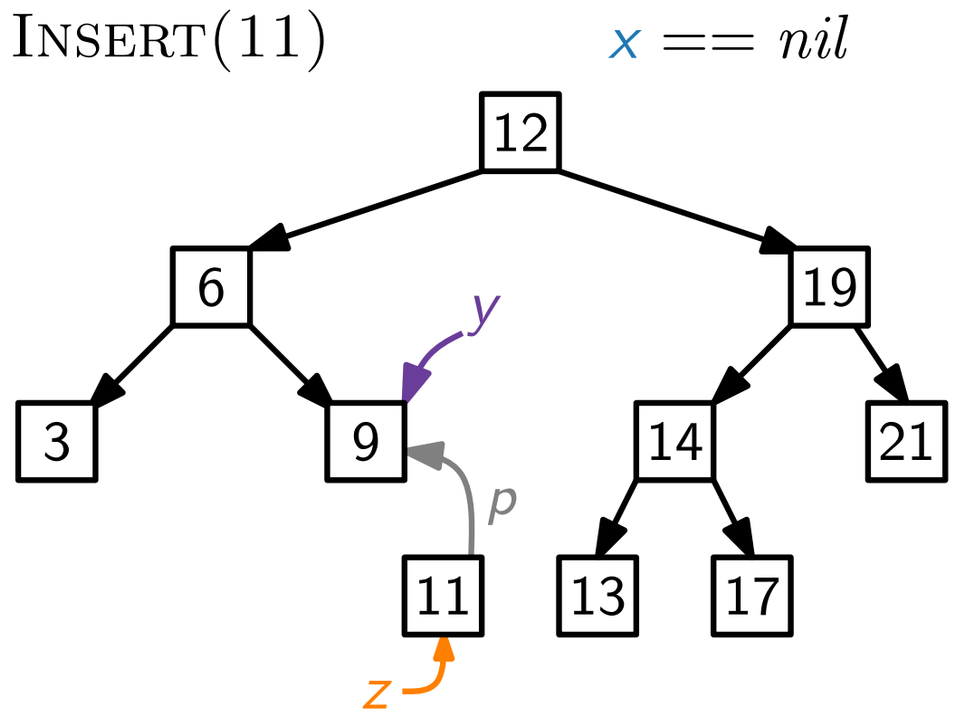
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = nil
```

Einfügen

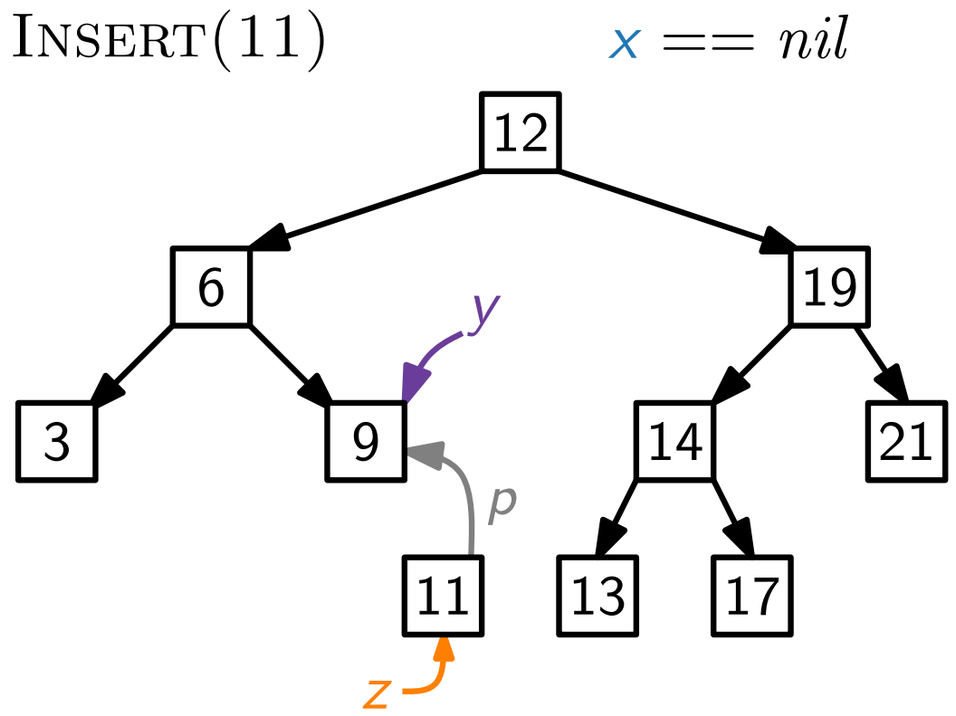
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else y.right = z

return z
```




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = nil
```

Einfügen

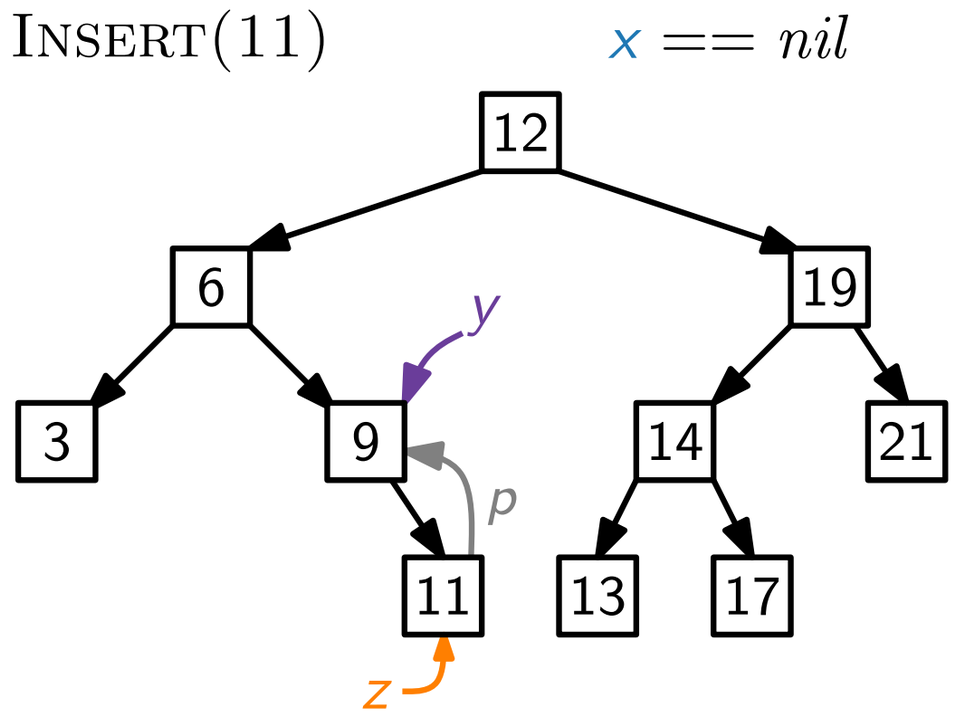
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else              y.right = z

return z
```




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = nil
```

Einfügen

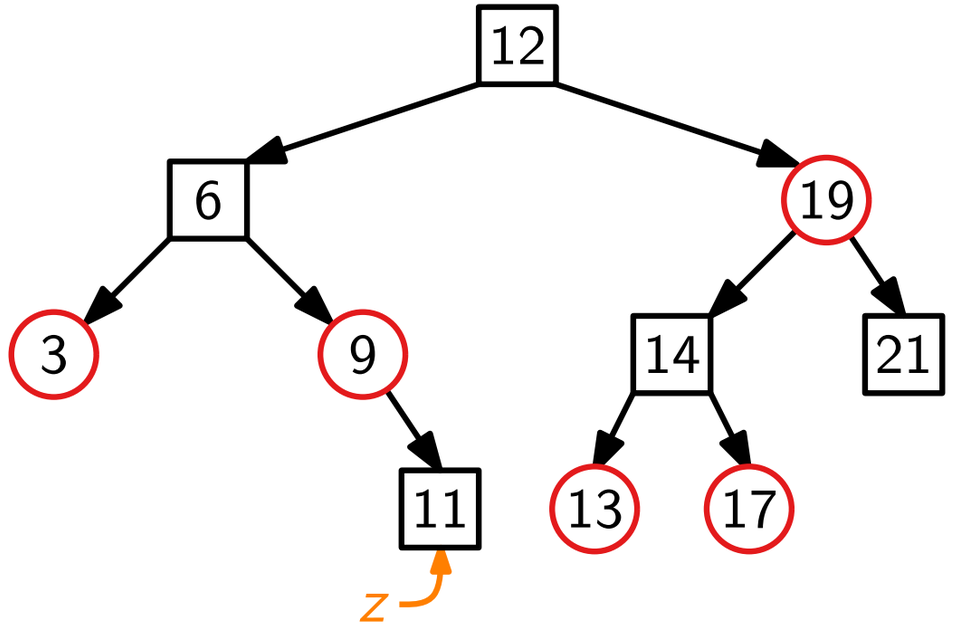
```
Node INSERT(key k)
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else              y.right = z

return z
```




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = nil
```

Einfügen

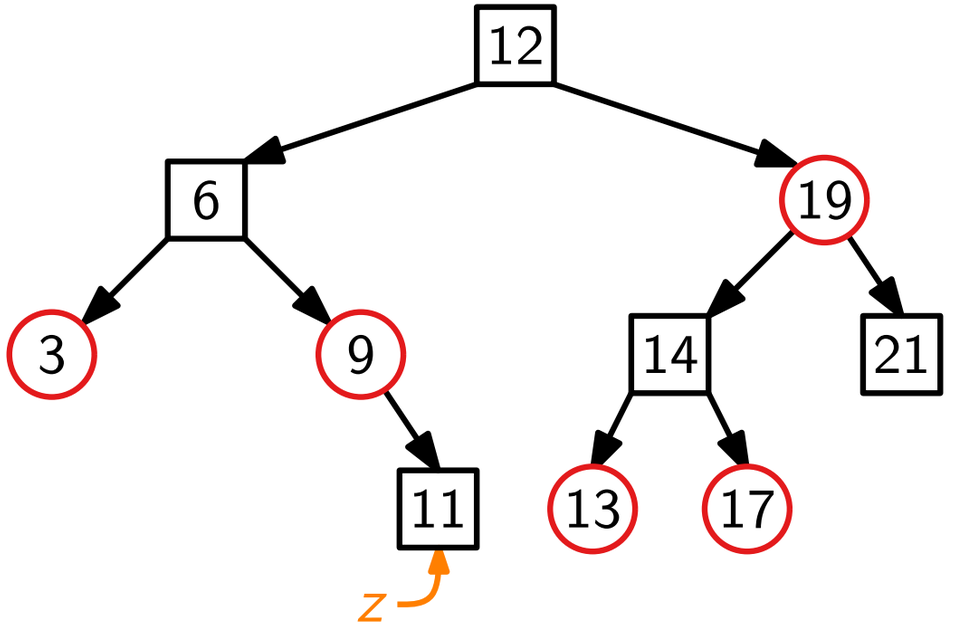
```
RBNode INSERT(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else y.right = z

    return z
```




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = nil
```

Einfügen

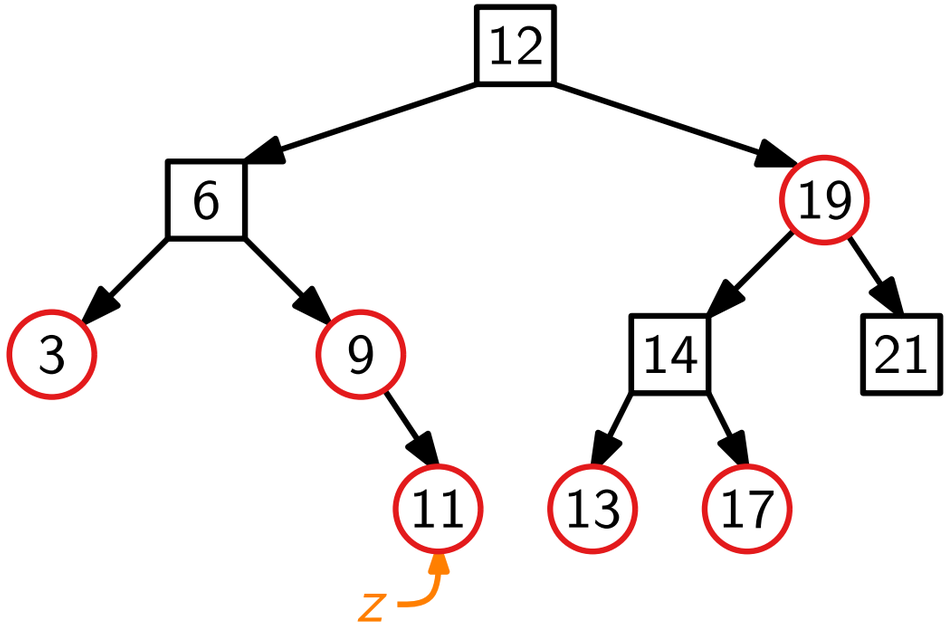
```
RBNode INSERT(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else y.right = z

    return z
```




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

Einfügen

```
RBNode INSERT(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z

    return z
```

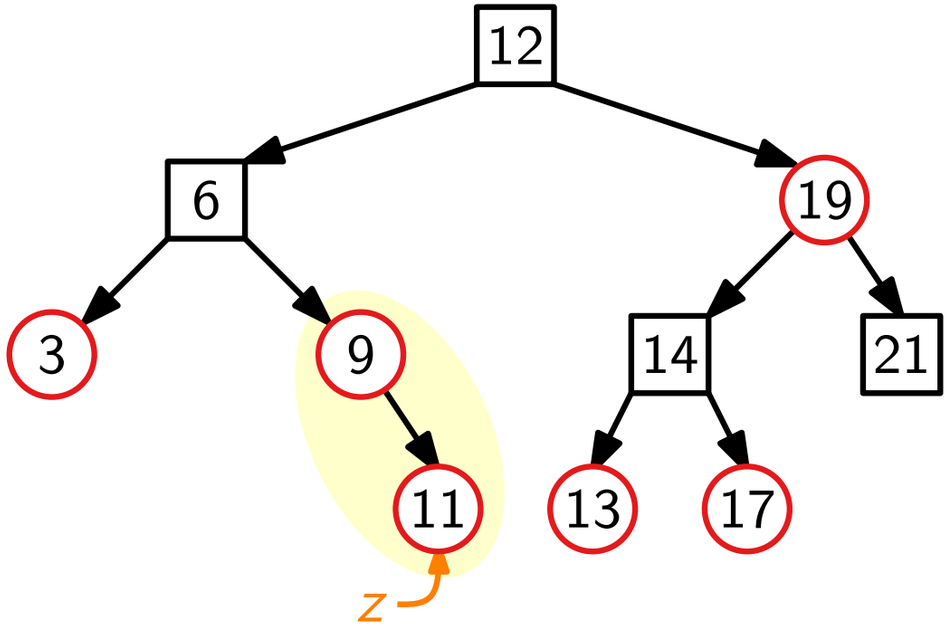



```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

```
RBNode INSERT(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z

    return z
```



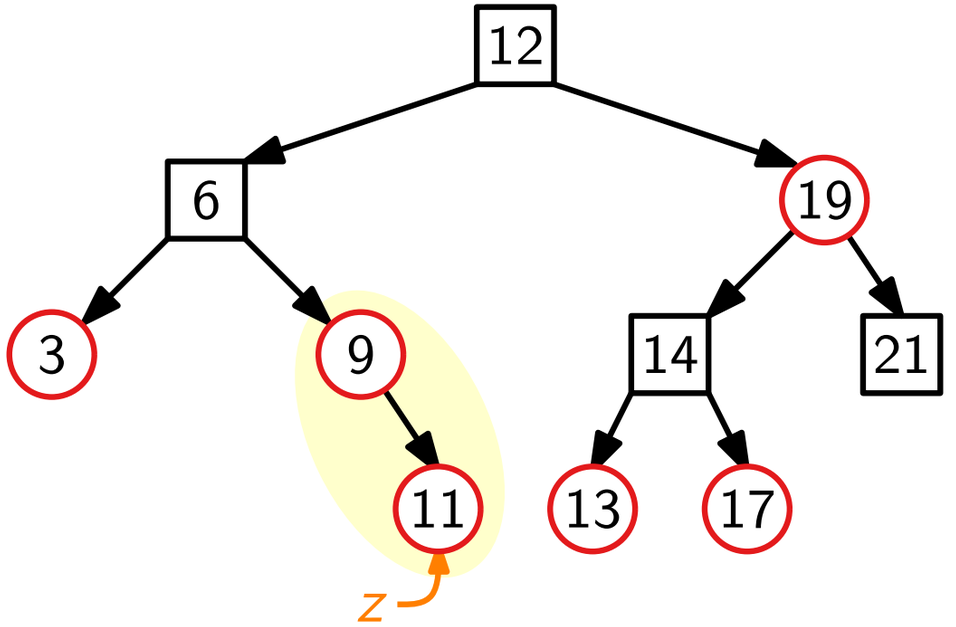

```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

```
RBNode INSERT(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z

    return z
```

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.



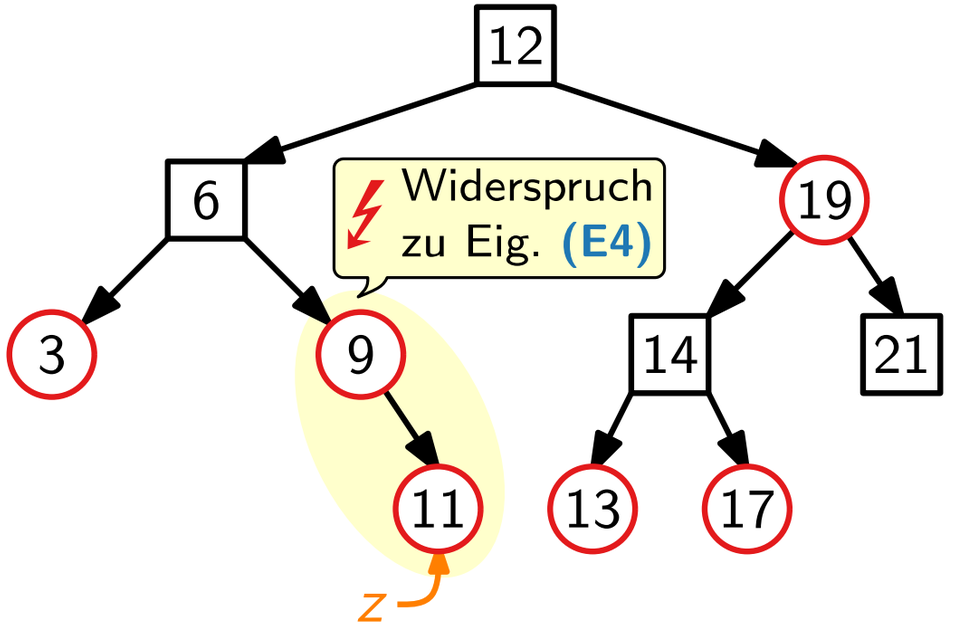

```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

```
RBNode INSERT(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z

    return z
```

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.



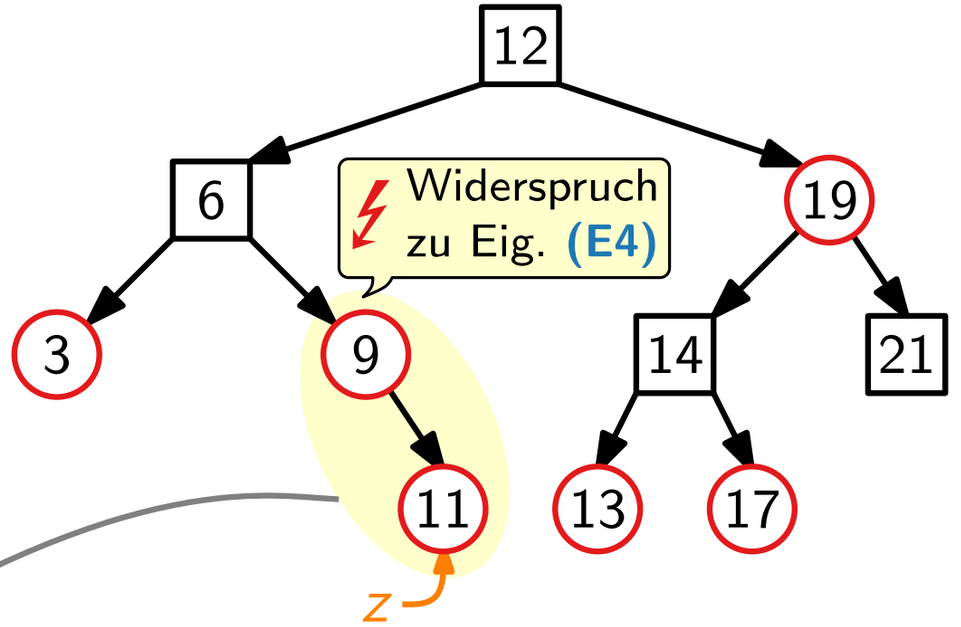

```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

```
RBNode INSERT(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    RBINSERTFIXUP(z)
    return z
```

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

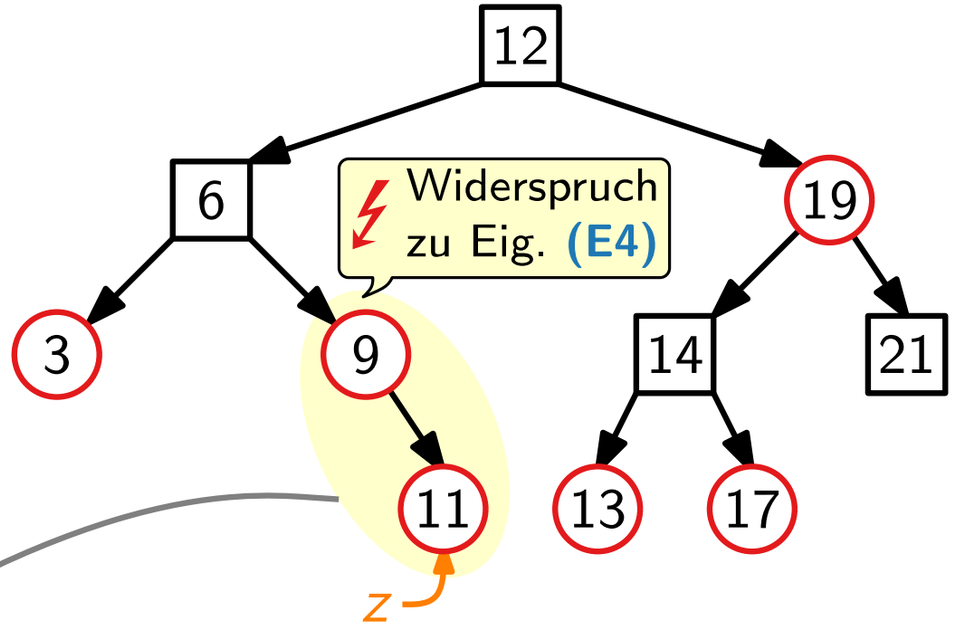
```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup)

```
RBNode Insert(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    RBInsertFixup(z)
    return z
```

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

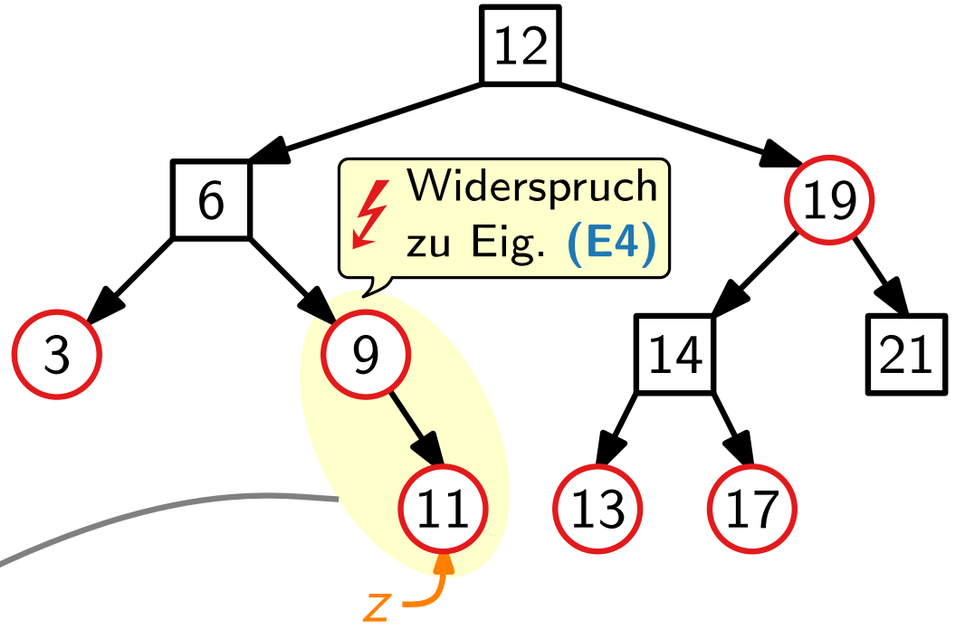
```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup) $\mathcal{O}(h)$

```
RBNode Insert(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    RBInsertFixup(z)
    return z
```

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.




```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

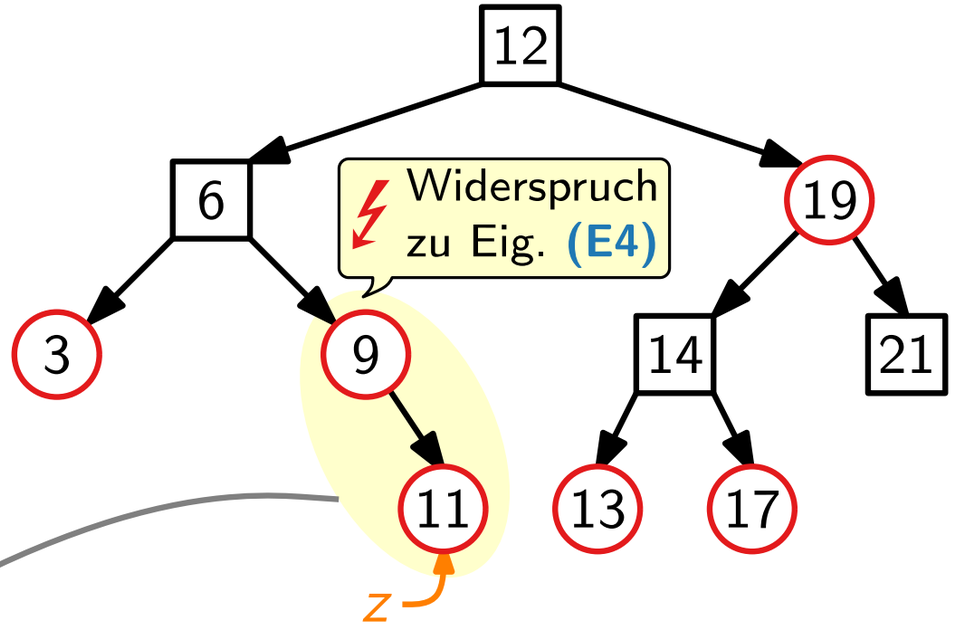
```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup) $\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(\log n)$ 

```
RBNode Insert(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new RBNode(k, y, red)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    RBInsertFixup(z)
    return z
```

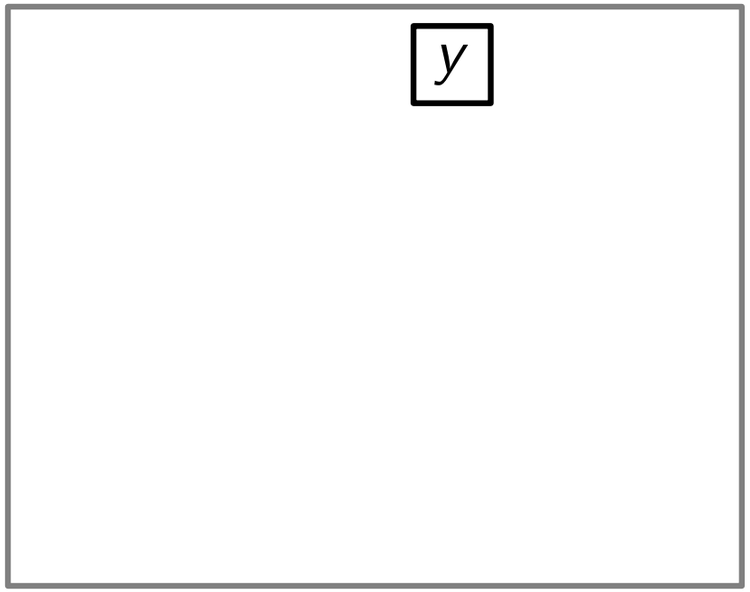
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.



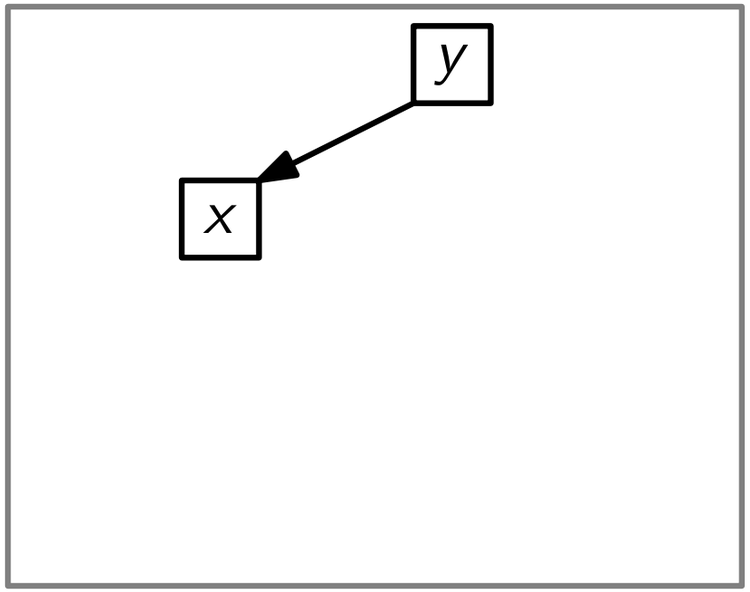

```
Node(Key k, Node par)
    key = k
    p = par
    right = left = T.nil
```

```
RBNode(..., Color c)
    super(k, par)
    color = c
```

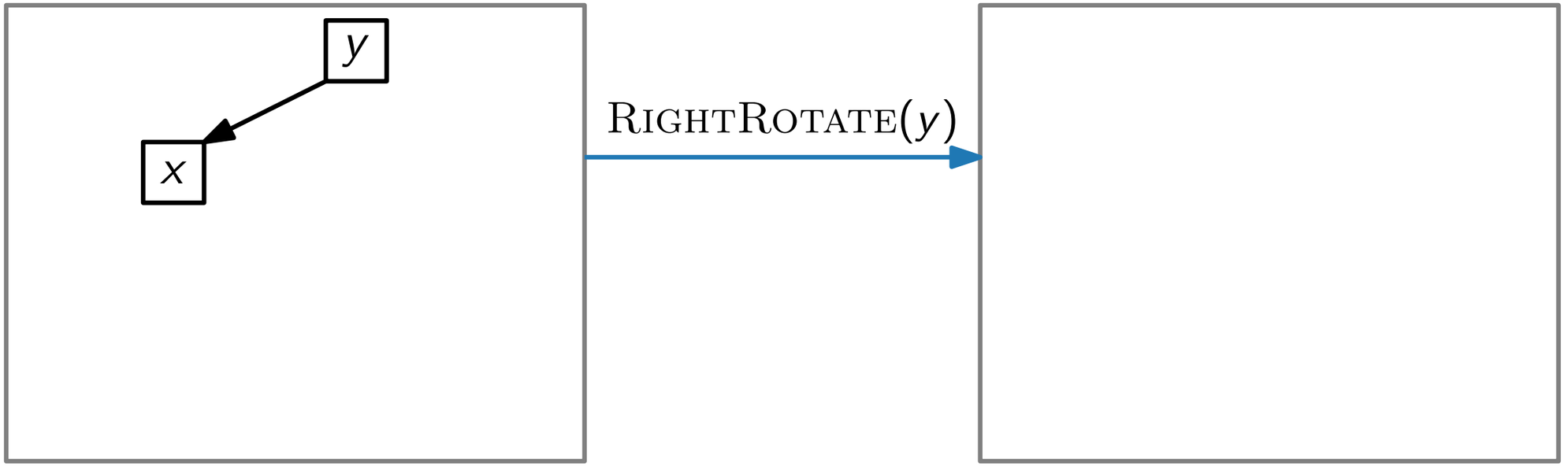
Exkurs: Rotationen



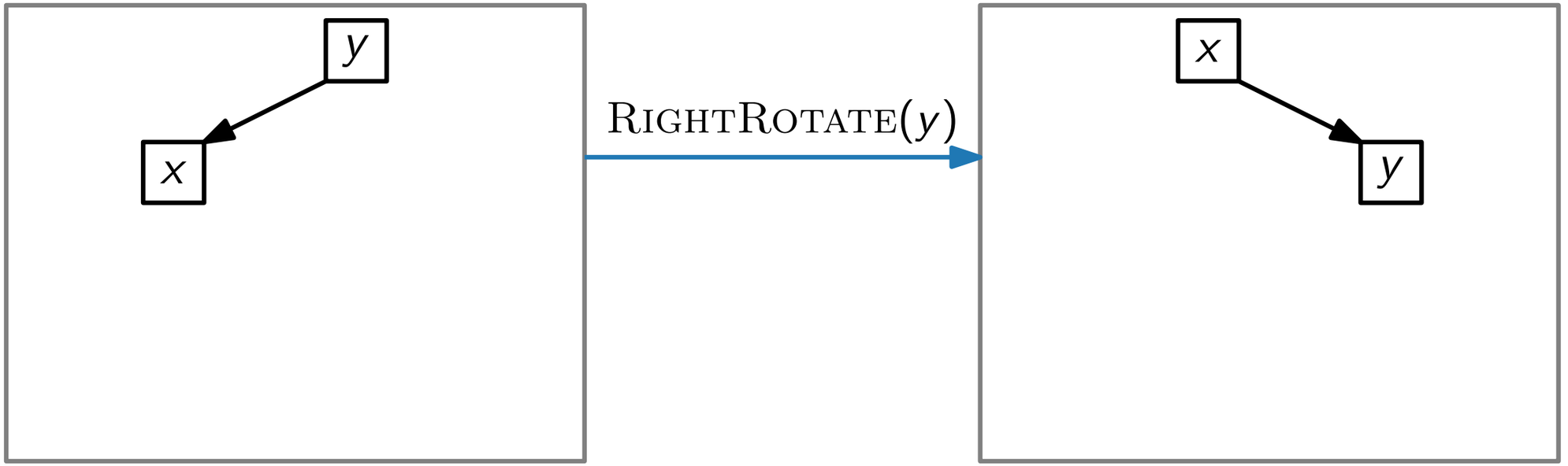
Exkurs: Rotationen



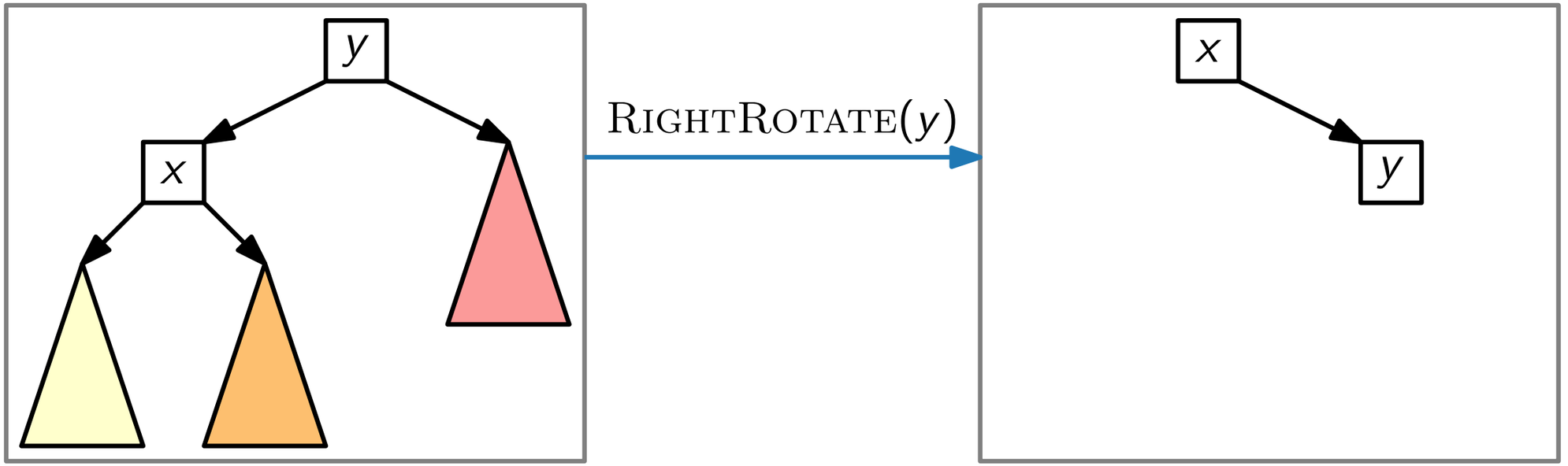
Exkurs: Rotationen



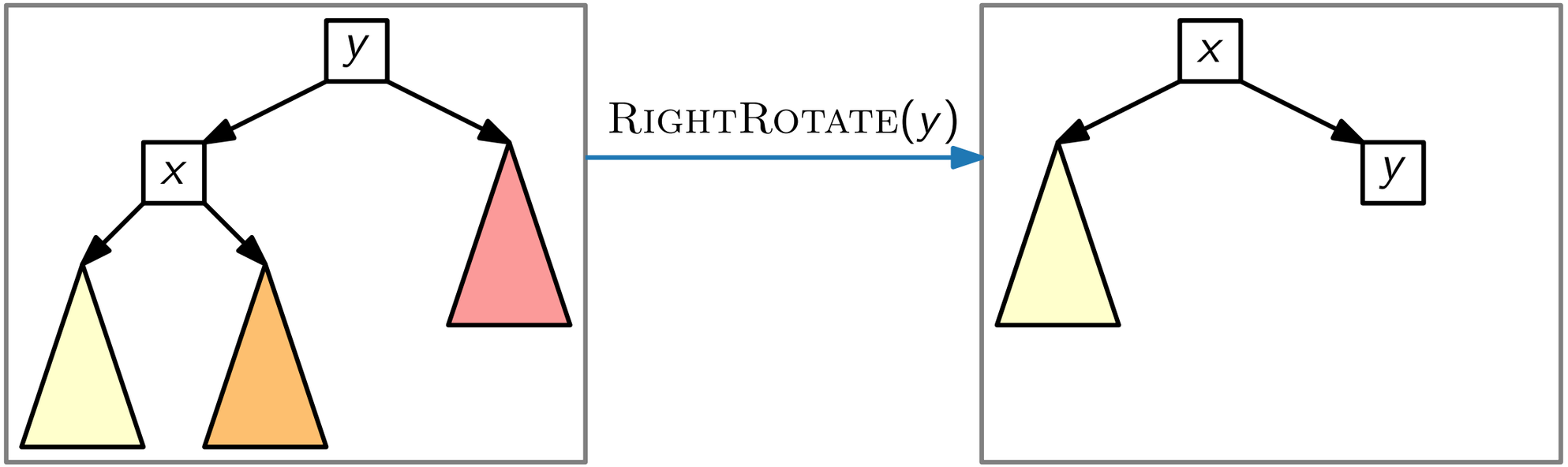
Exkurs: Rotationen



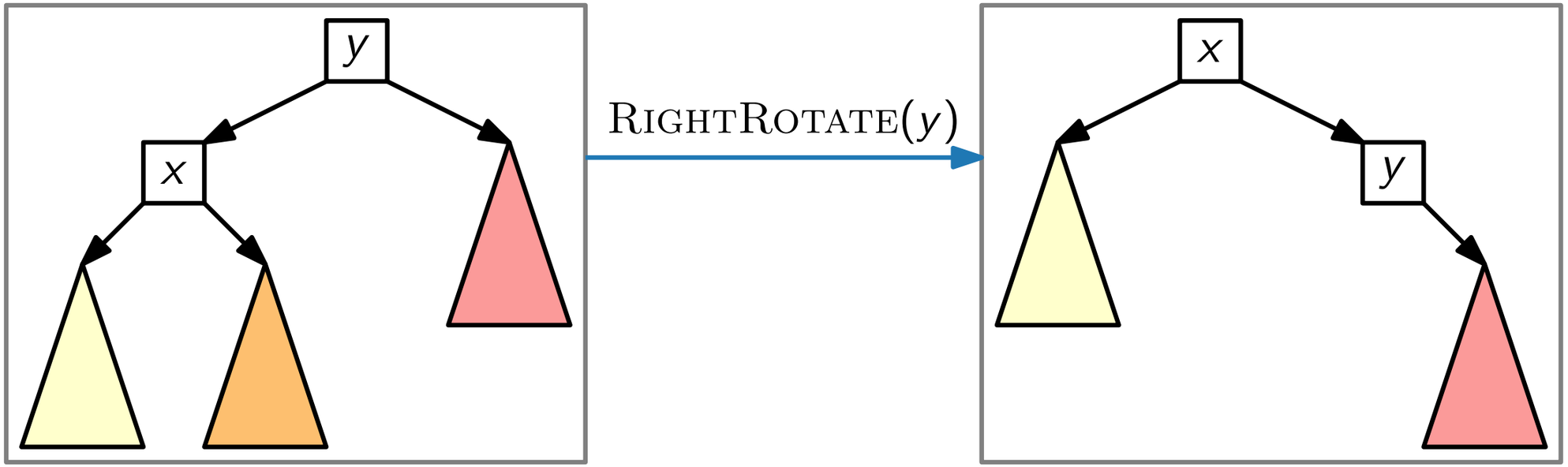
Exkurs: Rotationen



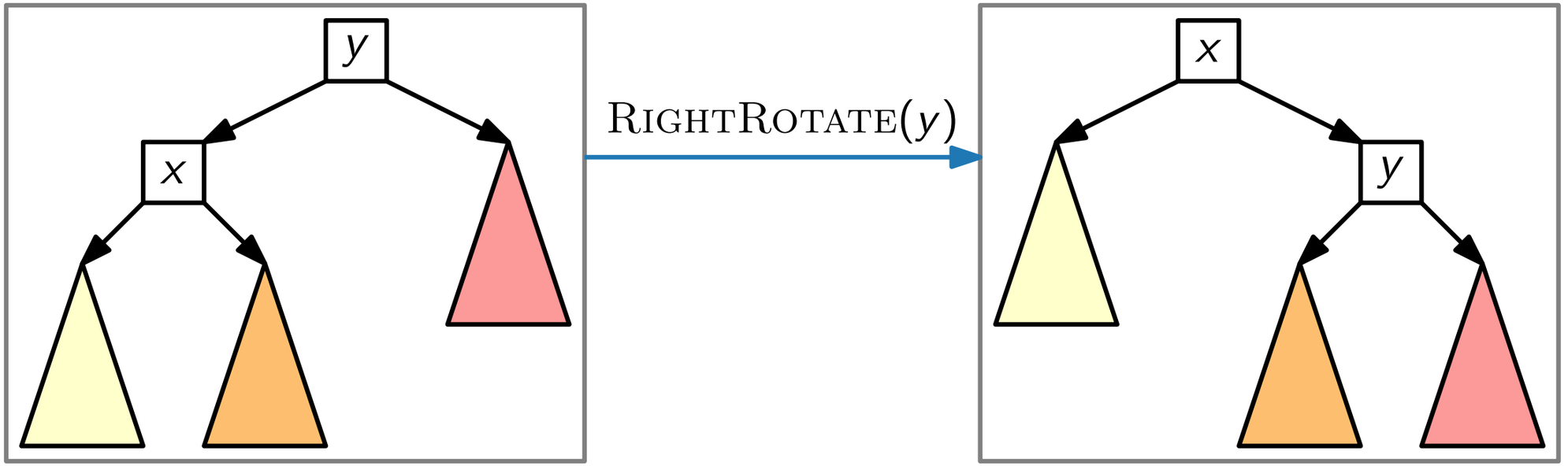
Exkurs: Rotationen



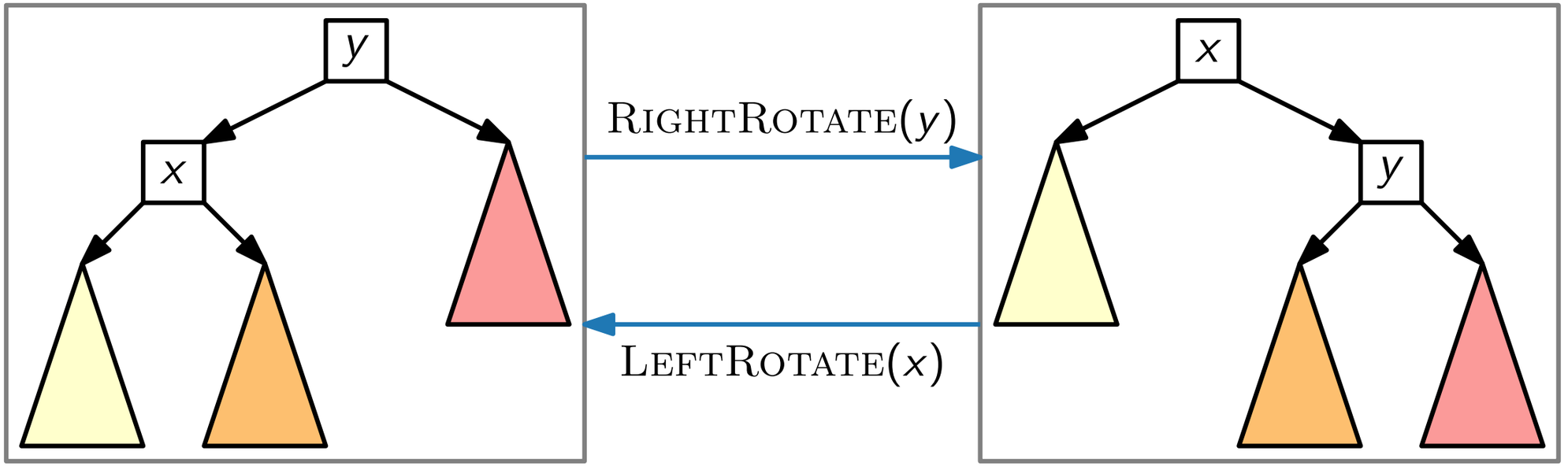
Exkurs: Rotationen



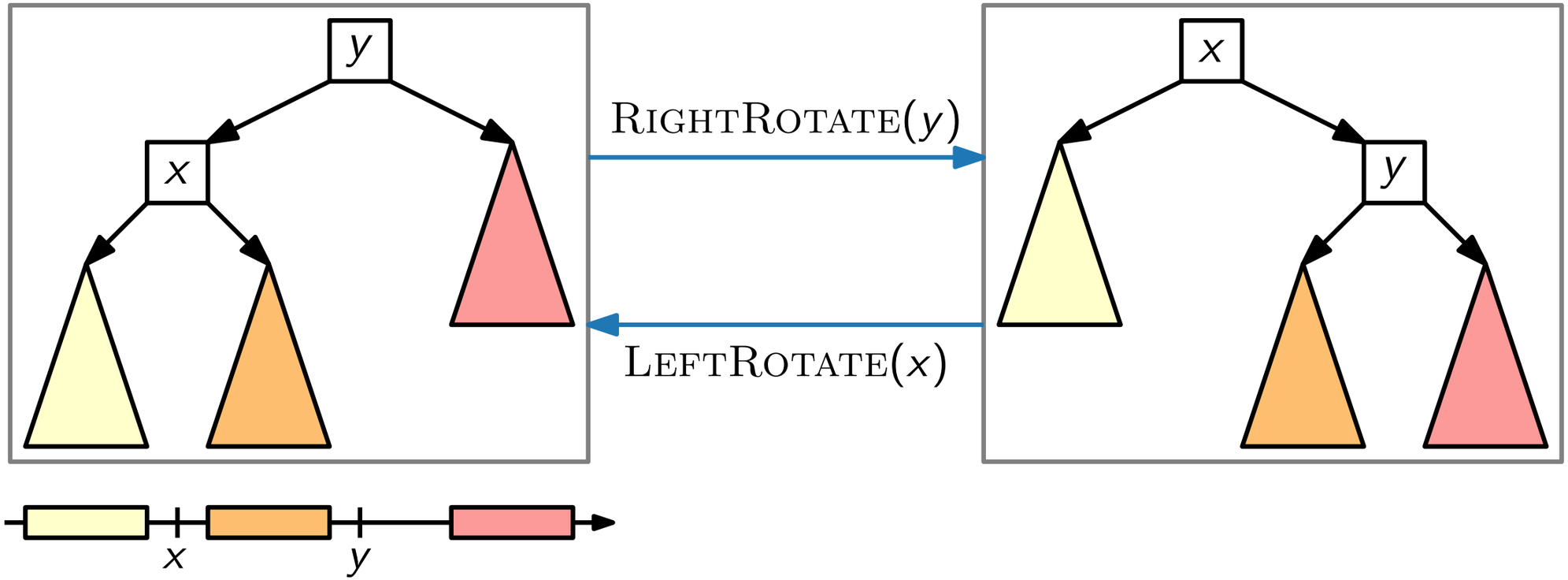
Exkurs: Rotationen



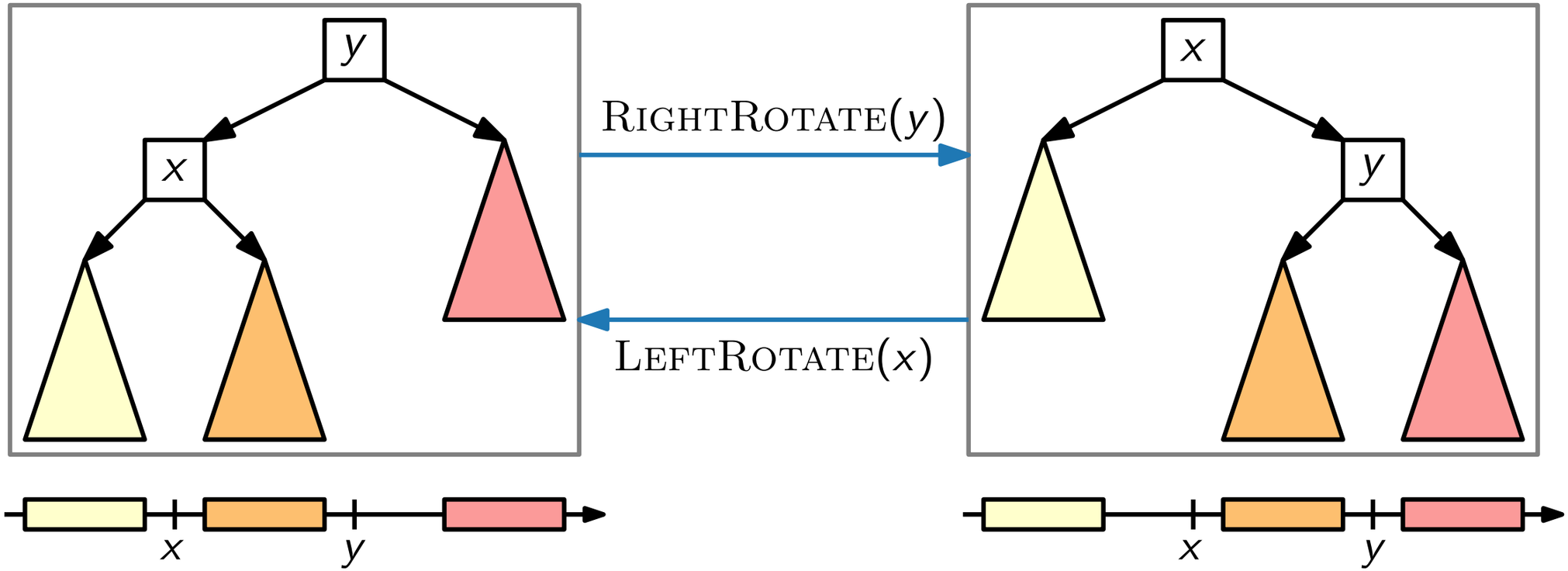
Exkurs: Rotationen



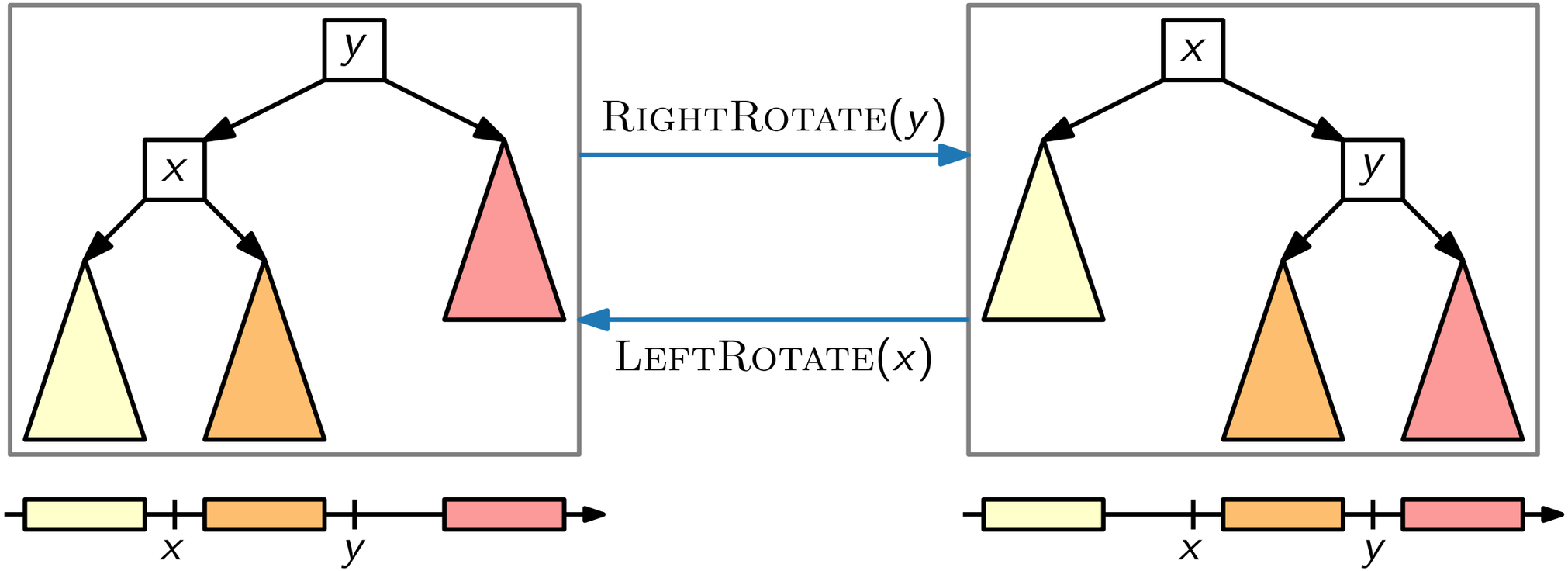
Exkurs: Rotationen



Exkurs: Rotationen

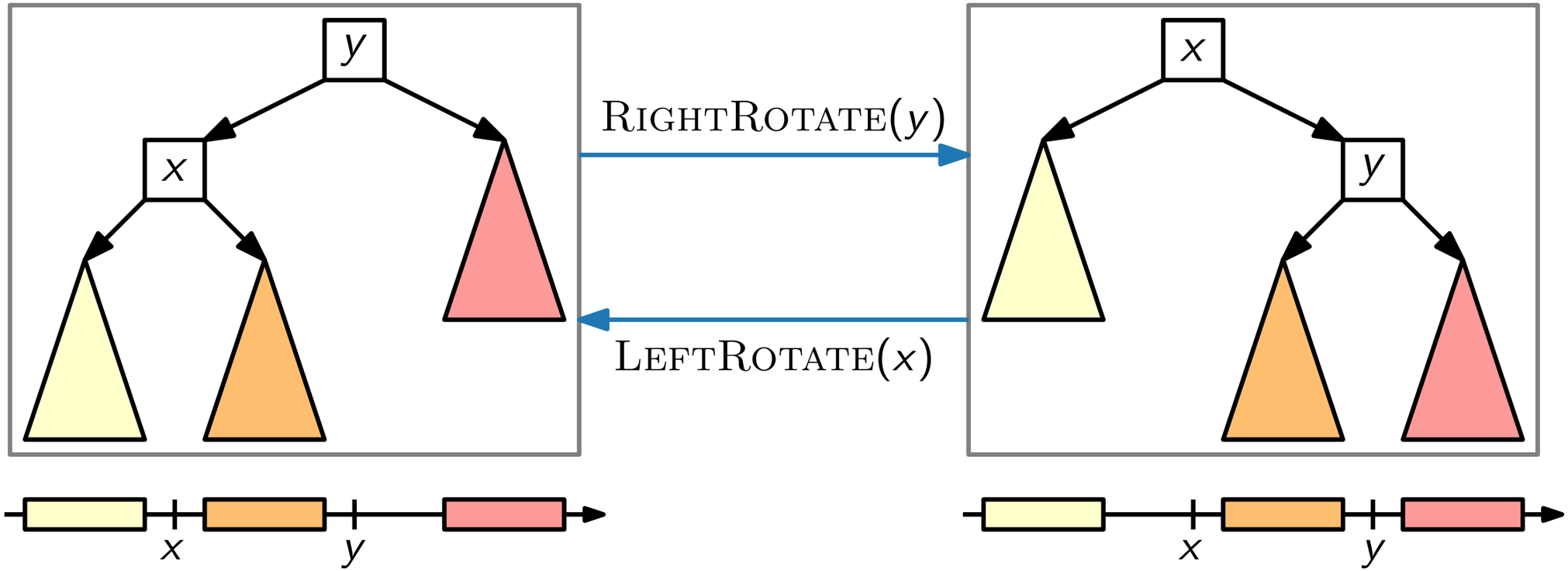


Exkurs: Rotationen



Also: **Binärer-Suchbaum-Eigenschaft** bleibt beim Rotieren erhalten!

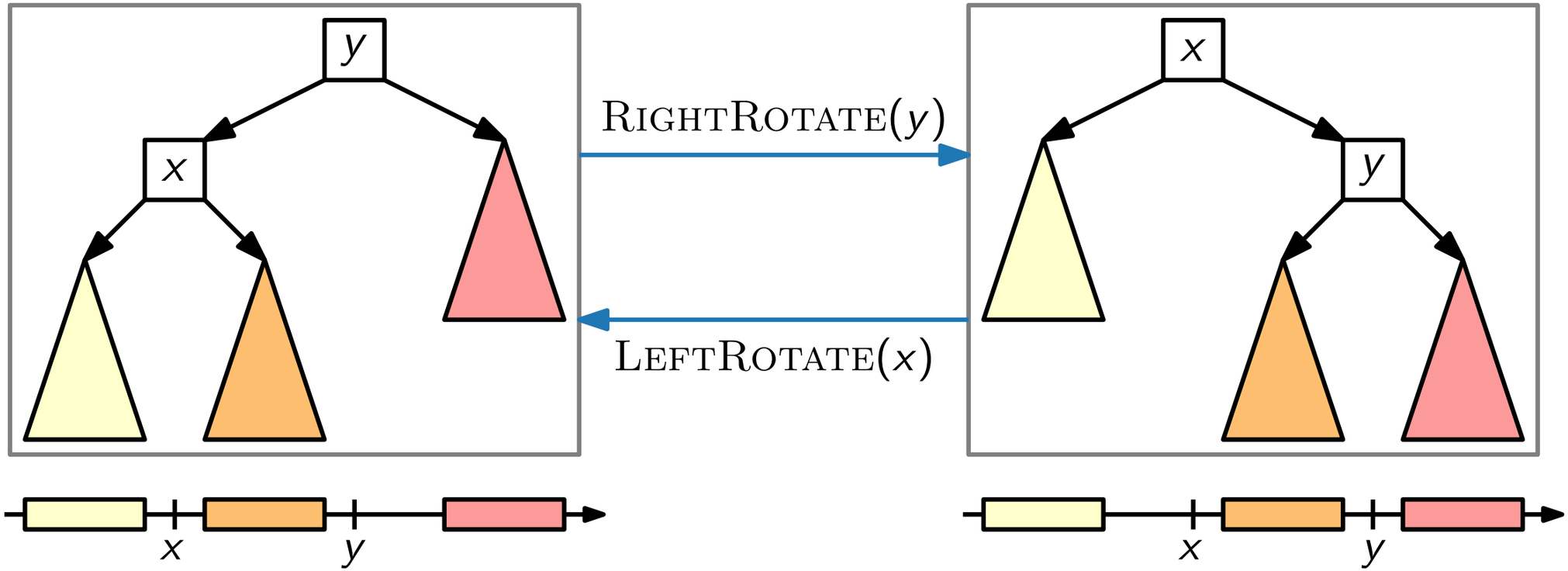
Exkurs: Rotationen



Also: **Binärer-Suchbaum-Eigenschaft** bleibt beim Rotieren erhalten!

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Exkurs: Rotationen

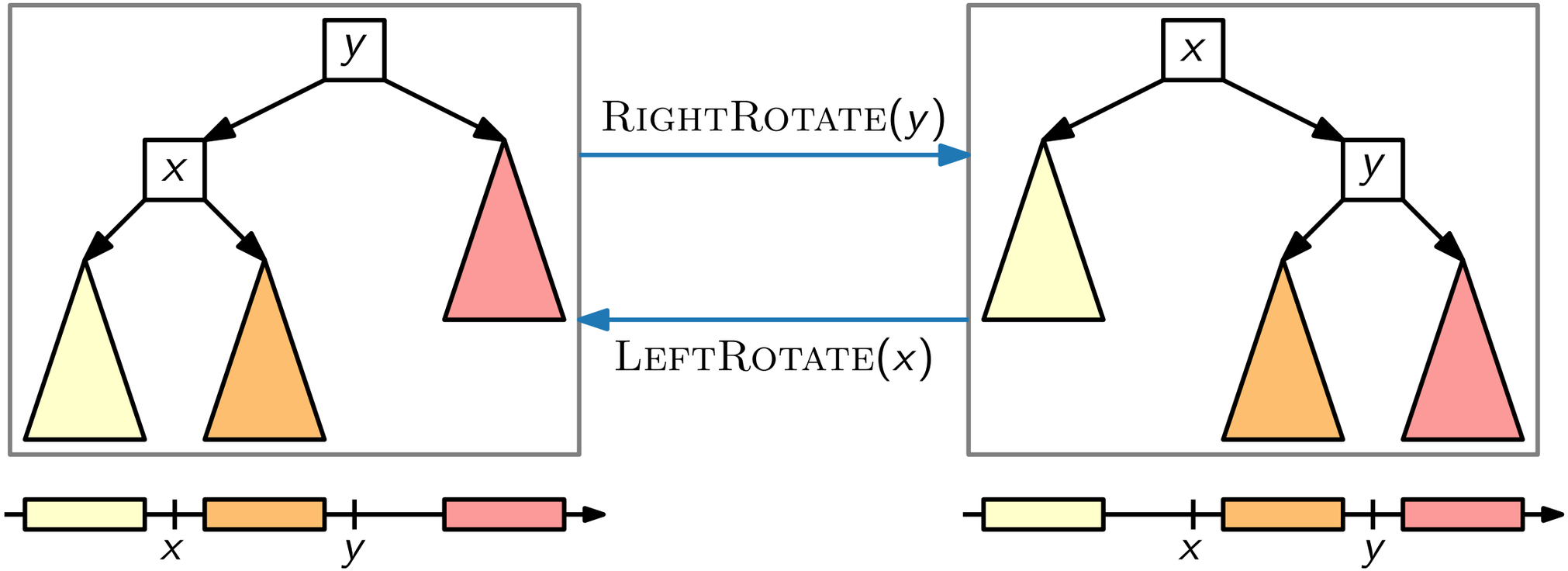


Also: **Binärer-Suchbaum-Eigenschaft** bleibt beim Rotieren erhalten!

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Laufzeit:

Exkurs: Rotationen

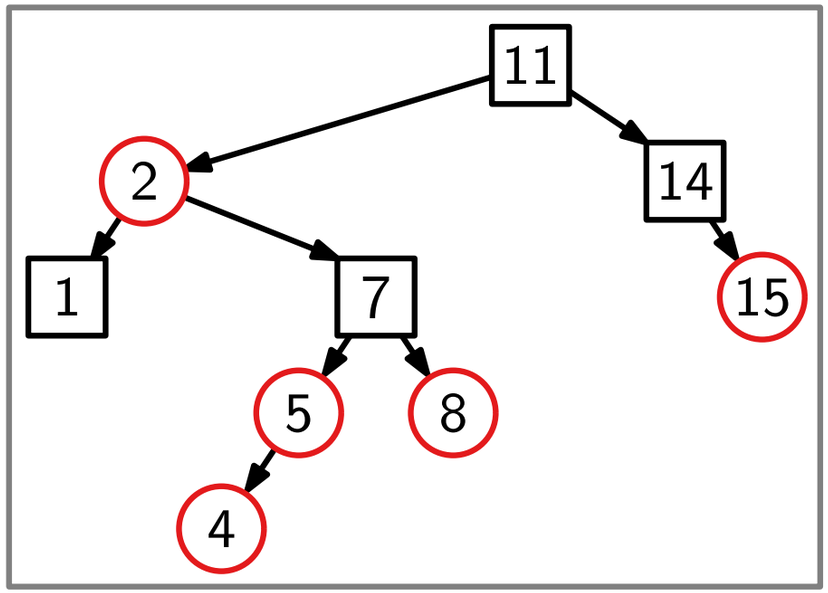


Also: **Binärer-Suchbaum-Eigenschaft** bleibt beim Rotieren erhalten!

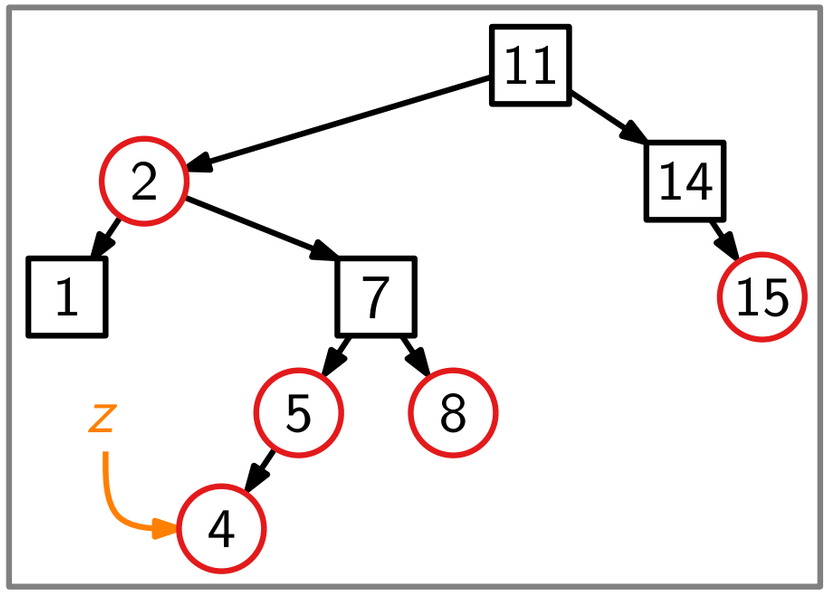
Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Laufzeit: $\mathcal{O}(1)$.

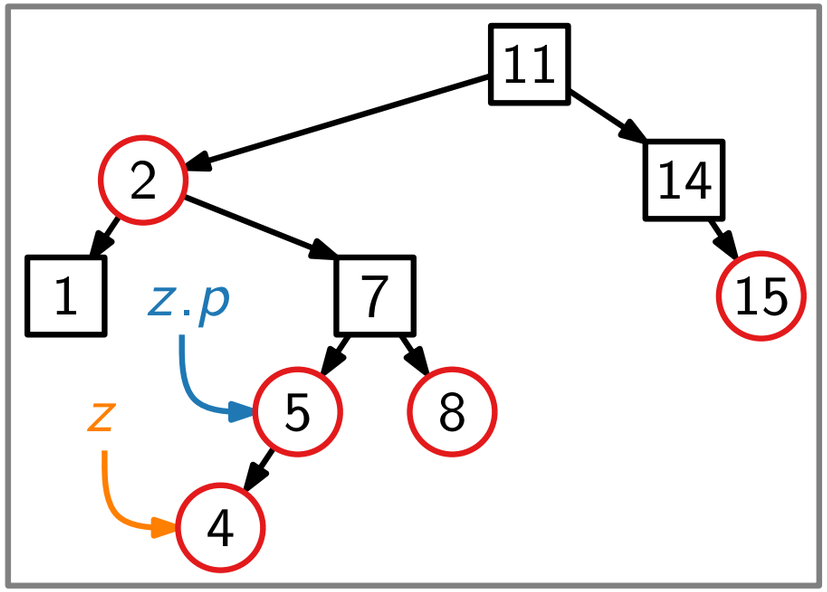
RBInsertFixup(RBNode *z*)



RBInsertFixup(RBNode *z*)

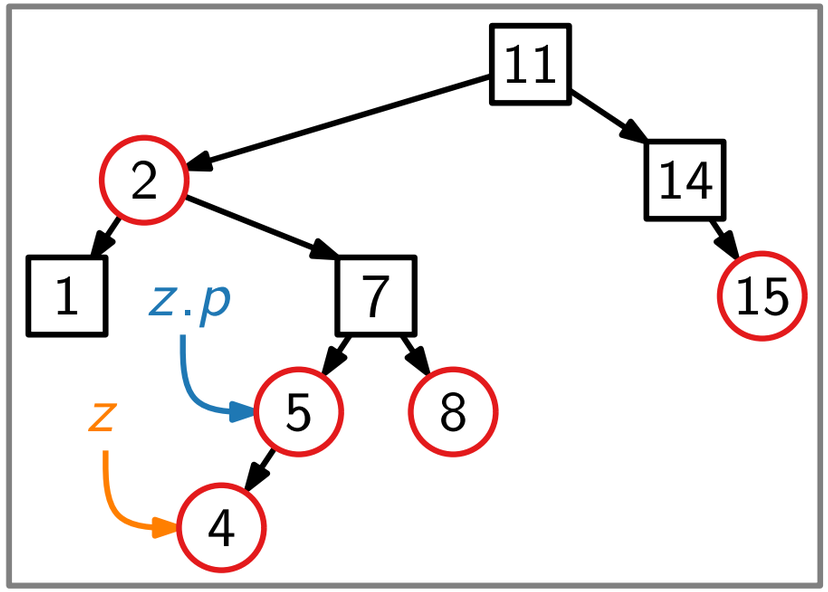


RBInsertFixup(RBNode z)



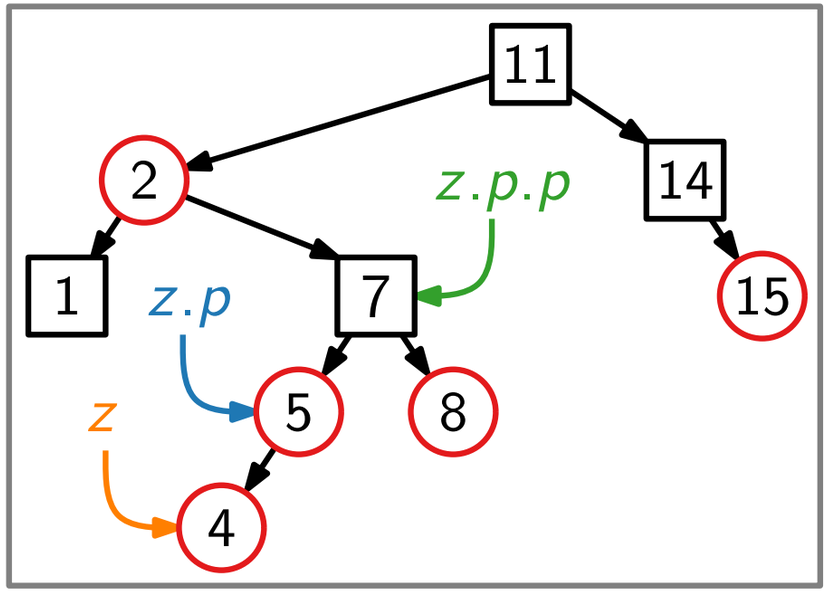
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    ⋮
```



RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
```

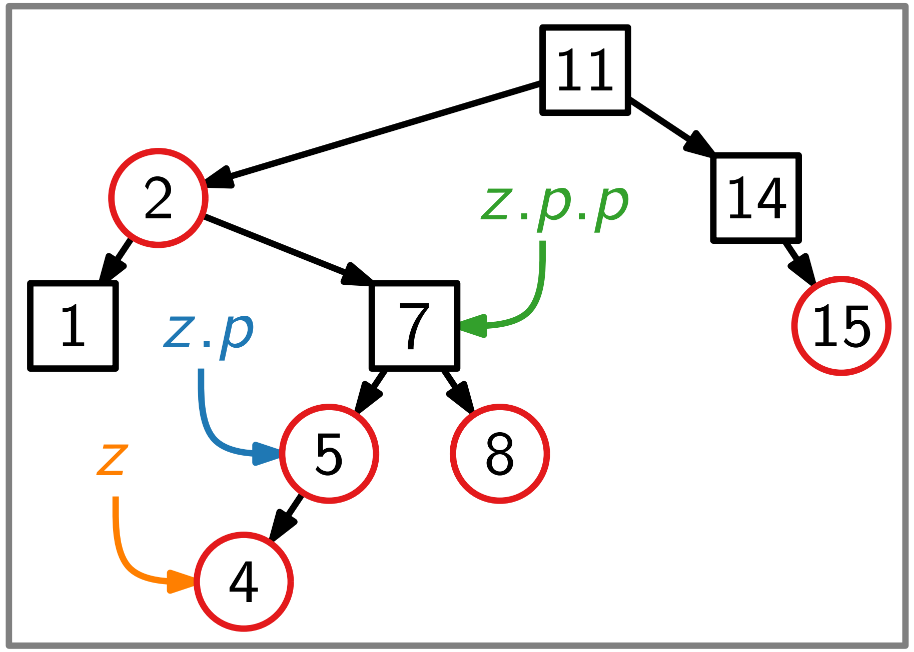


RBInsertFixup(RBNode z)

while $z.p.color == red$ **do**

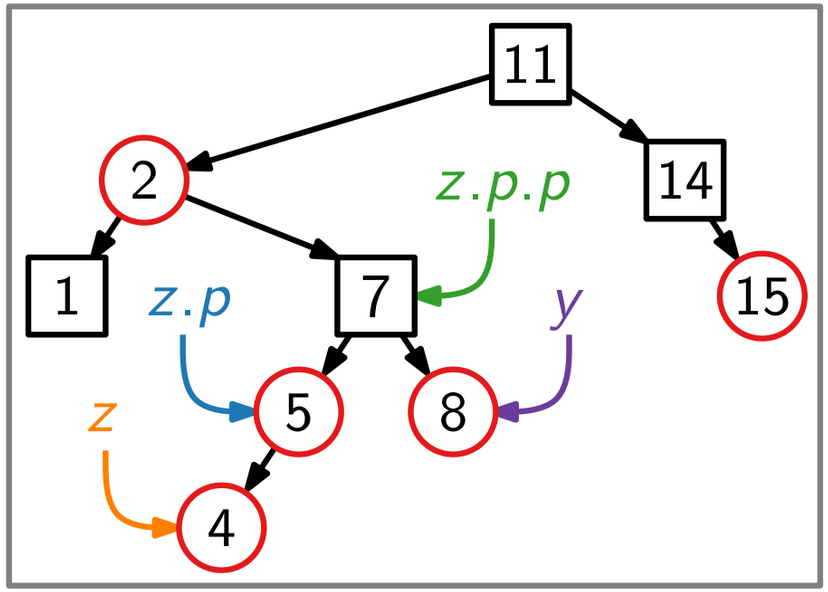
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**

  else



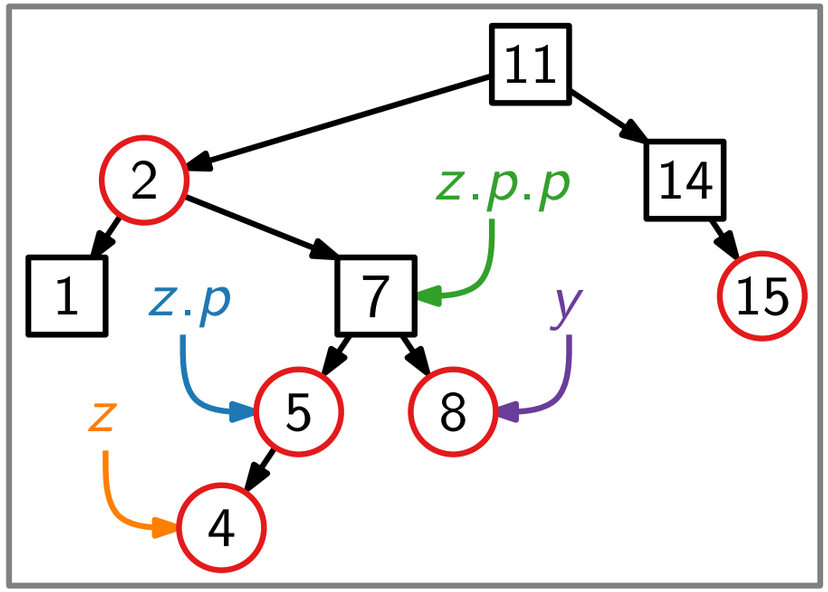
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
    else
```



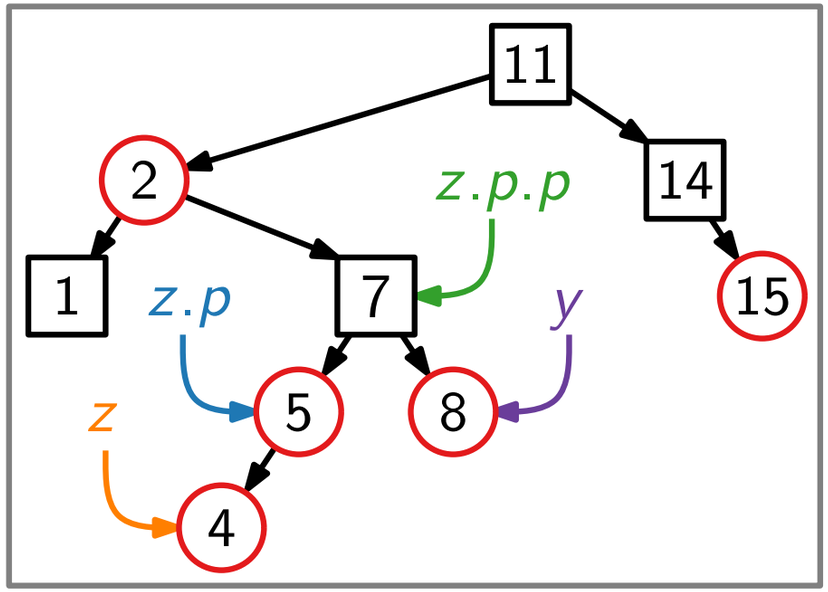
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            
            
            
            
            
            
        else
            
            
            
            
            
            
    else
```



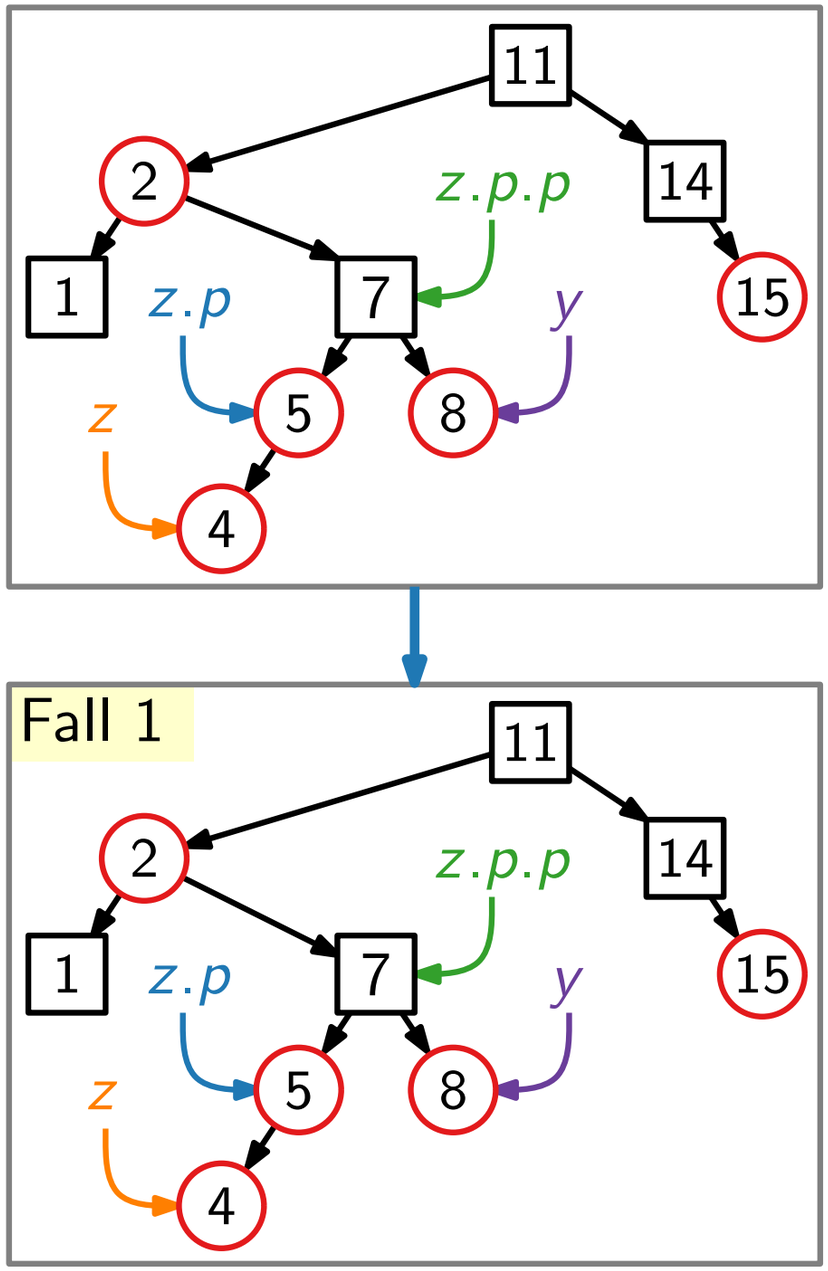
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            
    else
```



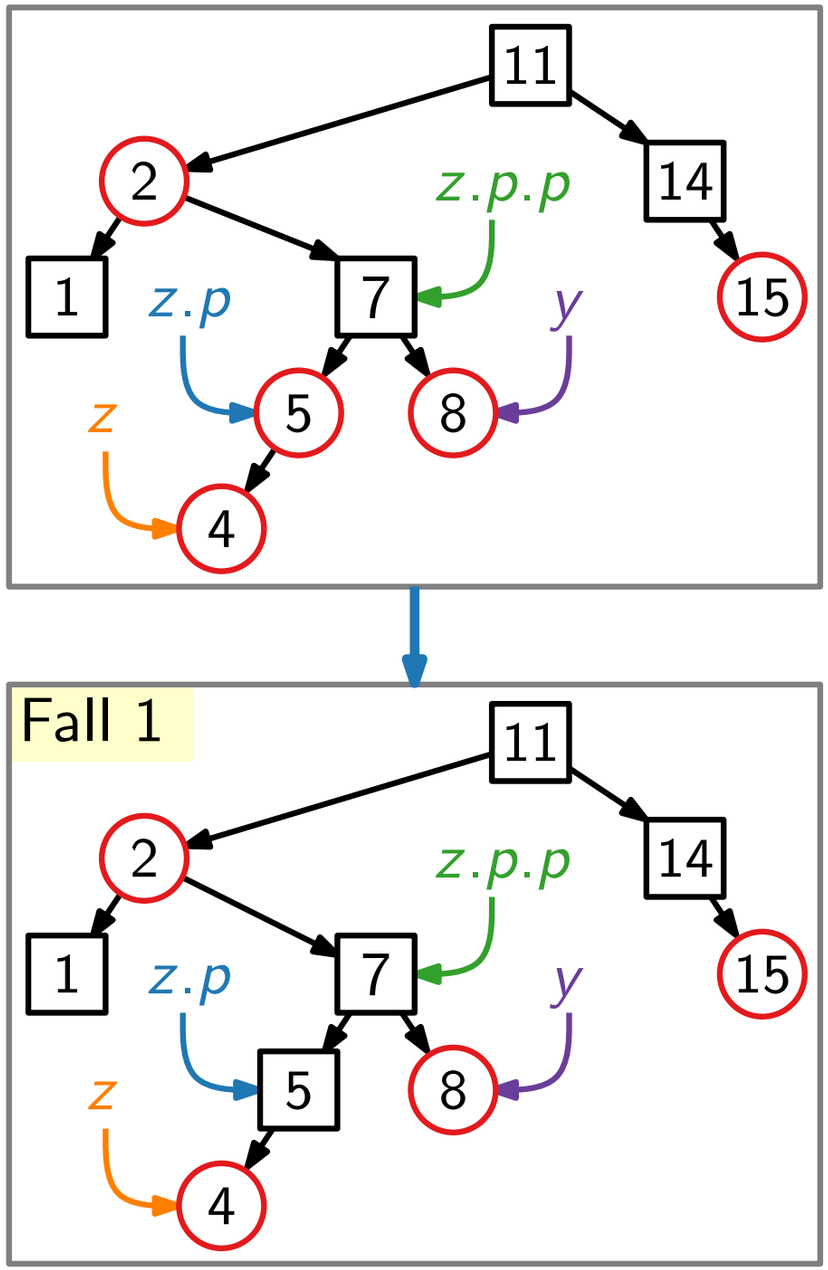
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



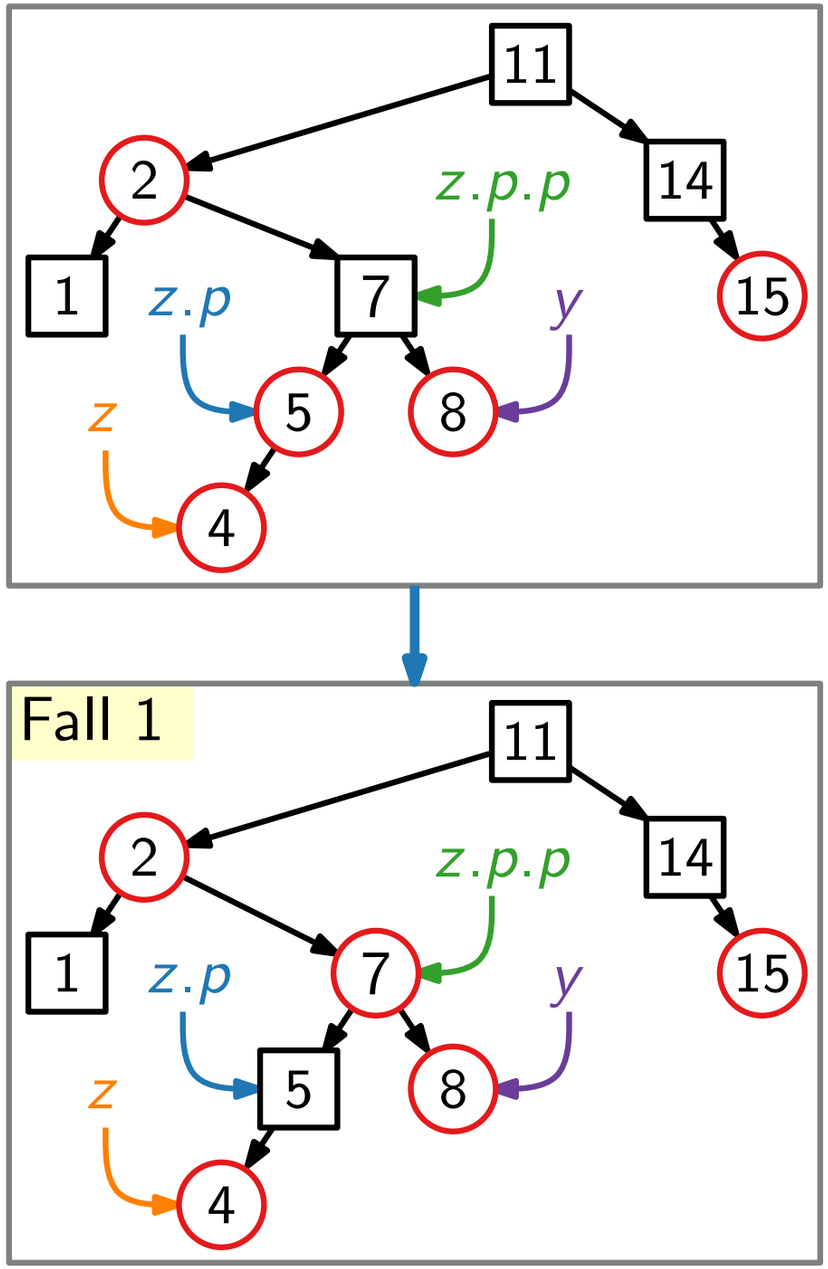
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



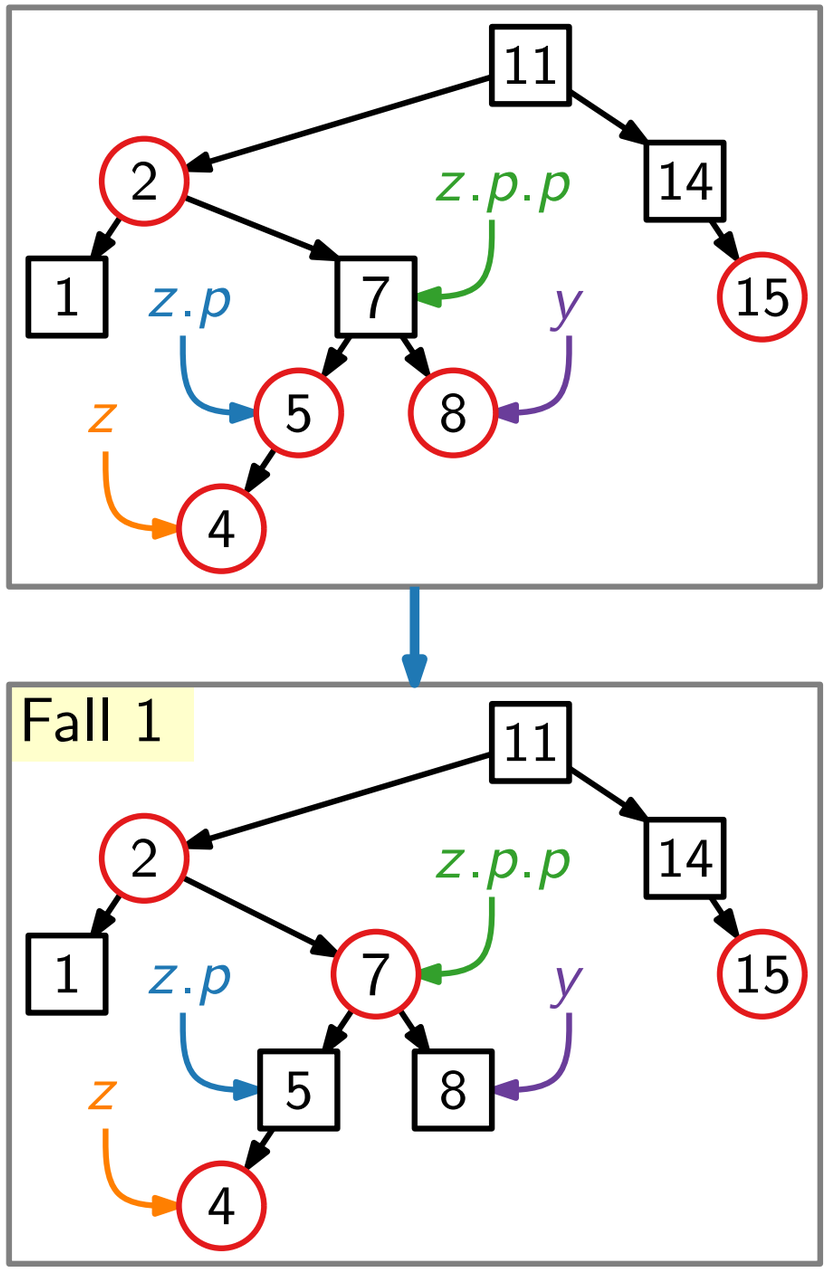
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



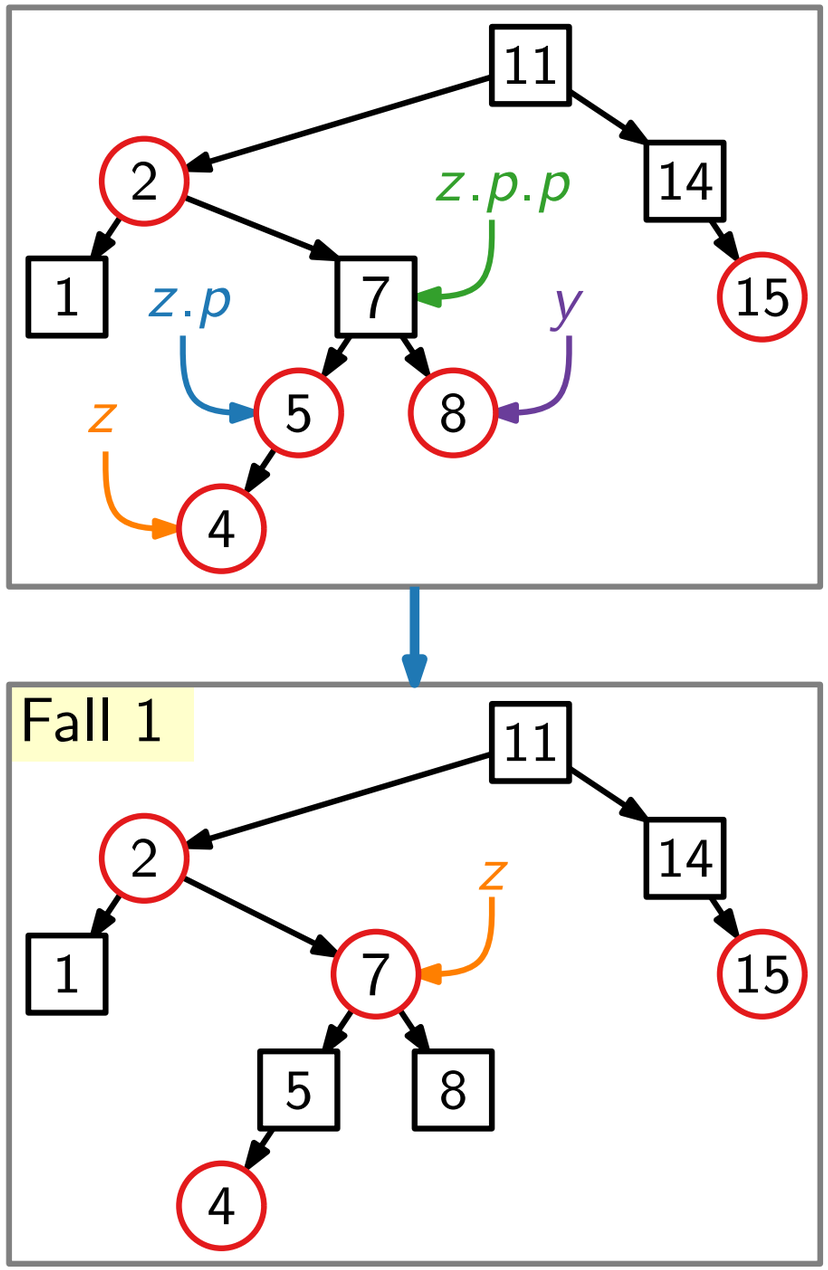
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



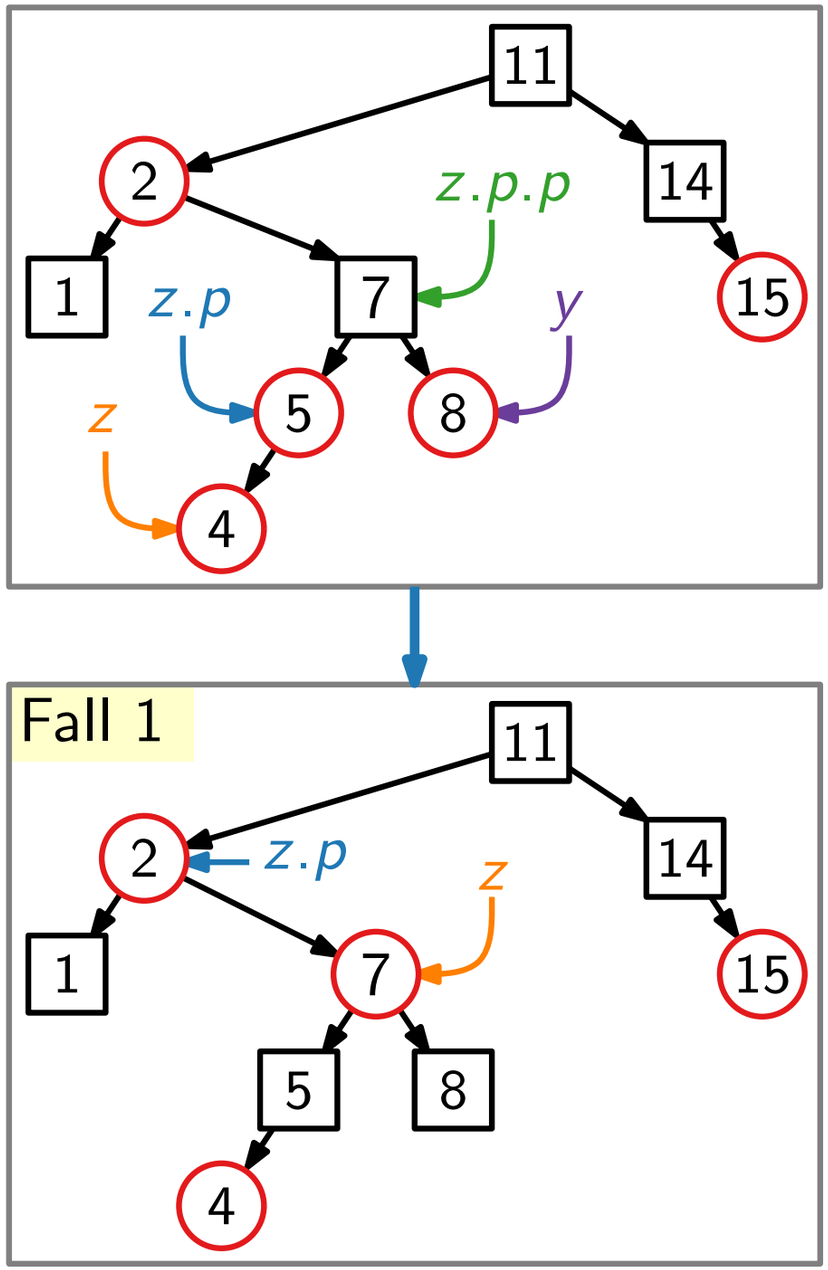
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



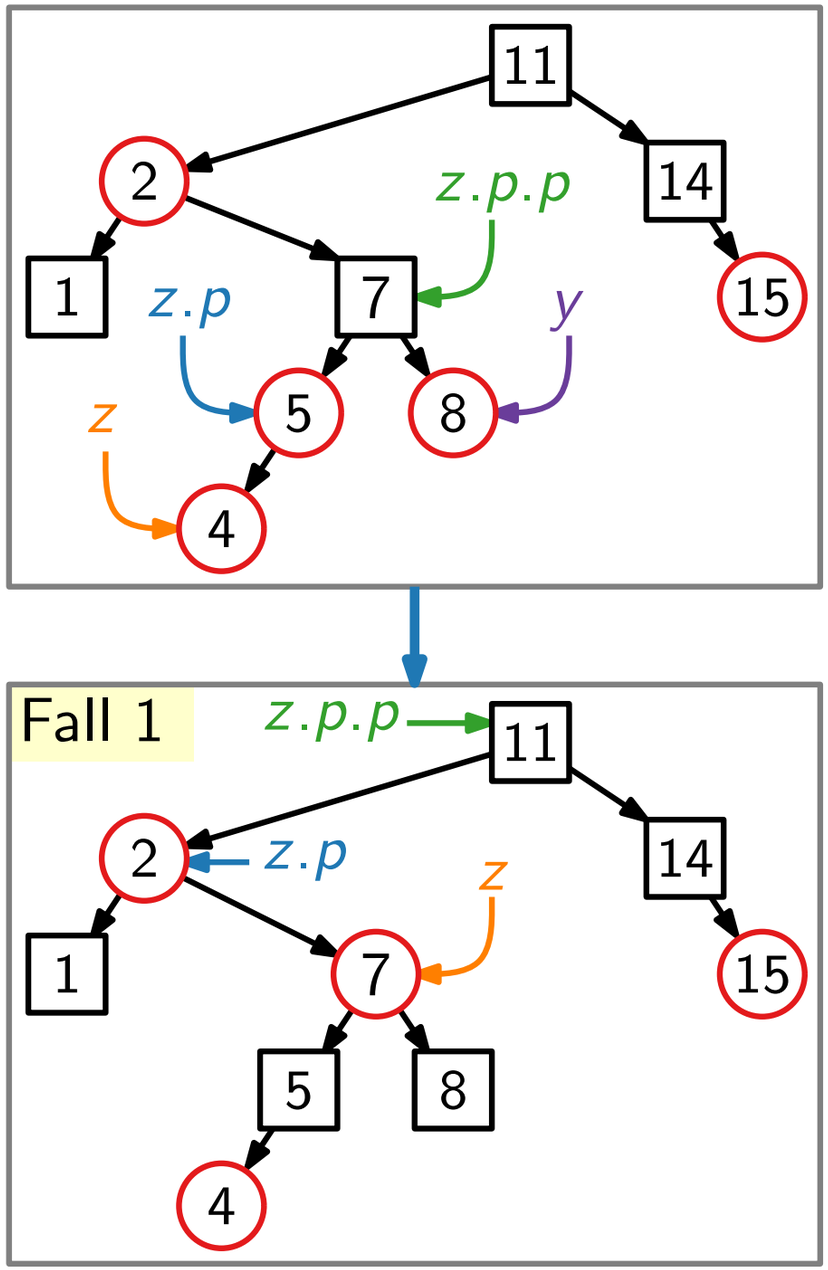
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



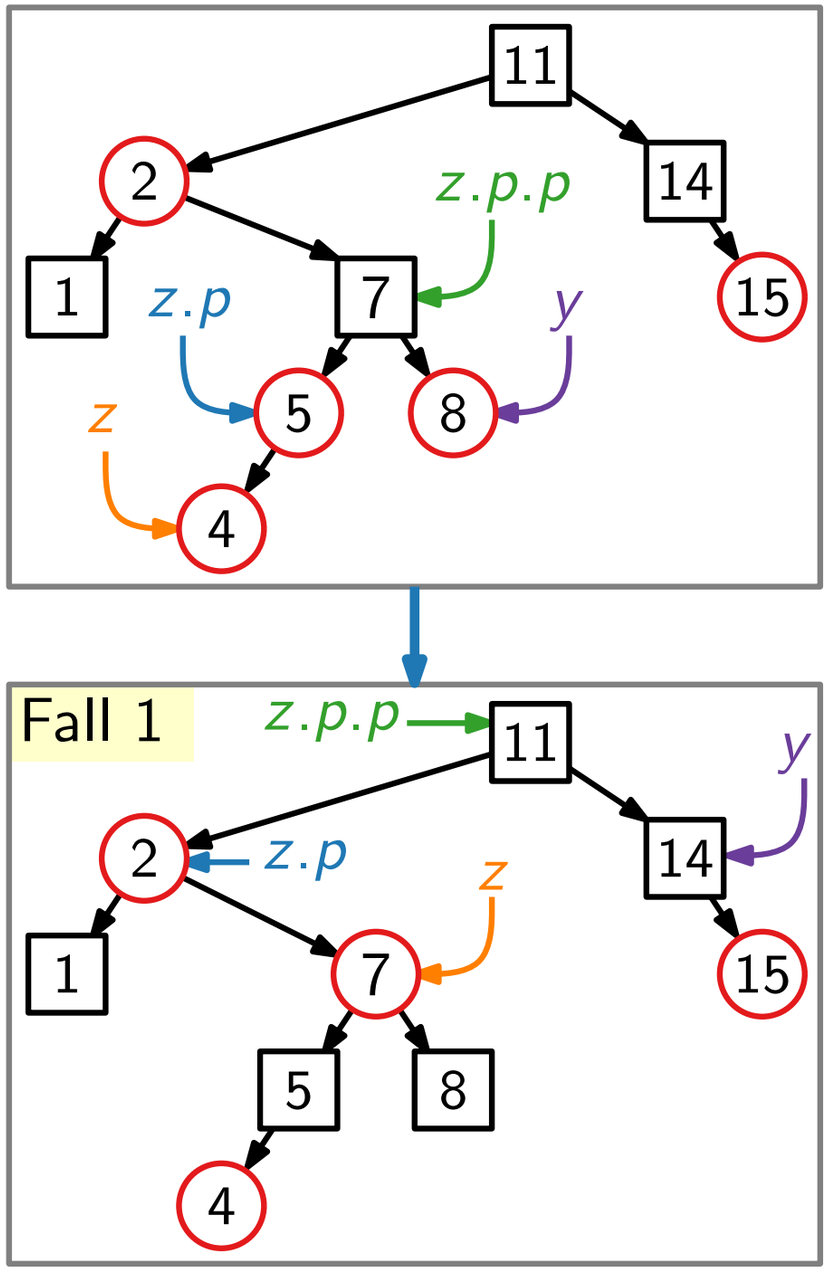
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



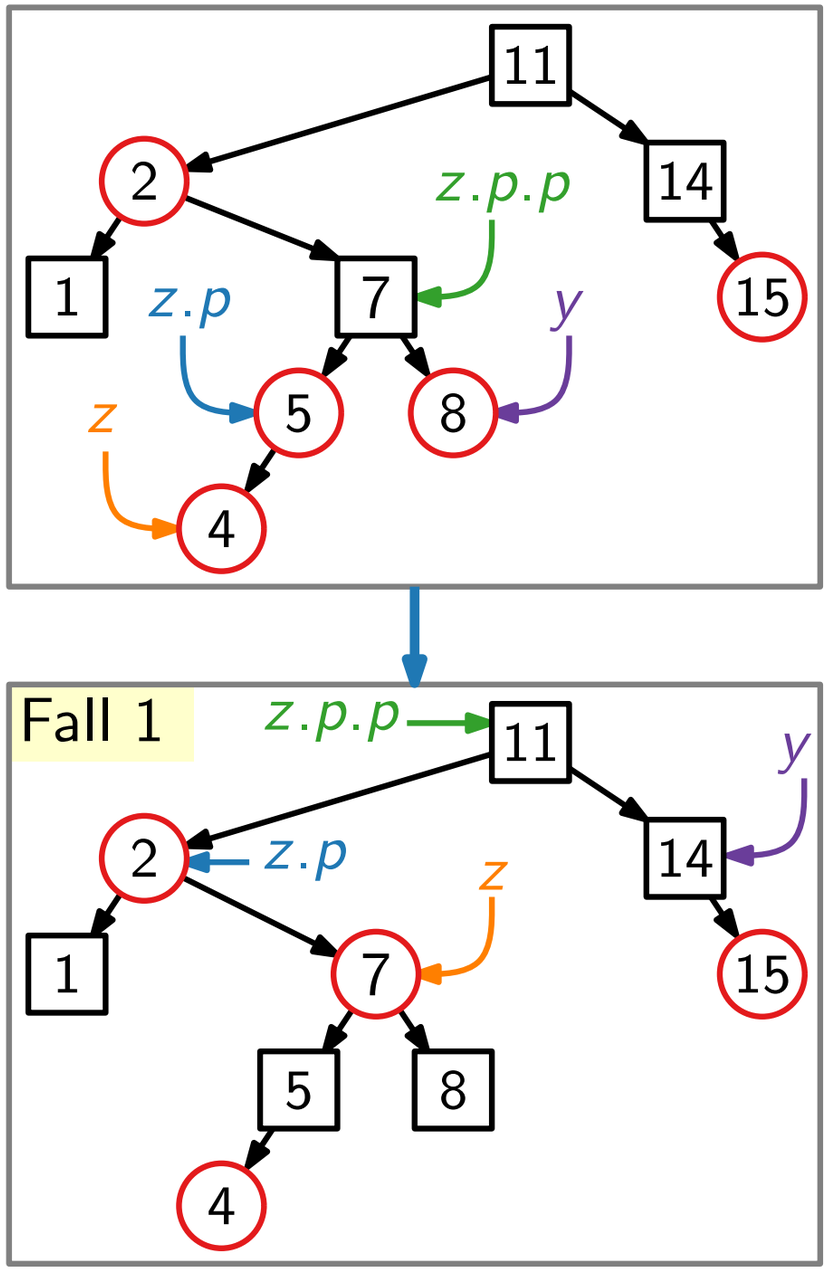
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
    else
```



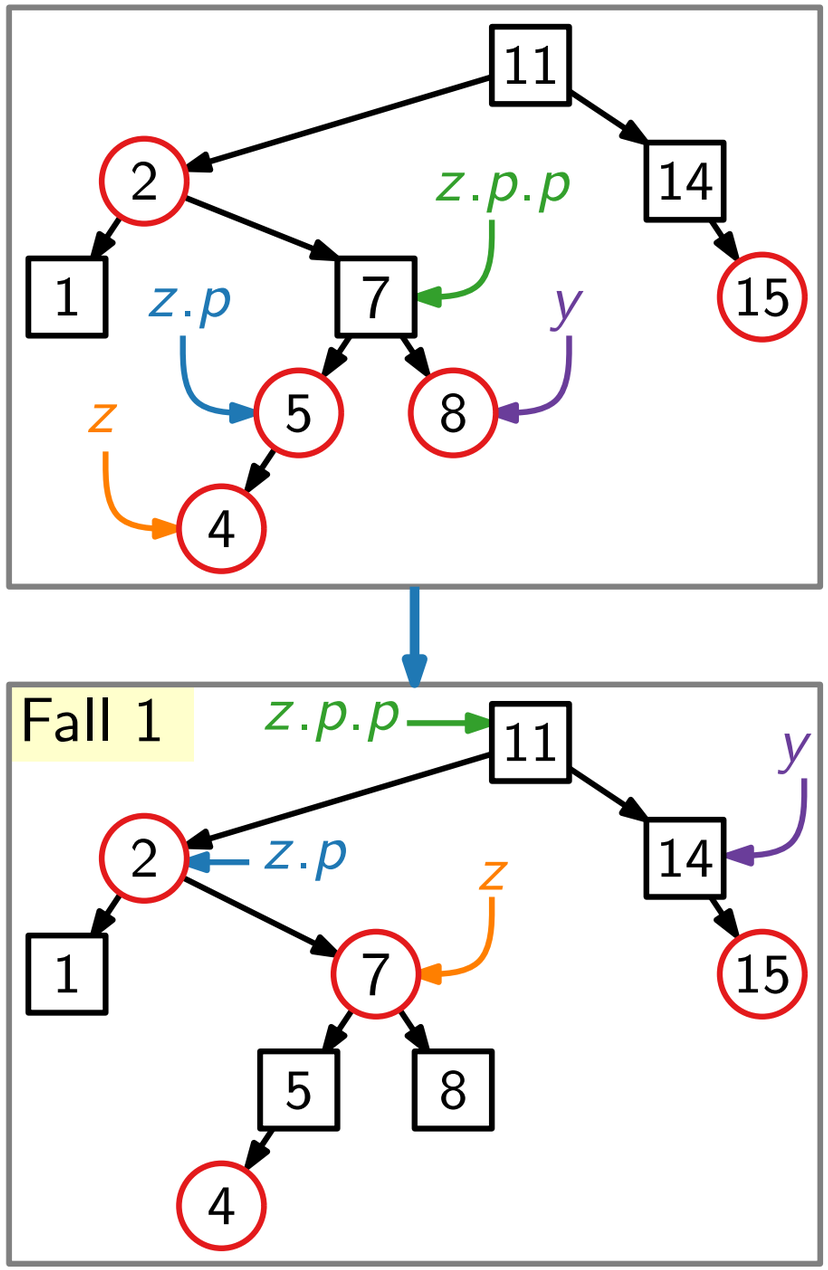
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
    else
```



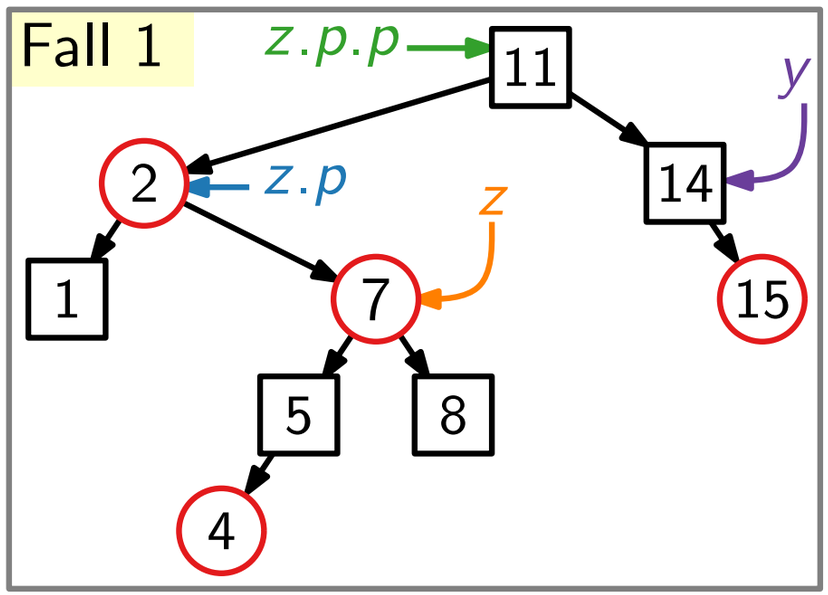
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
    else
```



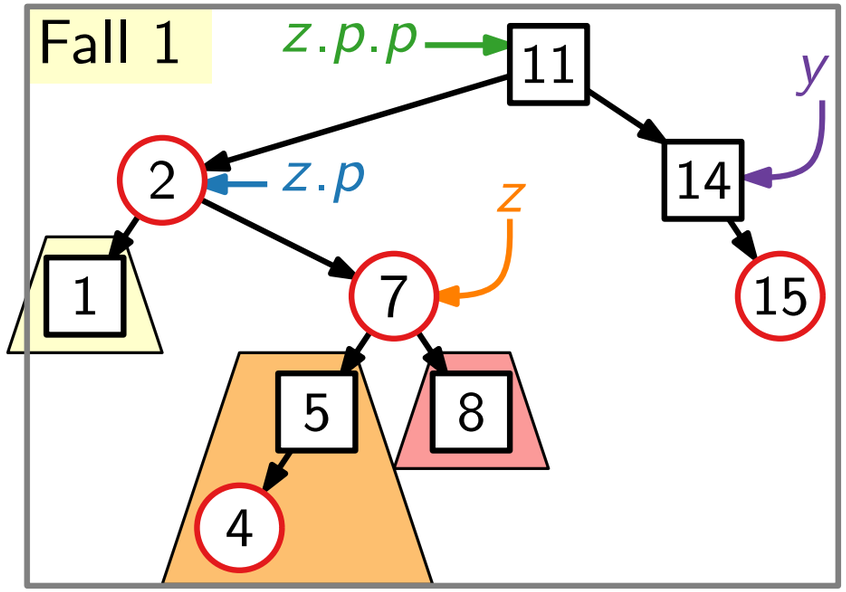
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
    else
```



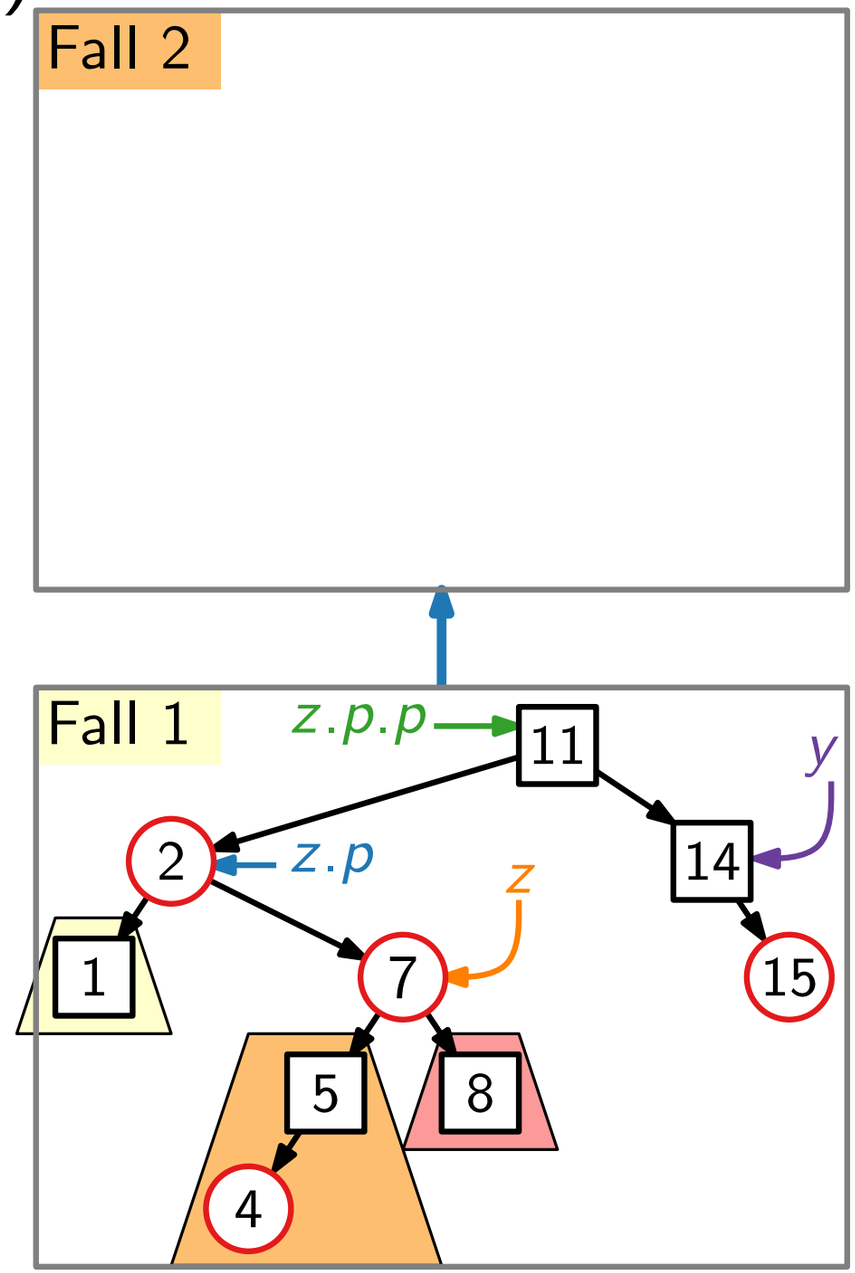
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
    else
```



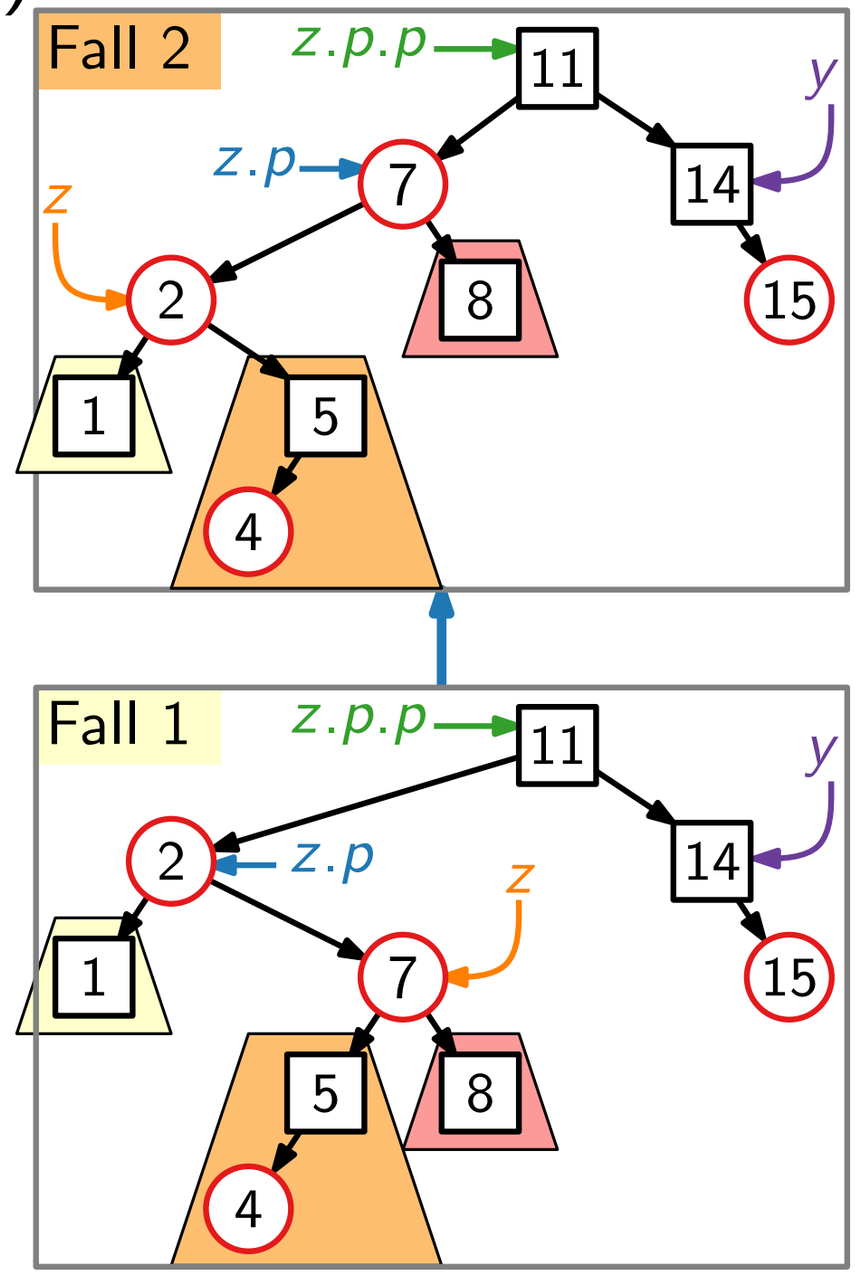
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
    else
```



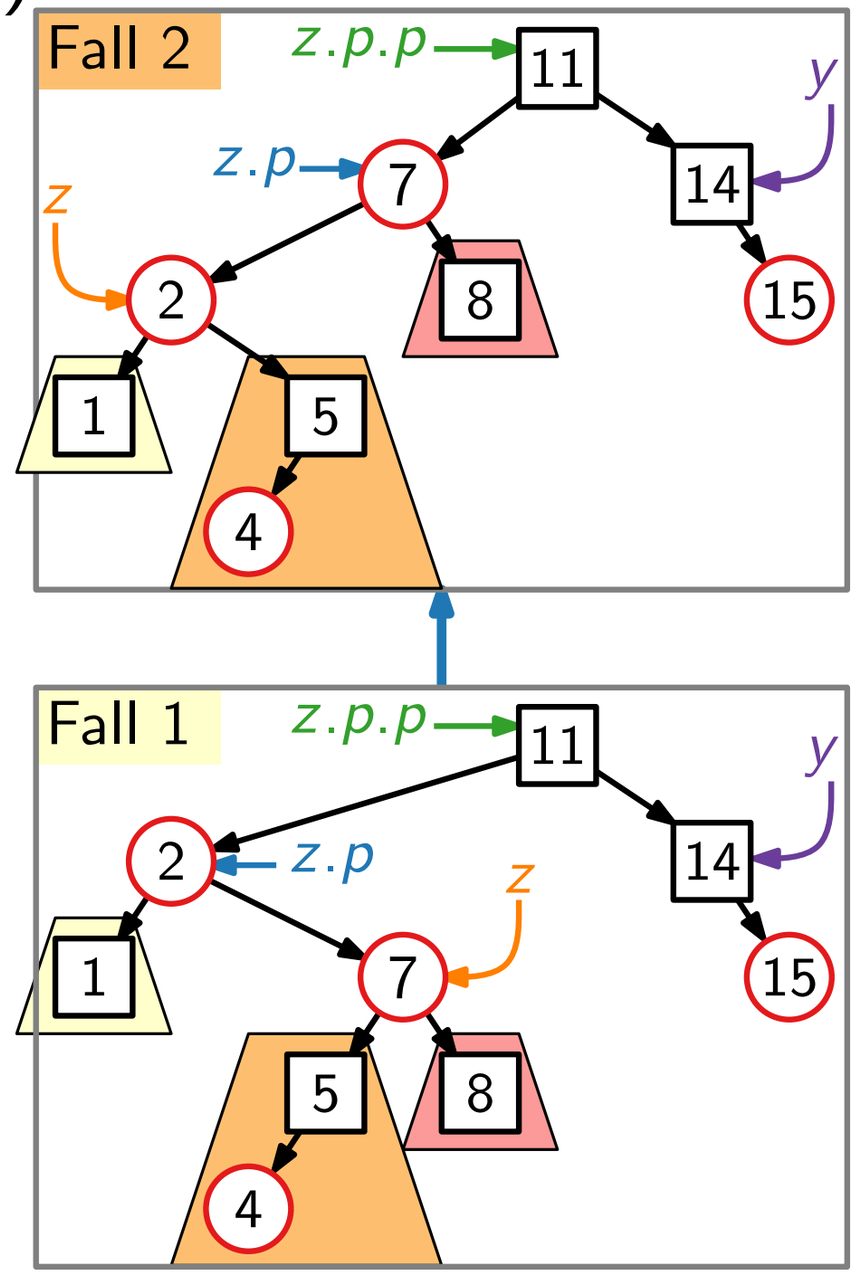
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
    else
```



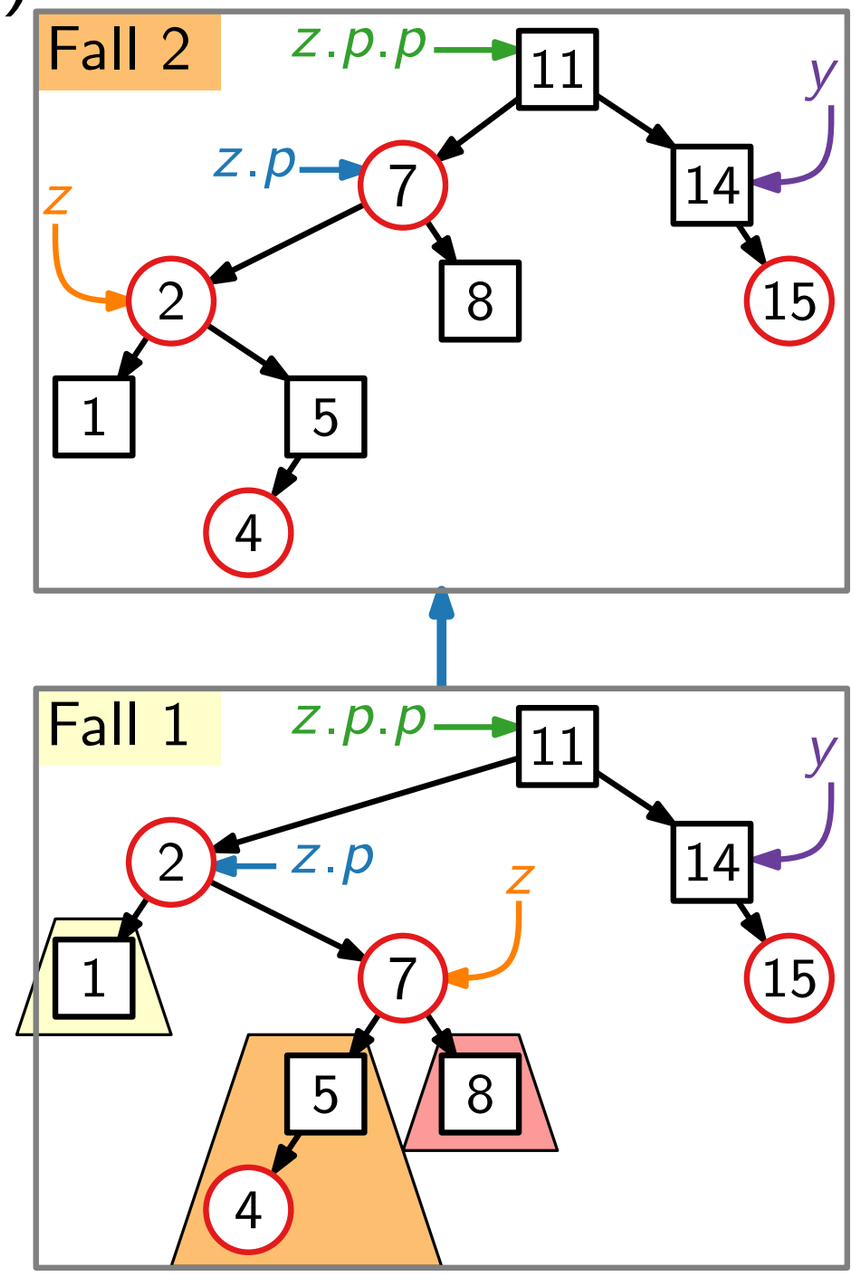
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



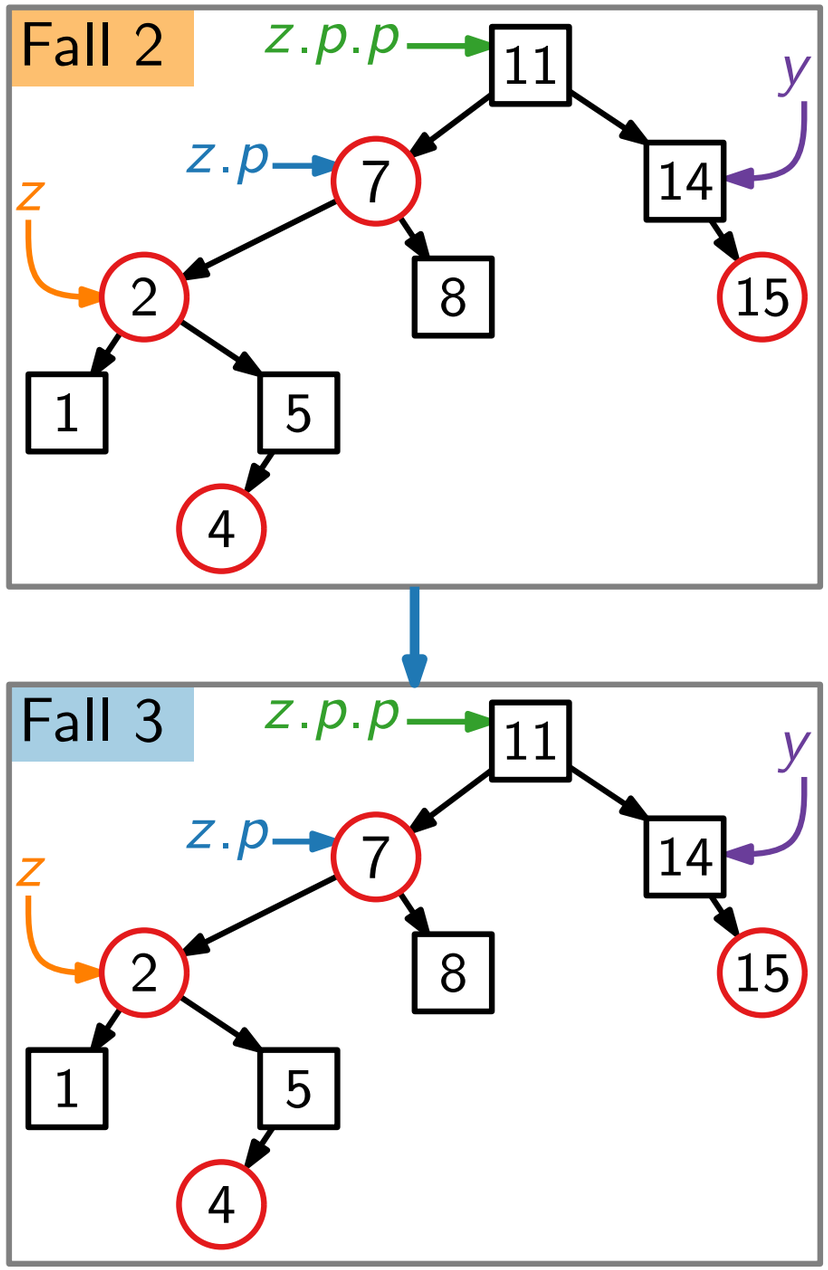
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



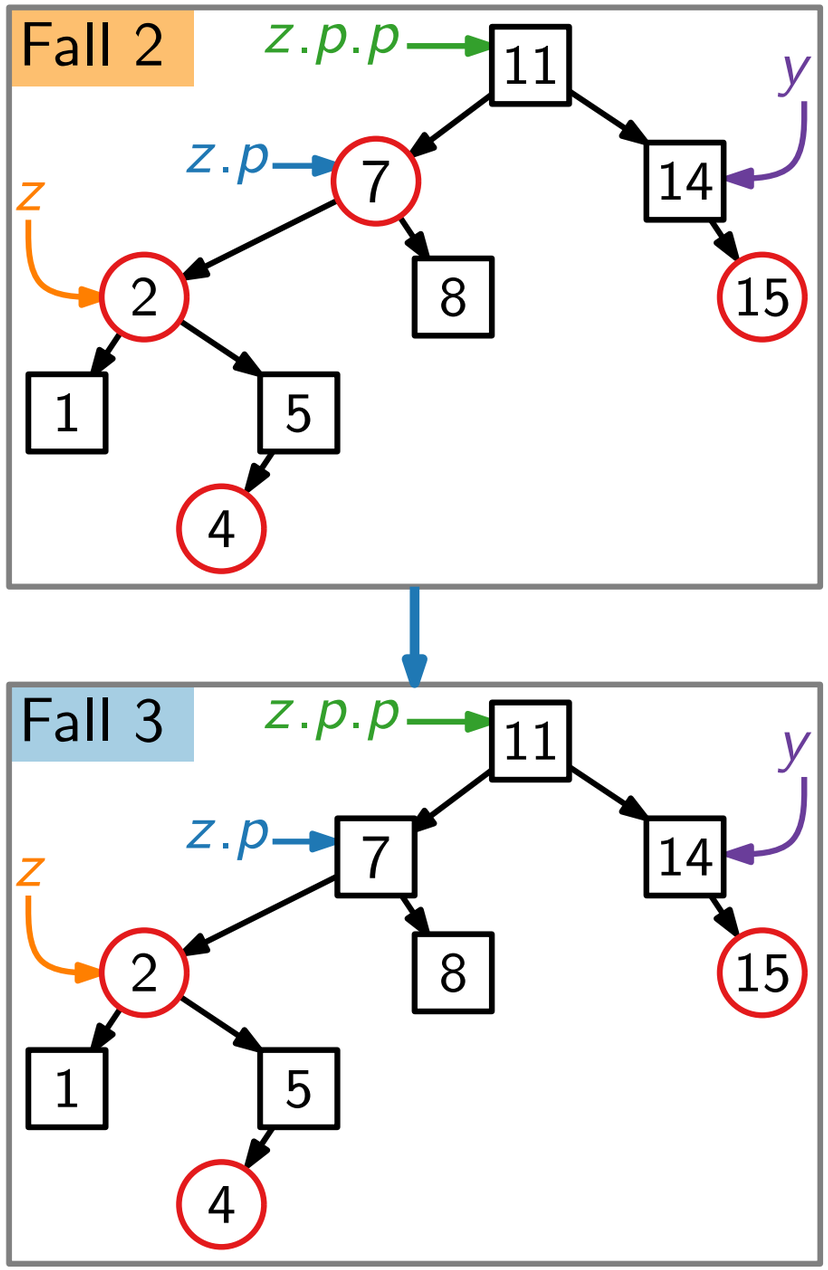
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



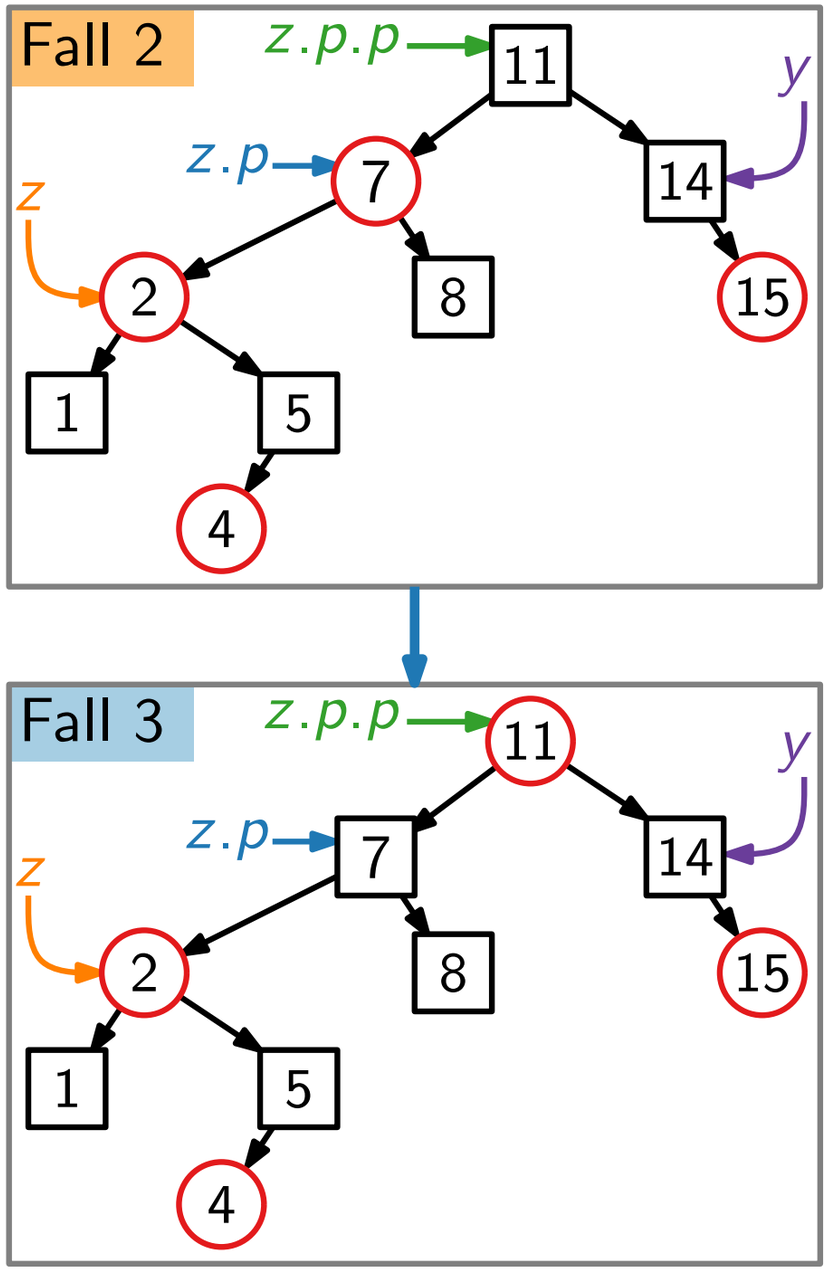
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



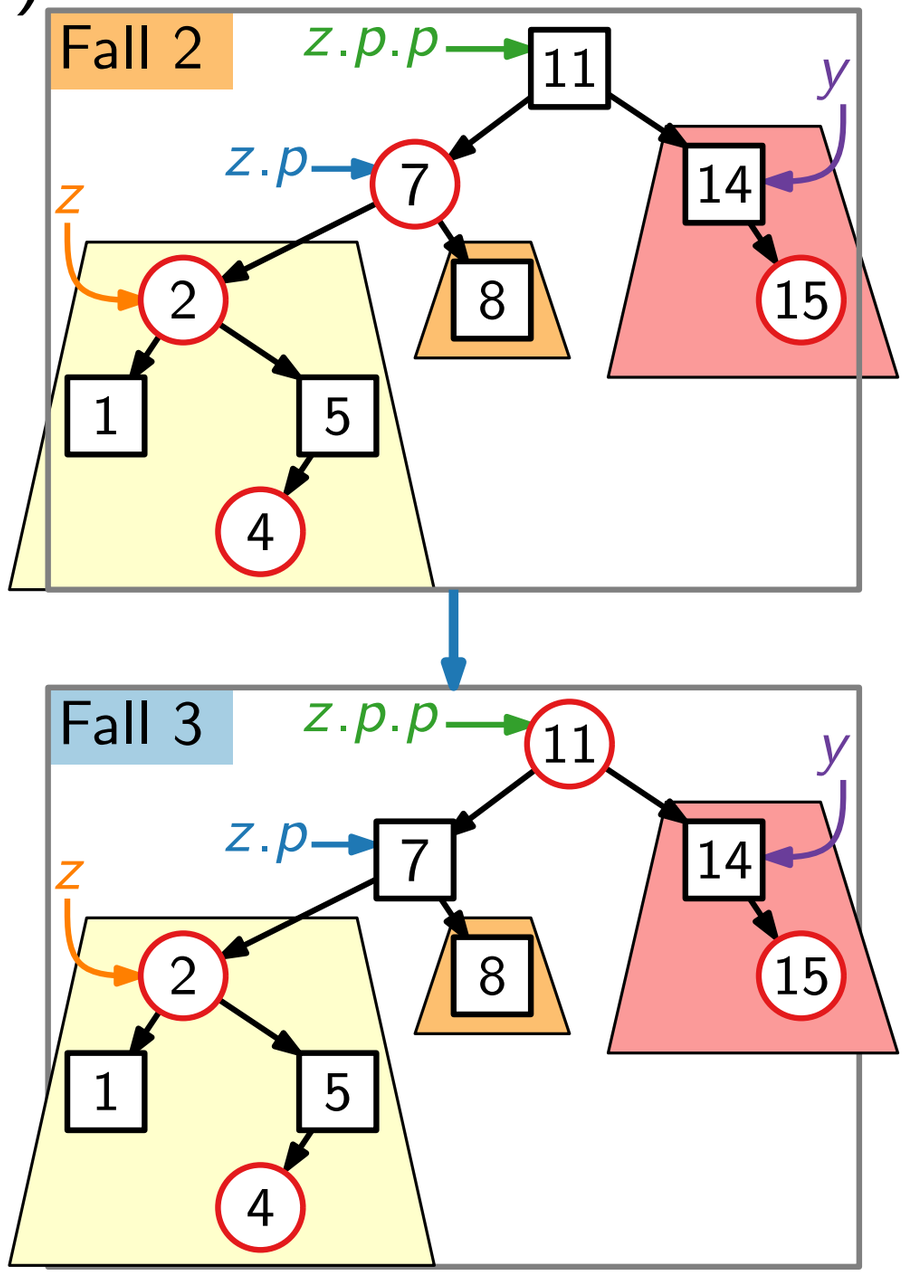
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



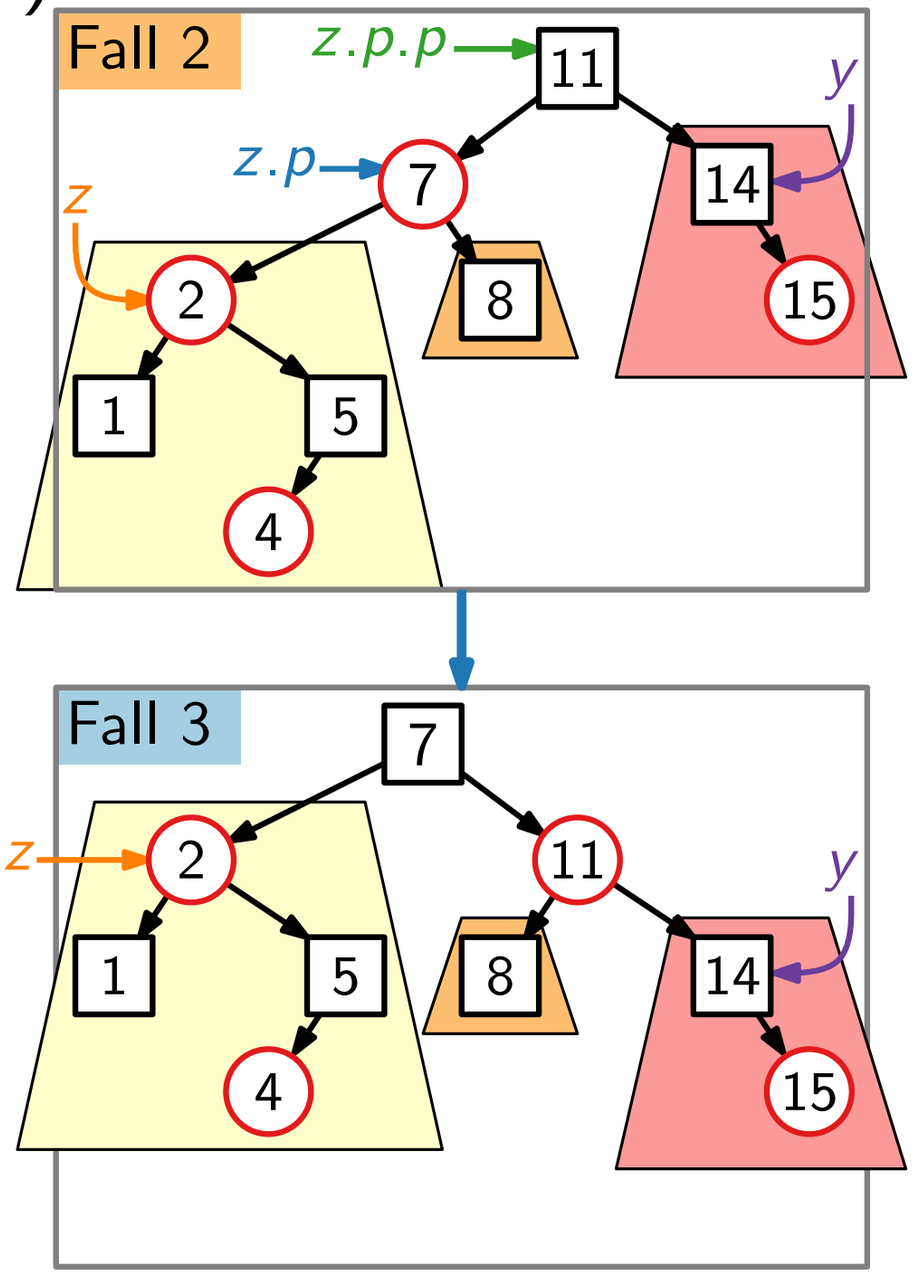
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



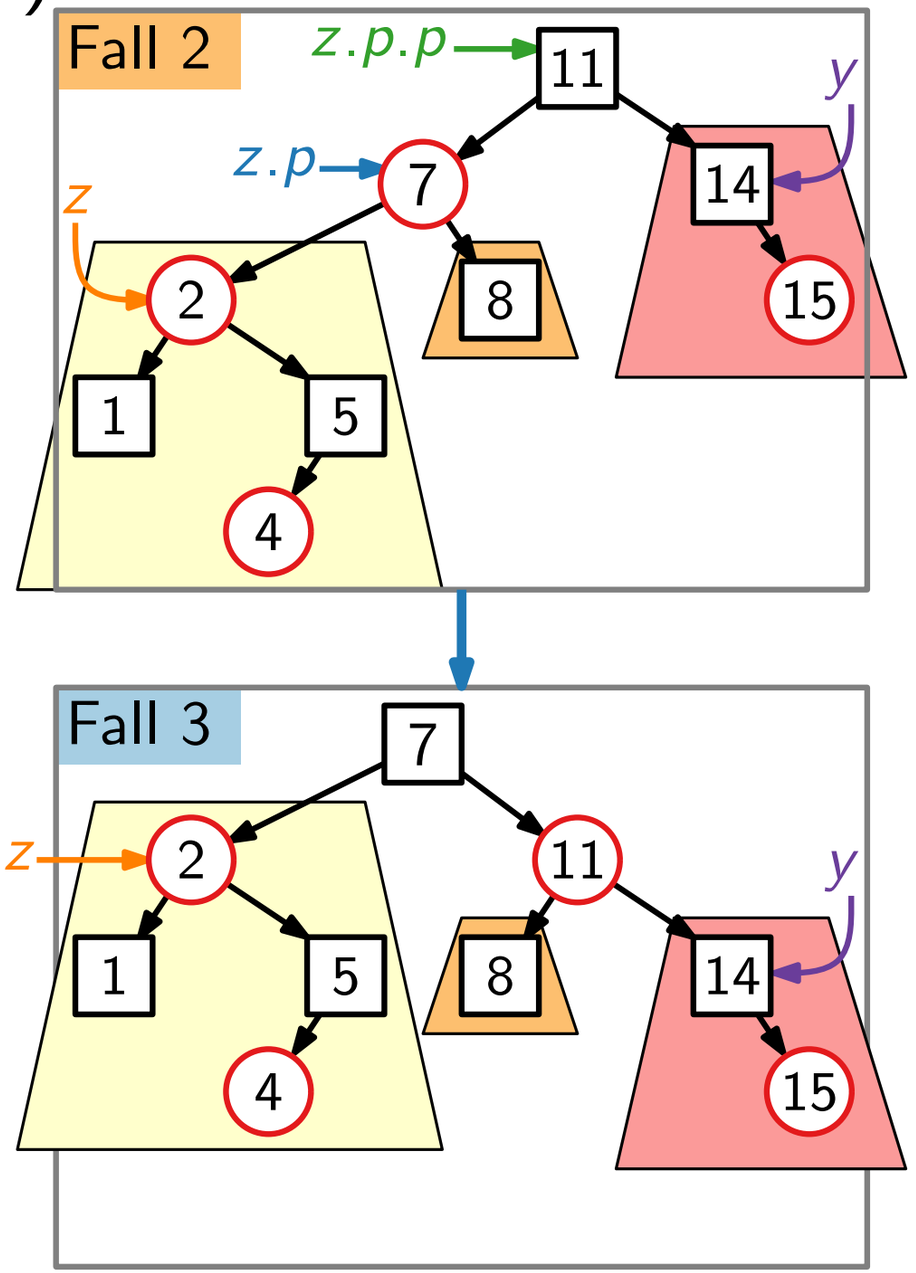
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else
```



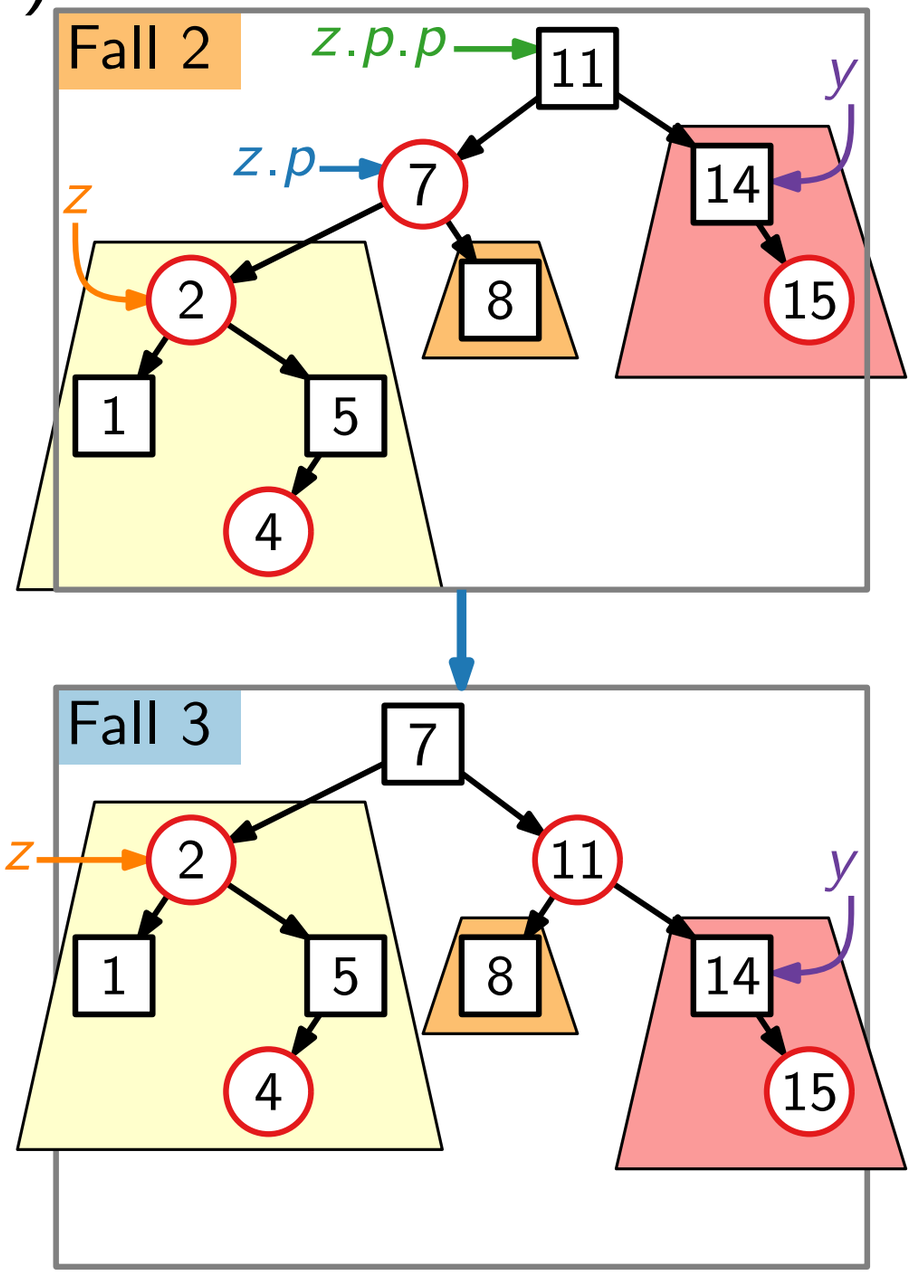
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
```



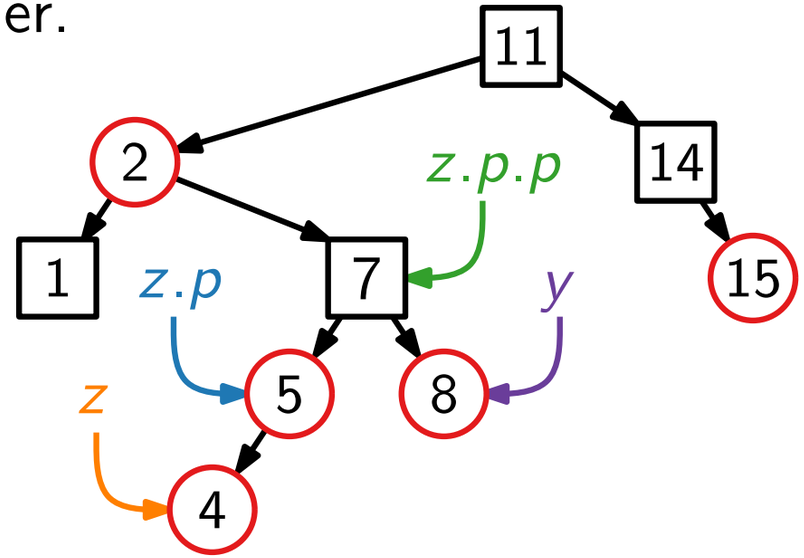
RBInsertFixup(RBNode z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

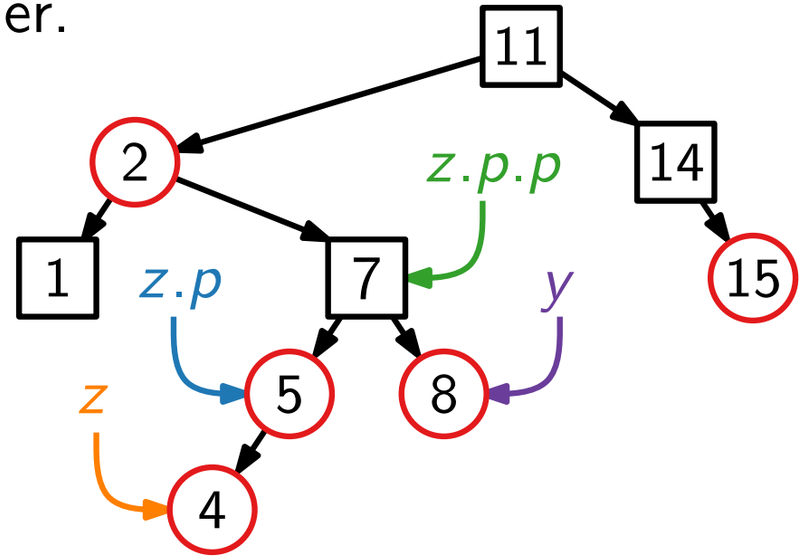


Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.

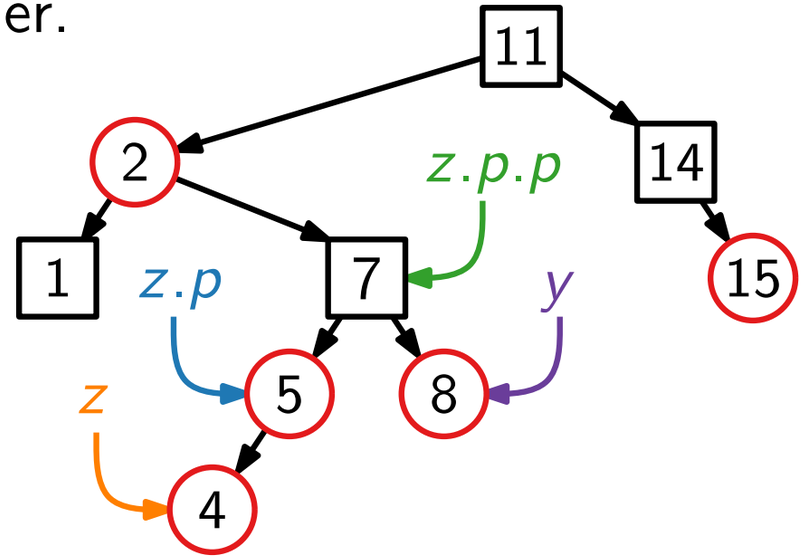


Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.

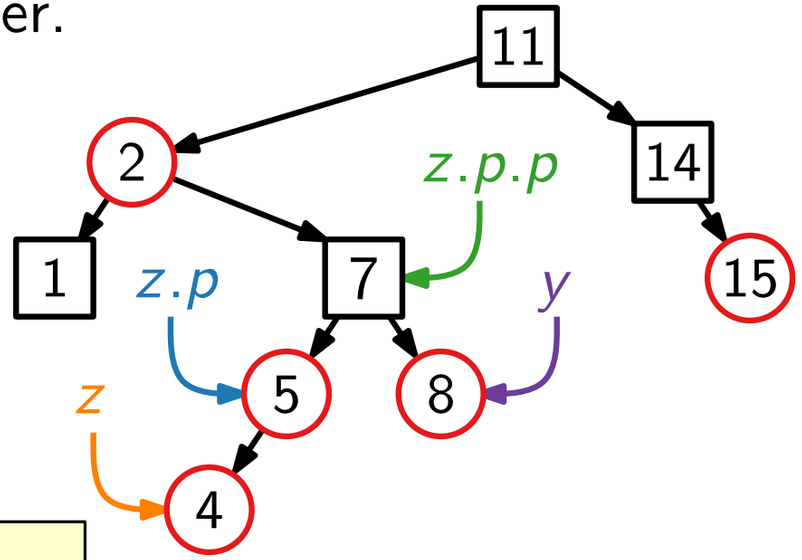


Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

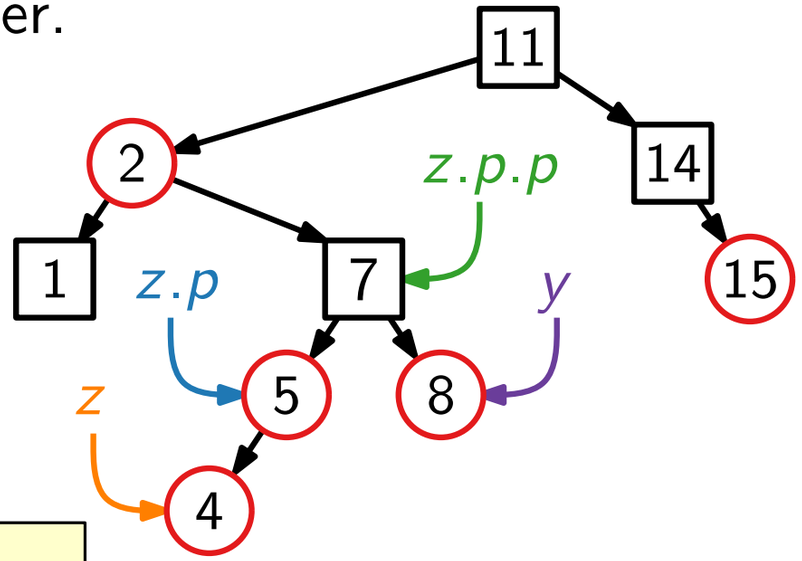
(E3) Alle Blätter sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.



Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

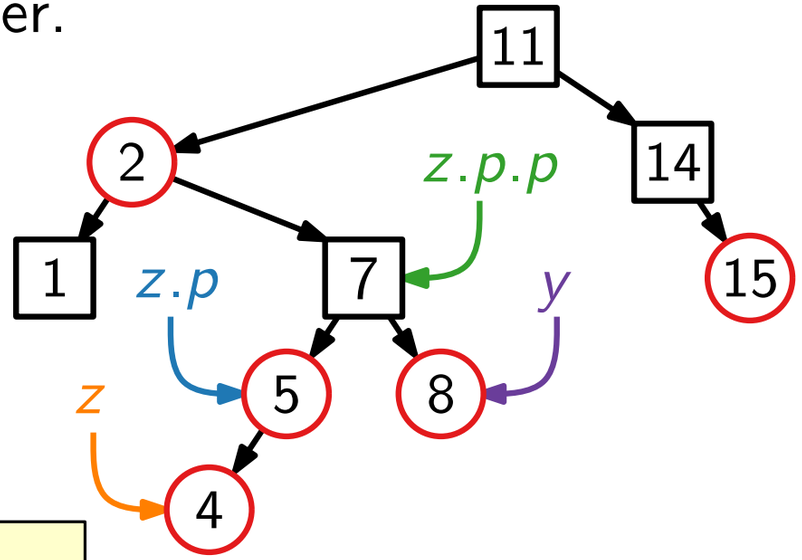
(E3) Alle Blätter sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.



Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle Blätter sind schwarz. *nil*

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

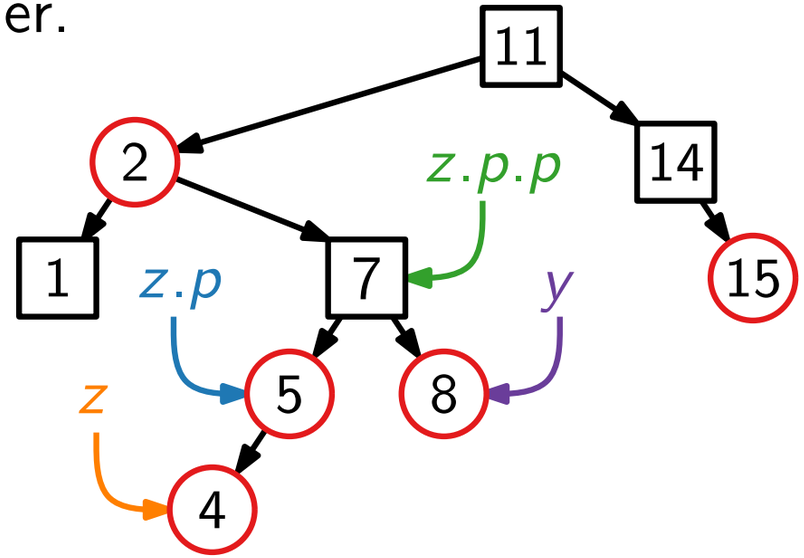
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

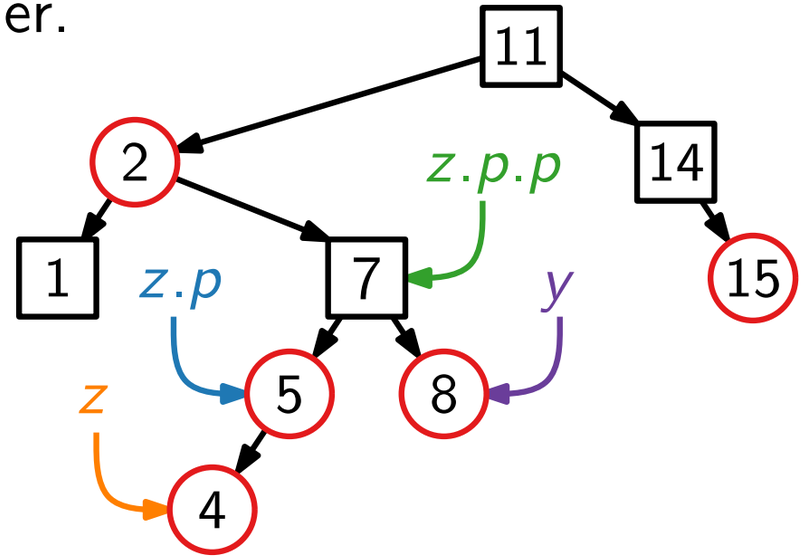
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.
  - Falls **(E2)** verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

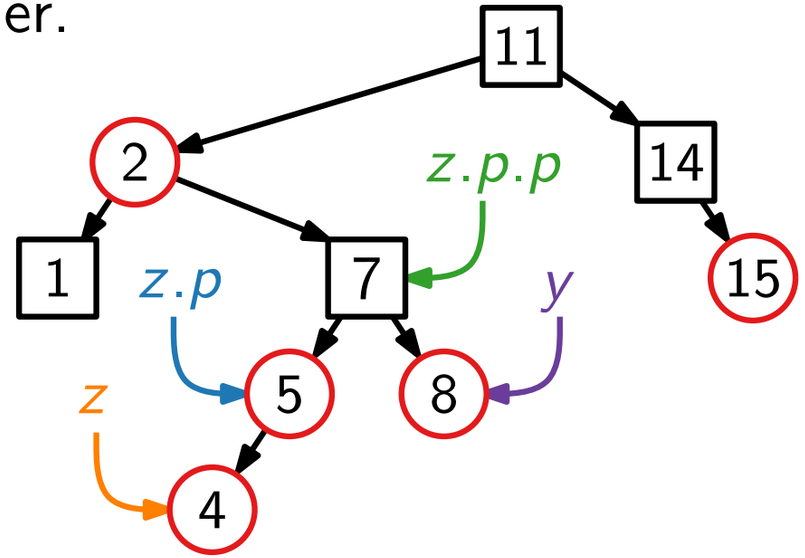
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.
  - Falls **(E2)** verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls **(E4)** verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

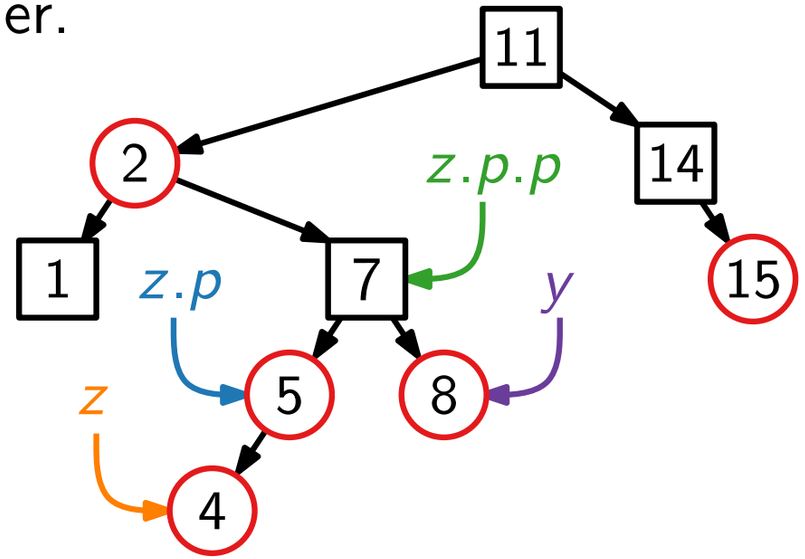


(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.



Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.
  - Falls **(E2)** verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls **(E4)** verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

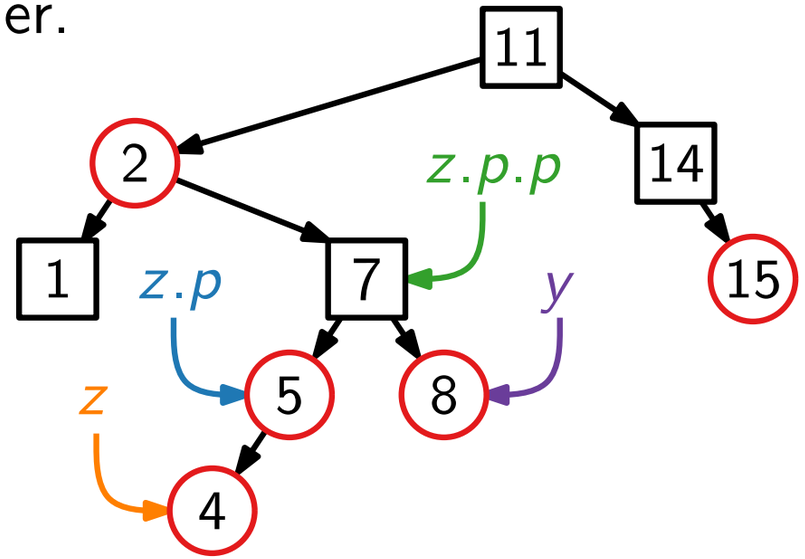
Zeige:

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.



Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.
  - Falls **(E2)** verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls **(E4)** verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Zeige:

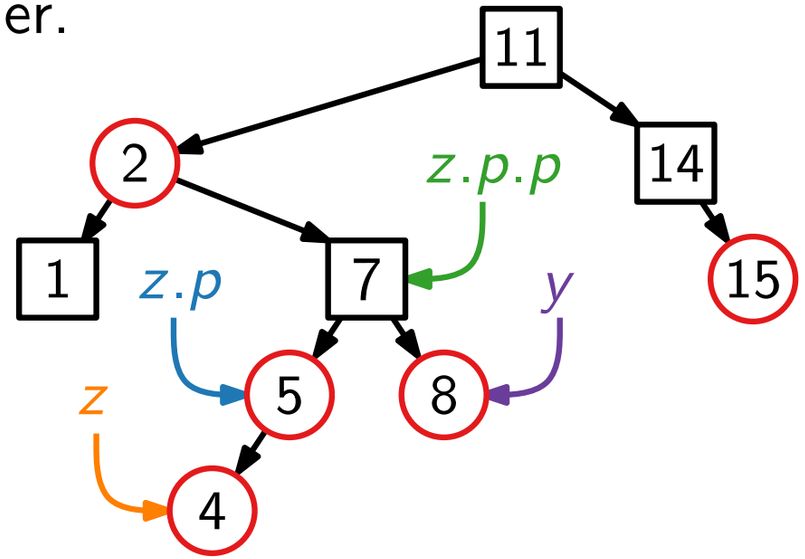
- Initialisierung
- Aufrechterhaltung
- Terminierung

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.



Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder **(E2)** oder **(E4)**.
  - Falls **(E2)** verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls **(E4)** verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Zeige:

- Initialisierung
- Aufrechterhaltung
- Terminierung

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Viel Arbeit! Siehe [CLRS, Kapitel 13.3].

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p                                   } O(1)
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)                           } O(1)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)                          } O(1)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p                          } O(1)
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)                  } O(1)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)                 } O(1)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Klettert im Baum
2 Ebenen nach oben.

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p                          } O(1)
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)                  } O(1)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)                 } O(1)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Klettert im Baum
2 Ebenen nach oben.

Führt zum Abbruch
der **while**-Schleife.

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right      // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p                          } O(1)
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)                  } O(1)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)                 } O(1)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Klettert im Baum
2 Ebenen nach oben.

Führt zum Abbruch
der **while**-Schleife.

Insgesamt:

- Fall 1 $\mathcal{O}(h)$ mal
- Fall 2 ≤ 1 mal
- Fall 3 ≤ 1 mal

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right    // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p                          } O(1)
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)                  } O(1)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)                 } O(1)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Klettert im Baum
2 Ebenen nach oben.

Führt zum Abbruch
der **while**-Schleife.

Insgesamt:

- Fall 1 $\mathcal{O}(h)$ mal
- Fall 2 ≤ 1 mal
- Fall 3 ≤ 1 mal

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right      // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p                          } O(1)
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)                  } O(1)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)                 } O(1)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Insgesamt:

- Fall 1 $\mathcal{O}(h)$ mal
- Fall 2 ≤ 1 mal
- Fall 3 ≤ 1 mal

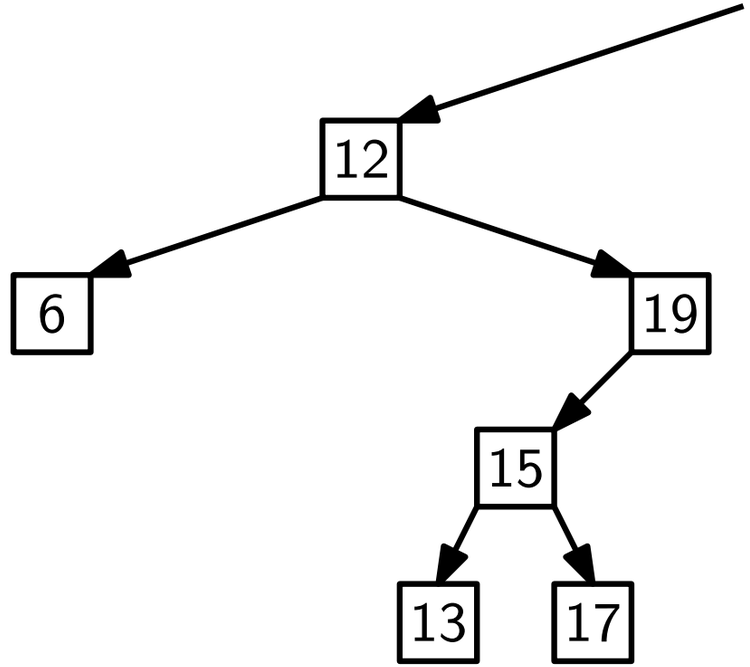
$\mathcal{O}(\log n)$ Umfärbungen und ≤ 2 Rotationen

Klettert im Baum 2 Ebenen nach oben.

Führt zum Abbruch der **while**-Schleife.

Löschen

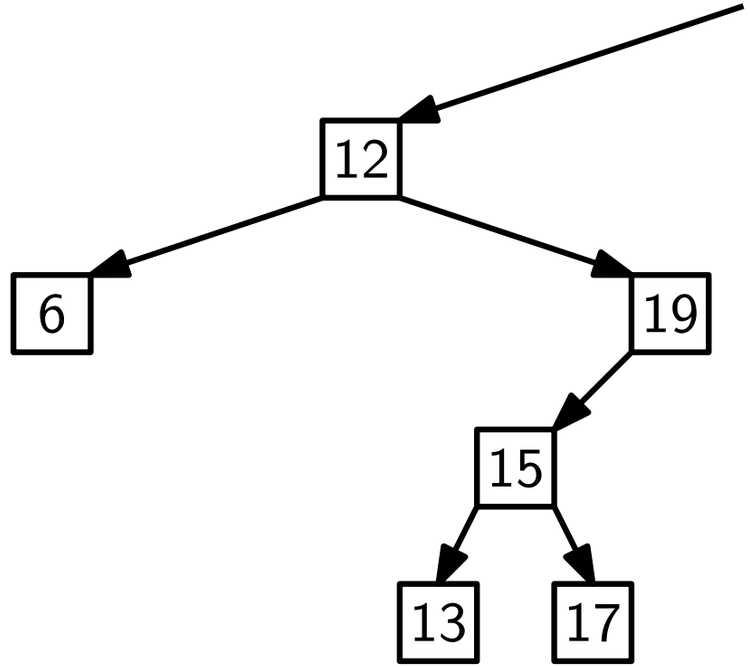
Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

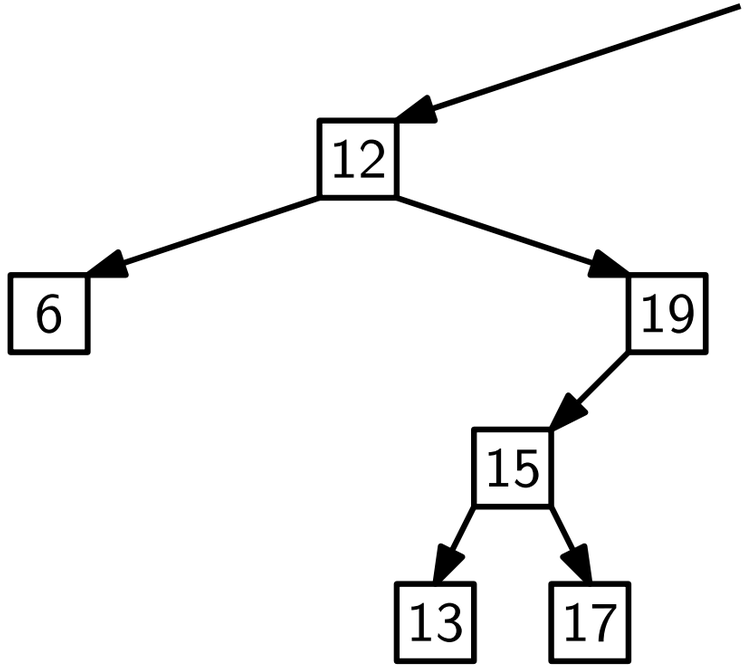


Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

2. z hat ein Kind x.



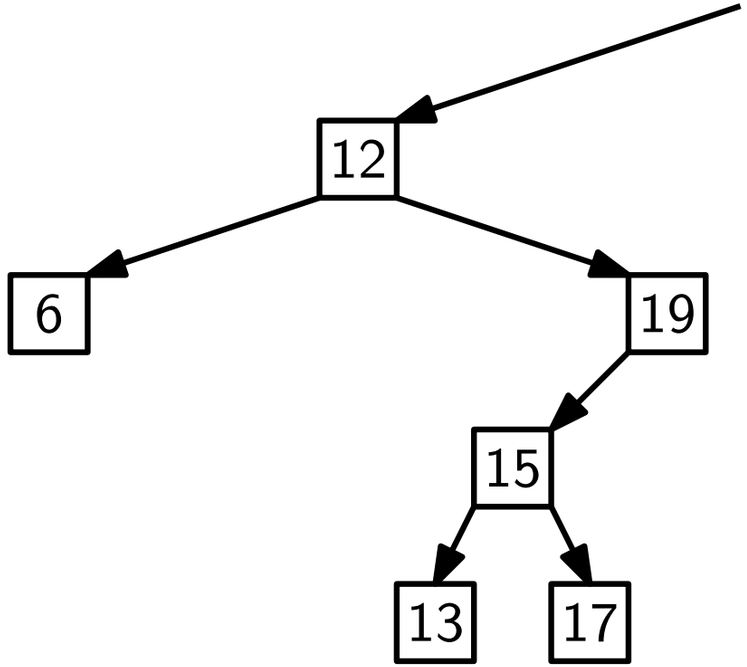
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



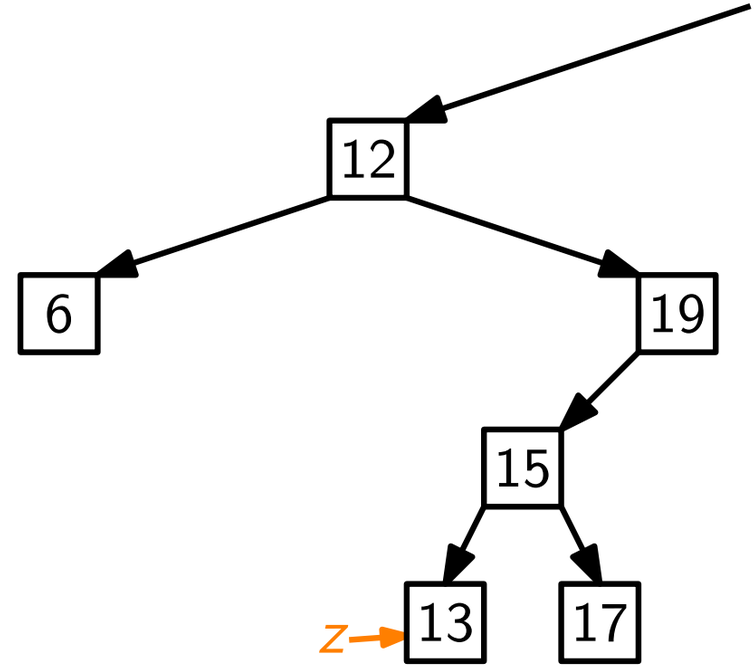
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



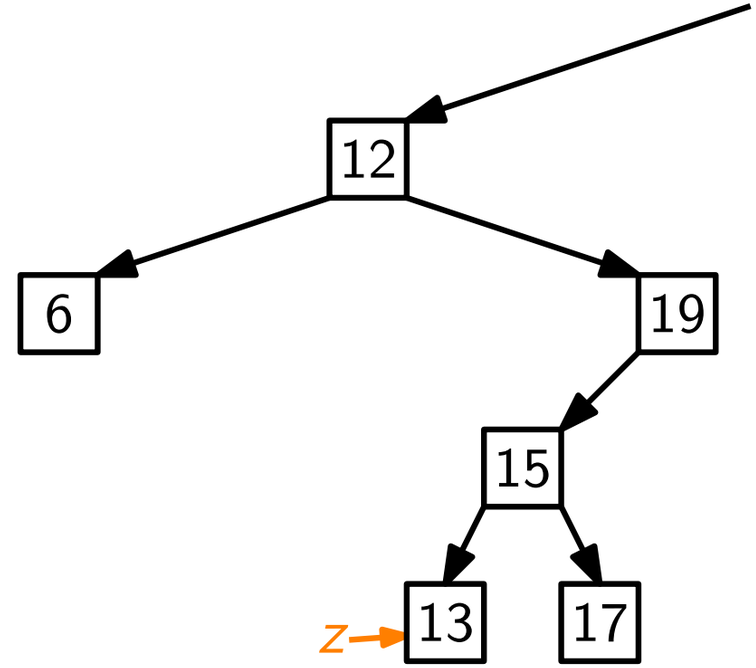
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



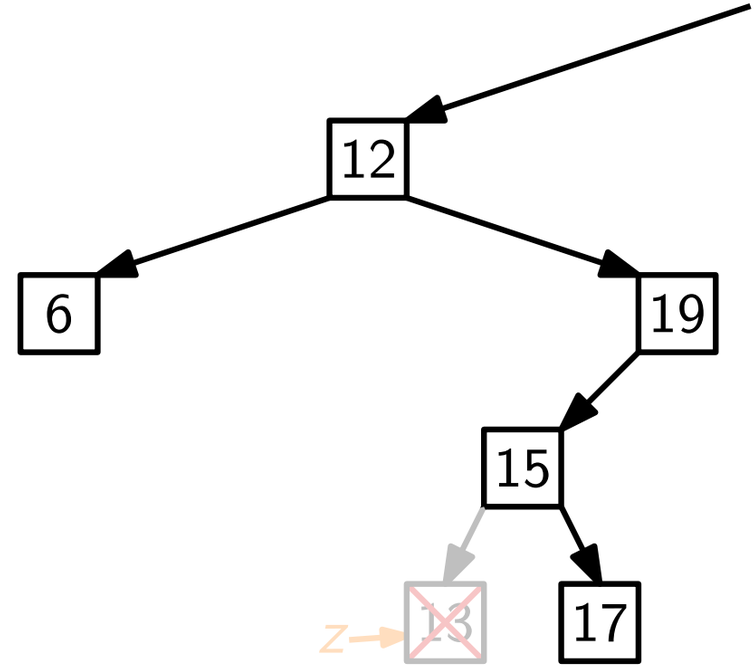
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



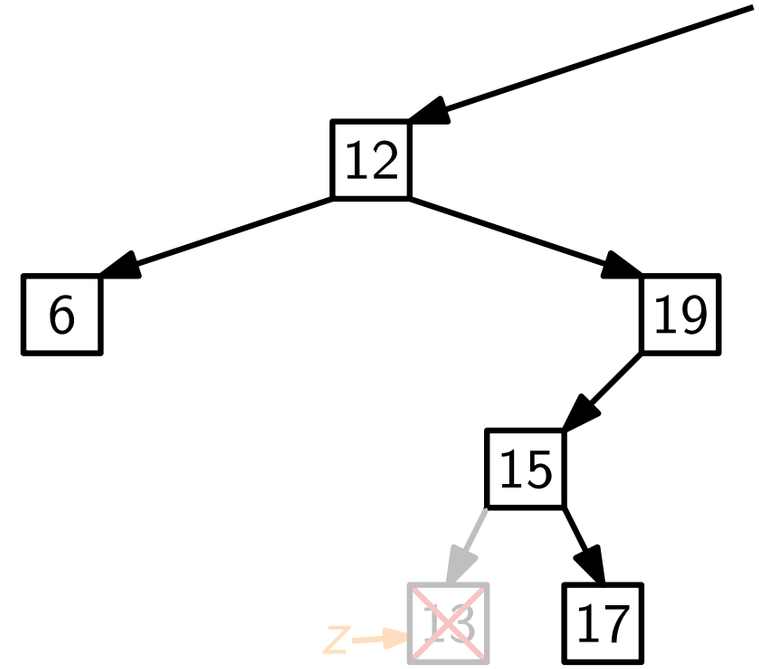
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen?

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



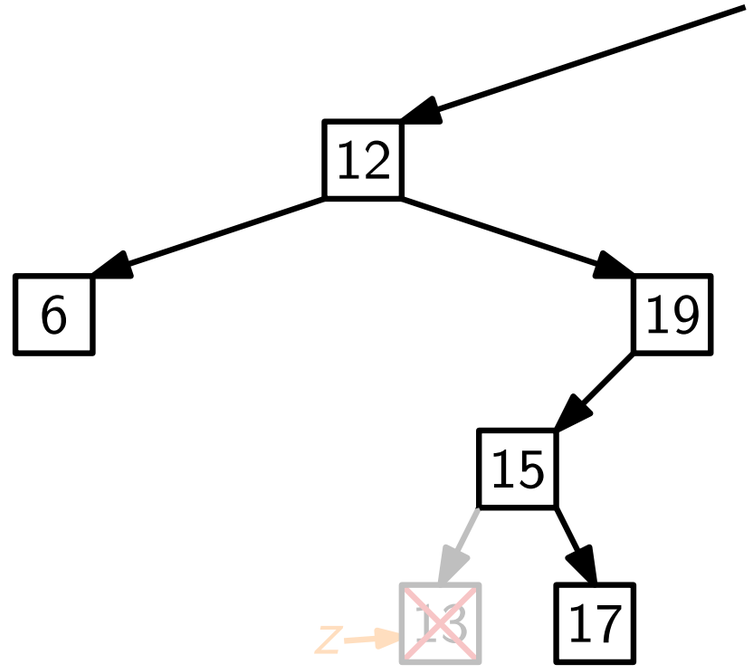
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen?

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle *nil*-Knoten sind schwarz. nil

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

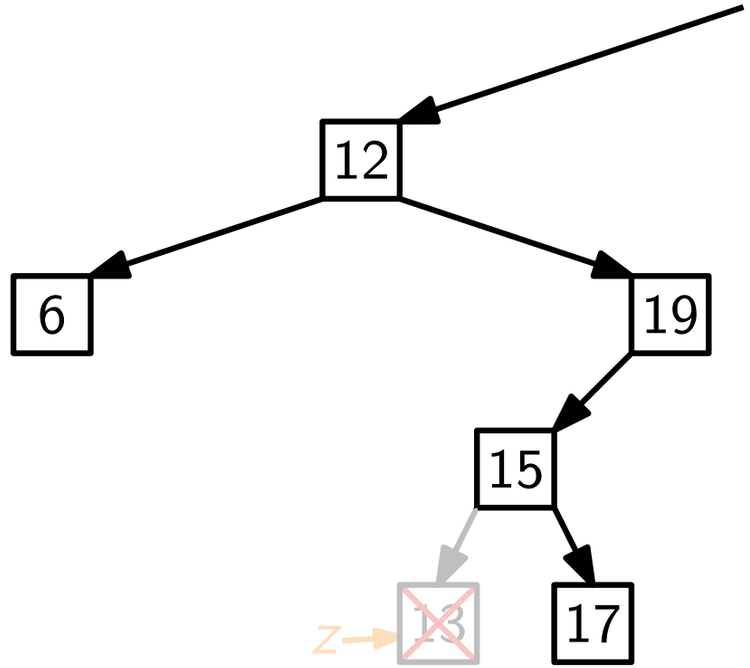
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen?

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

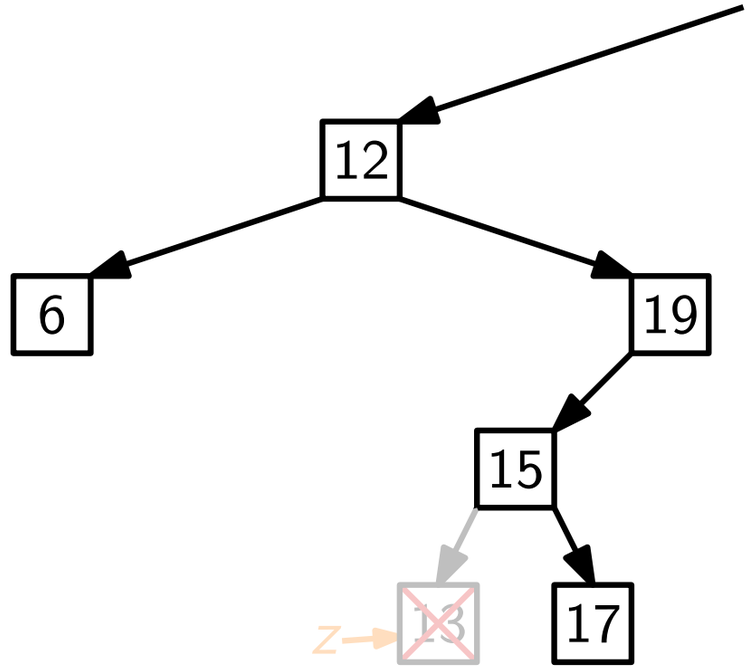
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

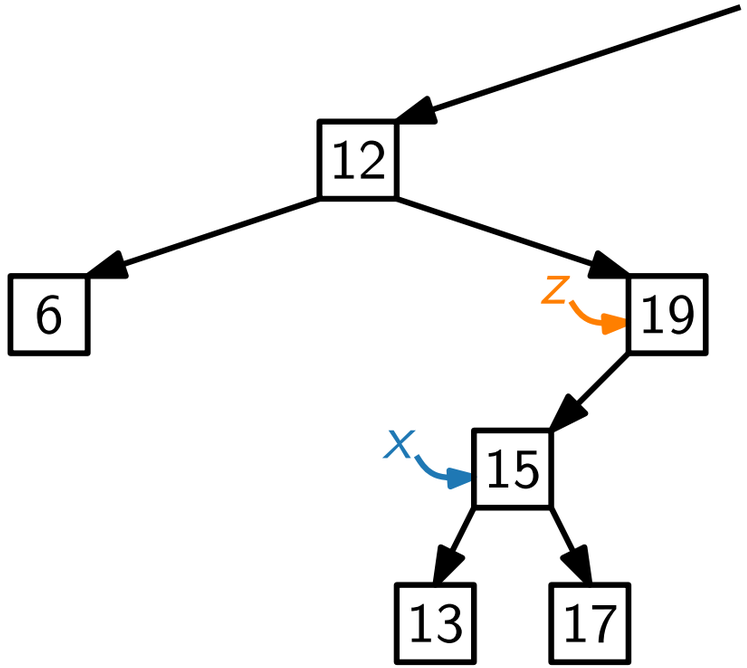
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.



3. z hat zwei Kinder.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

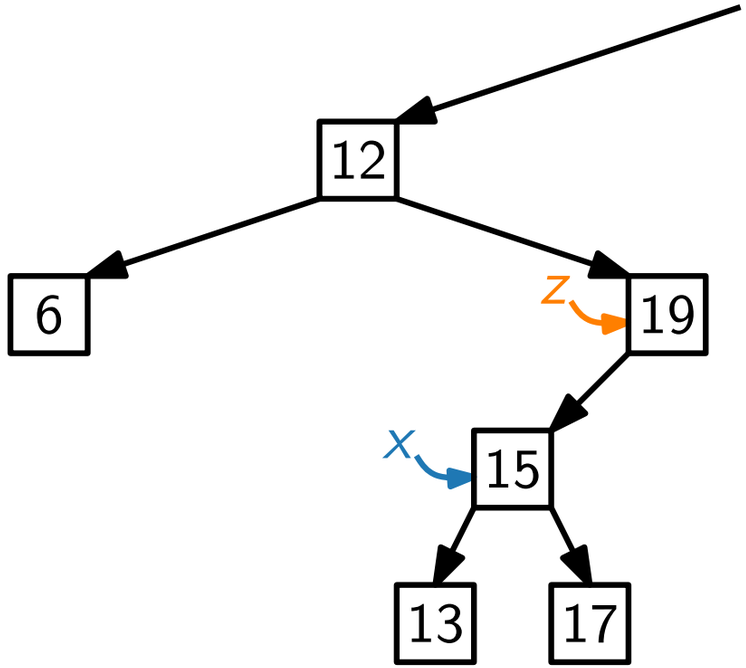
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.



3. z hat zwei Kinder.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

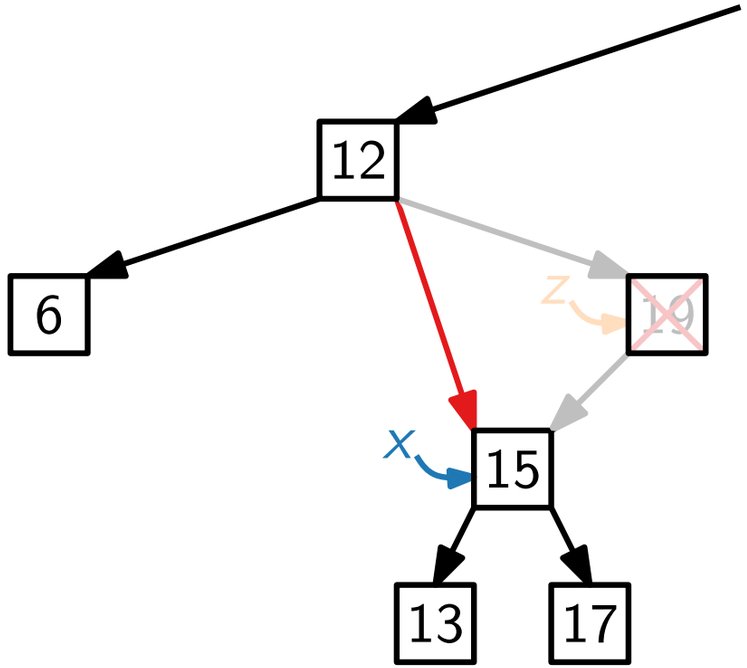
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.



3. z hat zwei Kinder.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

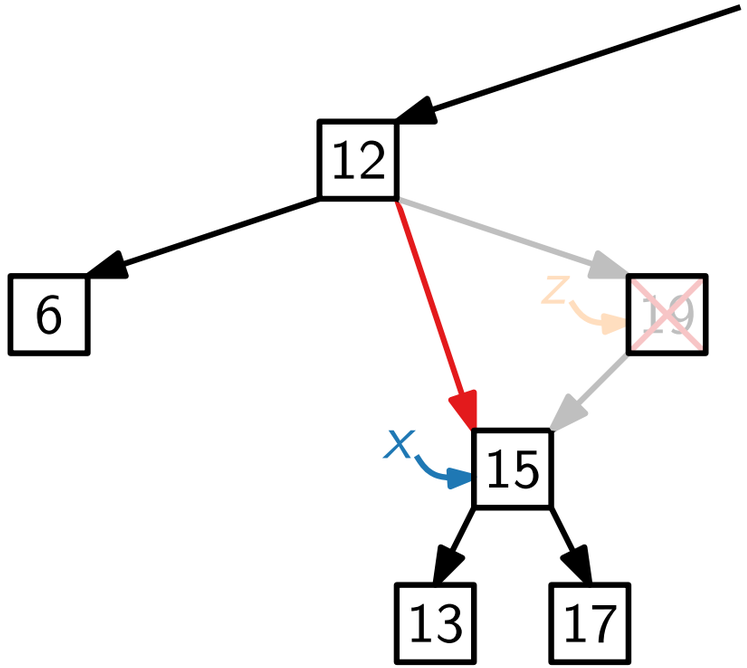
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen?

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

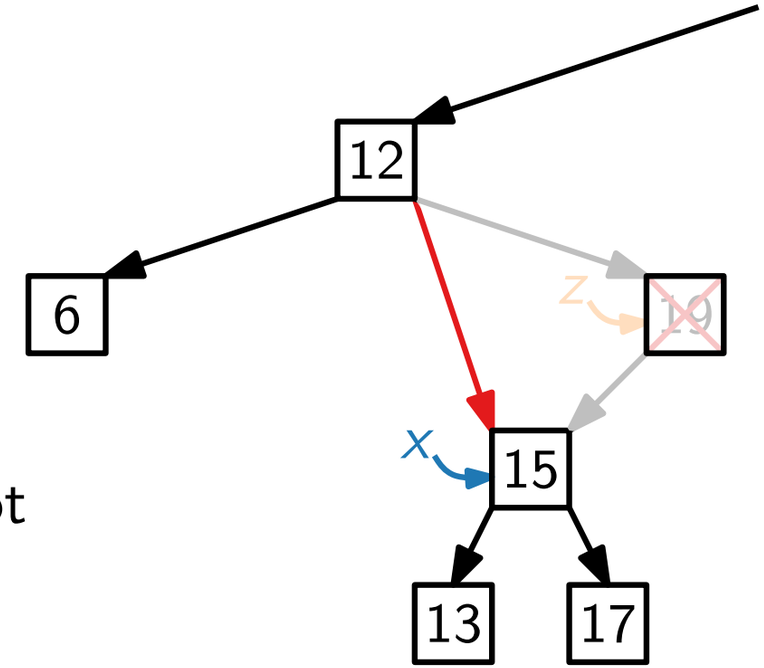
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

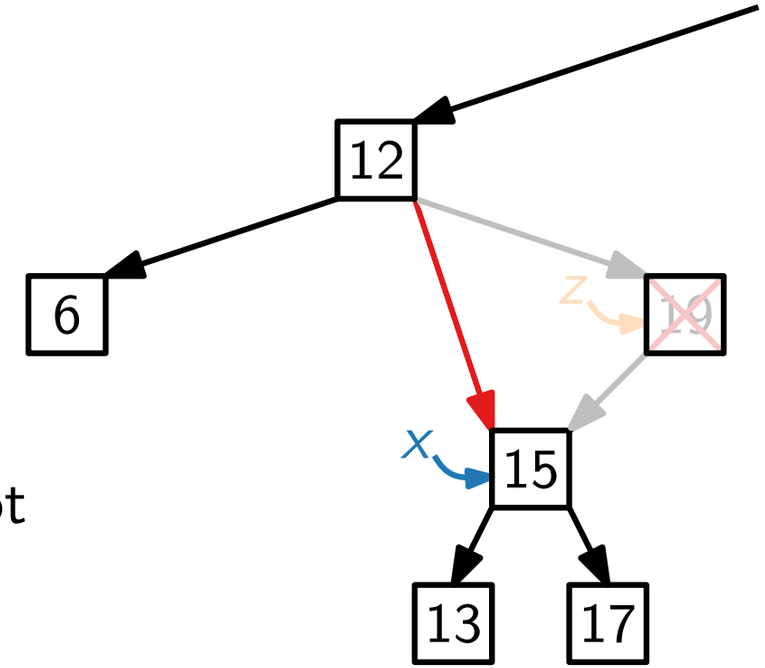
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

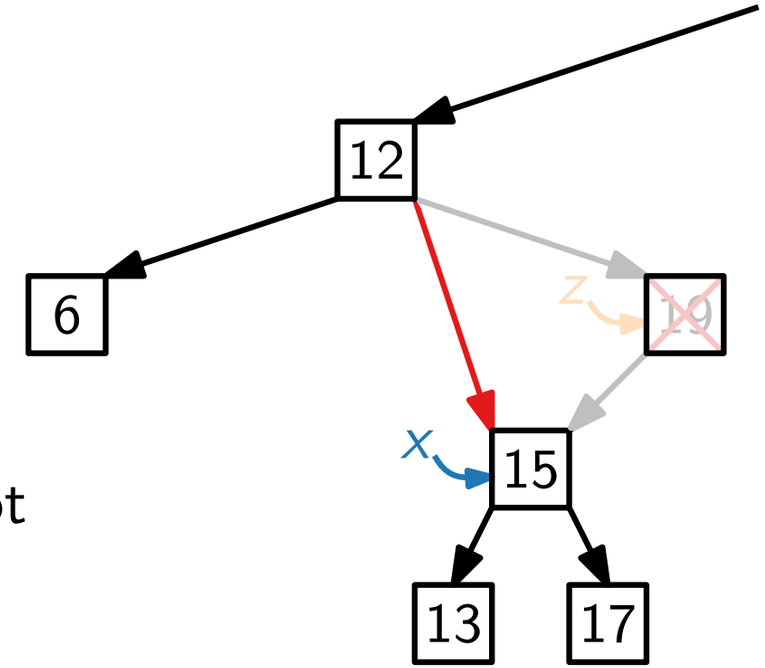
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

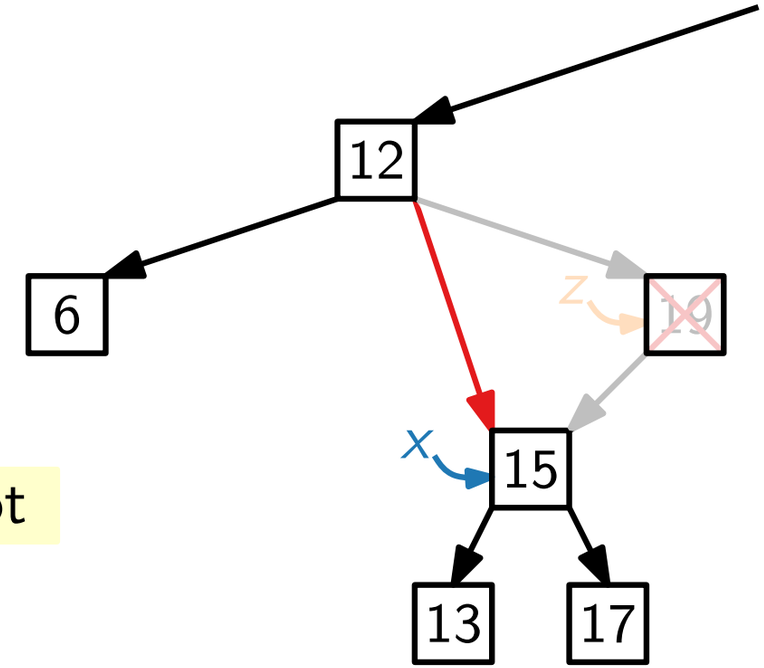
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

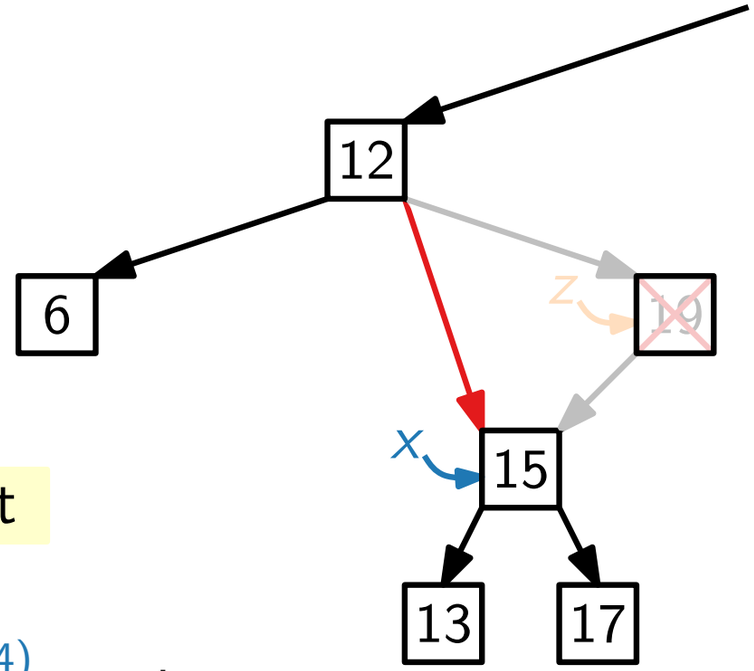
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder. $\overset{\text{(E4)}}{\Rightarrow}$ z schwarz



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

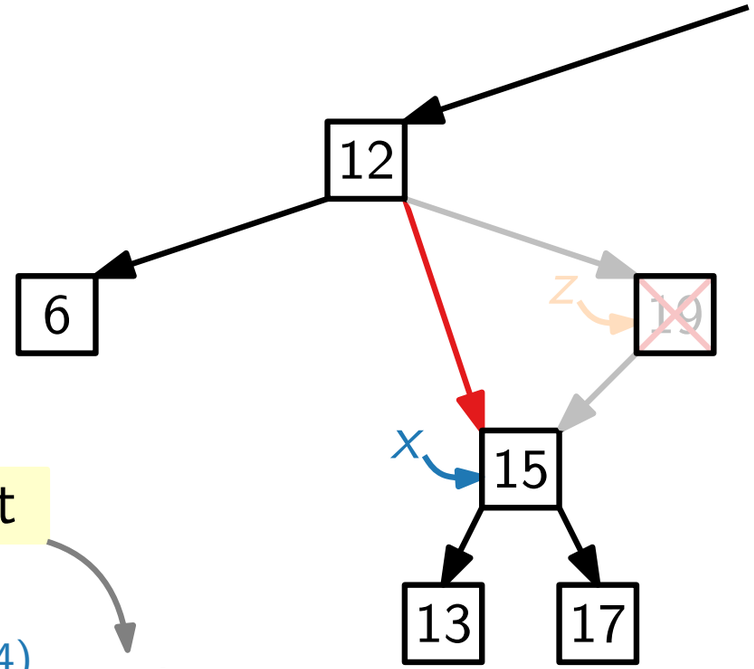
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

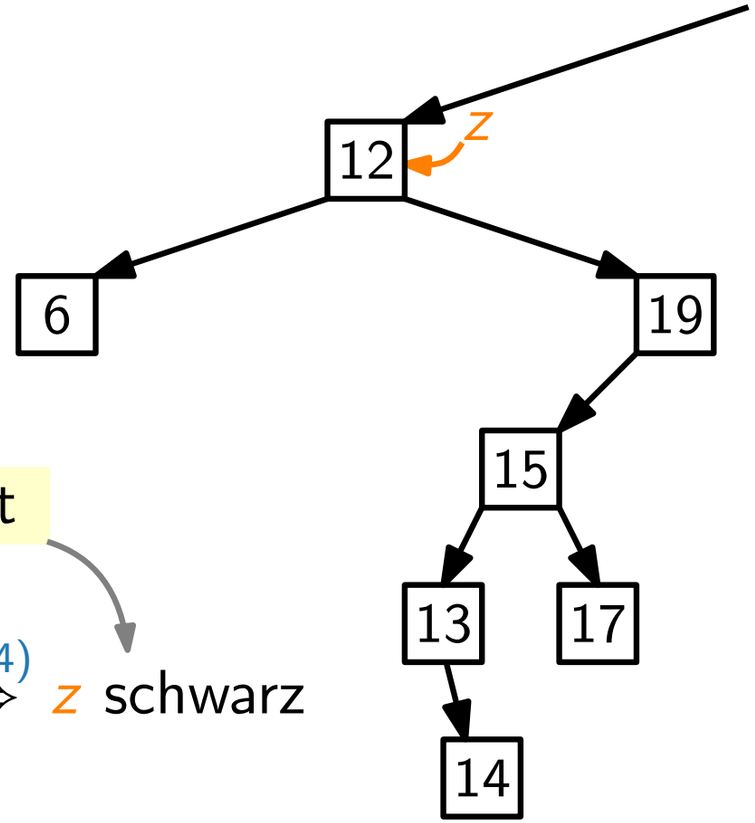
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

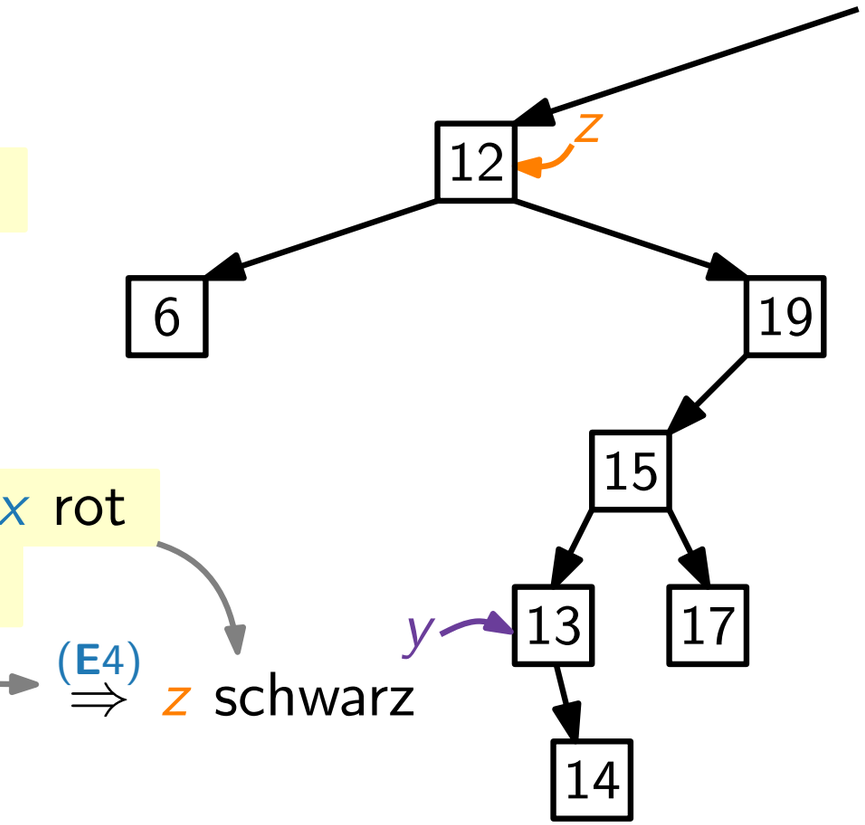
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.



(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

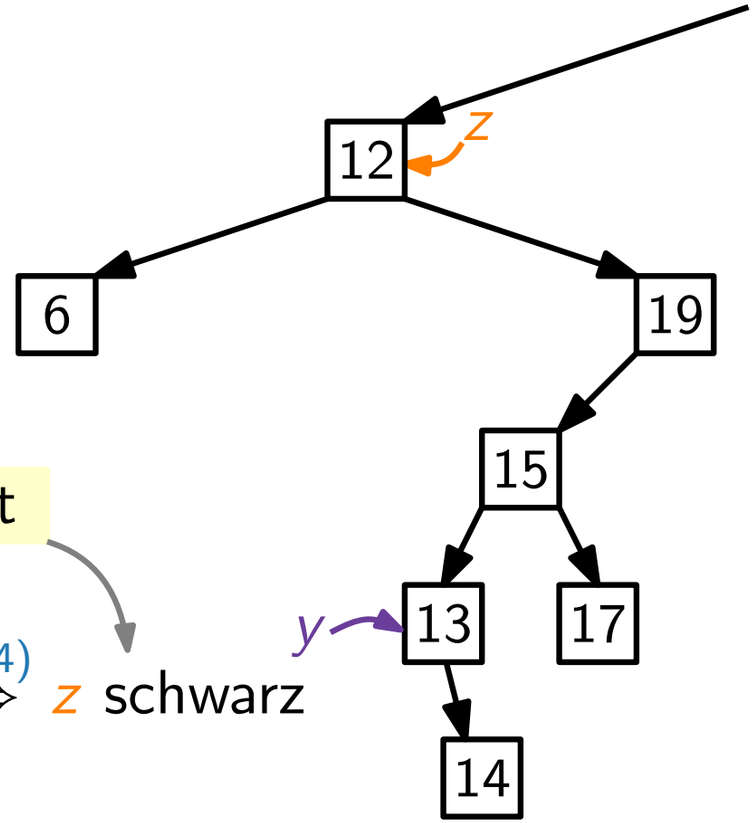
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

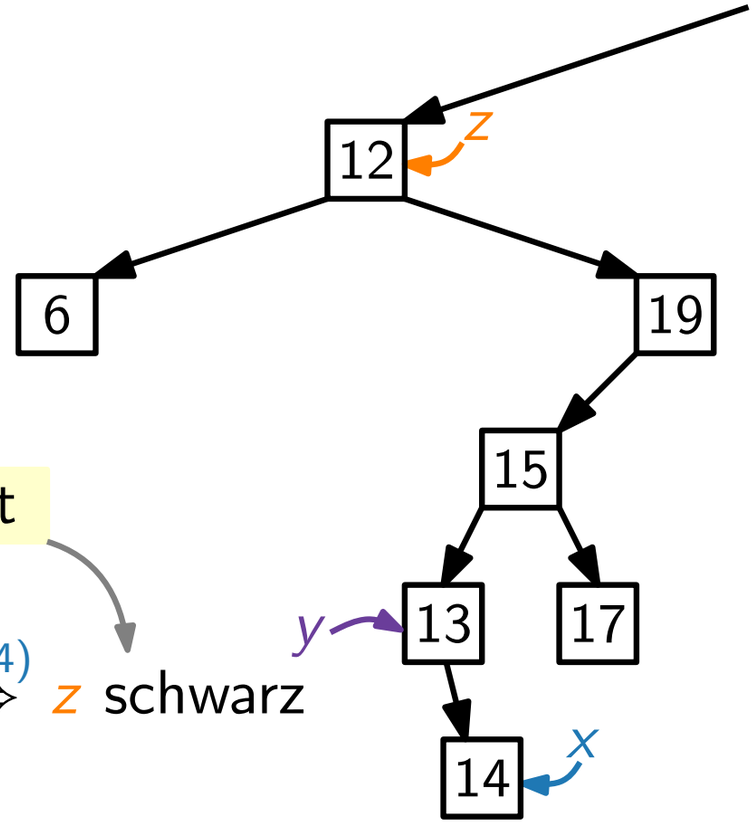
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

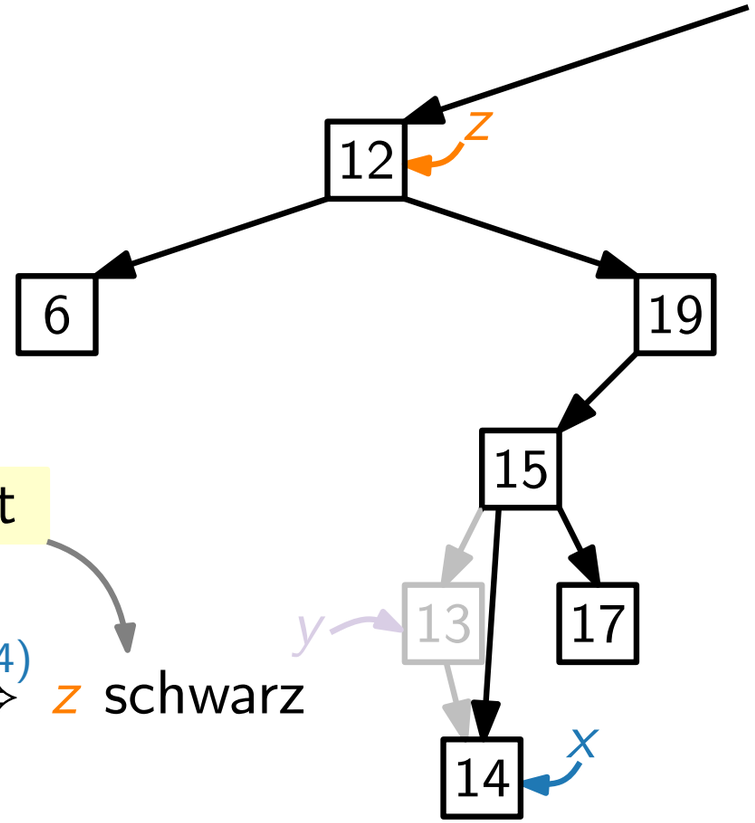
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

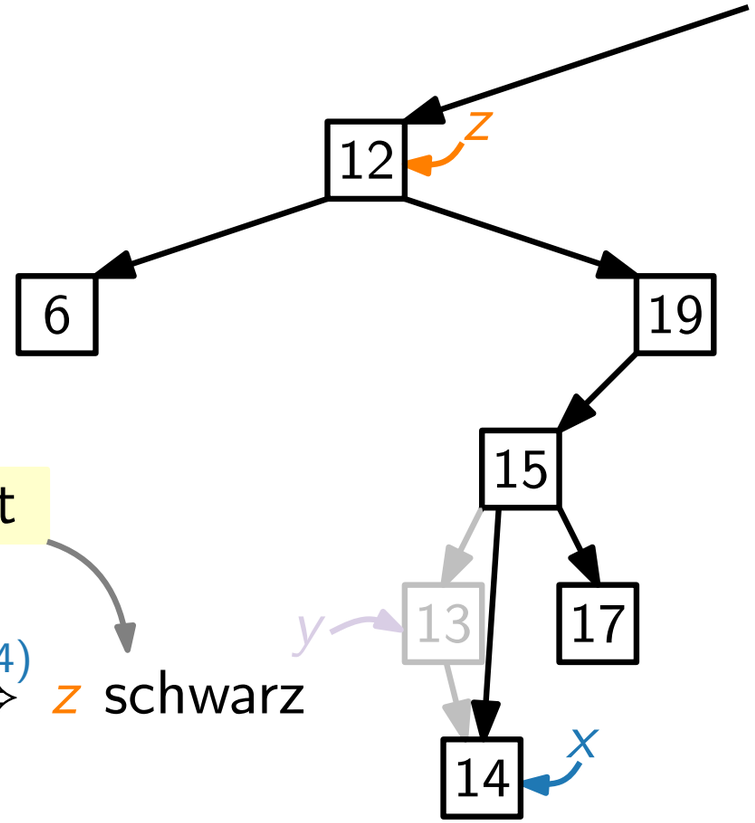
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

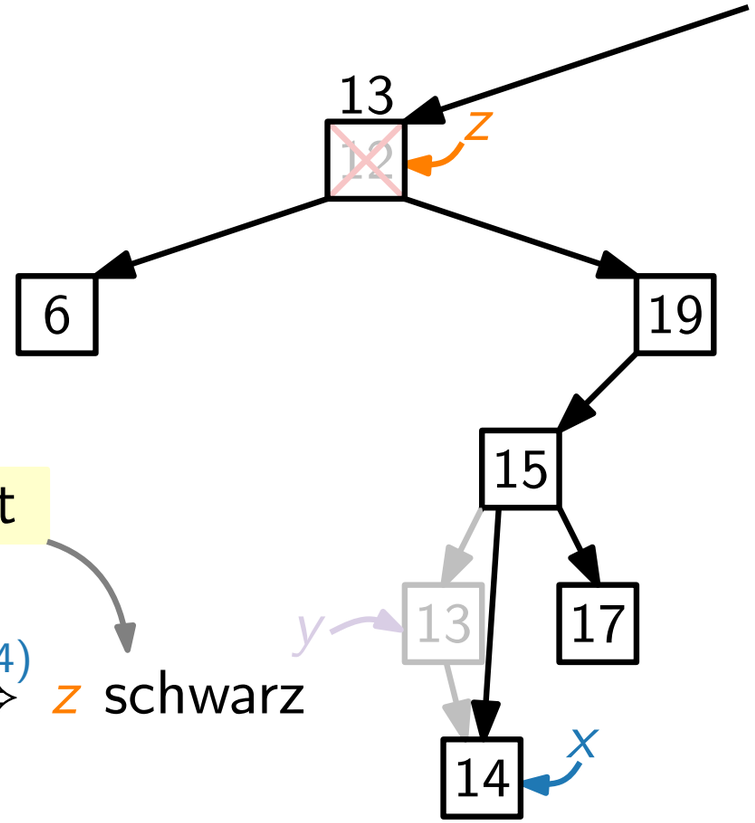
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade
enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

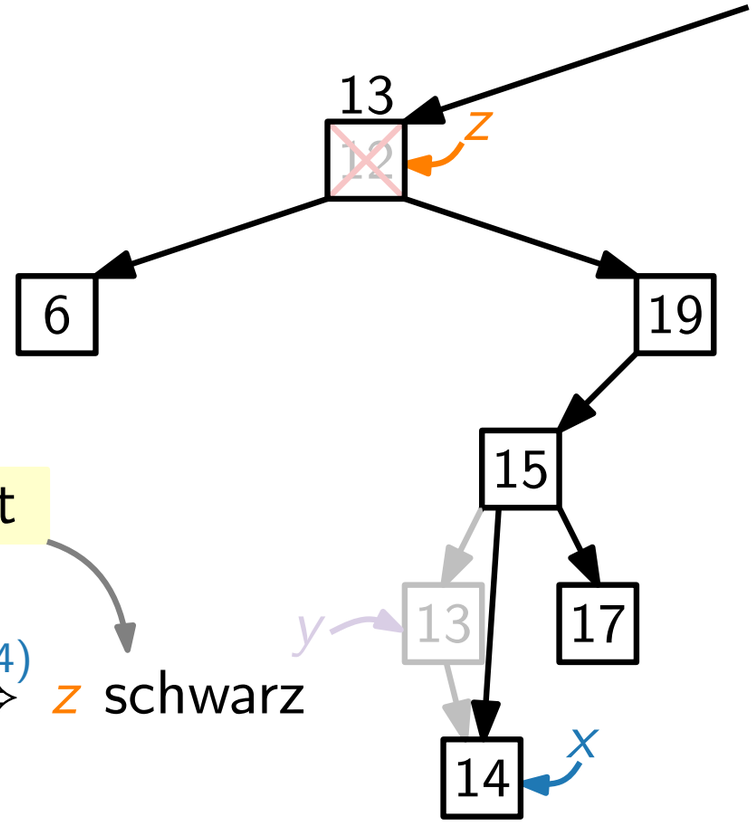
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.
Was kann kaputt gehen?



(E4) ⇒ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

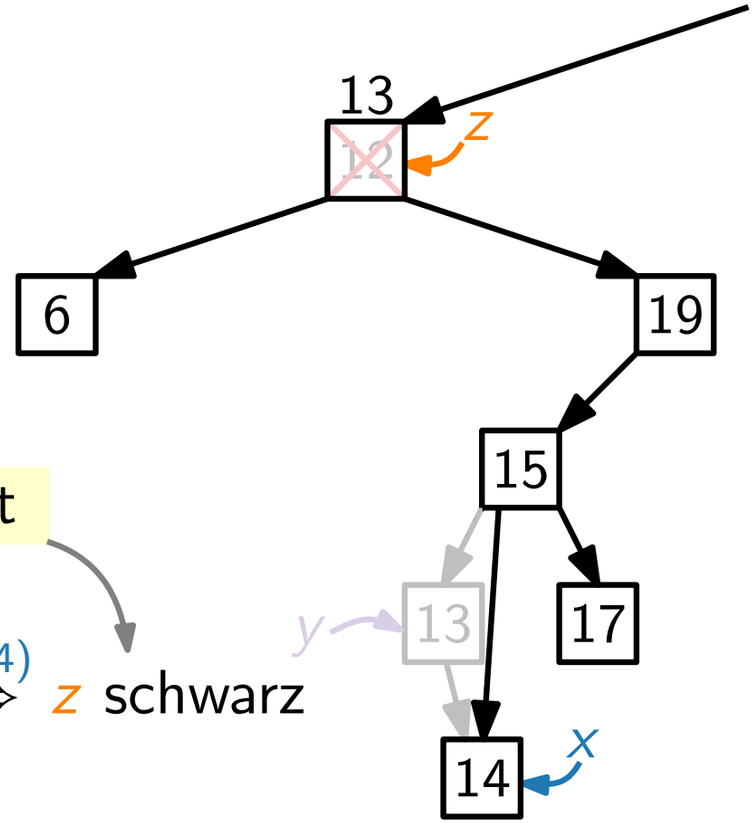
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \textsc{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.
Was kann kaputt gehen? **(E4)** falls x und $y.p$ rot



(E4) ⇒ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

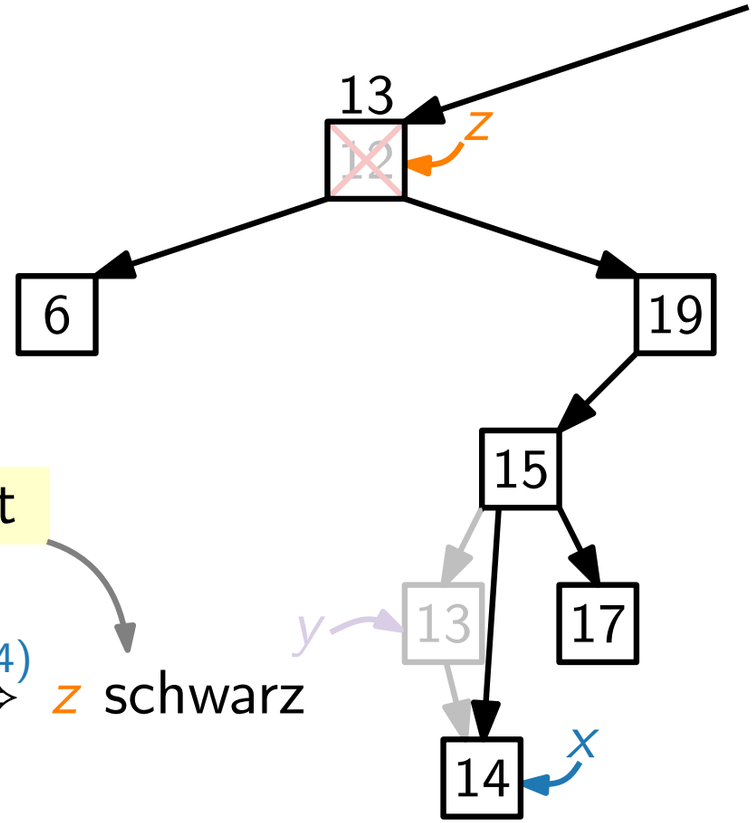
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \text{SUCCESSOR}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.
Was kann kaputt gehen? **(E4)** falls x und $y.p$ rot
(E5) falls y schwarz war



(E4) ⇒ z schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

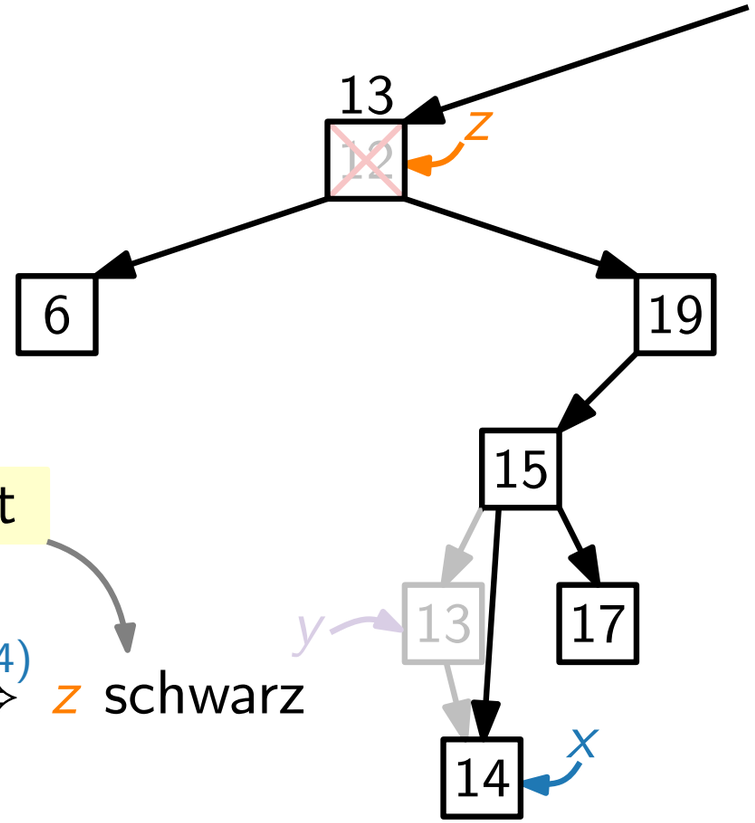
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \text{SUCCESSOR}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.
Was kann kaputt gehen? **(E4)** falls x und $y.p$ rot
(E5) falls y schwarz war



(E4) ⇒ z schwarz

(E4) ⇒ y schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

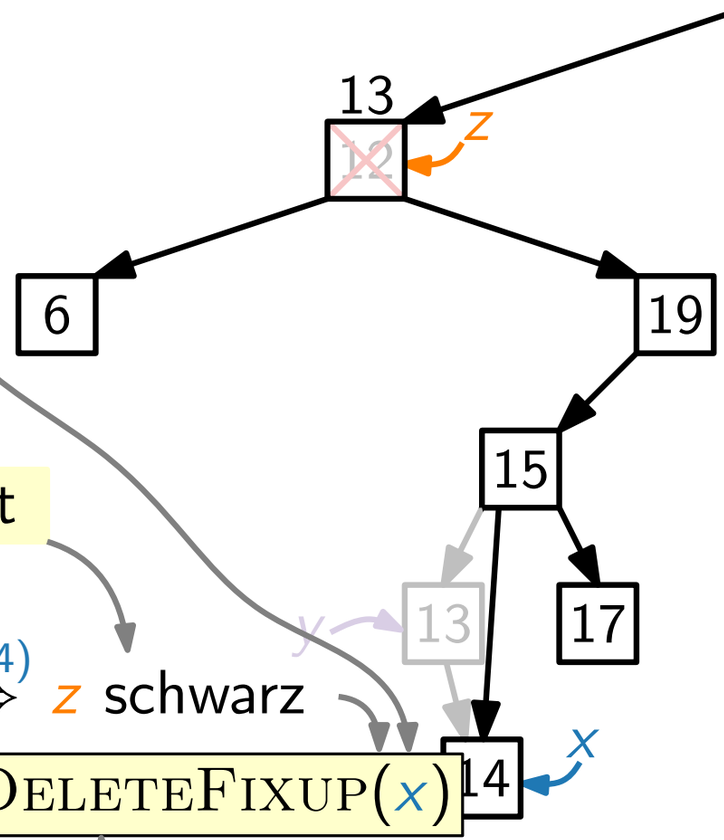
Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \text{SUCCESSOR}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.
Was kann kaputt gehen? **(E4)** falls x und $y.p$ rot
(E5) falls y schwarz war



(E4) $\Rightarrow$ z schwarz

$\text{RBDELETEFIXUP}(x)$

(E4) $\Rightarrow$ y schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Löschen

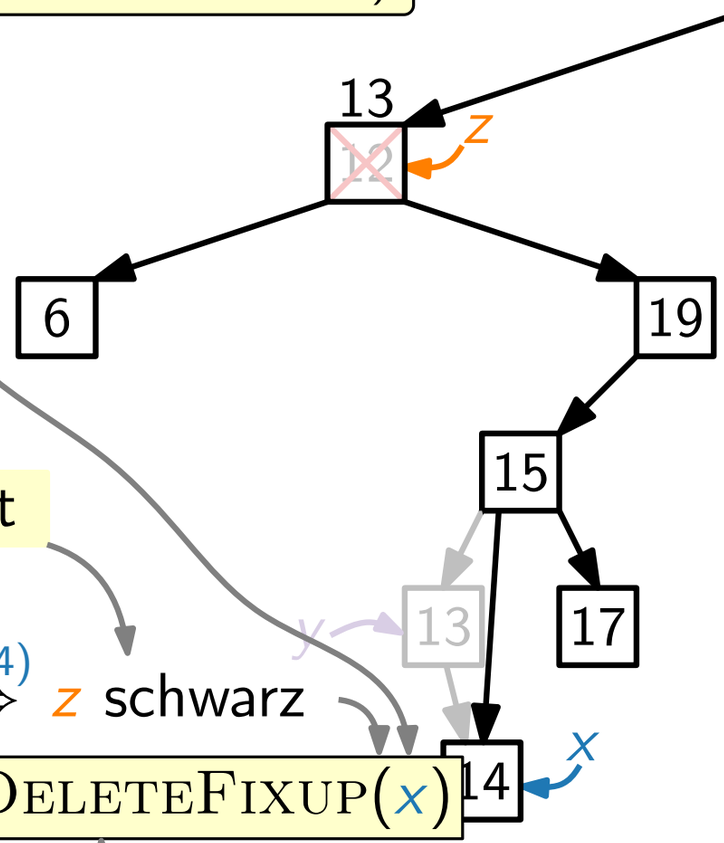
Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E5)** falls z schwarz war

2. z hat ein Kind x.
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.
Was kann kaputt gehen? **(E2)** falls z Wurzel und x rot
(E4) falls x und $z.p$ rot **(E5)** falls z schwarz war

3. z hat zwei Kinder.
Setze $y = \text{Successor}(z)$.
Setze $x = y.right$ and Stelle von y.
Setze $z.key = y.key$.
Was kann kaputt gehen? **(E4)** falls x und $y.p$ rot
(E5) falls y schwarz war

Hier ist $x = z$ (obwohl z nicht mehr im Baum ist).



(E4) ⇒ z schwarz

RBDeleteFixup(x)

(E4) ⇒ y schwarz

(E2) Die Wurzel ist schwarz.
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.
(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist,
sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten
dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

Laufzeit RBDelete $\in$

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

Laufzeit $\text{RBDelete} \in \mathcal{O}(h) +$ Laufzeit RBDeleteFixup

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

Laufzeit $\text{RBDelete} \in \mathcal{O}(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{\mathcal{O}(h)}$

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

Laufzeit $\text{RBDelete} \in \mathcal{O}(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{\mathcal{O}(h)} = \mathcal{O}(h)$

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in \mathcal{O}(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{\mathcal{O}(h)} = \mathcal{O}(h)$$

RBDeleteFixup

Details siehe [CLRS, Kapitel 13.4]

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum T mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Repariere **(E5):** Auf Knoten x fehlt eine schwarze Einheit.

Ziel: „Hole“ eine schwarze Einheit von weiter oben bis:

- x ist rot $\Rightarrow$ mach x schwarz.
- x ist Wurzel $\Rightarrow$ Schwarz-höhe überall 1 niedriger.

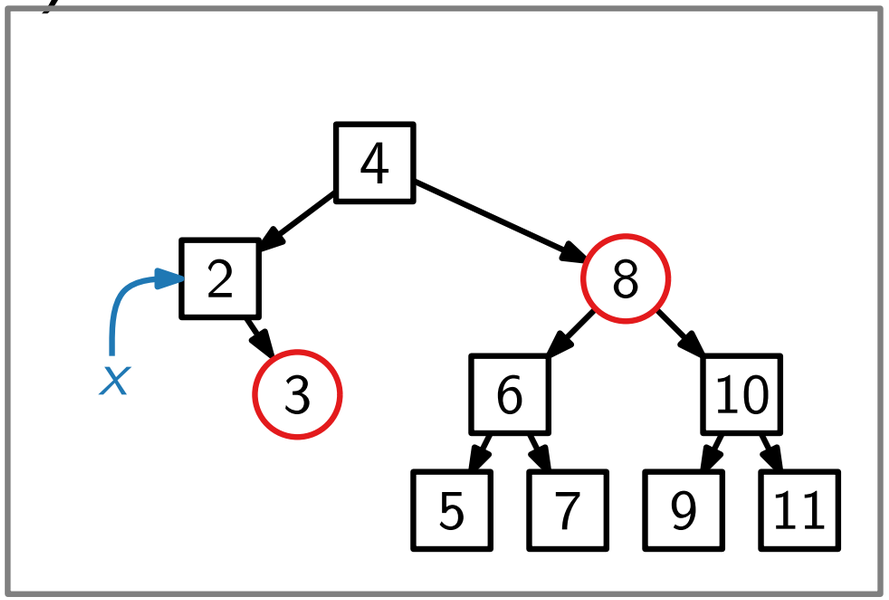
Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

$$\text{Laufzeit } \textsc{RBDelete} \in \mathcal{O}(h) + \underbrace{\text{Laufzeit } \textsc{RBDeleteFixup}}_{\mathcal{O}(h)} = \mathcal{O}(h)$$

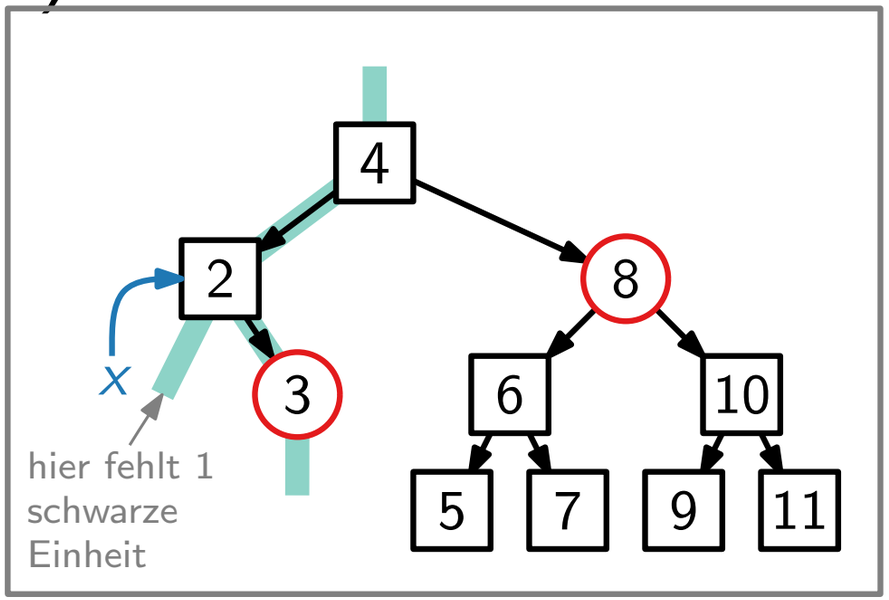
Satz. Rot-Schwarz-Bäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $\mathcal{O}(\log n)$ Zeit, wobei n die momentane Anz. der Schlüssel ist.

nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)



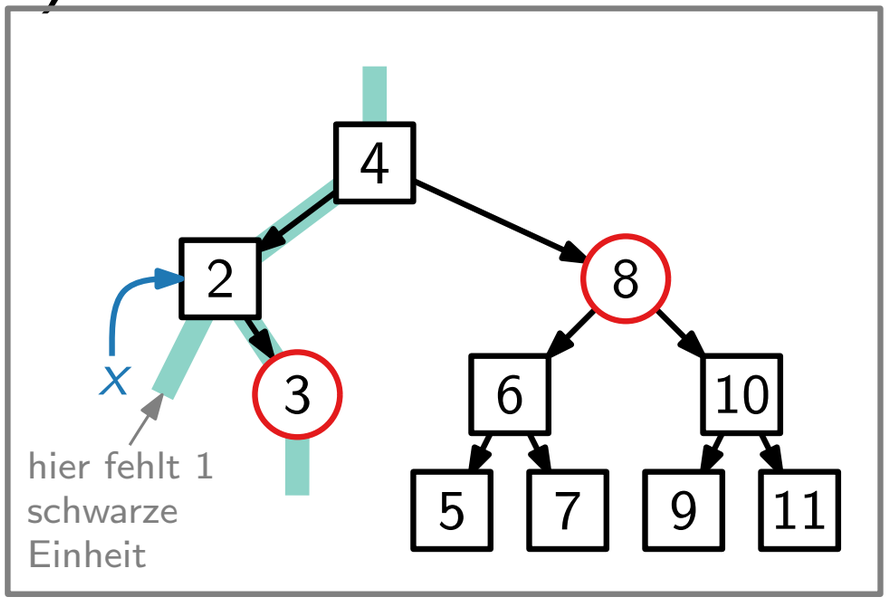
RBDeleteFixup(RBNode x)



RBDeleteFixup(RBNode x)

while $x \neq root$ **and** $x.color == black$ **do**

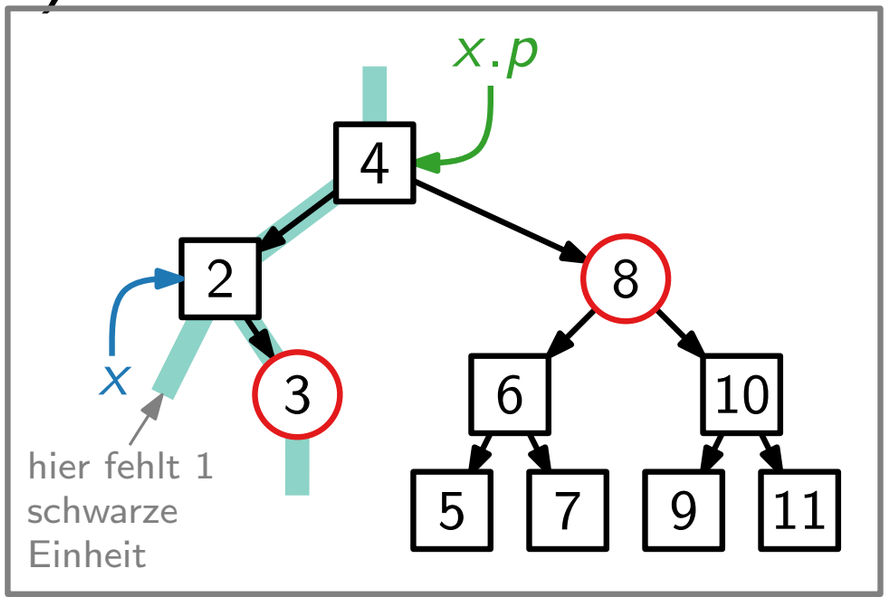
$x.color = black$



RBDeleteFixup(RBNode x)

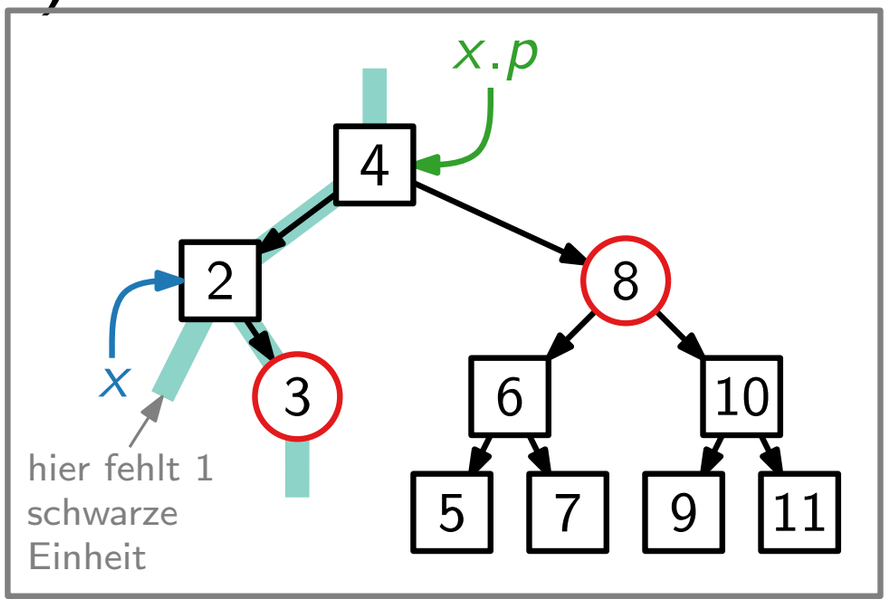
while $x \neq root$ **and** $x.color == black$ **do**

$x.color = black$



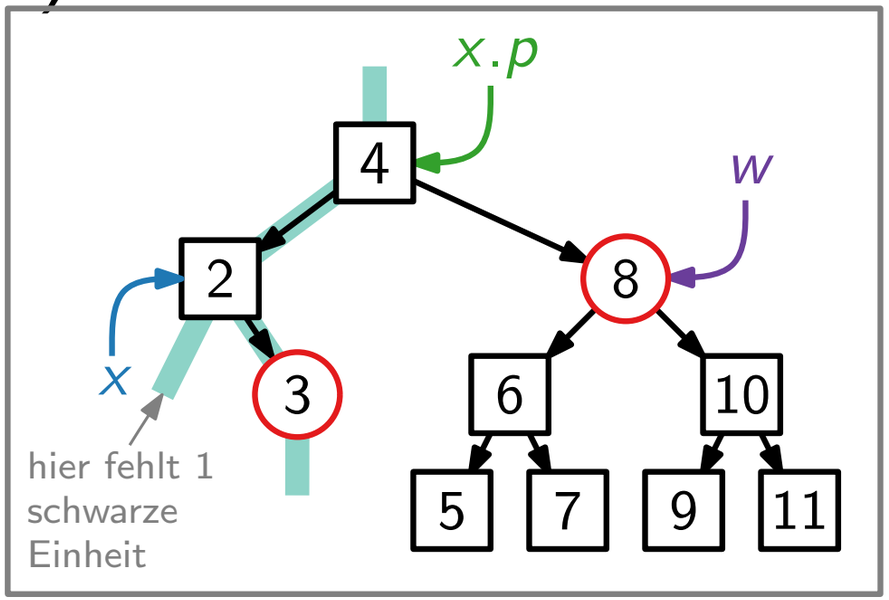
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        
        
        
        
        
        
        
        
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

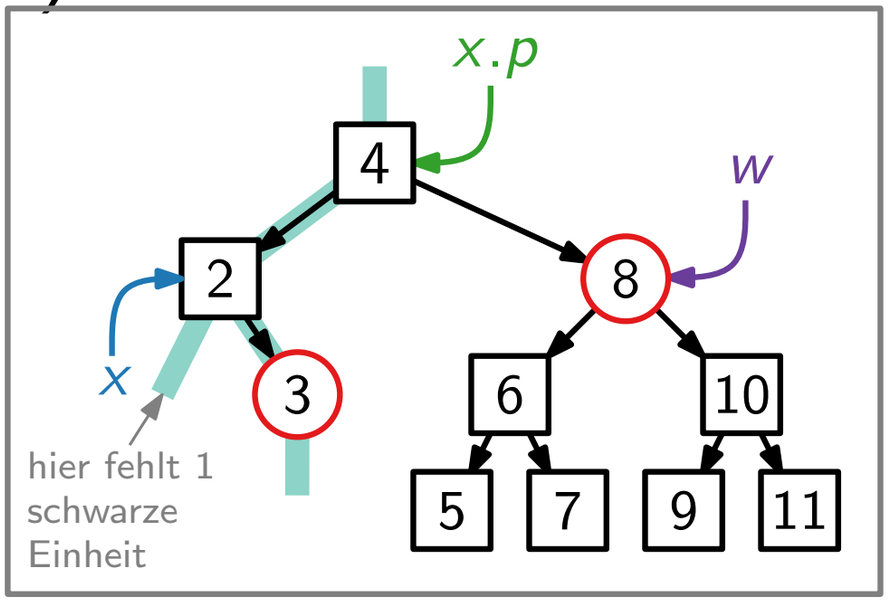
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Geschwister von x
        else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

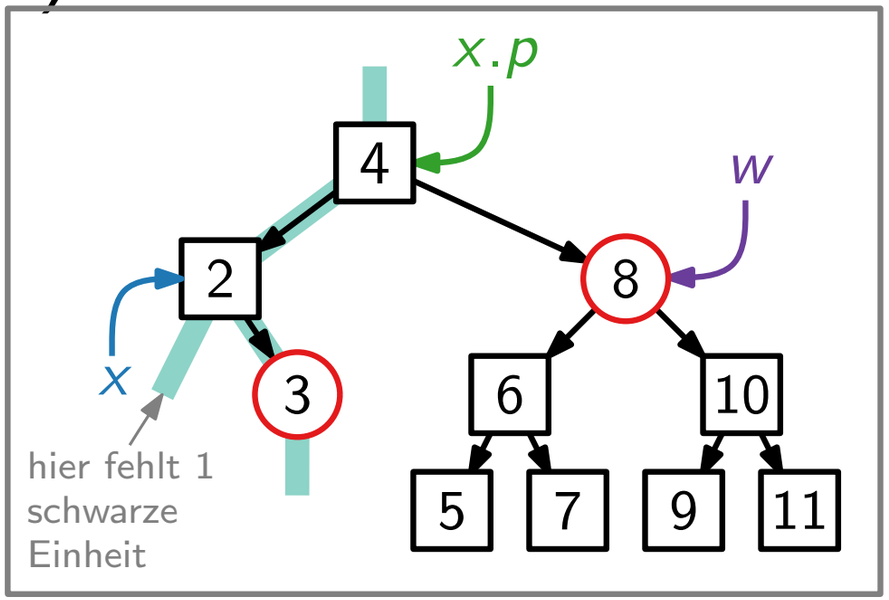
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Geschwister von x
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

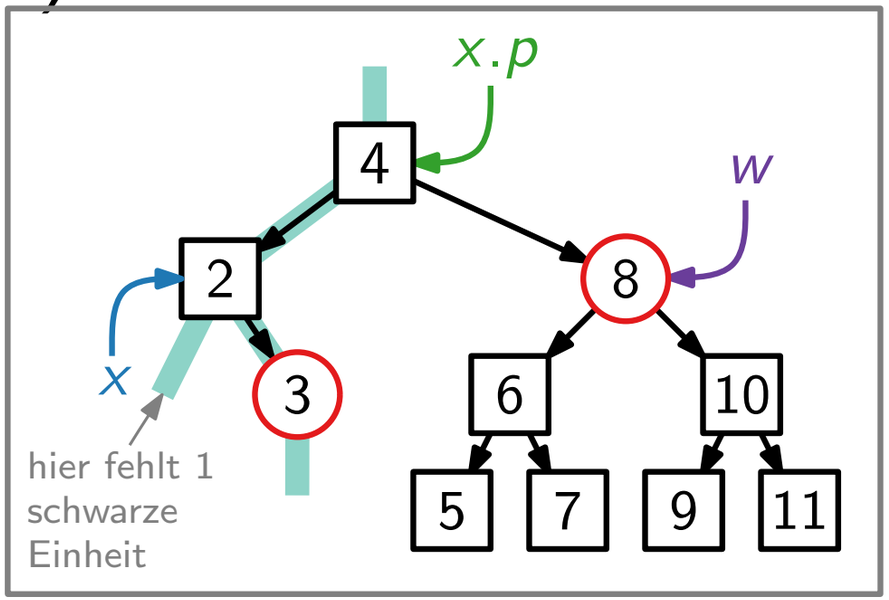
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Geschwister von x
        if w.color == red then
            // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

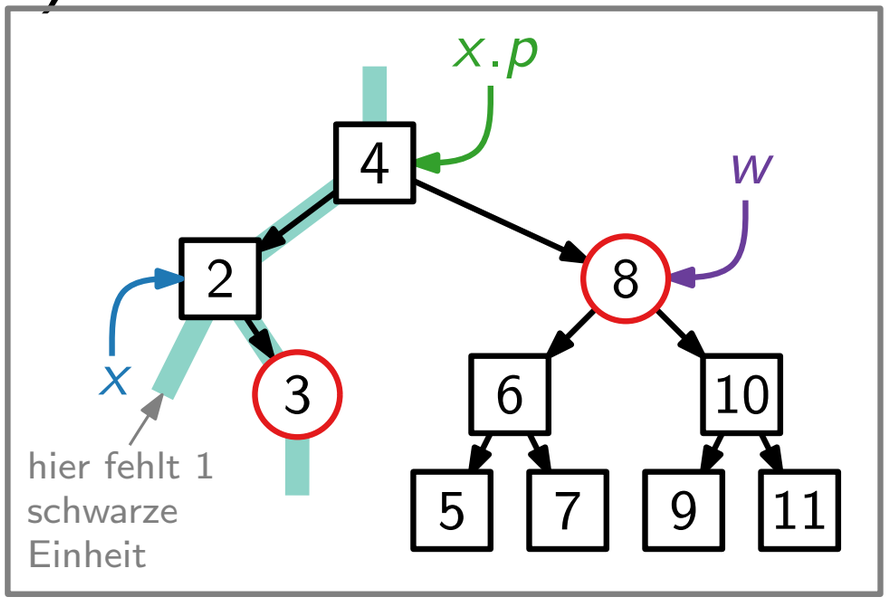
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Geschwister von x
        if w.color == red then
                                          // färbe w schwarz
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



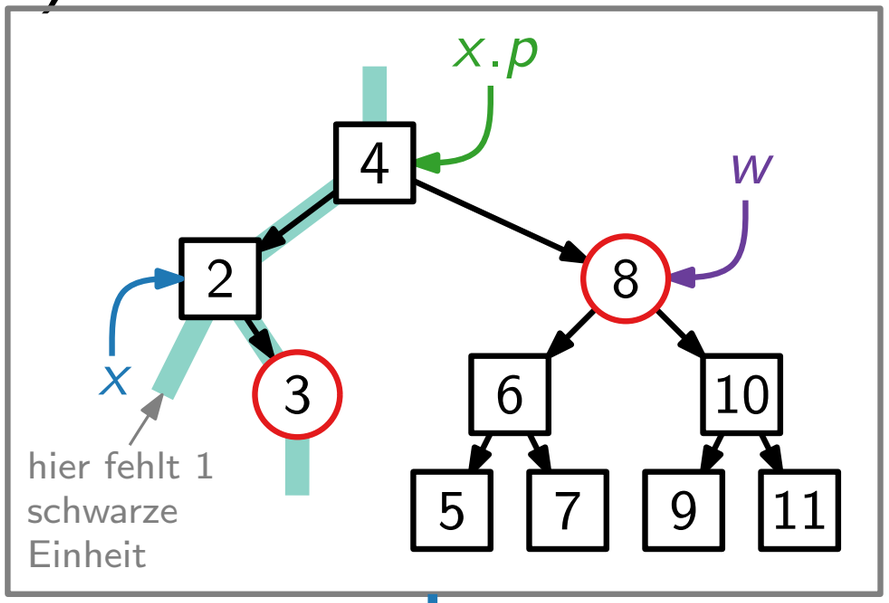
RBDeleteFixup(RBNode x)

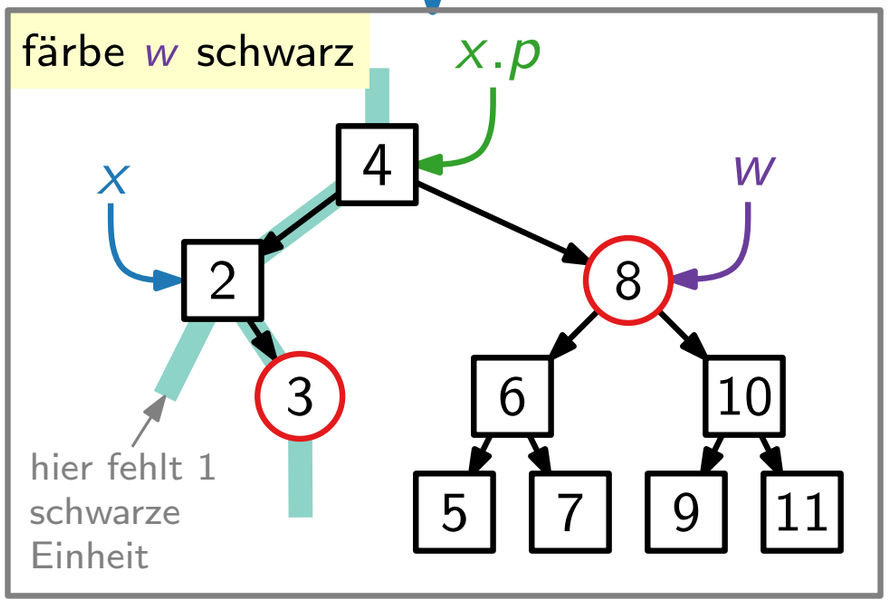
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

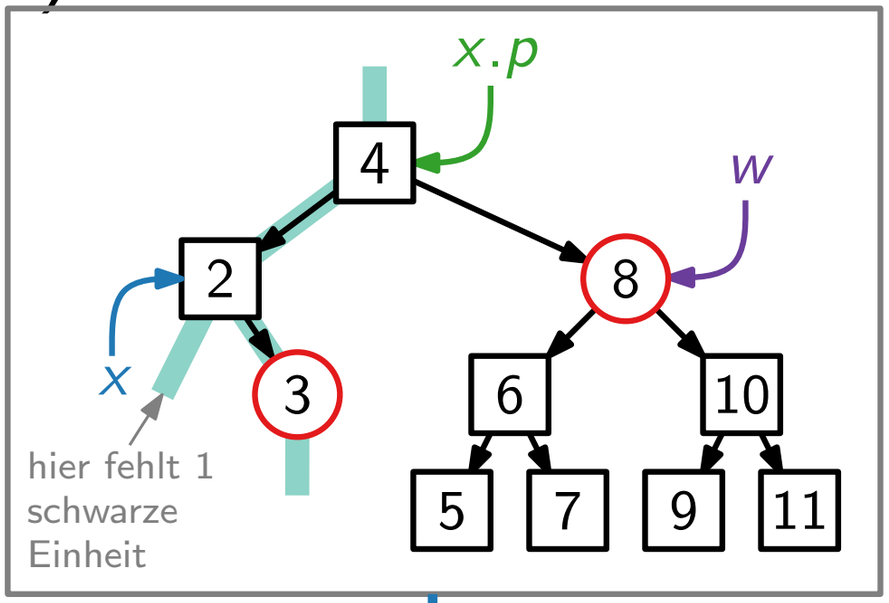
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

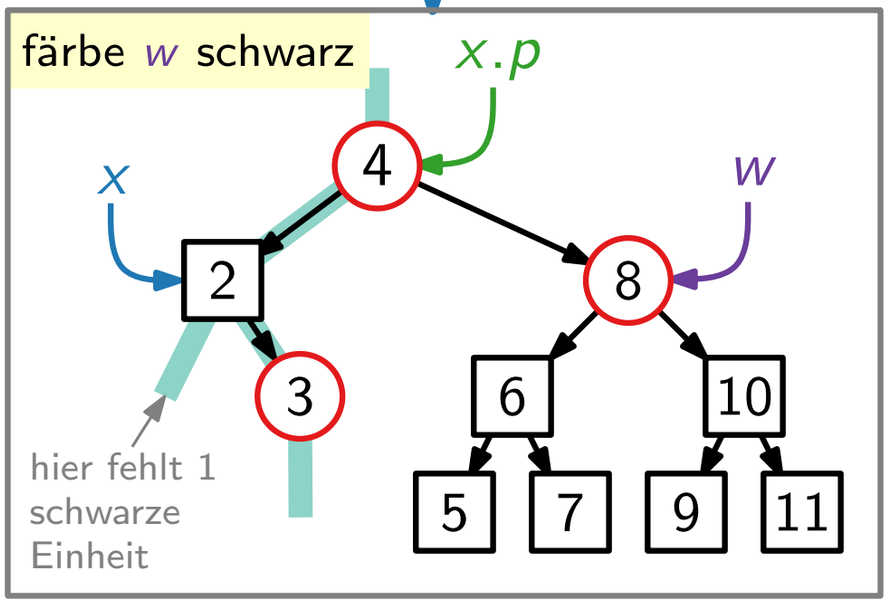




RBDeleteFixup(RBNode x)

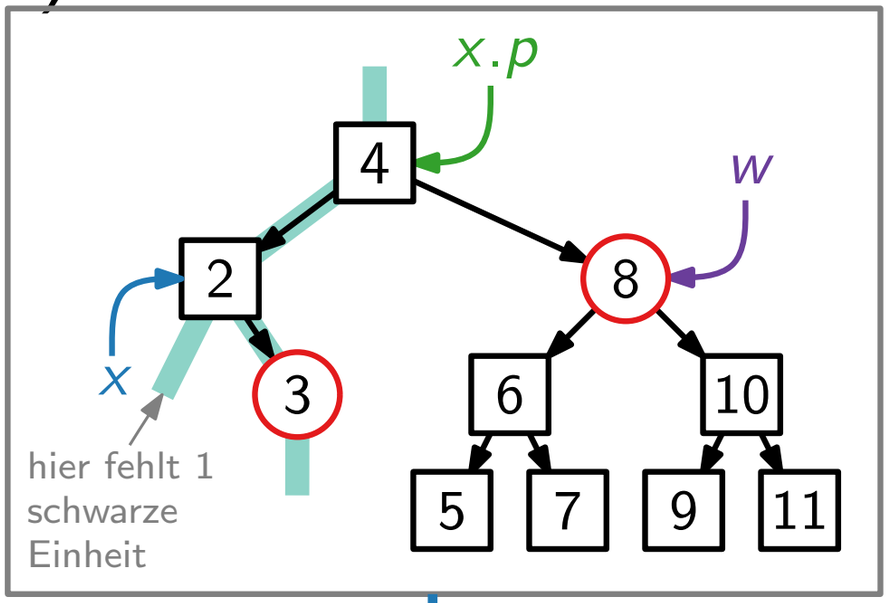
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

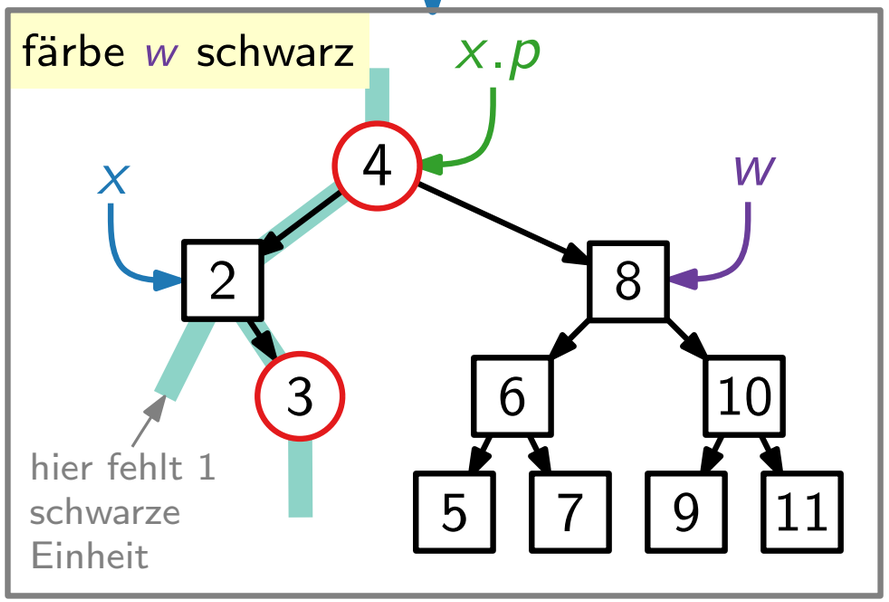




RBDeleteFixup(RBNode x)

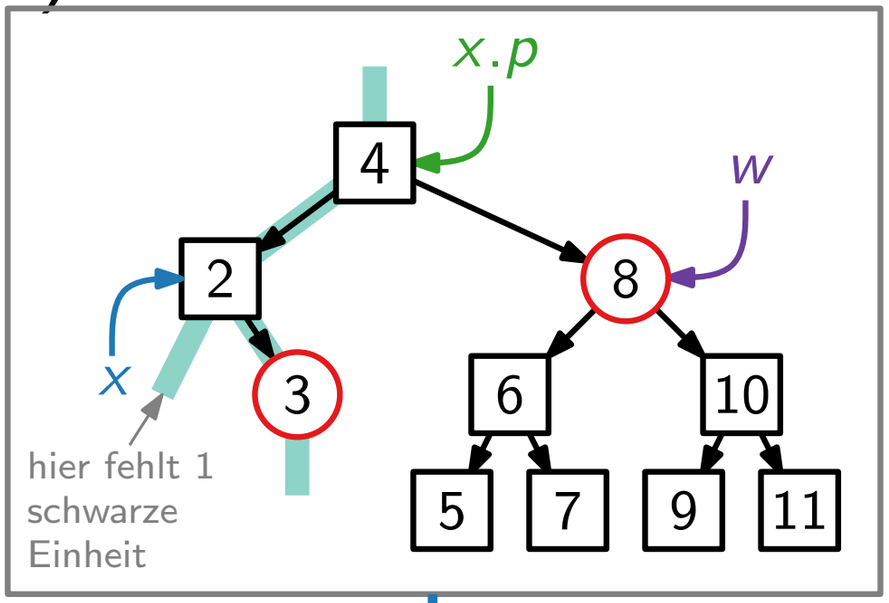
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

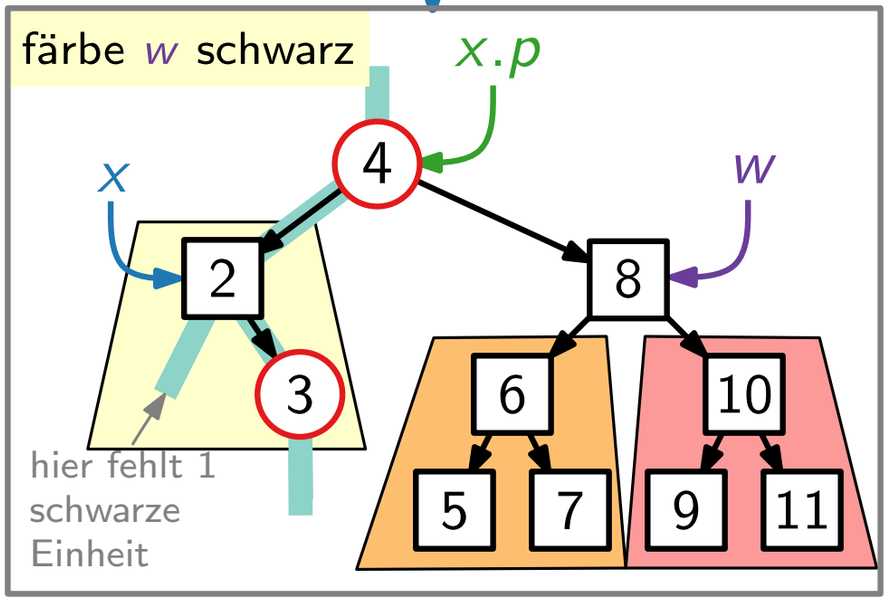




RBDeleteFixup(RBNode x)

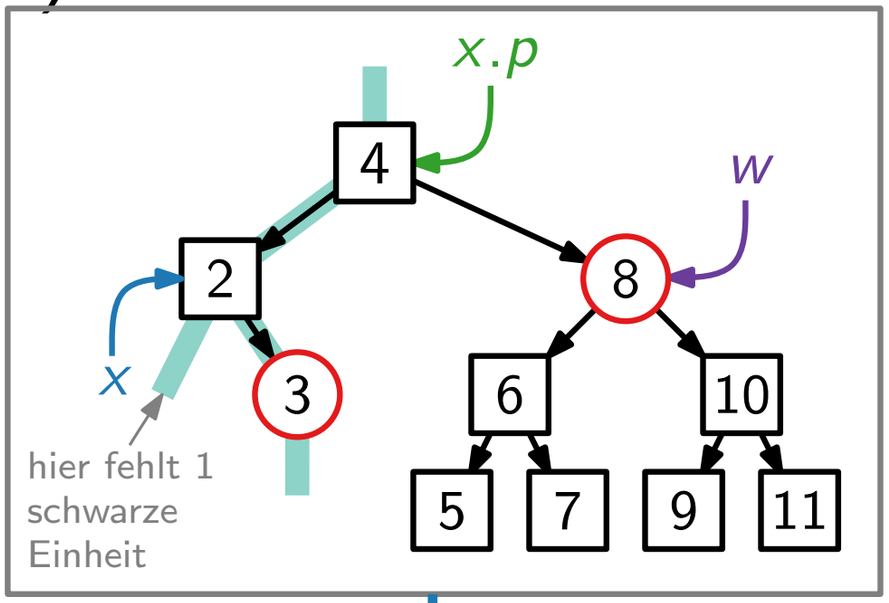
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

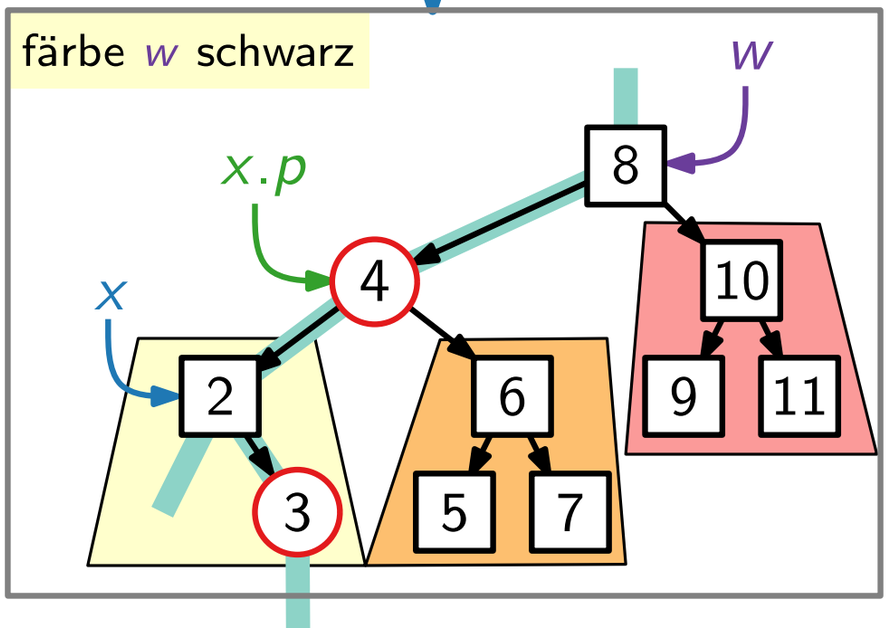




RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

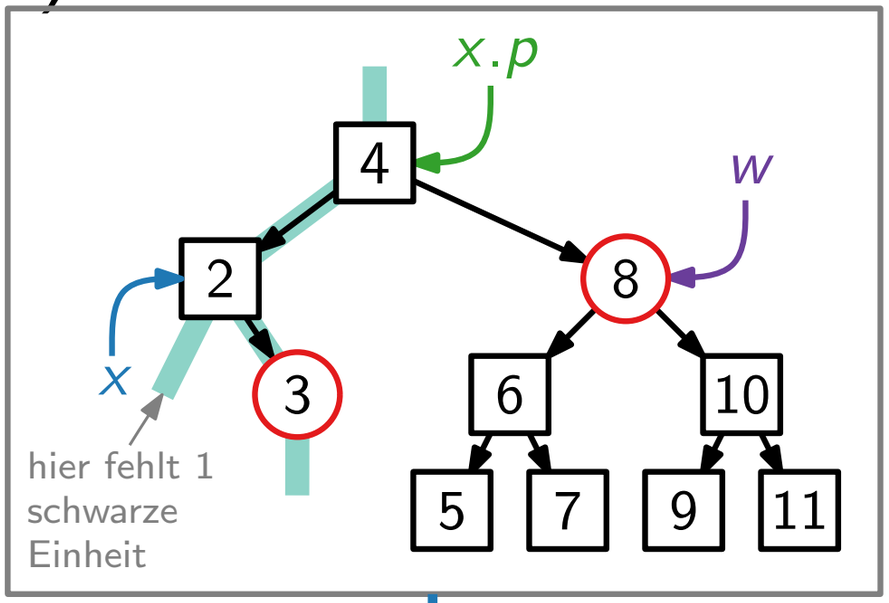


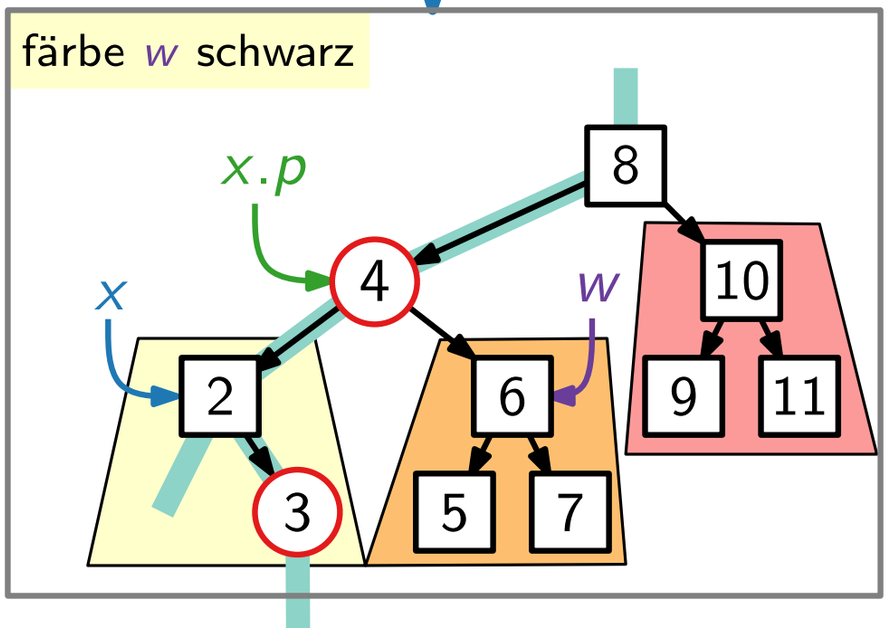


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

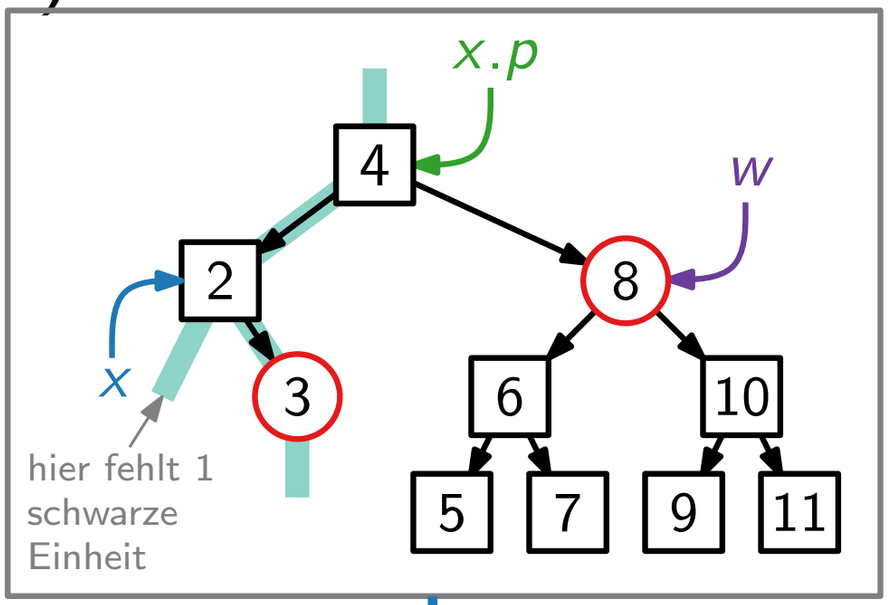


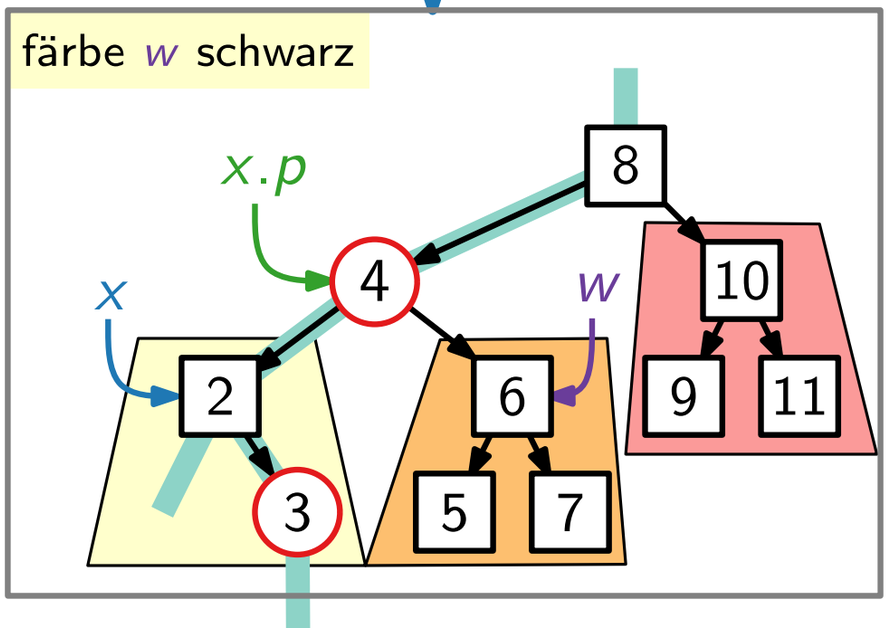


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right          // Geschwister von x
        if w.color == red then
            x.p.color = red
            w.color = black
            LeftRotate(x.p)    // färbe w schwarz
            w = x.p.right
        // schwarze Einheit nach oben schieben
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

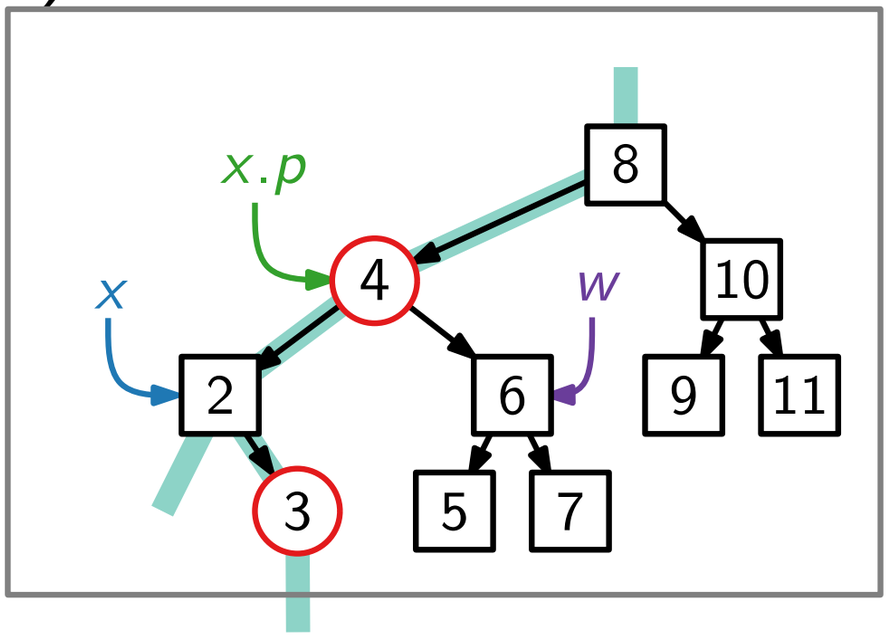




nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

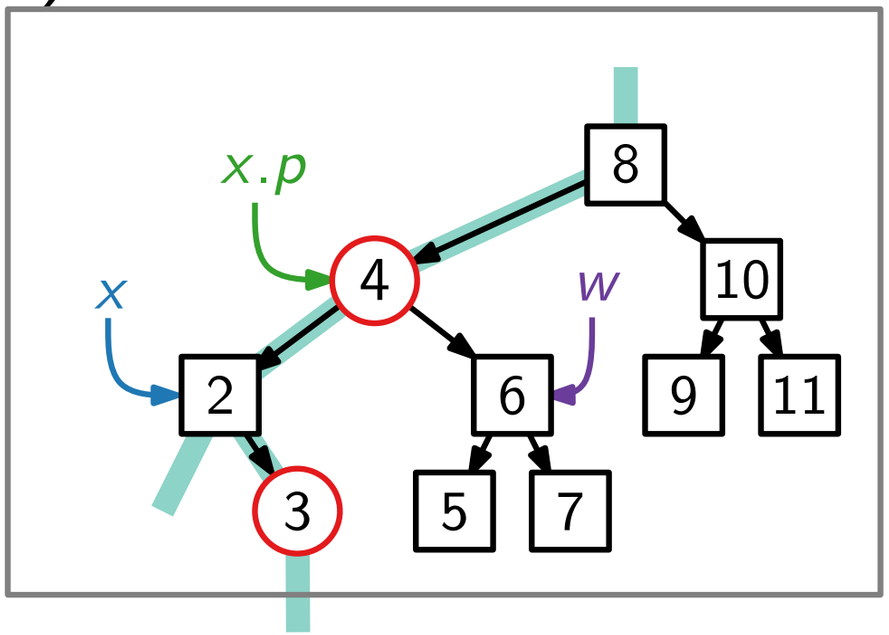
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

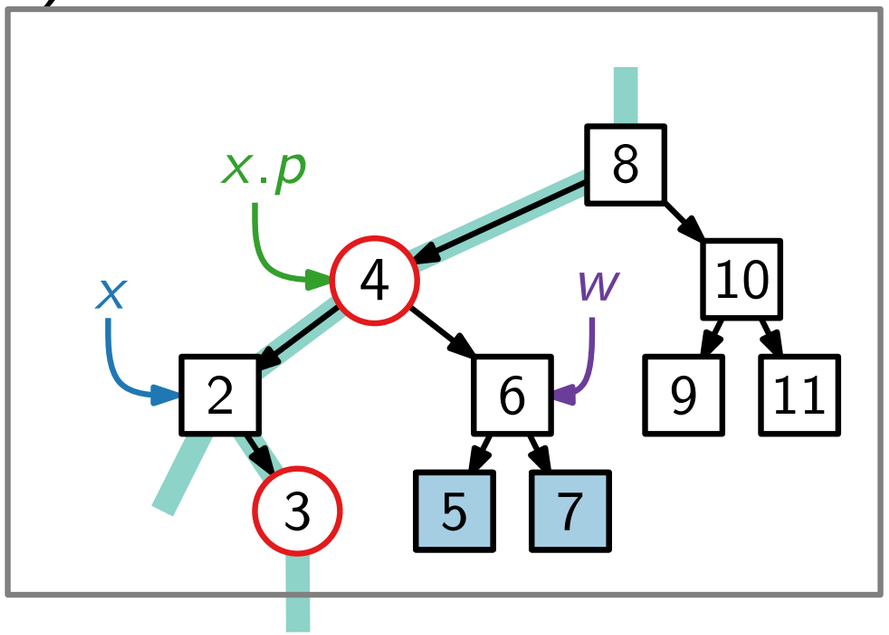
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            |
            |
        else
            |
            └ ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

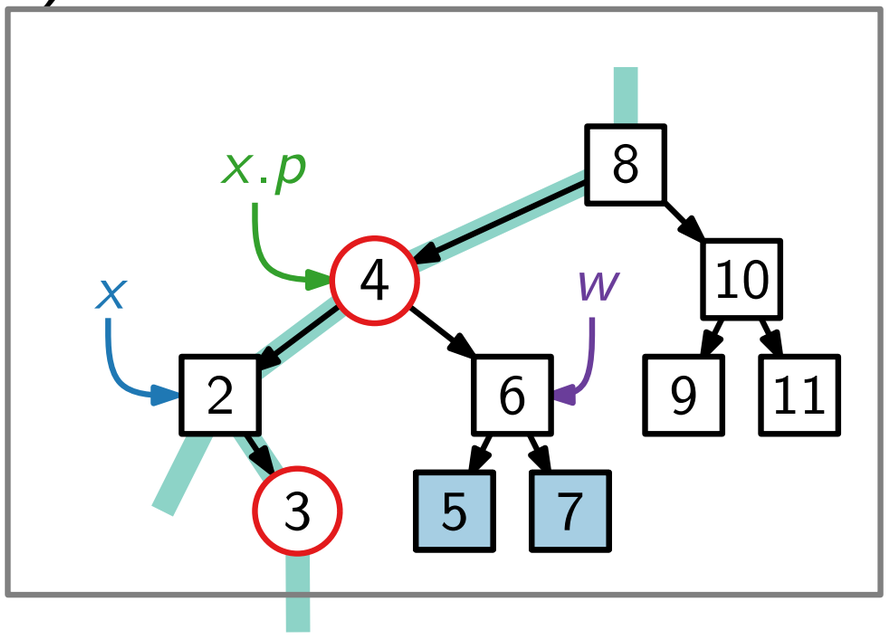
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            |
            |
        else
            └ ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

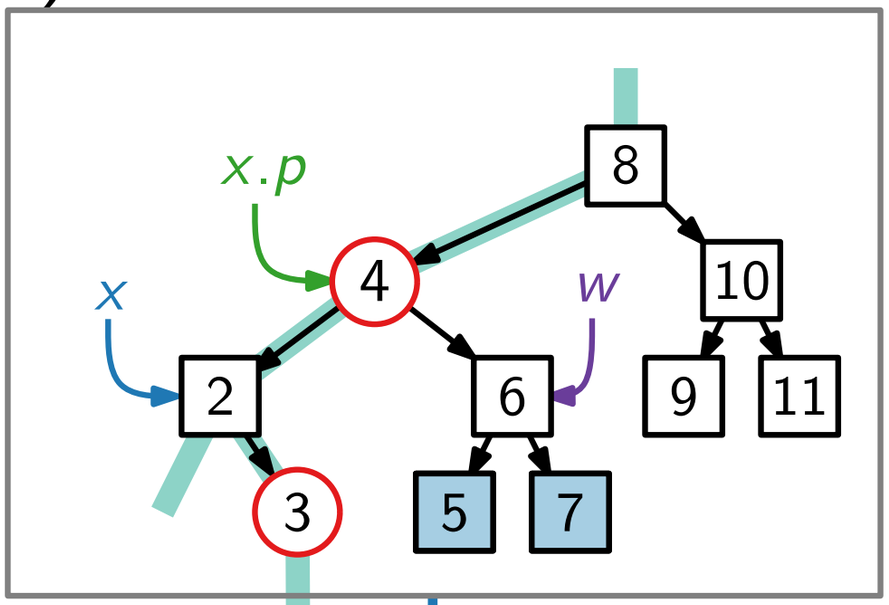
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

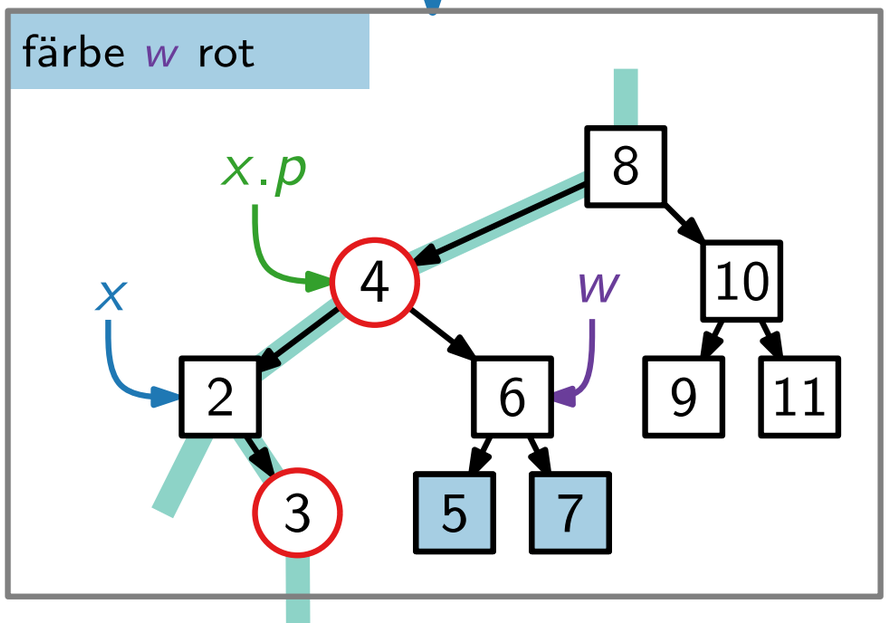


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

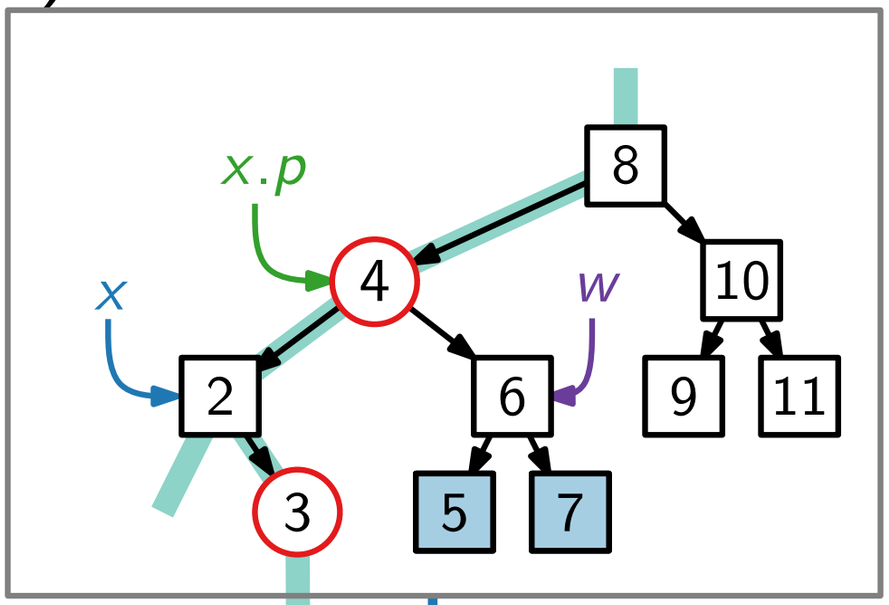


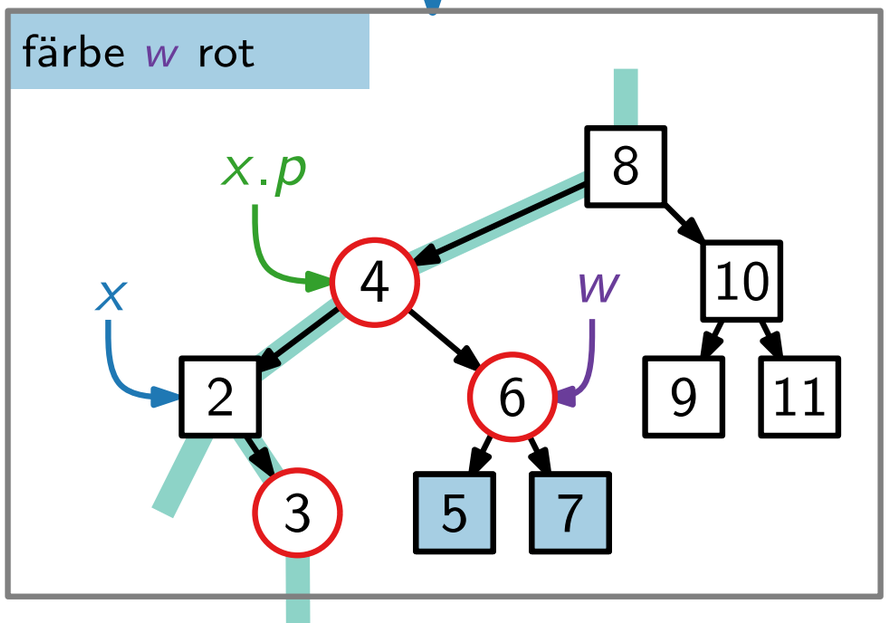


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

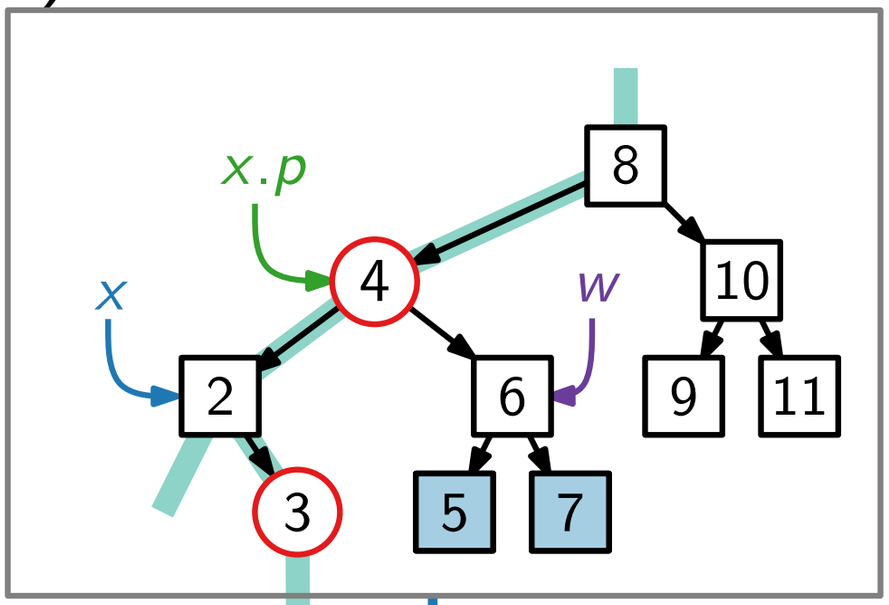


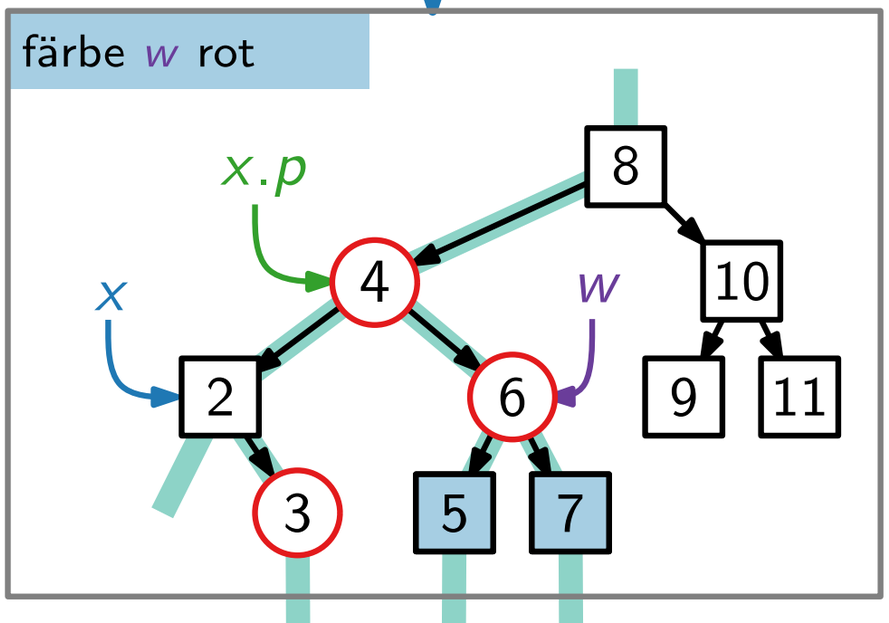


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

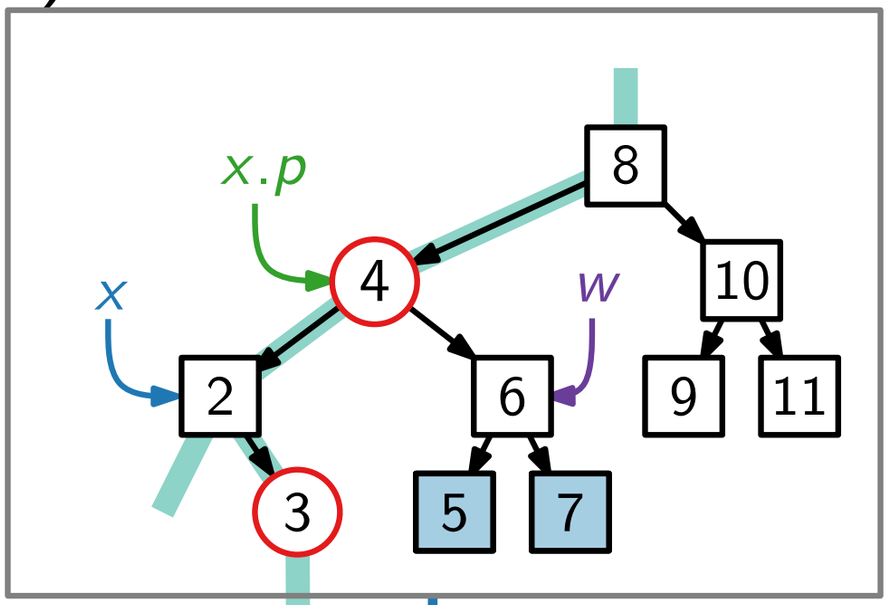


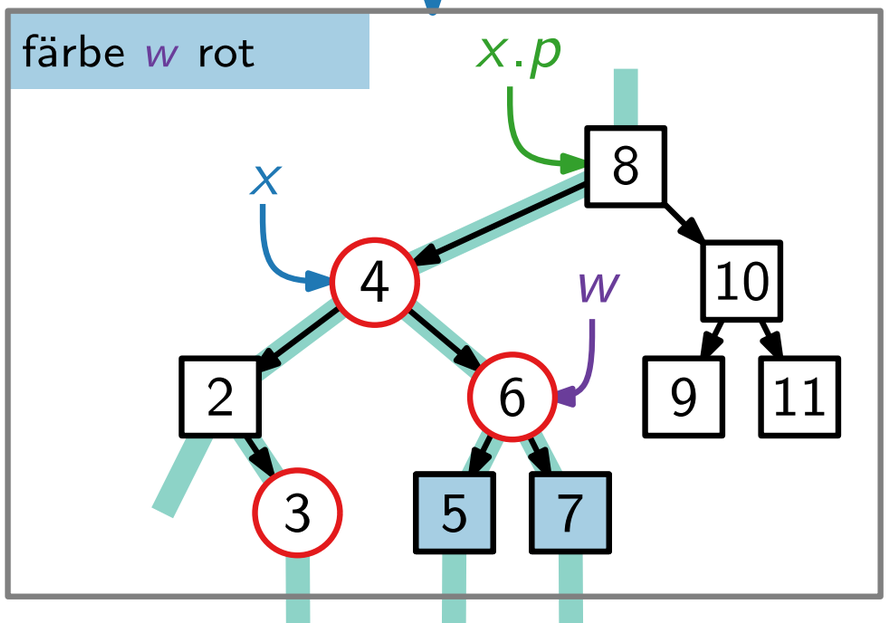


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

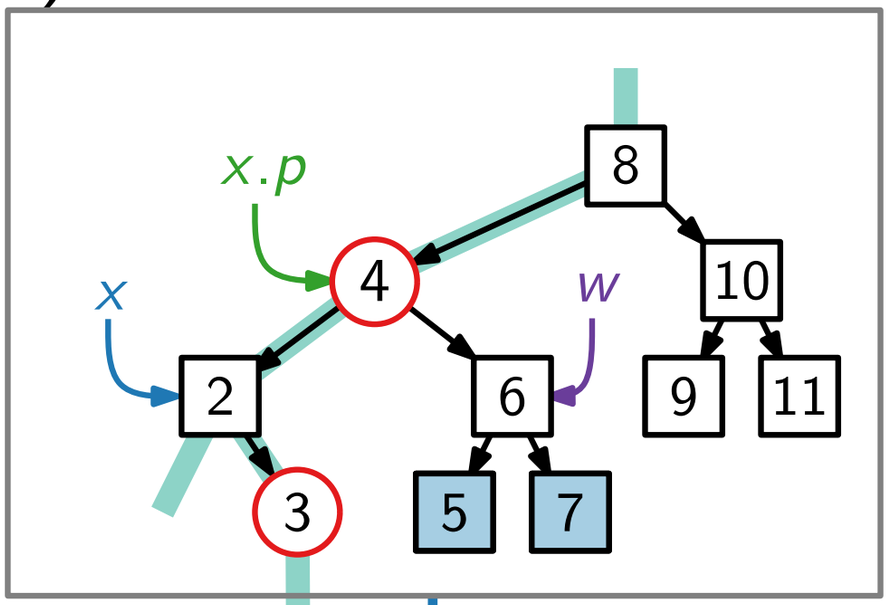


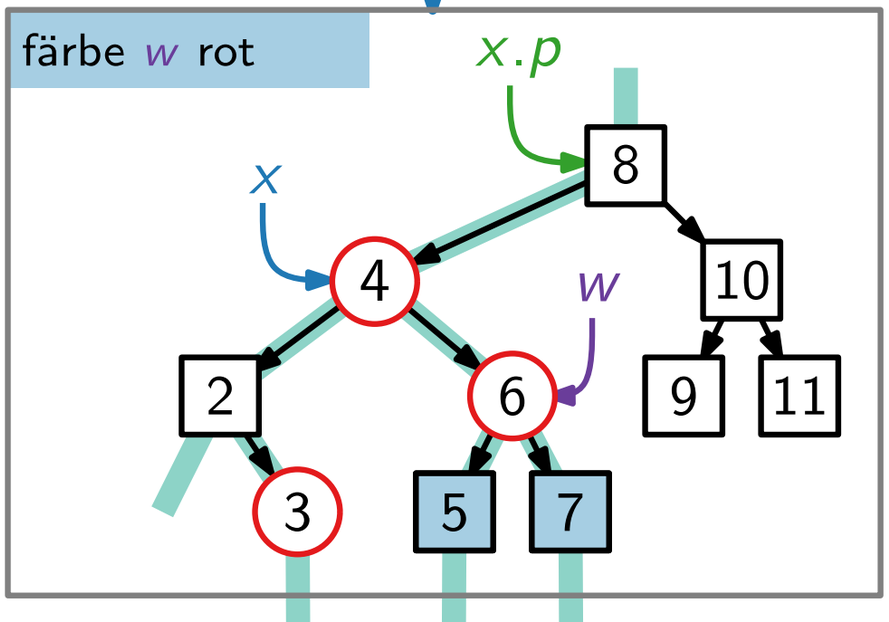


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

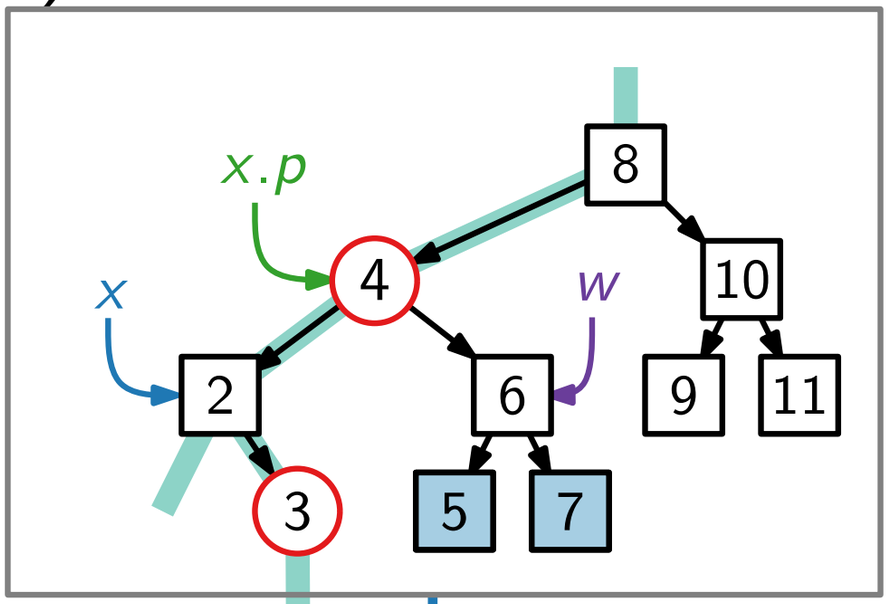


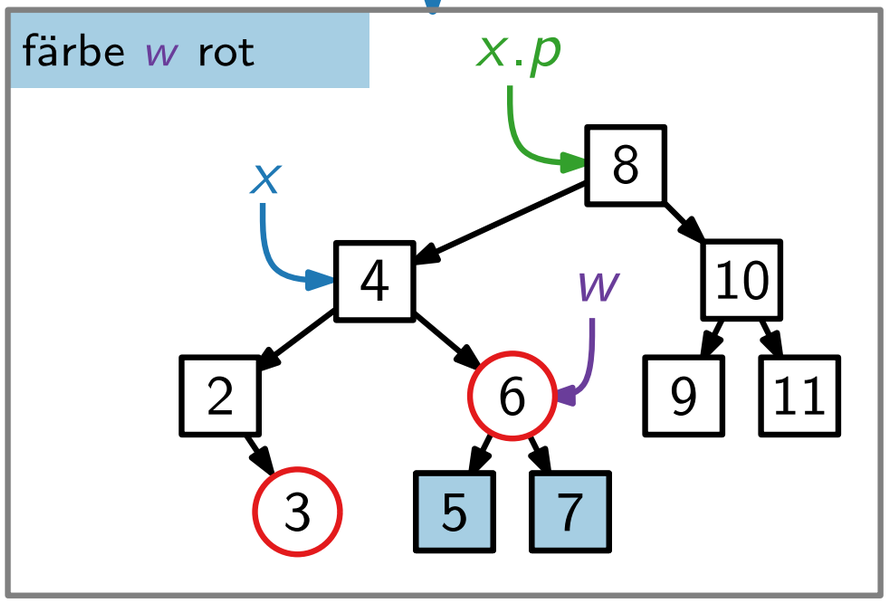


nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else
            ...
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

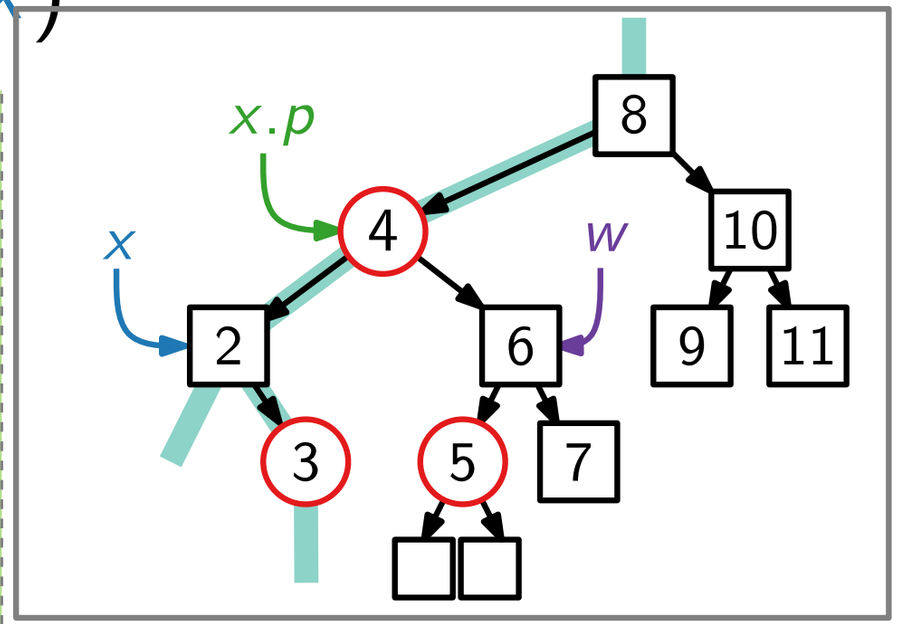




nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

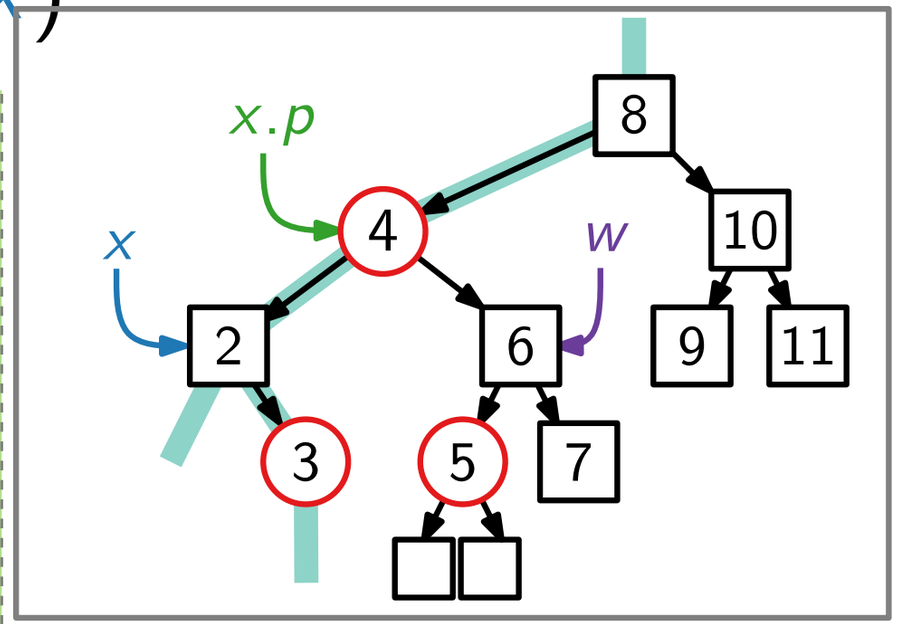
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

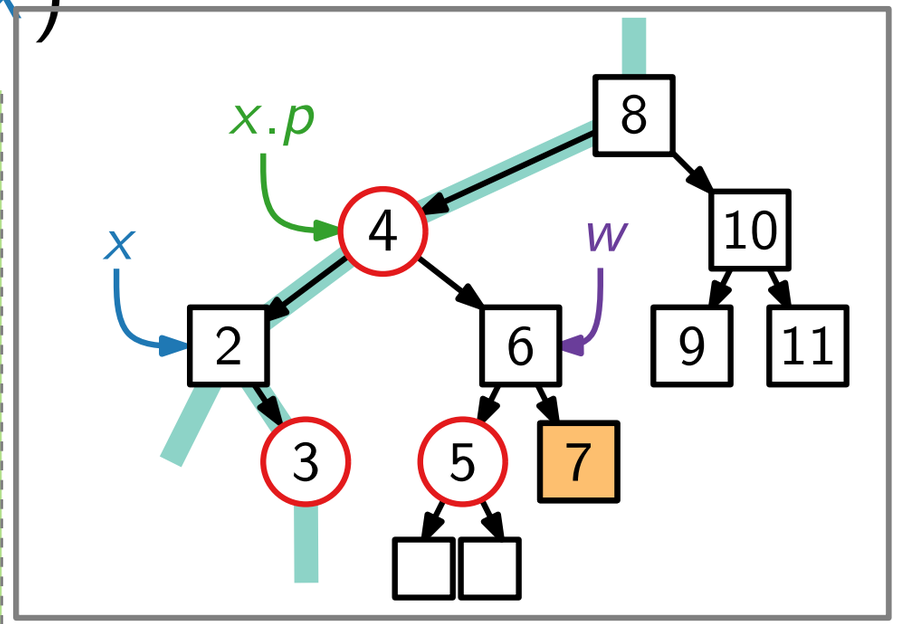
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

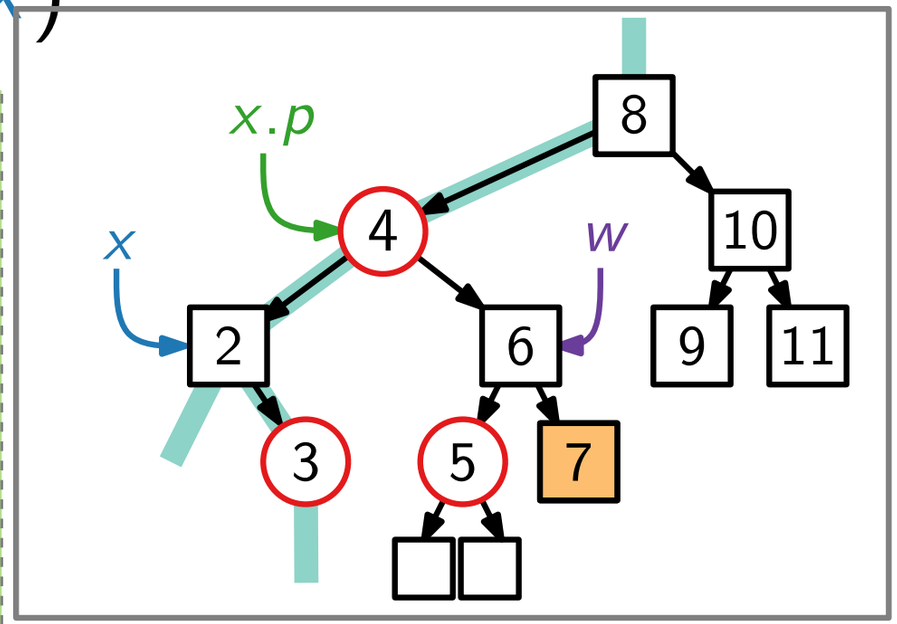
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

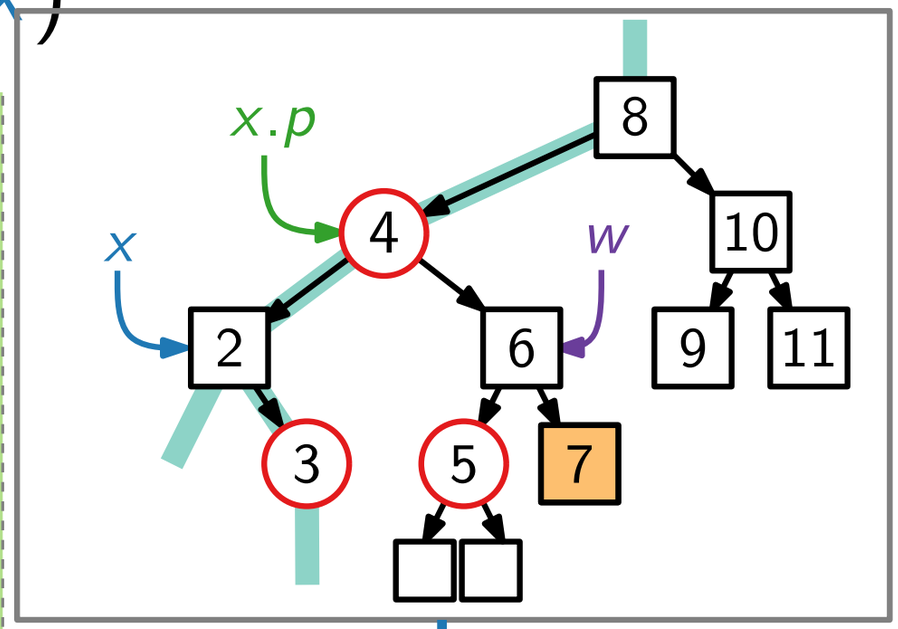
RBDeleteFixup(RBNode x)

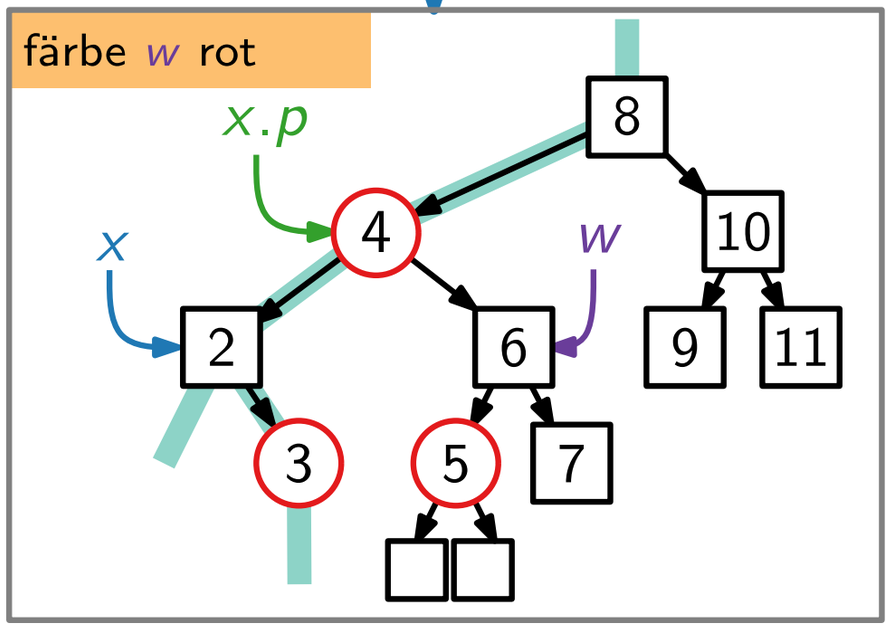
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ... ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

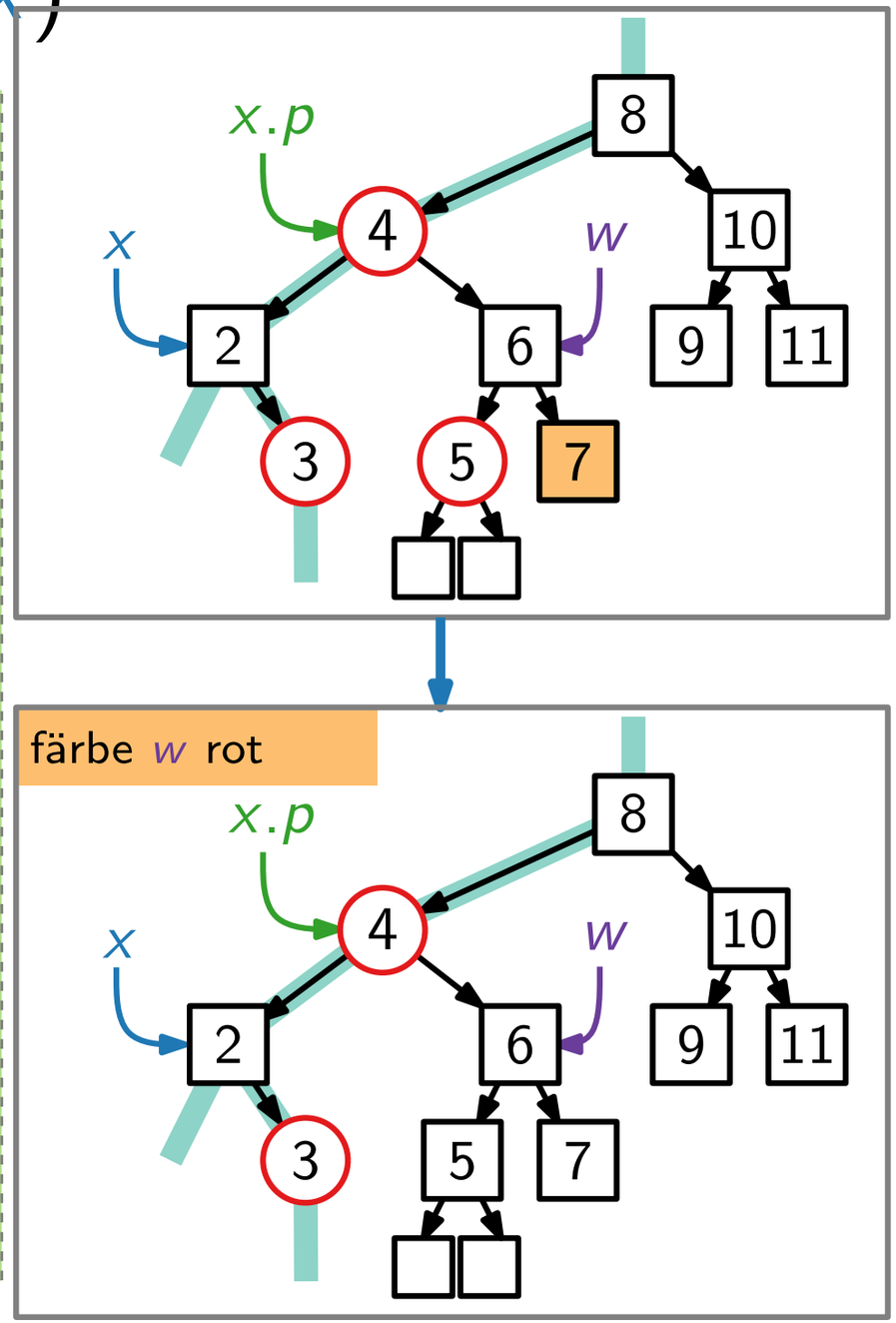




nicht klausurrelevant

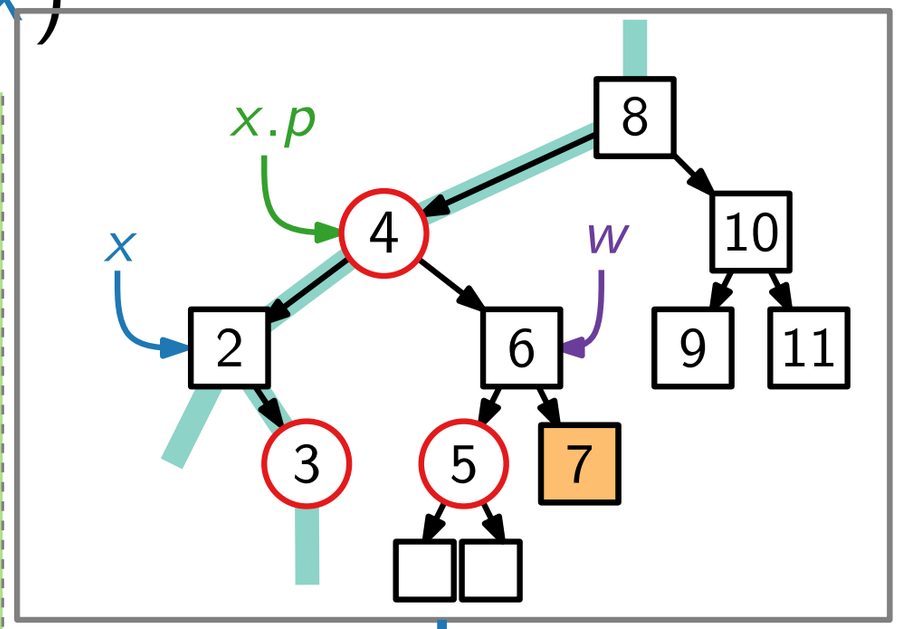
RBDeleteFixup(RBNode x)

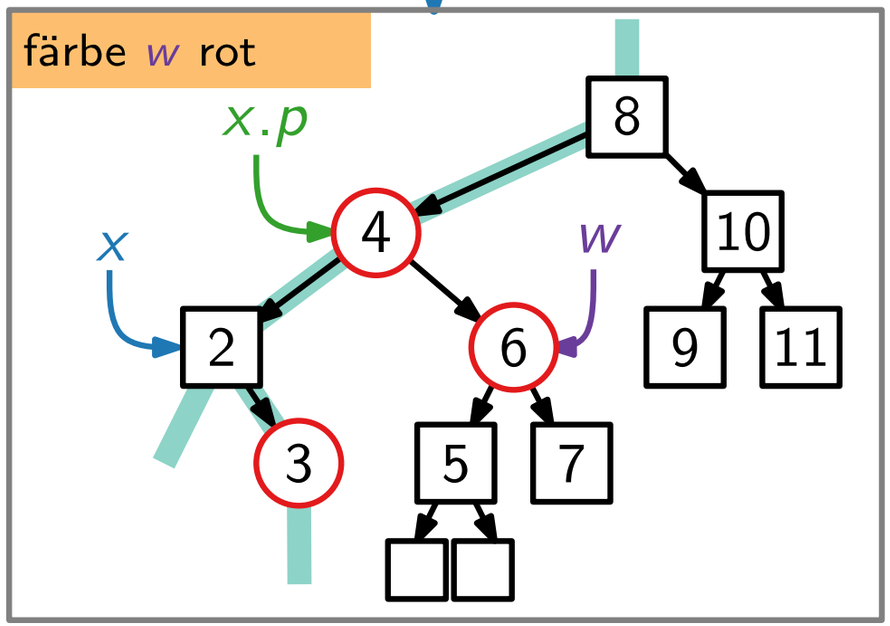
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ... ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```

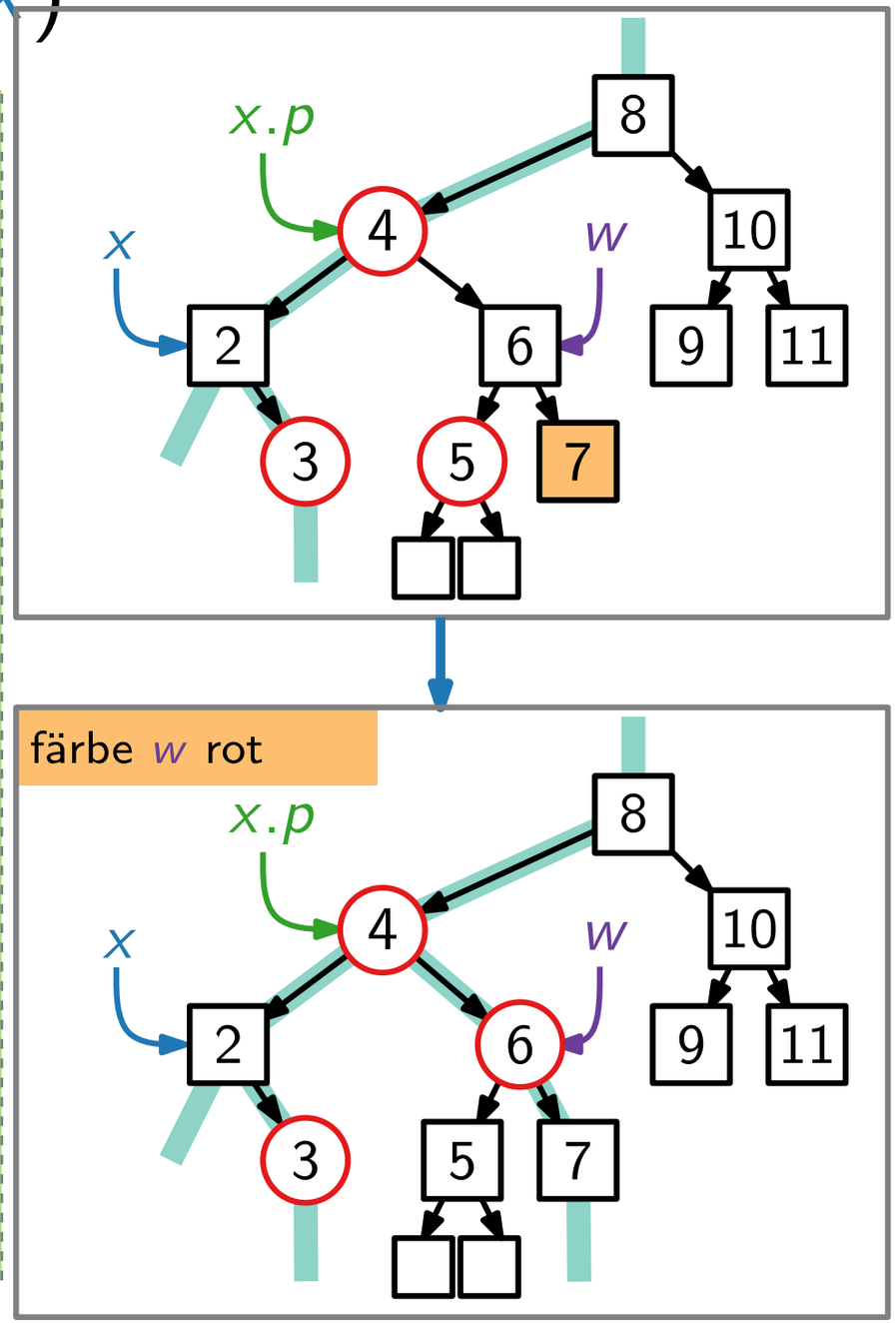




nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

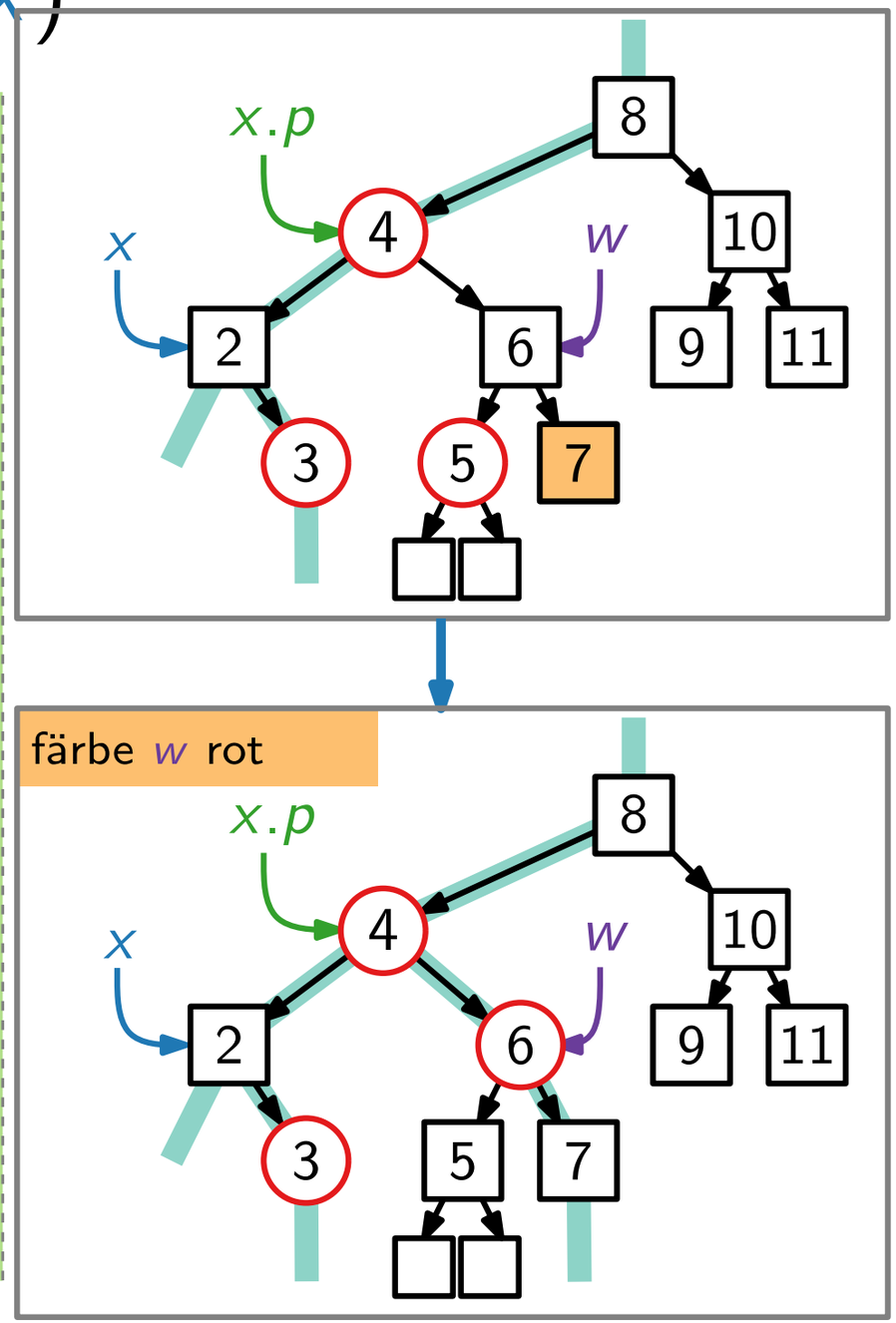
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

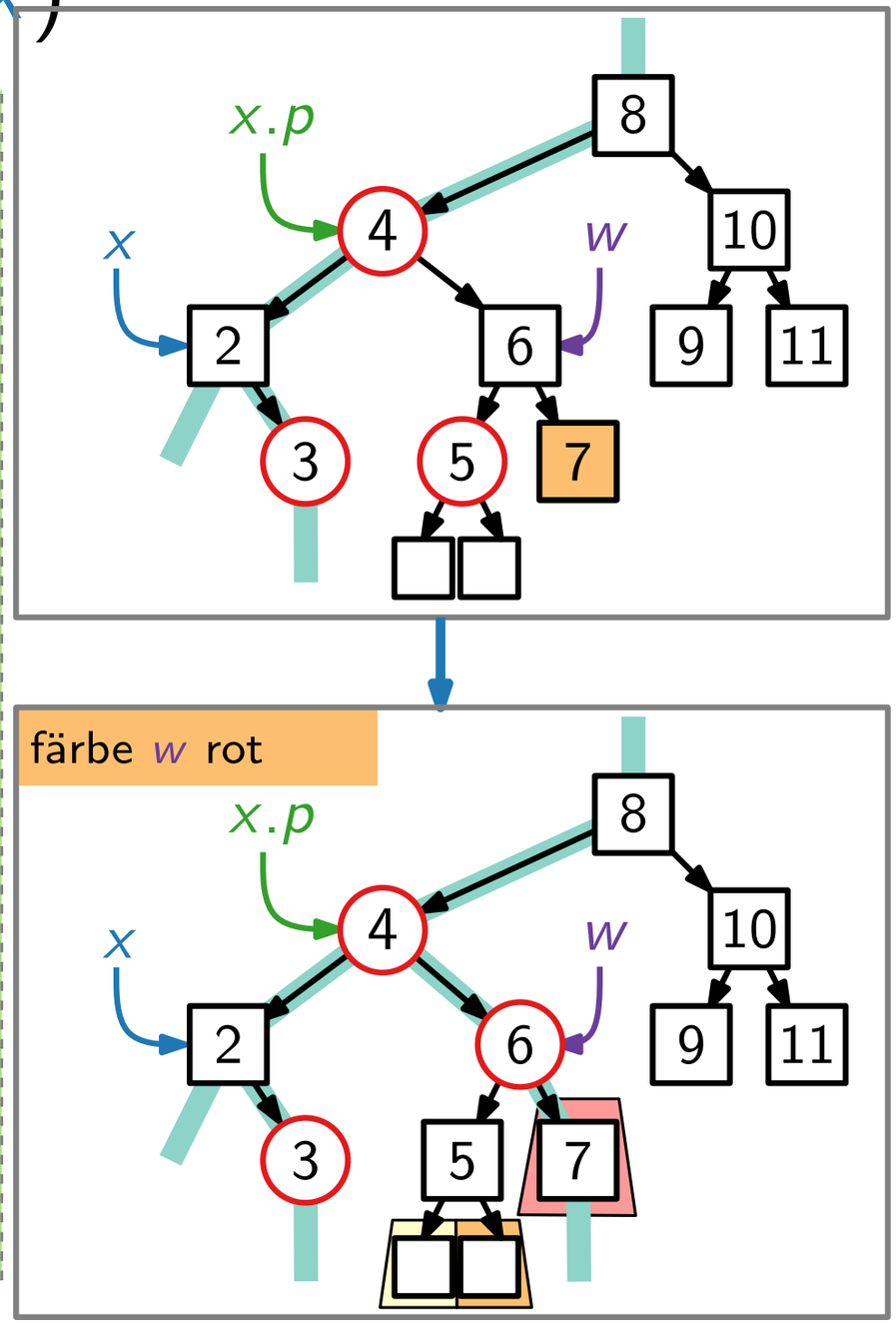
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



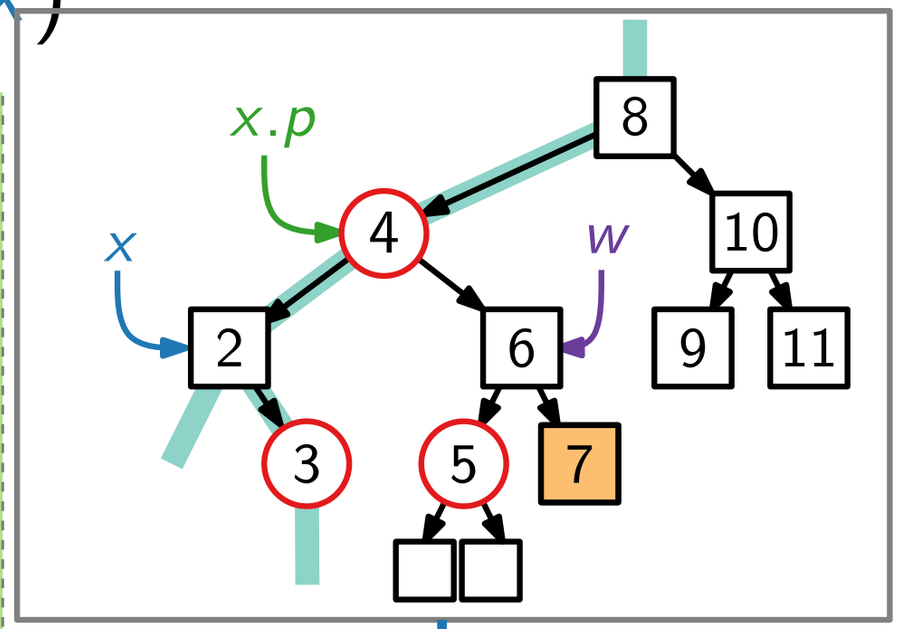
RBDeleteFixup(RBNode x)

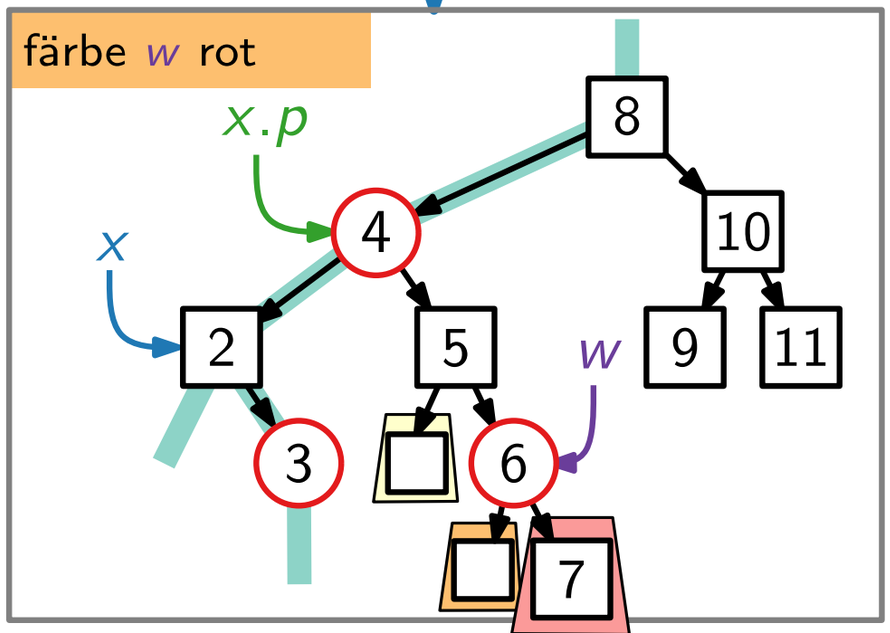
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

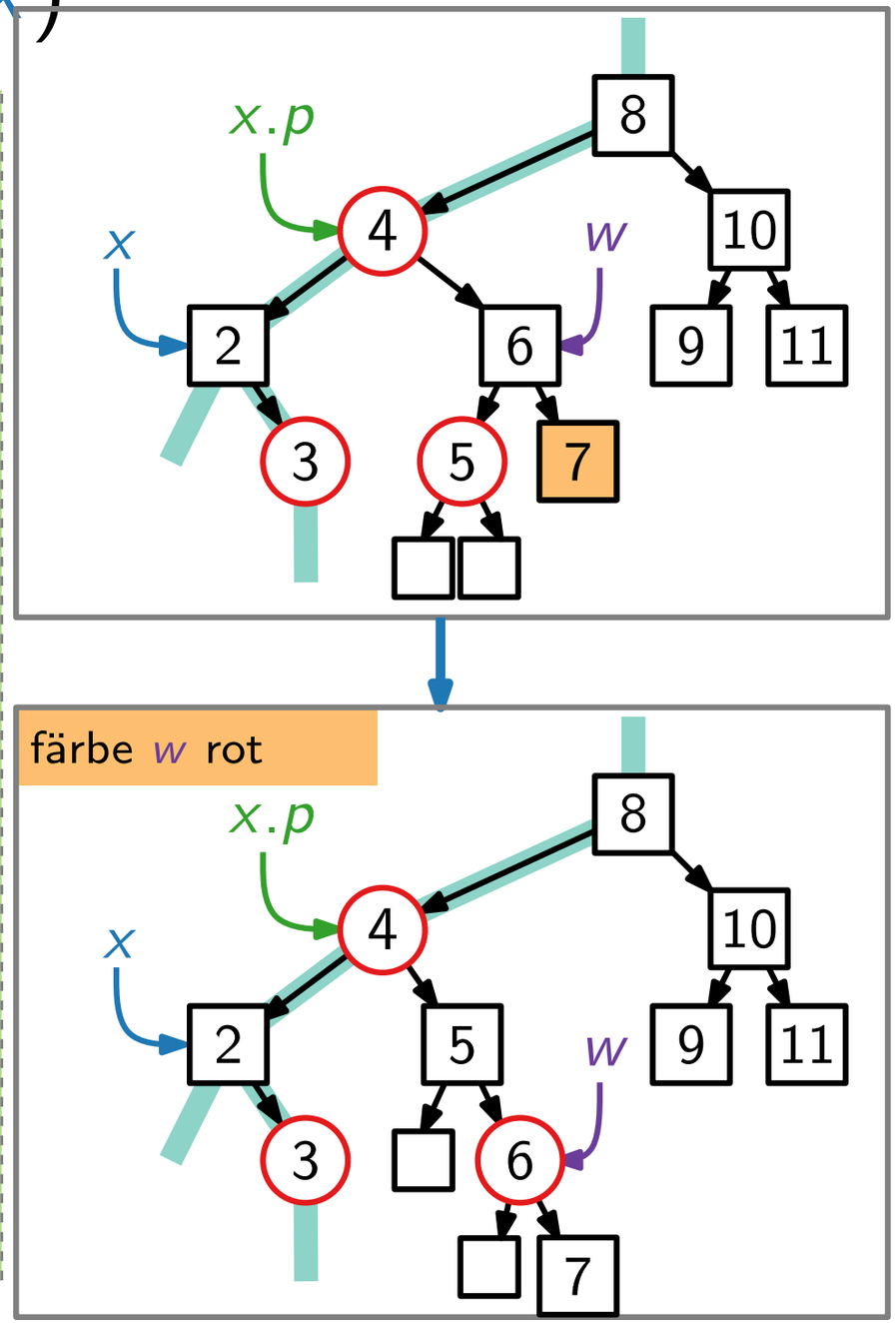
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```





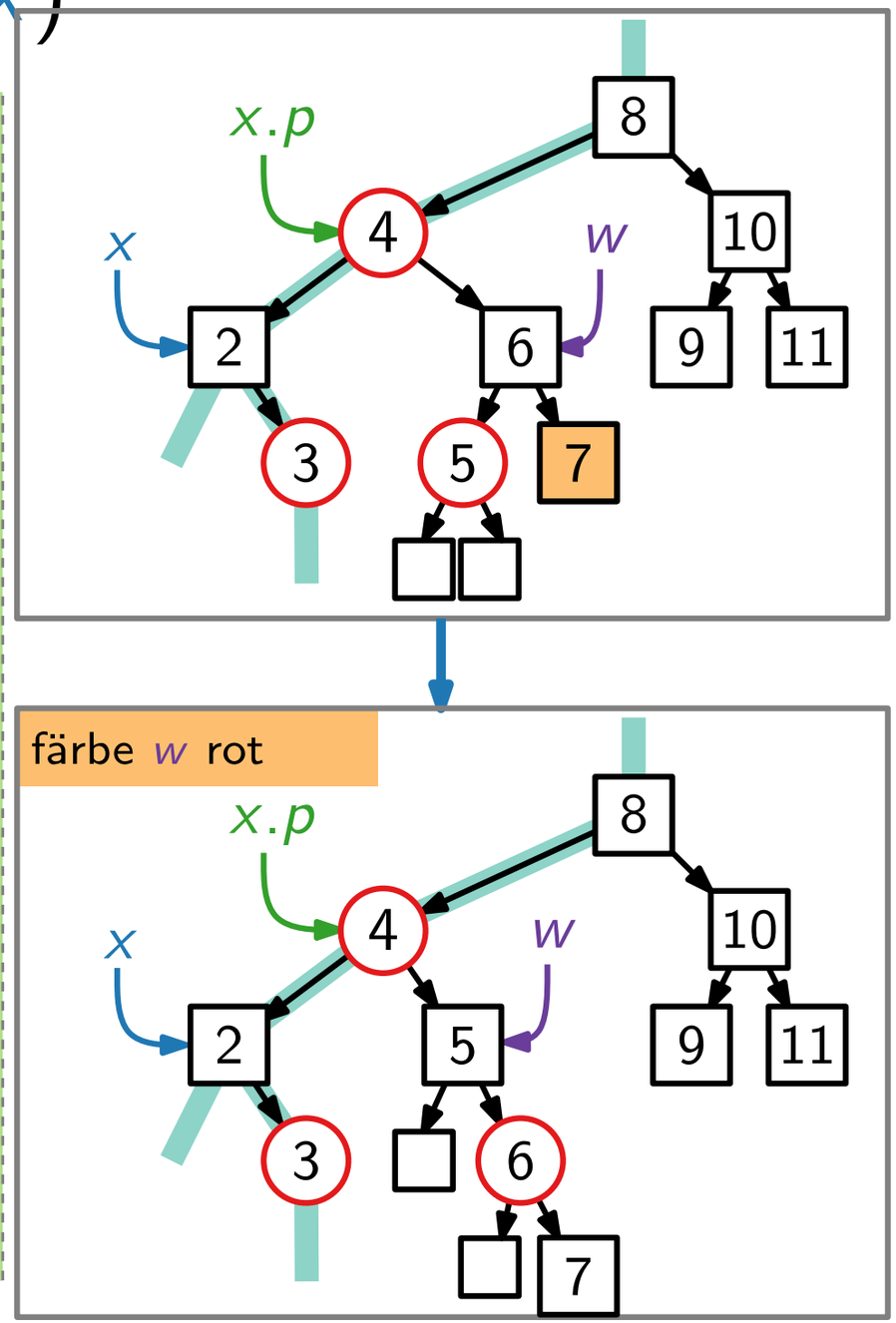
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...  ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



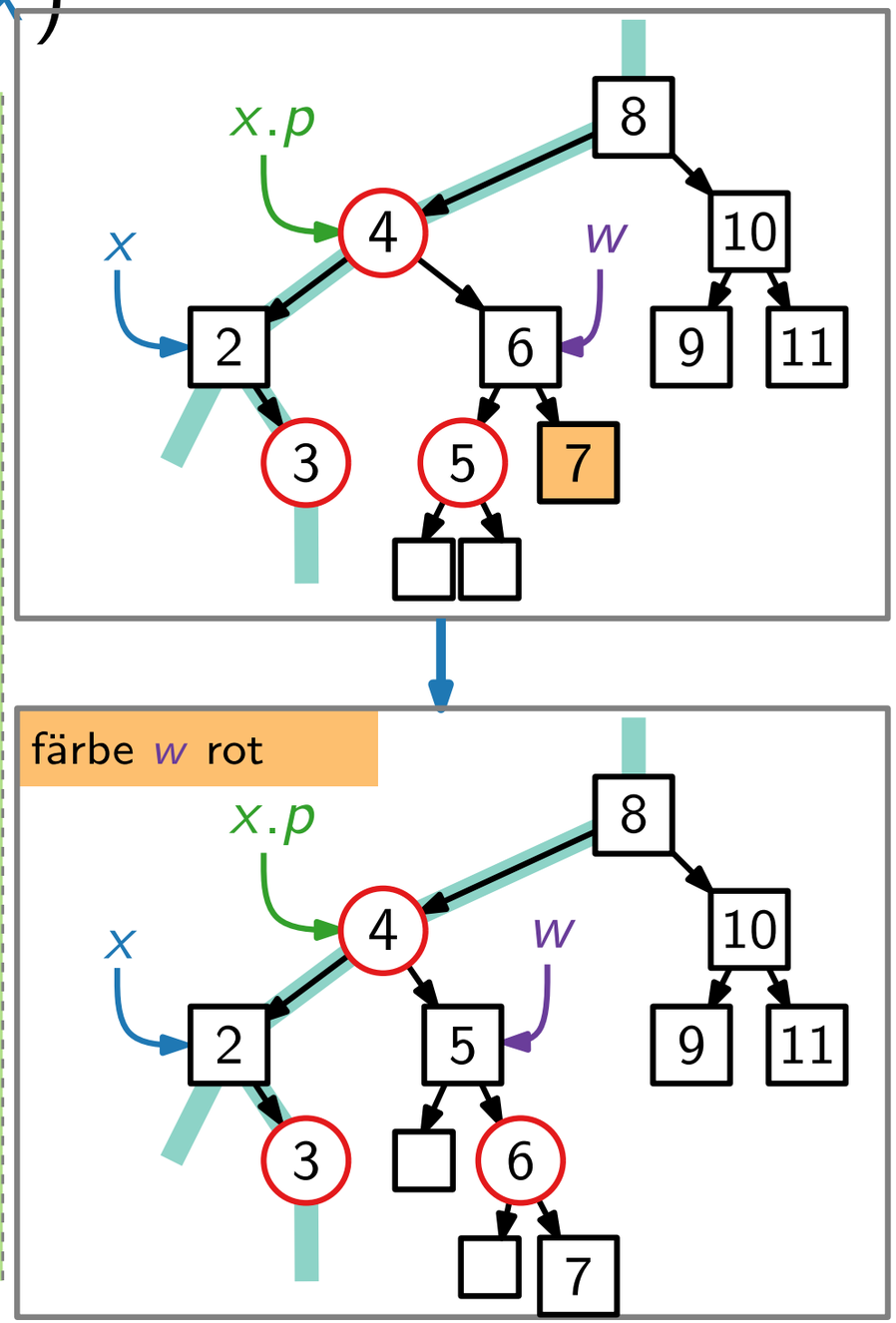
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...  ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

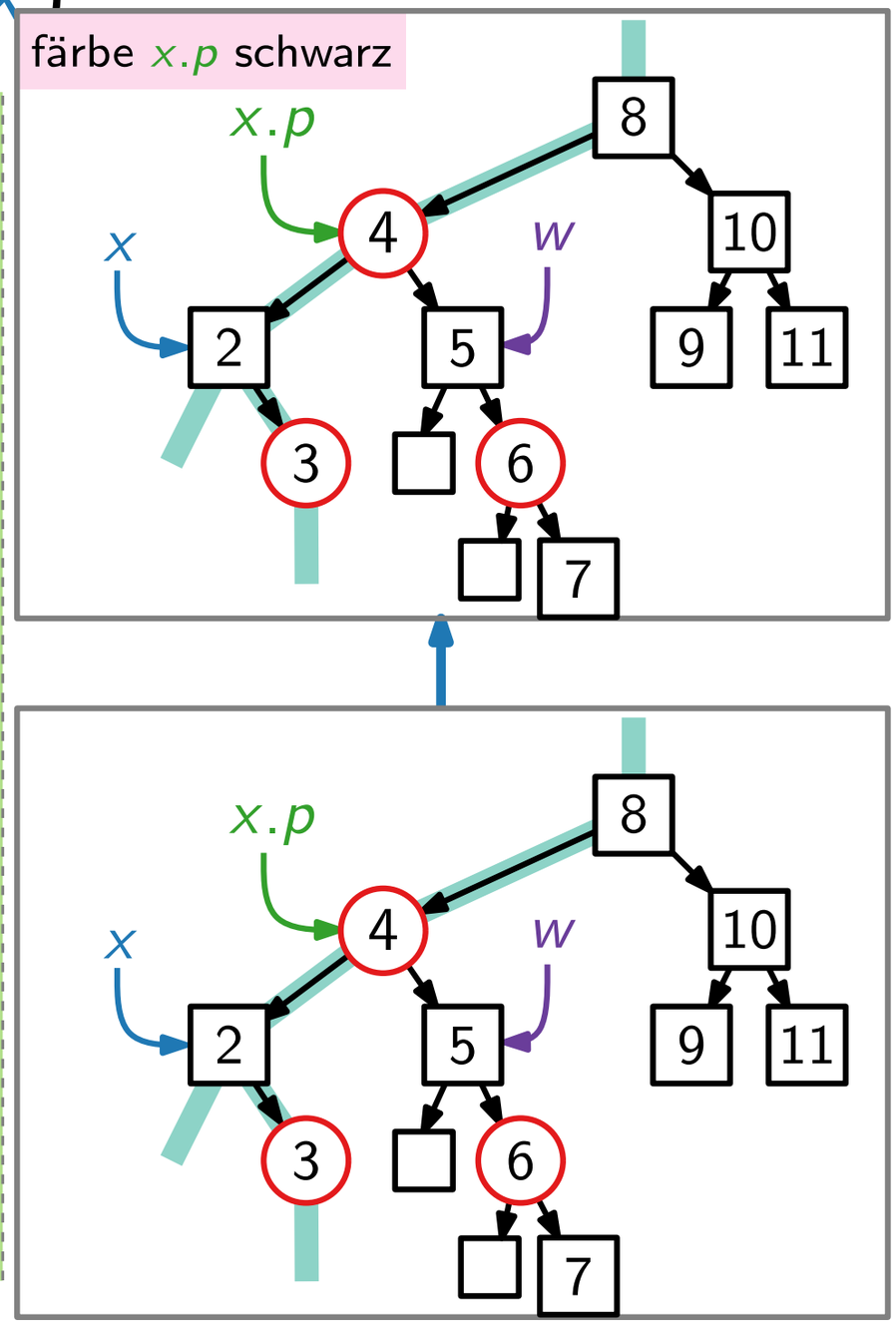
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ... ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

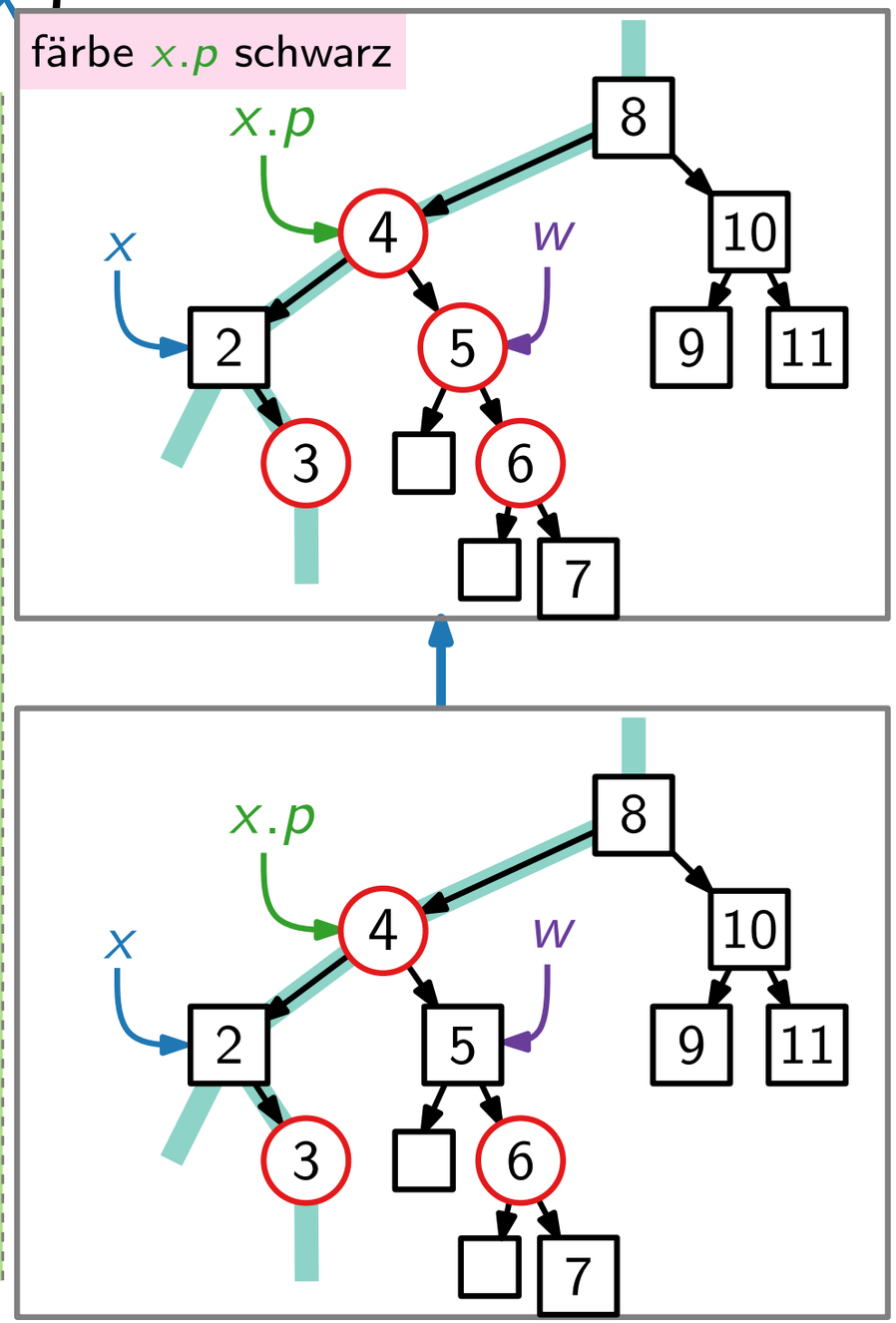
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

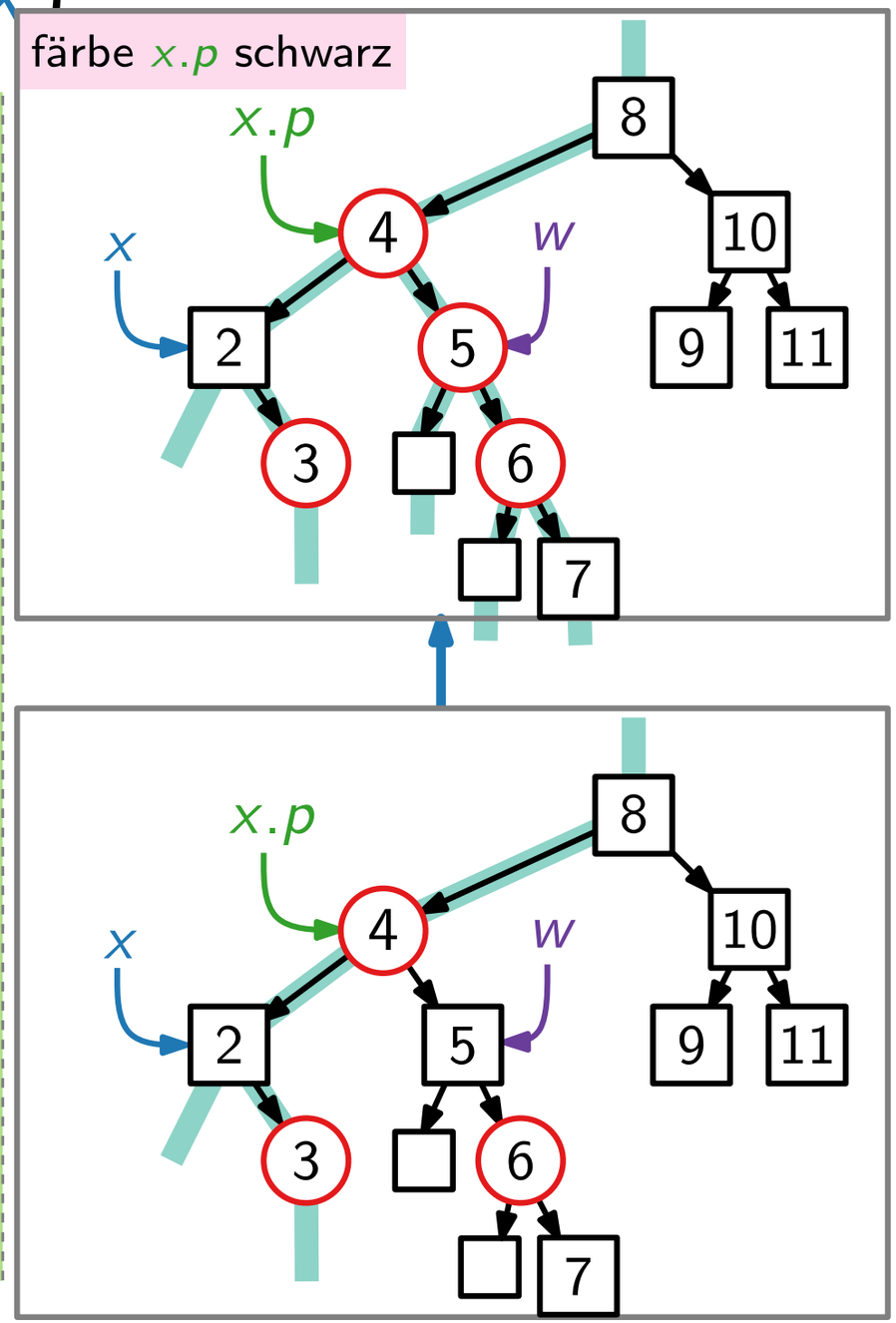
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ... ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

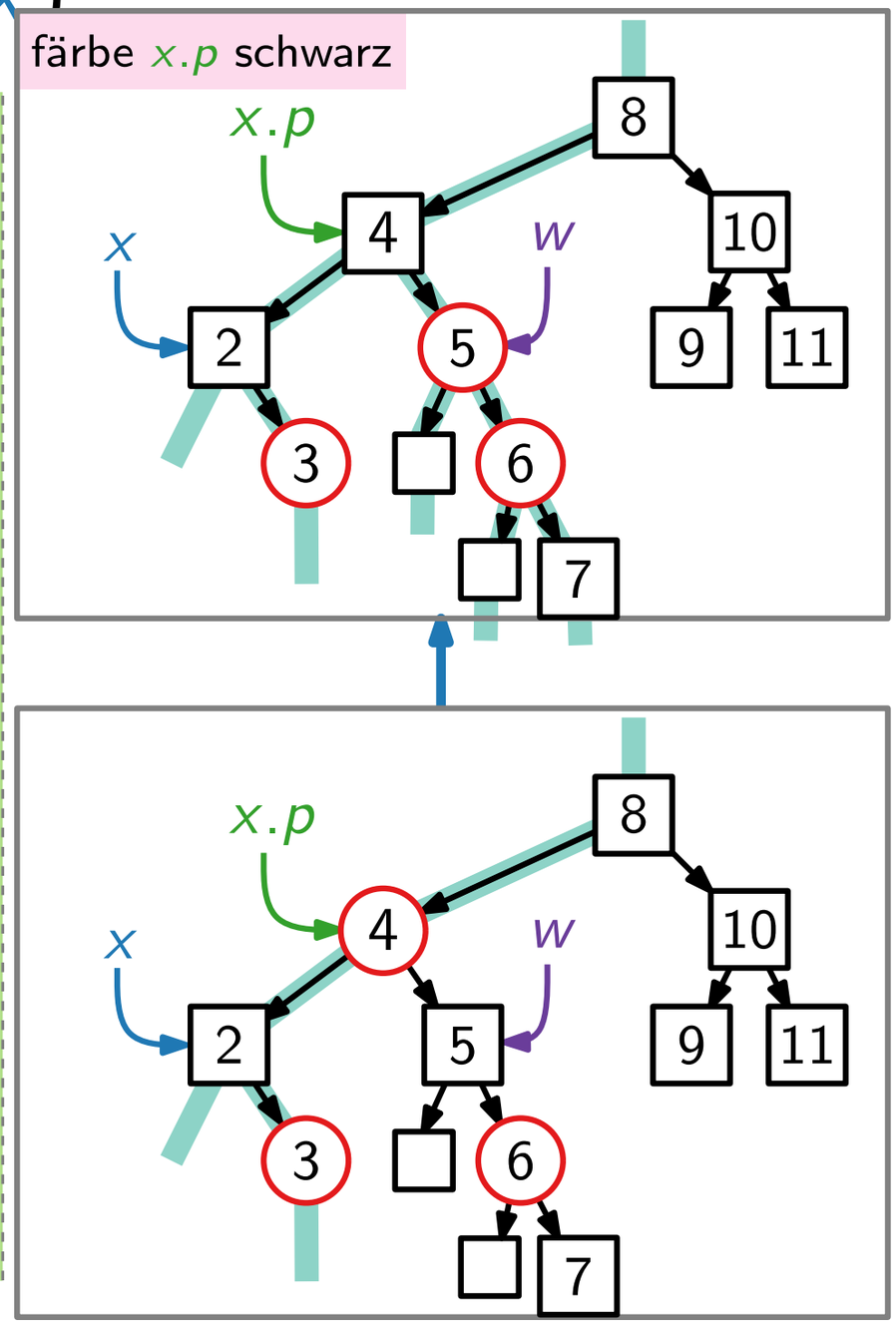
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

RBDeleteFixup(RBNode x)

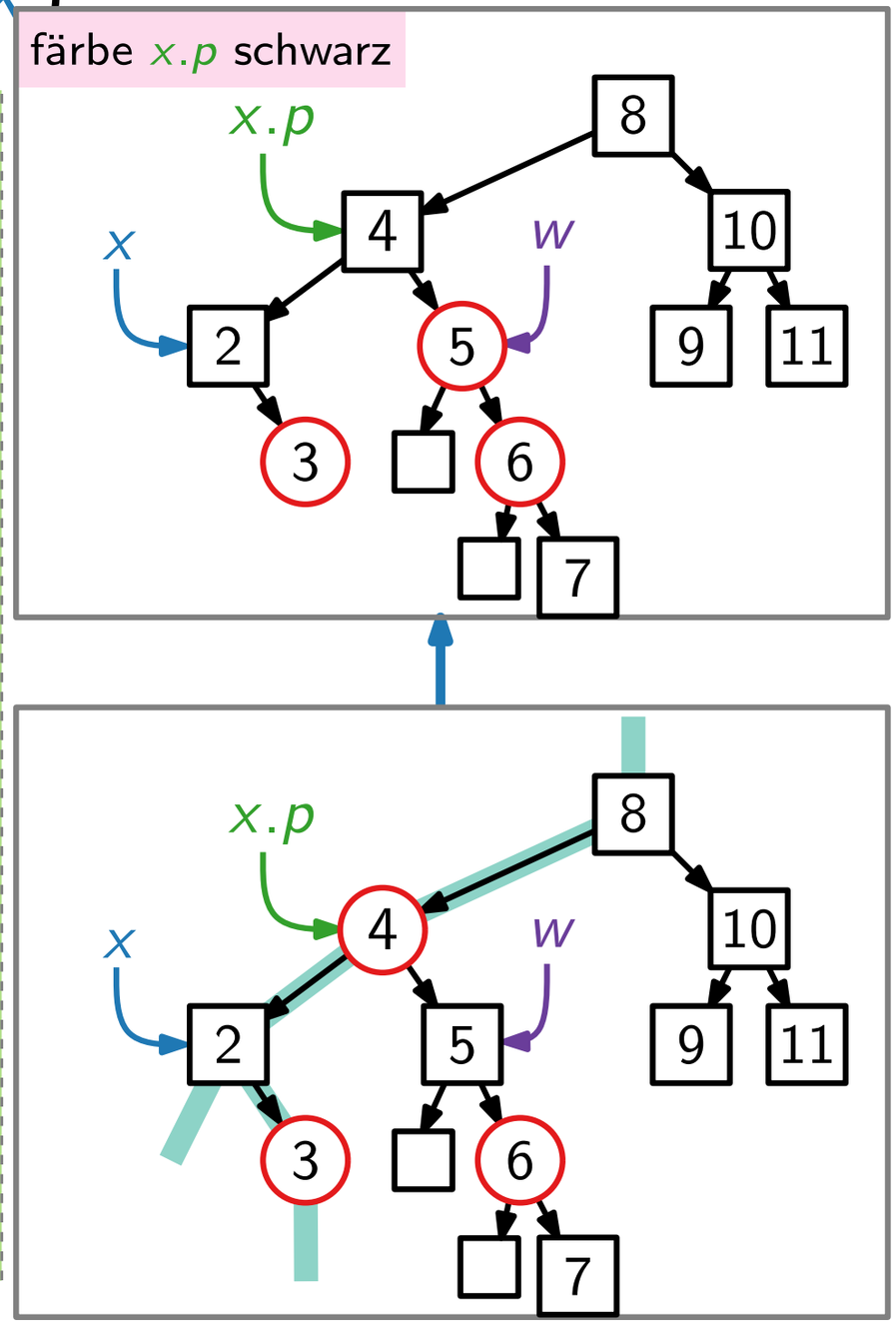
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



nicht klausurrelevant

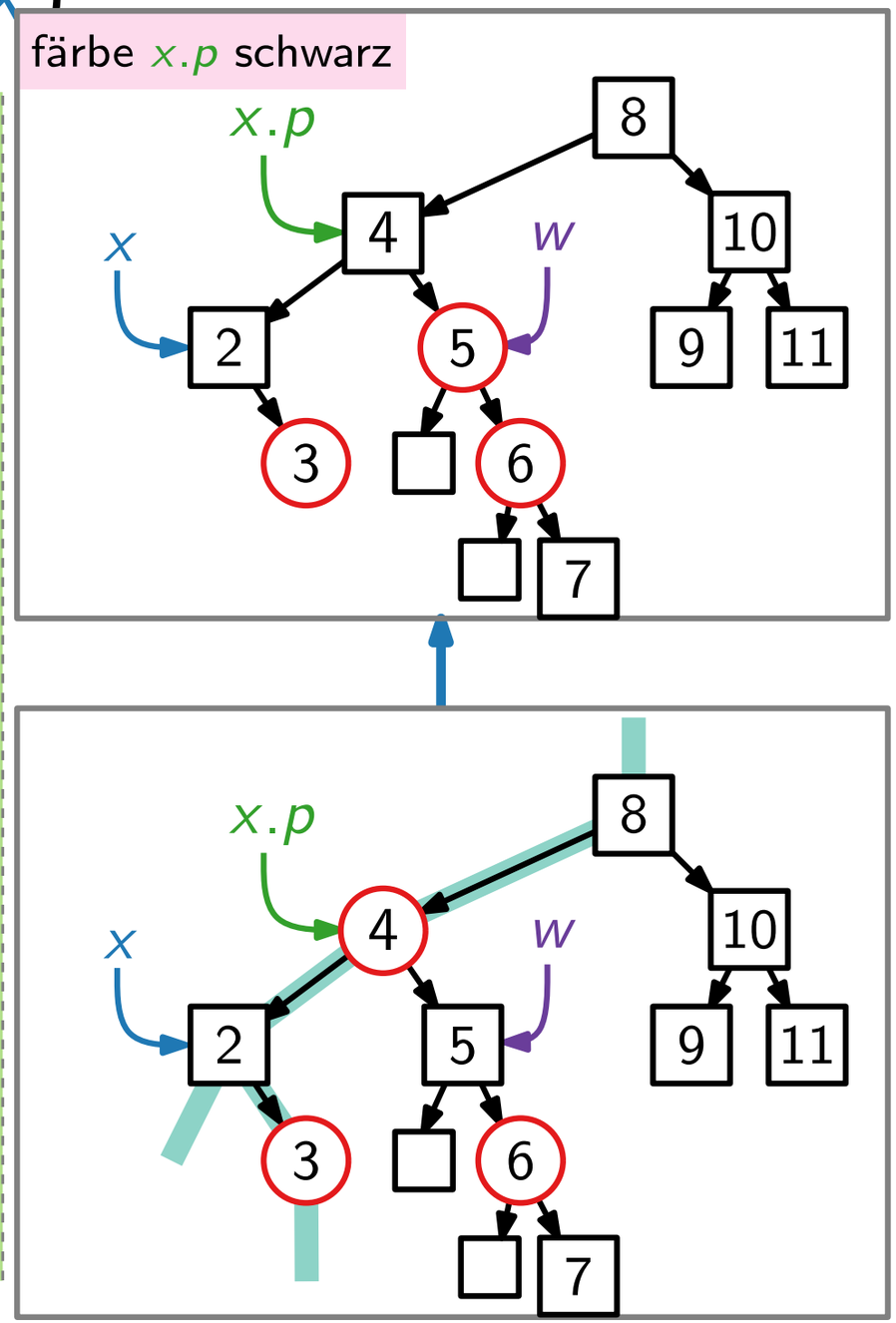
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



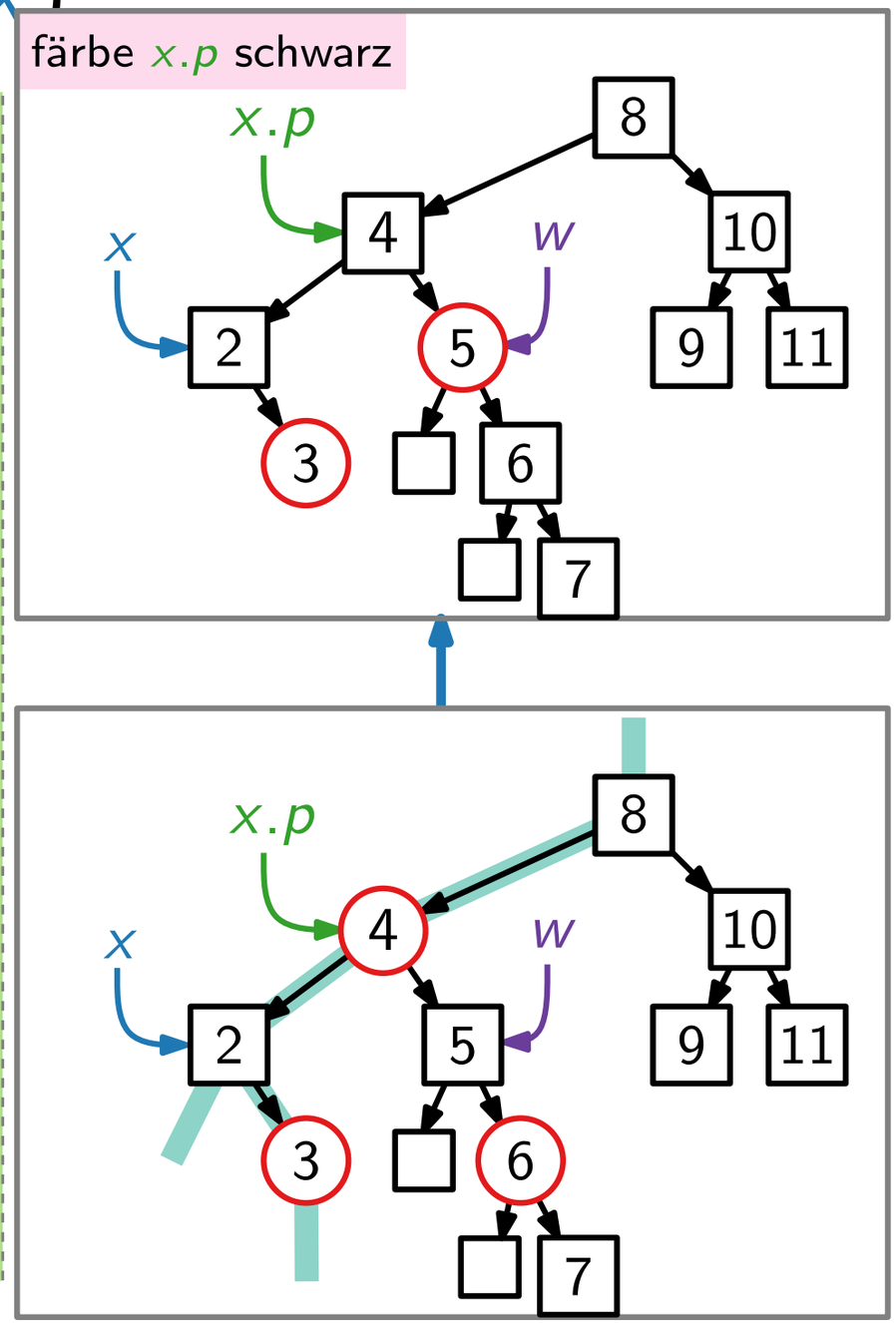
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



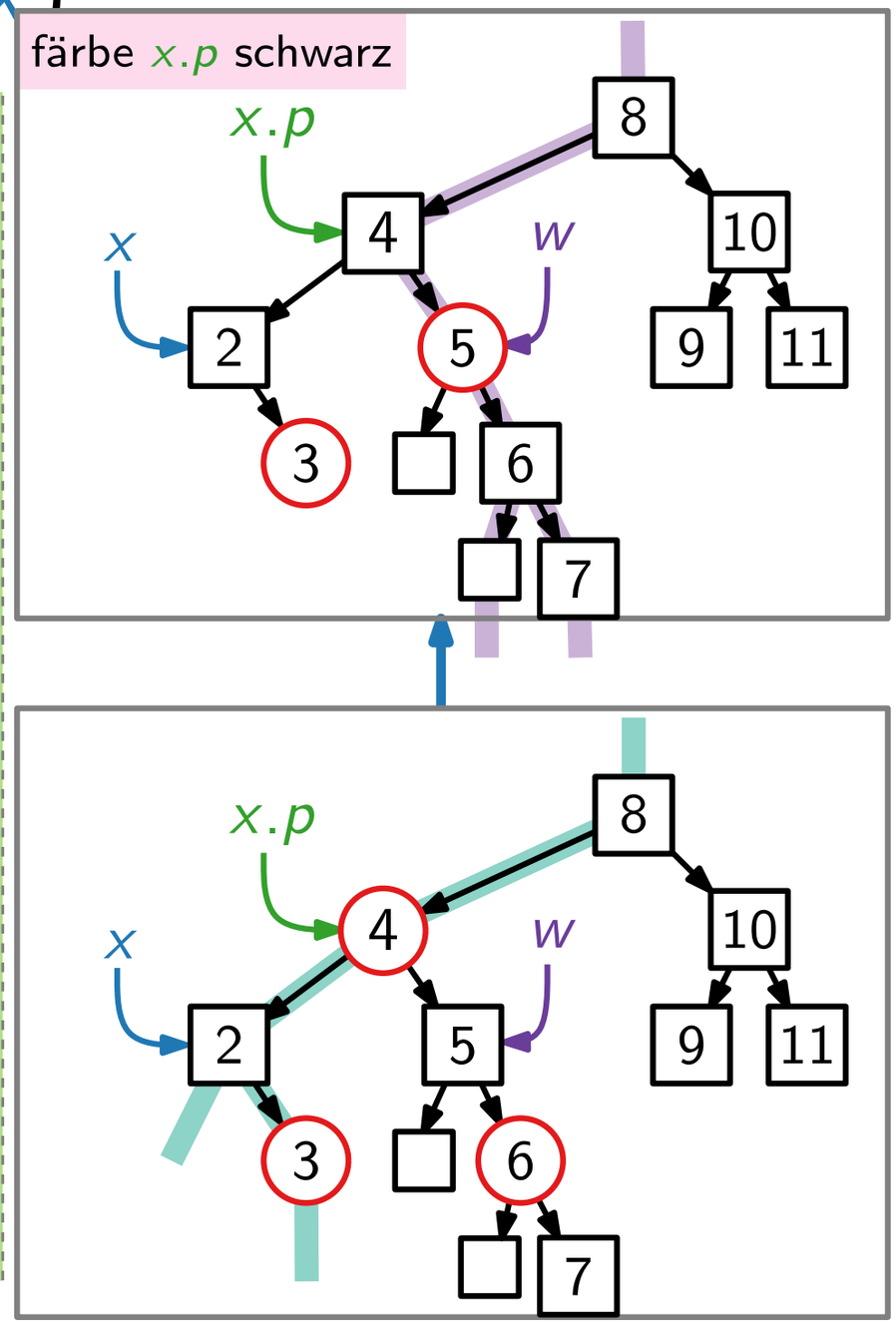
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



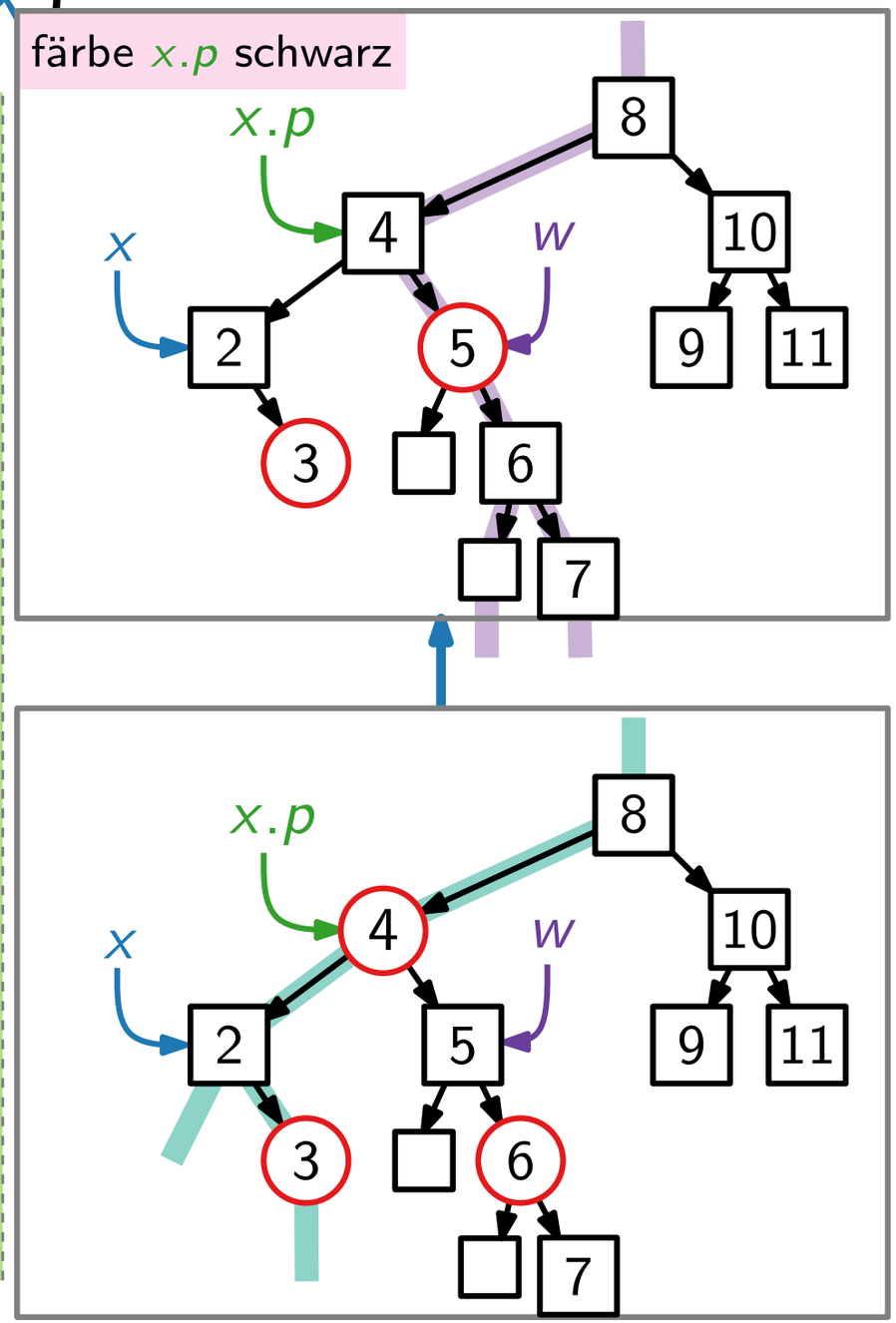
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



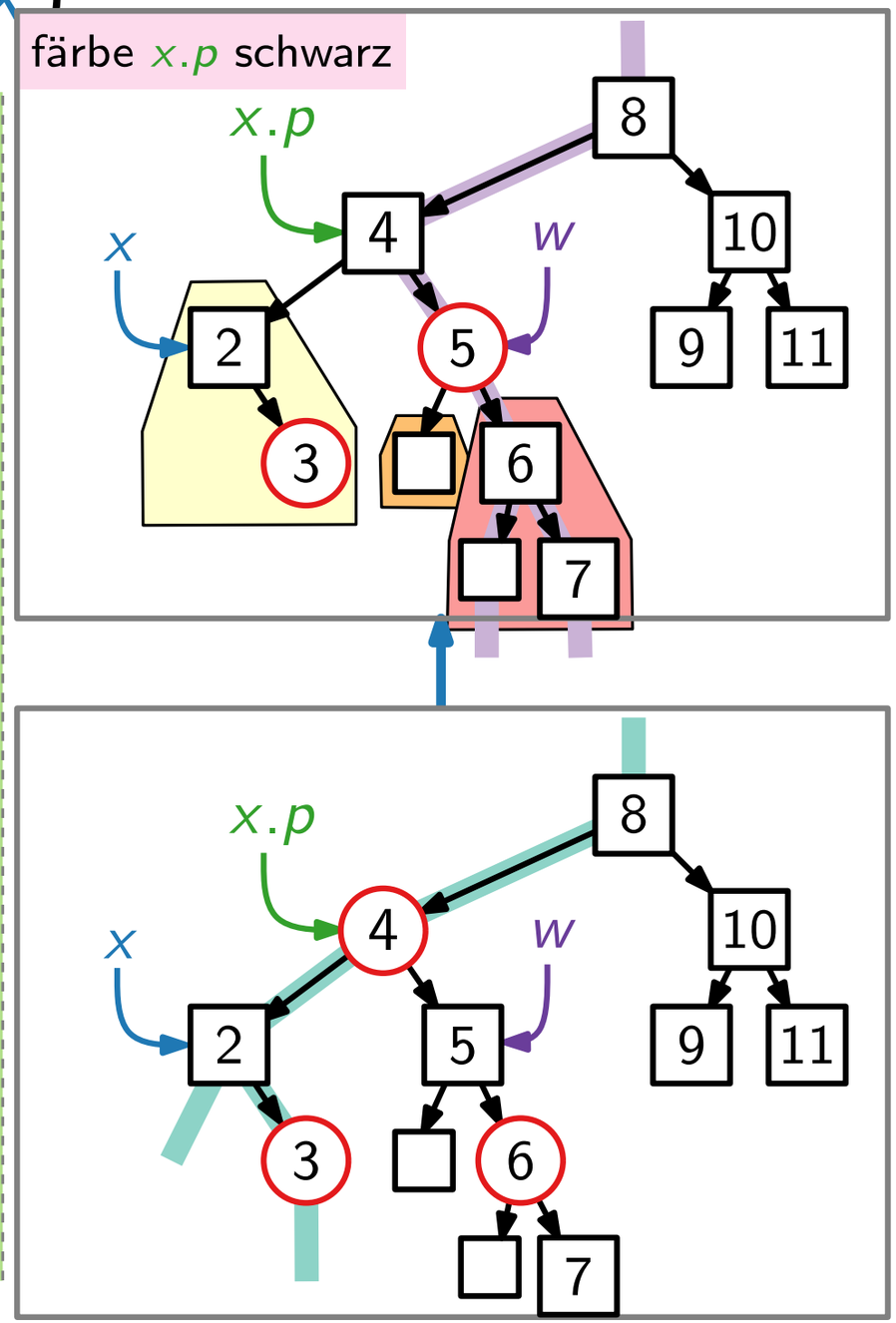
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
            LeftRotate(x.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



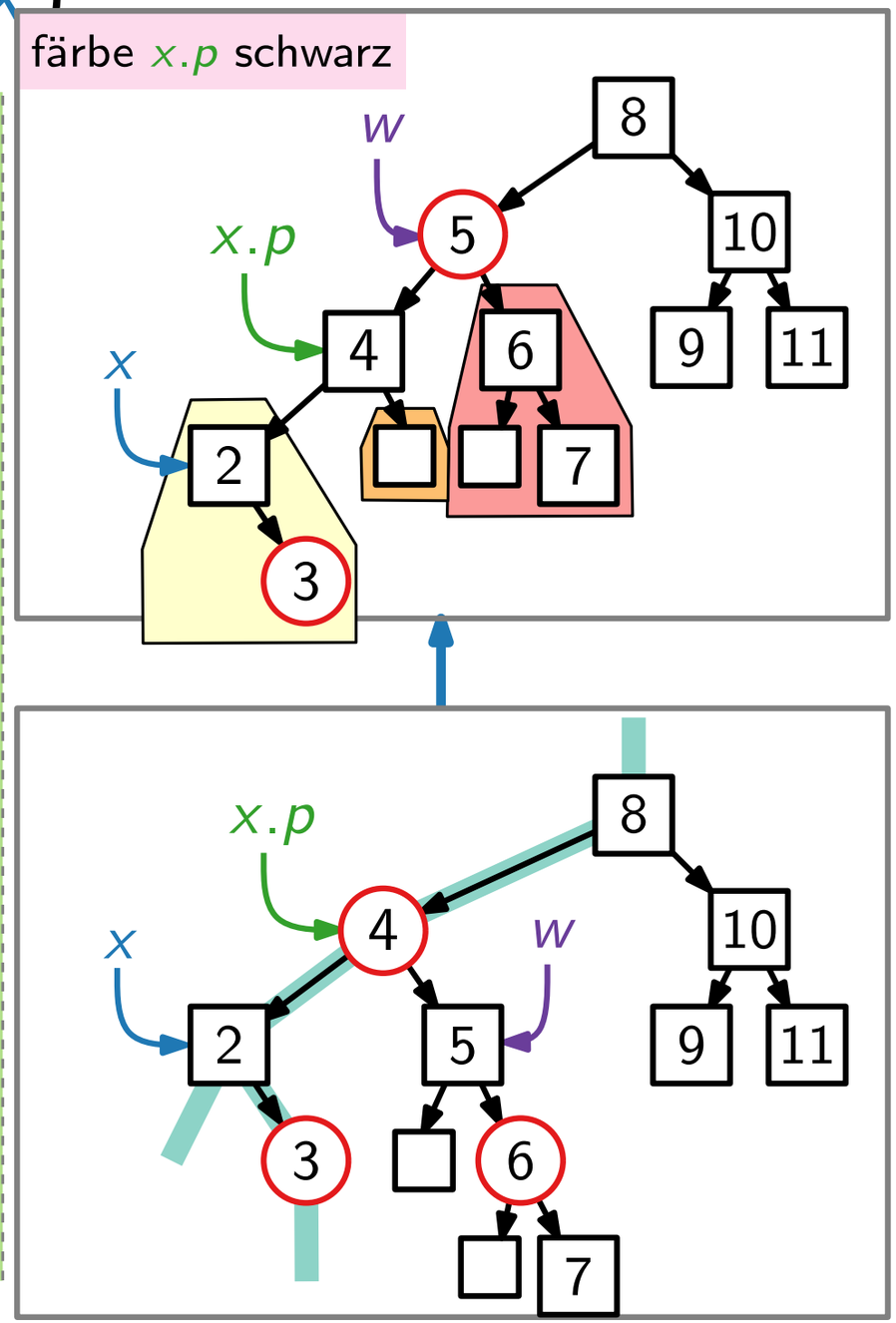
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ... ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
            LeftRotate(x.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



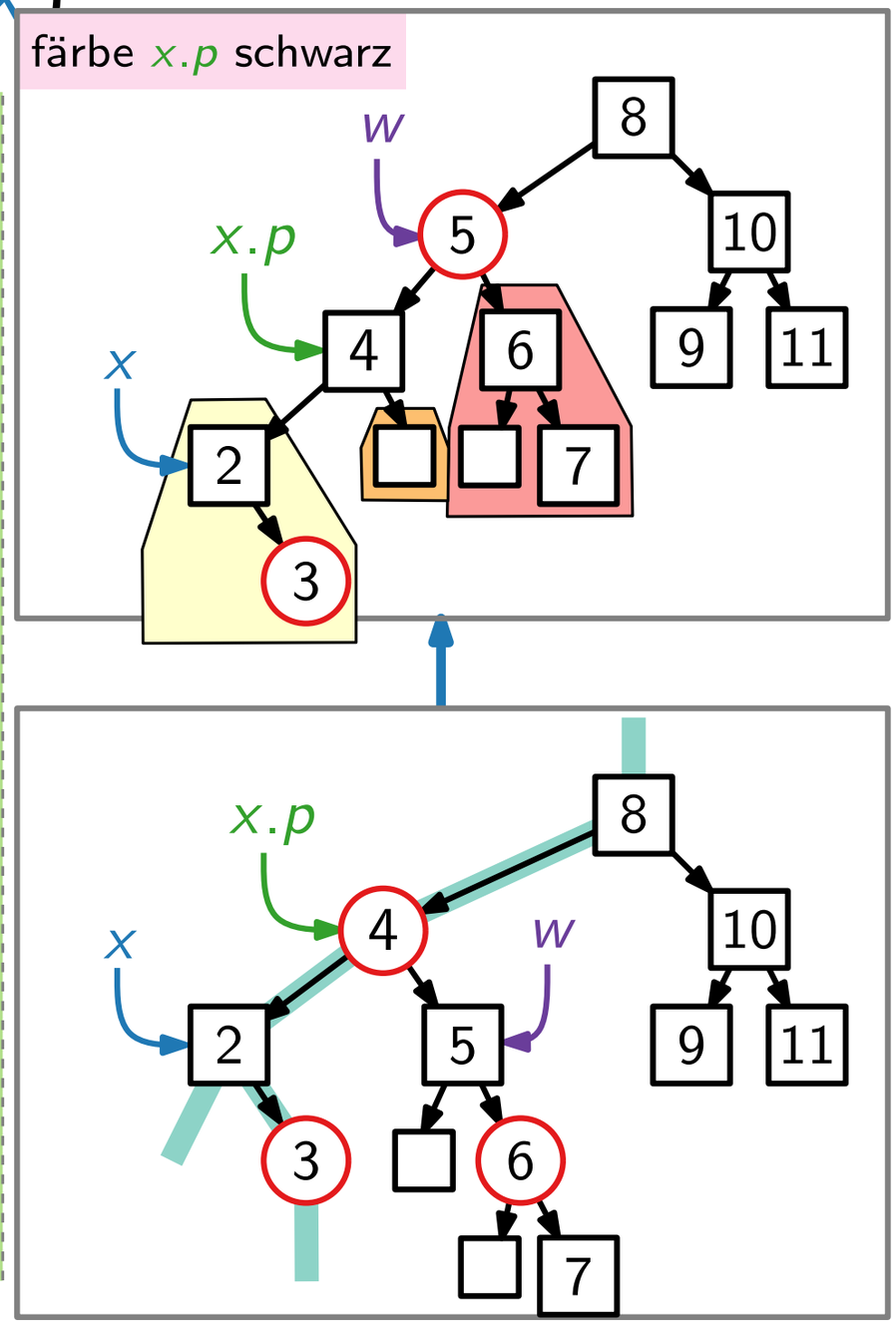
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
            LeftRotate(x.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



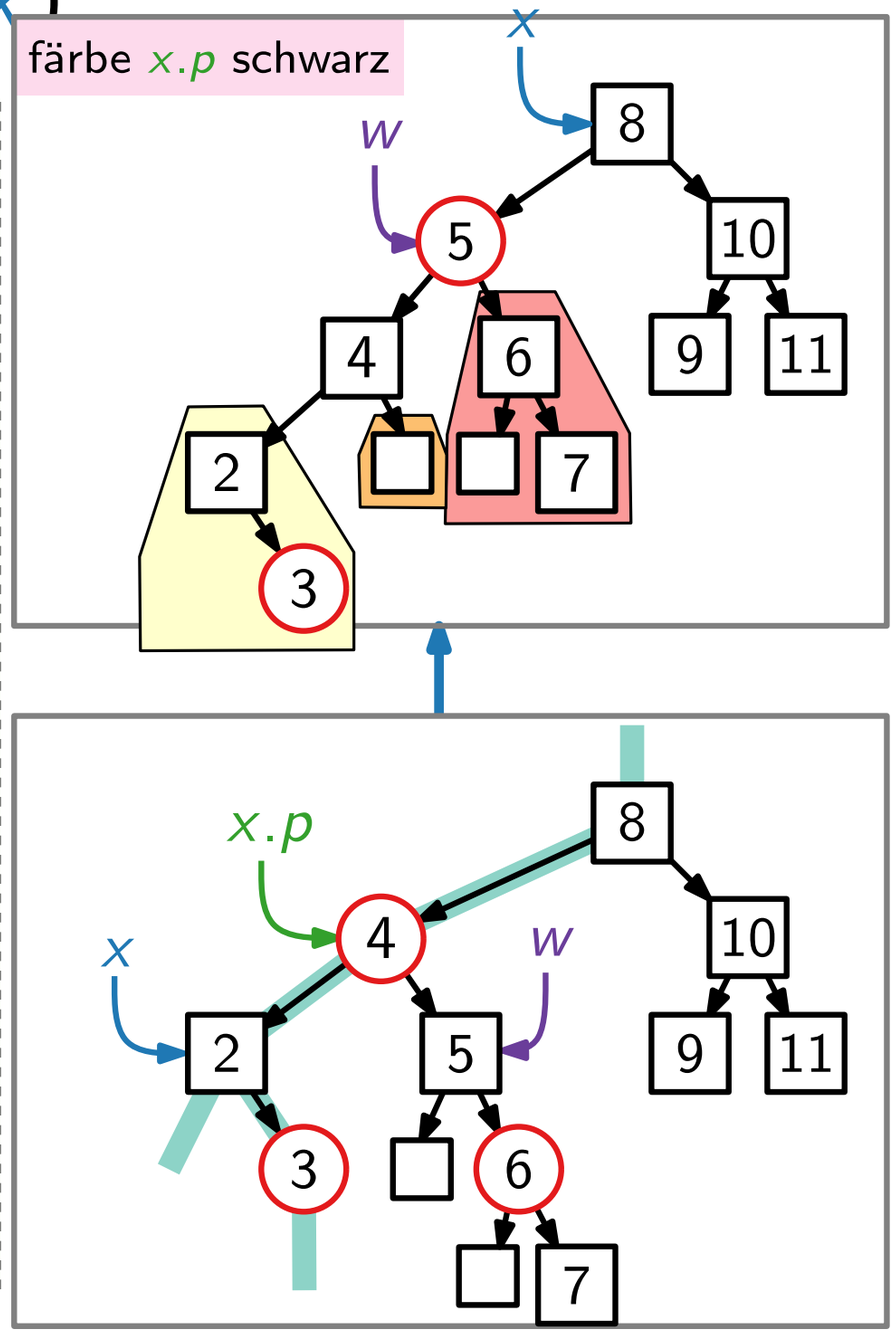
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ...   ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
            LeftRotate(x.p)
            x = root
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        ... ...
        else
            if w.right.color == black then
                w.left.color = black
                w.color = red
                RightRotate(w)
                w = x.p.right
            w.color = x.p.color
            x.p.color = black
            w.right.color = black
            LeftRotate(x.p)
            x = root
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
x.color = black
```



Übersicht

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
sortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
sortiertes Feld		$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^\star$	$\Theta(1)^\star$	–	–
MinHeap	–	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)/-$	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$

* unter bestimmten Annahmen.

Übersicht

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
sortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
sortiertes Feld		$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^\star$	$\Theta(1)^\star$	–	–
MinHeap	–	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)/-$	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$
Rot-Schwarz-Baum	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

* unter bestimmten Annahmen.