Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2023/24

13. Vorlesung

Binäre Suchbäume

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Zwischentest II: Do, 14.12., 8:25 – 10:00

- Zufallsexperimente, (Indikator-) Zufallsvariable, Erwartungswert
- (Randomisiertes) QuickSort
- Untere Schranke für WC-Laufzeit von vergleichsbasierten Sortierverfahren
- Linearzeit-Sortierverfahren
- Auswahlproblem (Median): randomisiert & deterministisch
- Elementare Datenstrukturen
- Hashing
- Binäre Suchbäume (Rot-Schwarz-Bäume noch nicht)

Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer sich ändernden Menge M

Abstrakter Datentyp	*Funktionalität*	
ptr Insert(key k, info i)	Änderungen	**Wörterbuch**
Delete(ptr x)		
ptr Search(key k)	Anfragen	
ptr Minimum()		
ptr Maximum()		
ptr Predecessor(ptr x)		
ptr Successor(ptr x)		

Implementierung: je nachdem...

Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$

Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$

$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$

$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

*) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^\star$	$\Theta(1)^\star$	–	–

$^\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

⋆) *unter bestimmten Annahmen.*

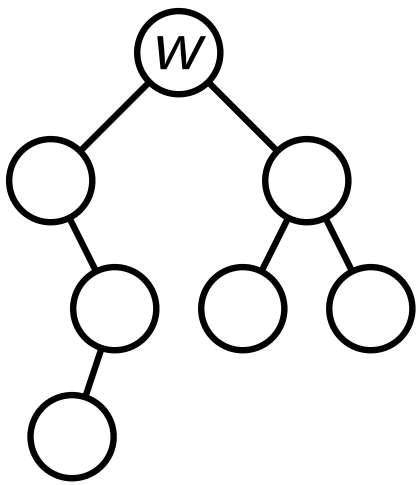
	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^{\star}$	$\Theta(1)^{\star}$	–	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$

$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

⋆) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^{\star}$	$\Theta(1)^{\star}$	–	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



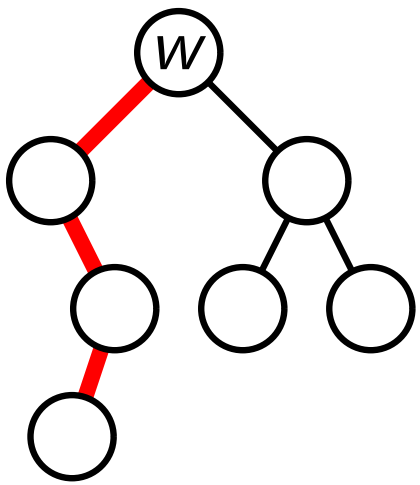
$h(T) =$ Höhe des Baums T

$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

⋆) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^{\star}$	$\Theta(1)^{\star}$	–	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$h(T)$ = Höhe des Baums T

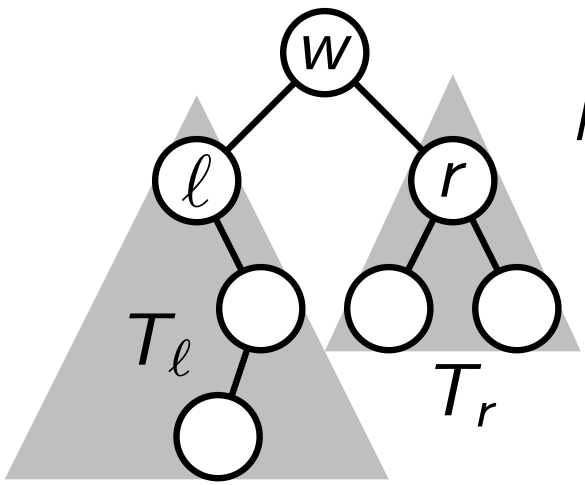
= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

⋆) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^{\star}$	$\Theta(1)^{\star}$	–	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$h(T)$ = Höhe des Baums T

= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

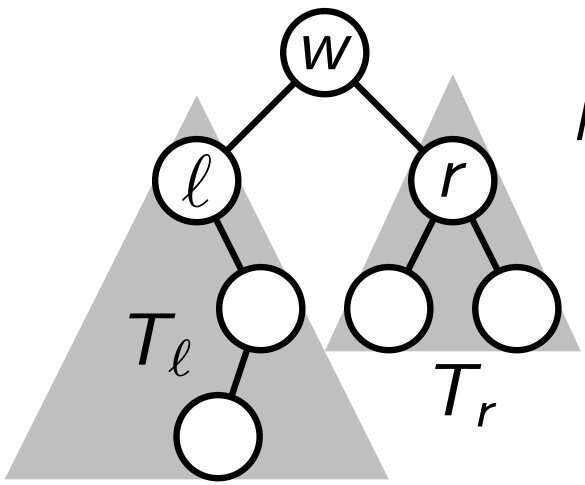
$$= \begin{cases} \textit{Finden Sie die Rekursionsgleichung!} & \text{falls Baum = Blatt} \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Implementierung

⋆) *unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^{\oplus}$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	**?**	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^{\star}$	$\Theta(1)^{\star}$	–	–
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



$h(T)$ = Höhe des Baums T

= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls Baum} = \text{Blatt} \\ 1 + \max\{h(T_\ell), h(T_r)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

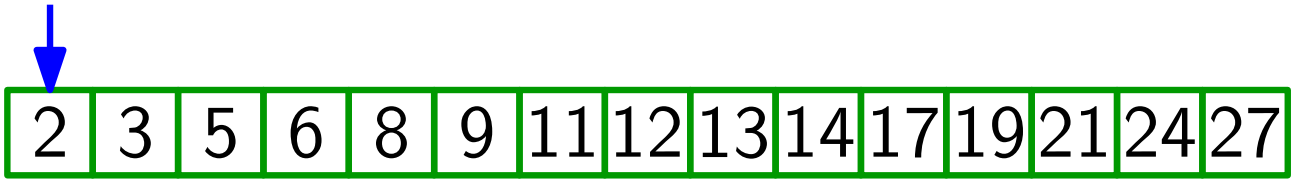
$\oplus$) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Suche im sortierten Feld

2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27

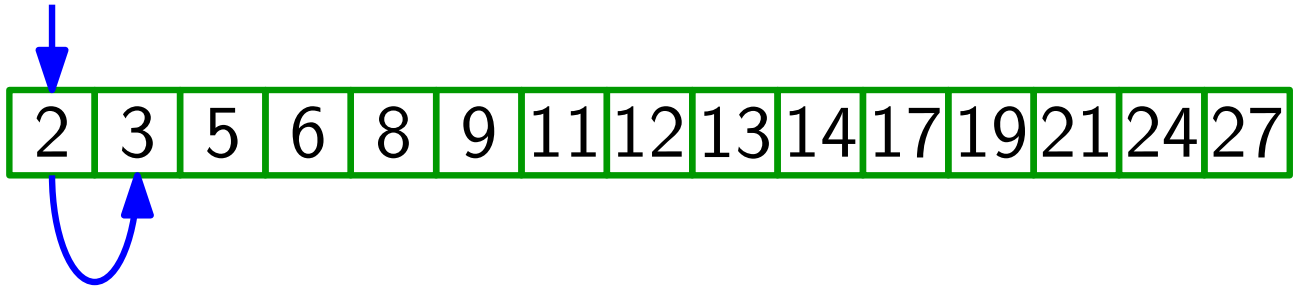
Suche 21!

Suche im sortierten Feld



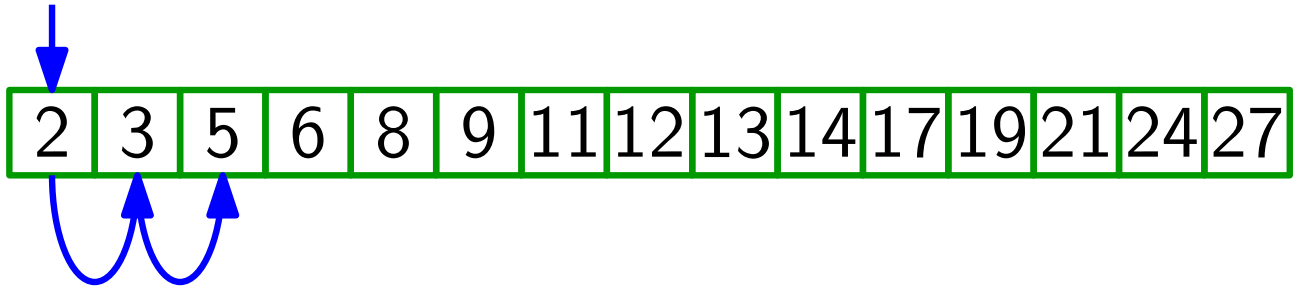
Suche 21!

Suche im sortierten Feld



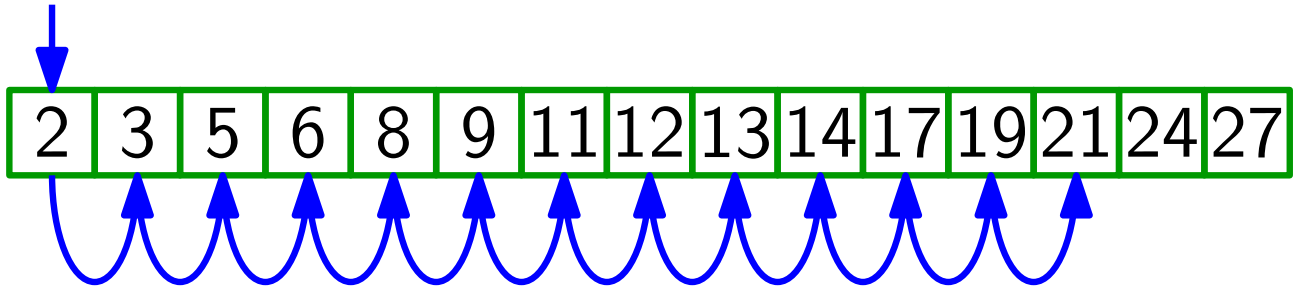
Suche 21!

Suche im sortierten Feld



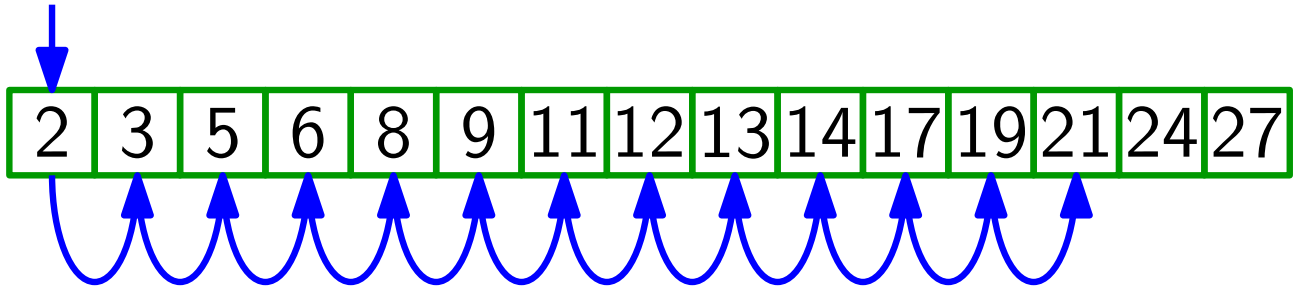
Suche 21!

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte

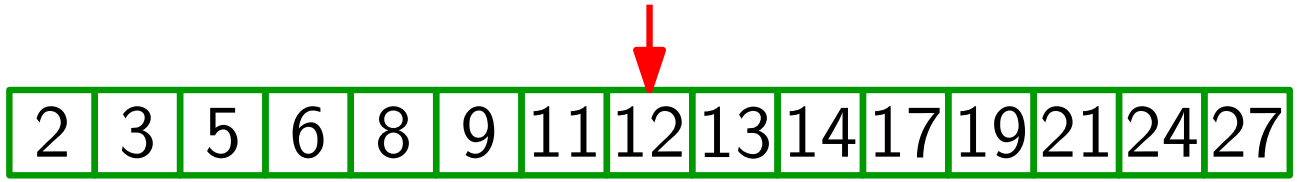
Suche im sortierten Feld

2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	17	19	21	24	27

Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte

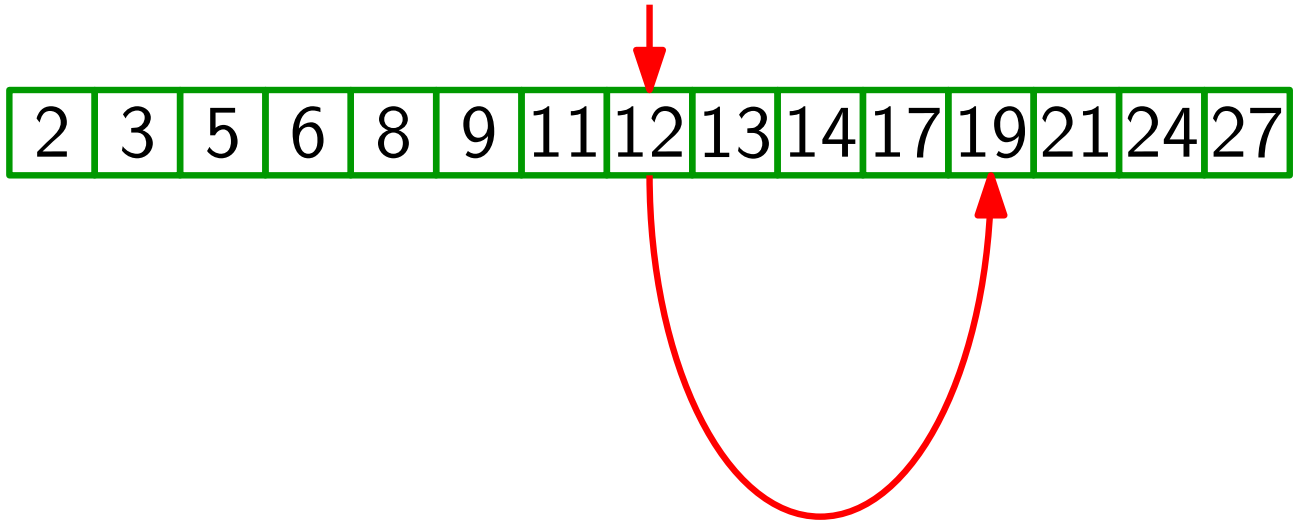
Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte

Suche im sortierten Feld

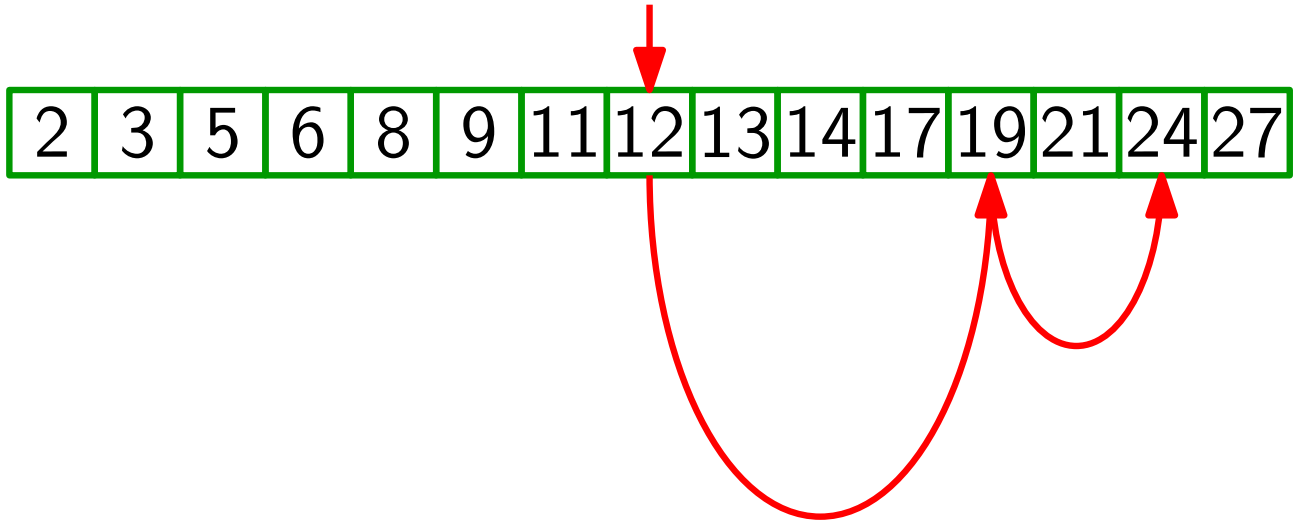


Suche 21!

hier *im Worst Case*

Lineare Suche: 13 *n* Schritte

Suche im sortierten Feld

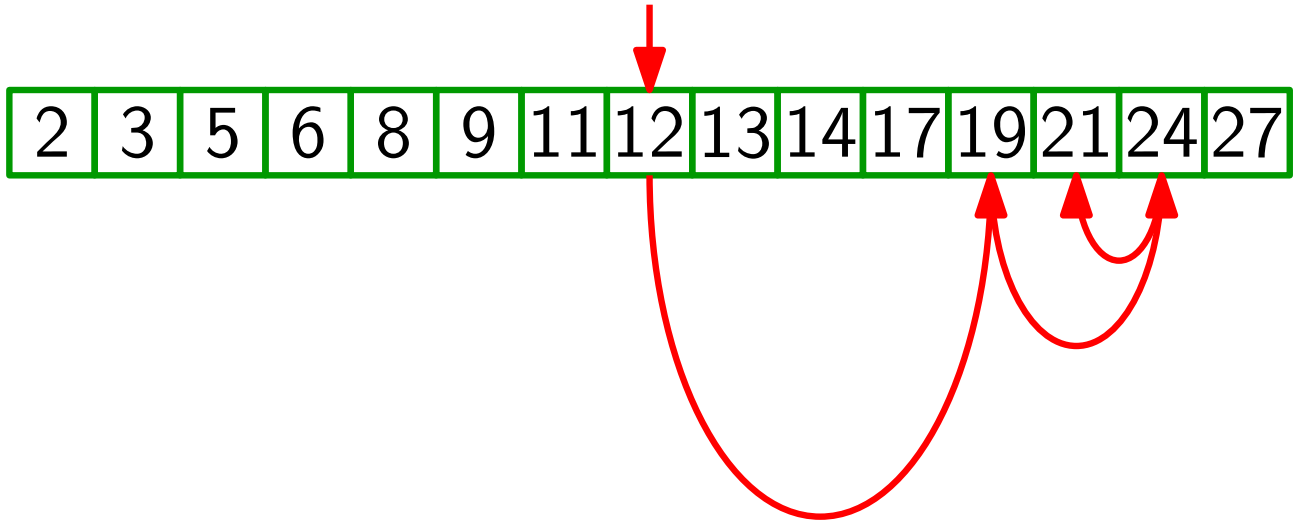


Suche 21!

hier *im Worst Case*

Lineare Suche: 13 *n* Schritte

Suche im sortierten Feld

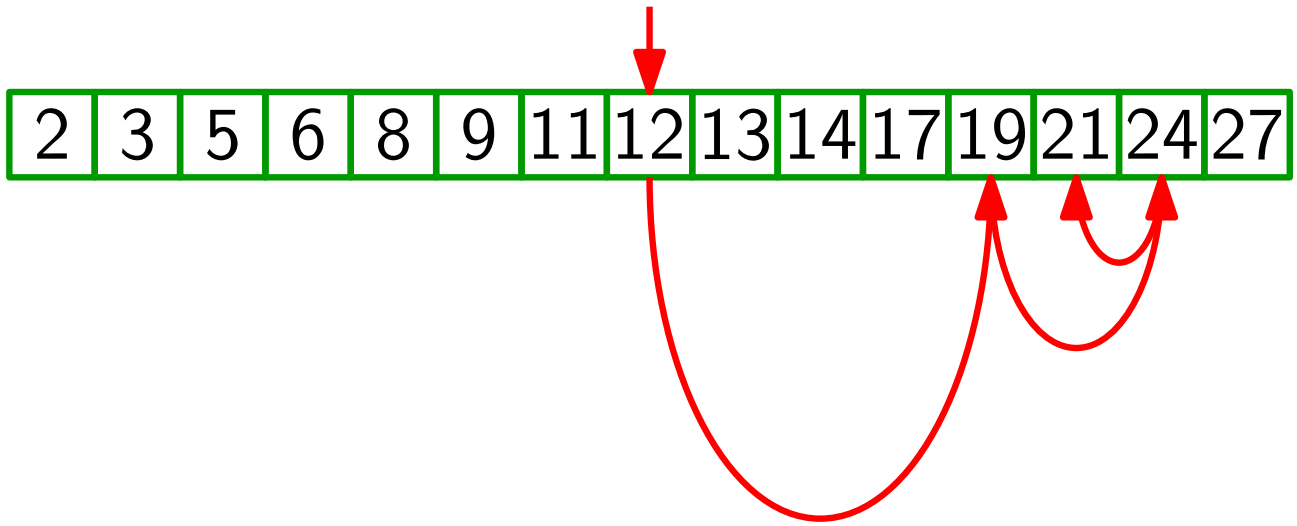


Suche 21!

hier *im Worst Case*

Lineare Suche: 13 *n* Schritte

Suche im sortierten Feld

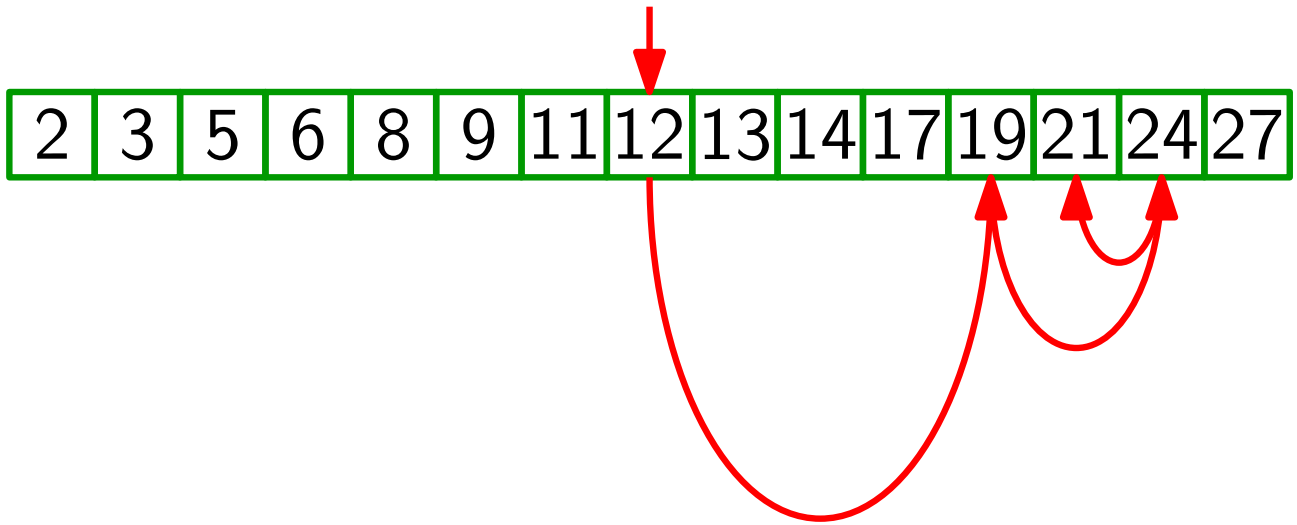


Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



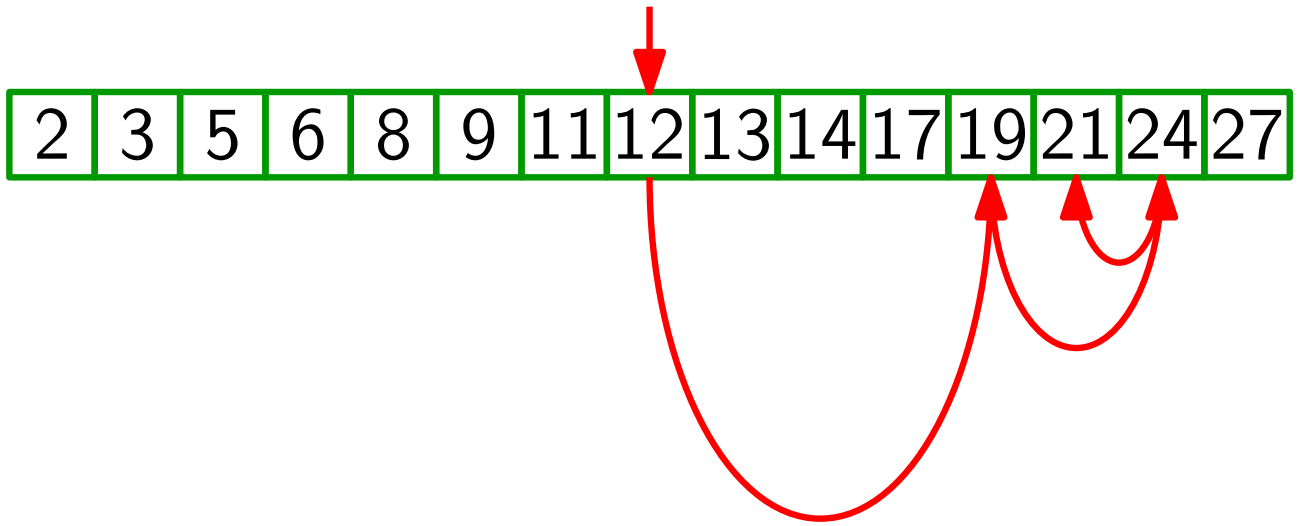
Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

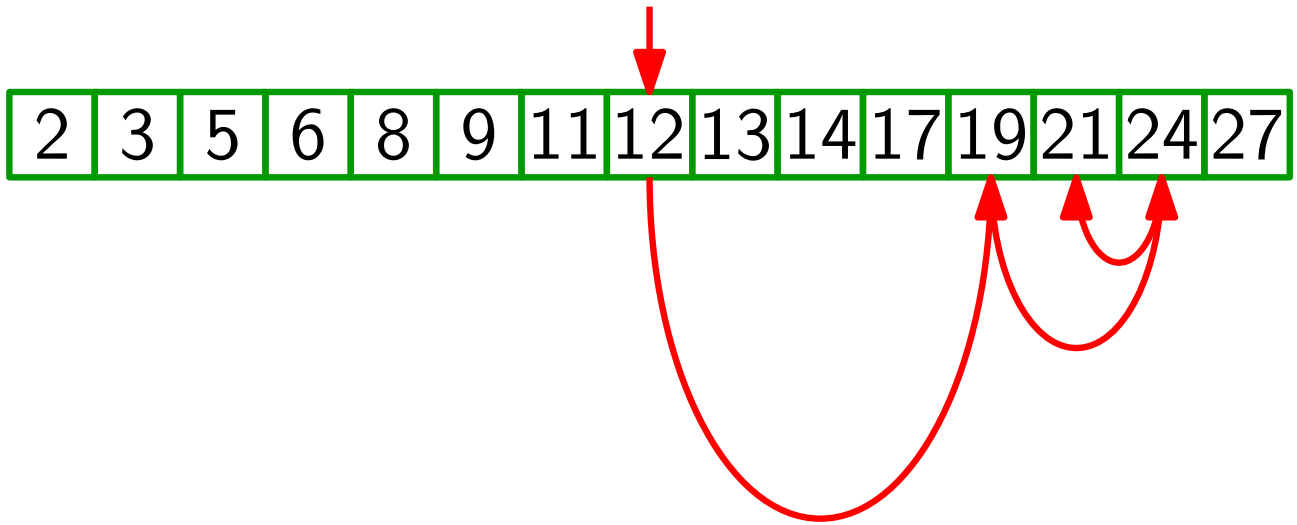
	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq$ *Finden Sie die Rekursions(un)gleichung!!*

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

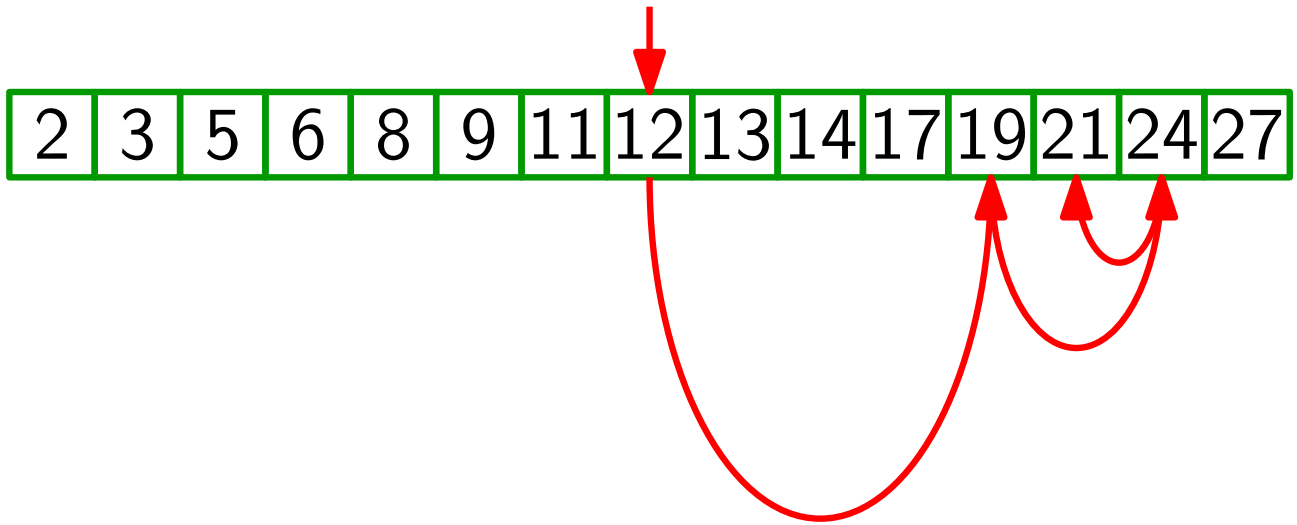
	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

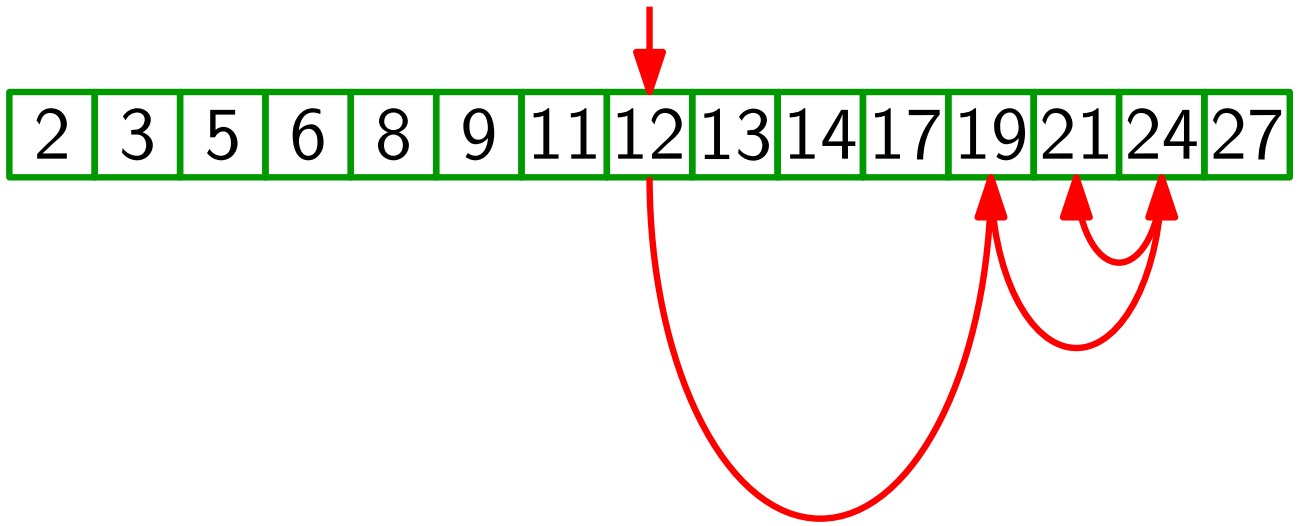
	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

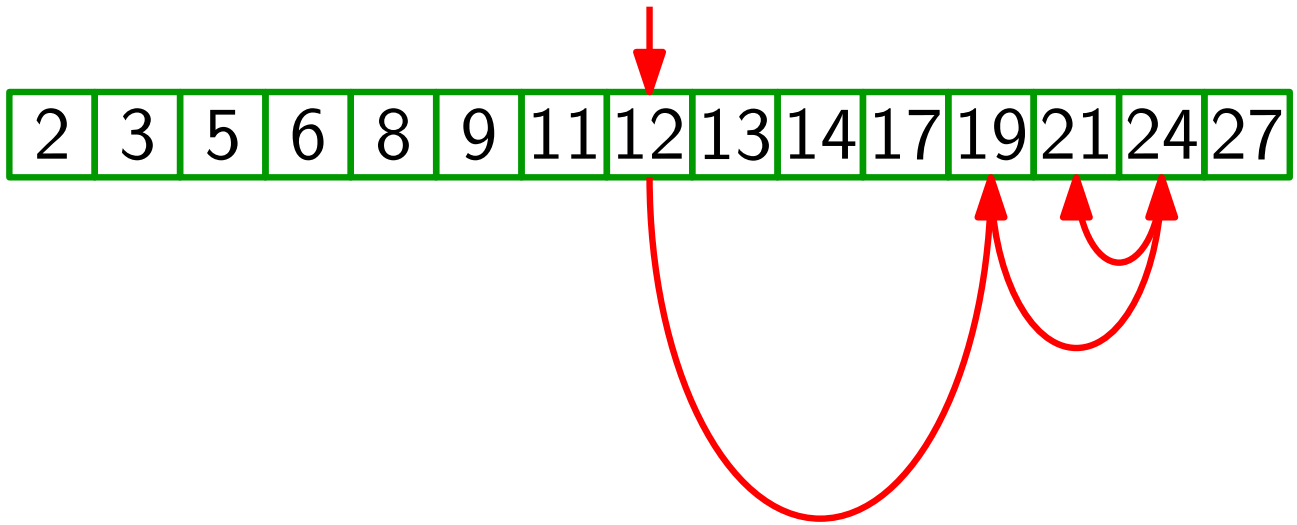
grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$\leq$ $\qquad\qquad$ $+ 1$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

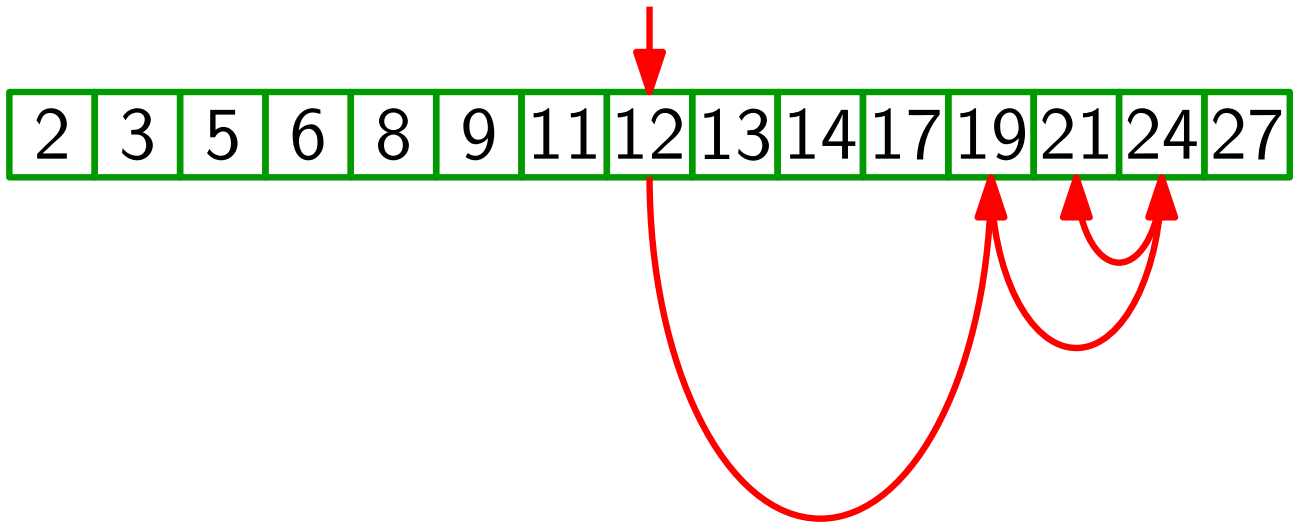
grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

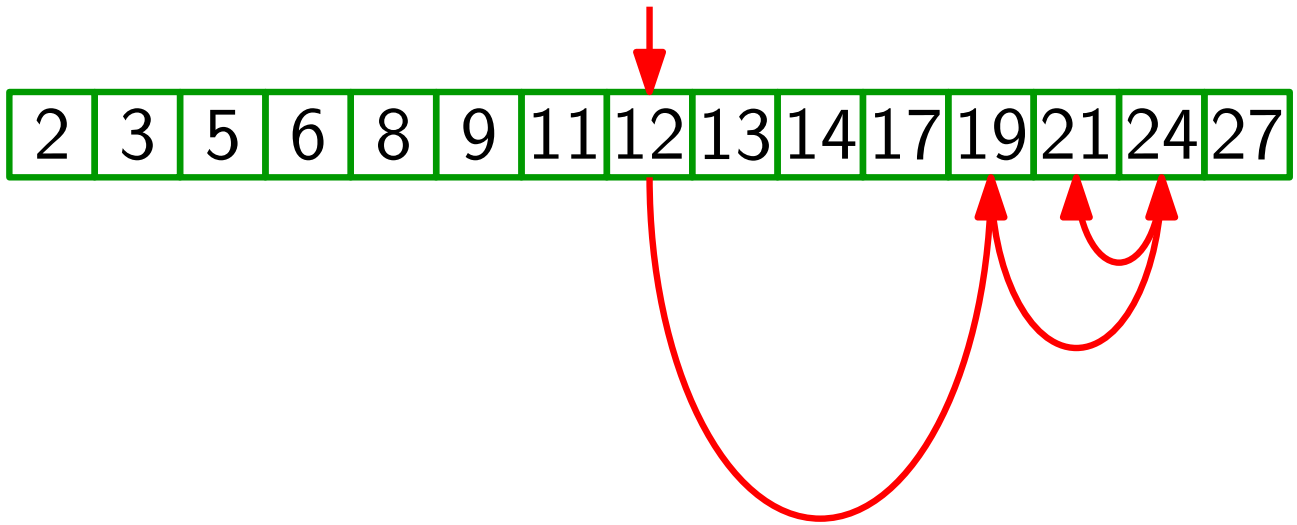
grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

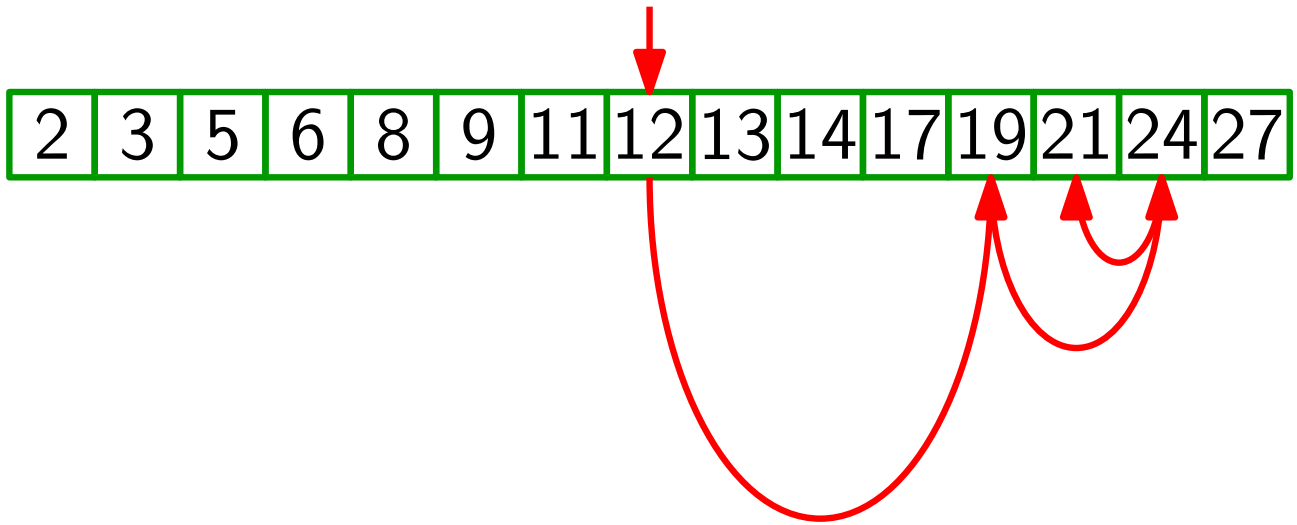
grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + 1 + \cdots + 1$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

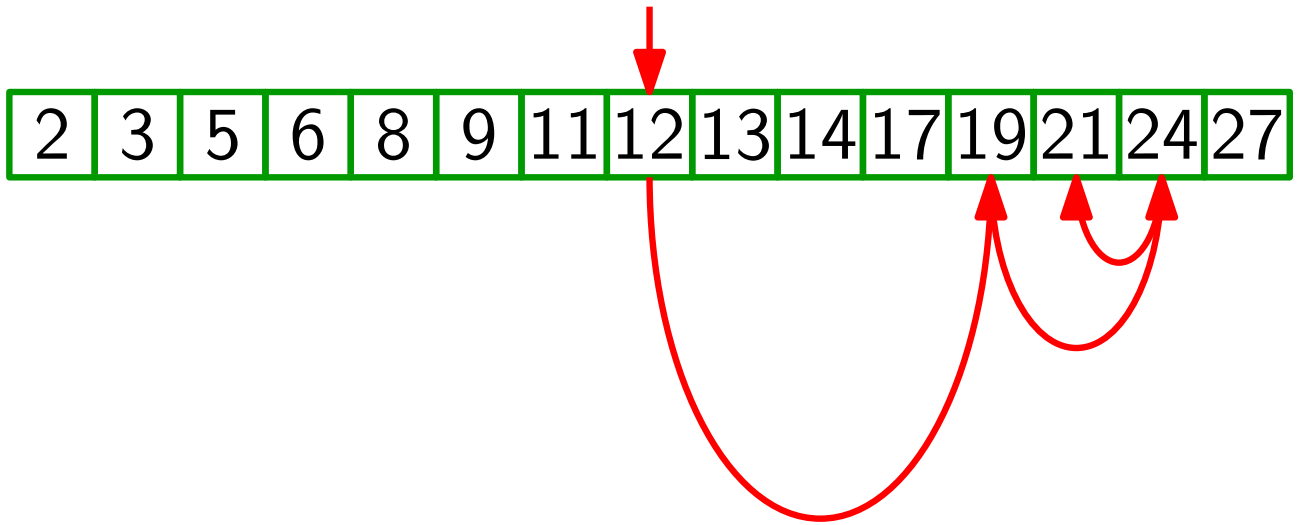
grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

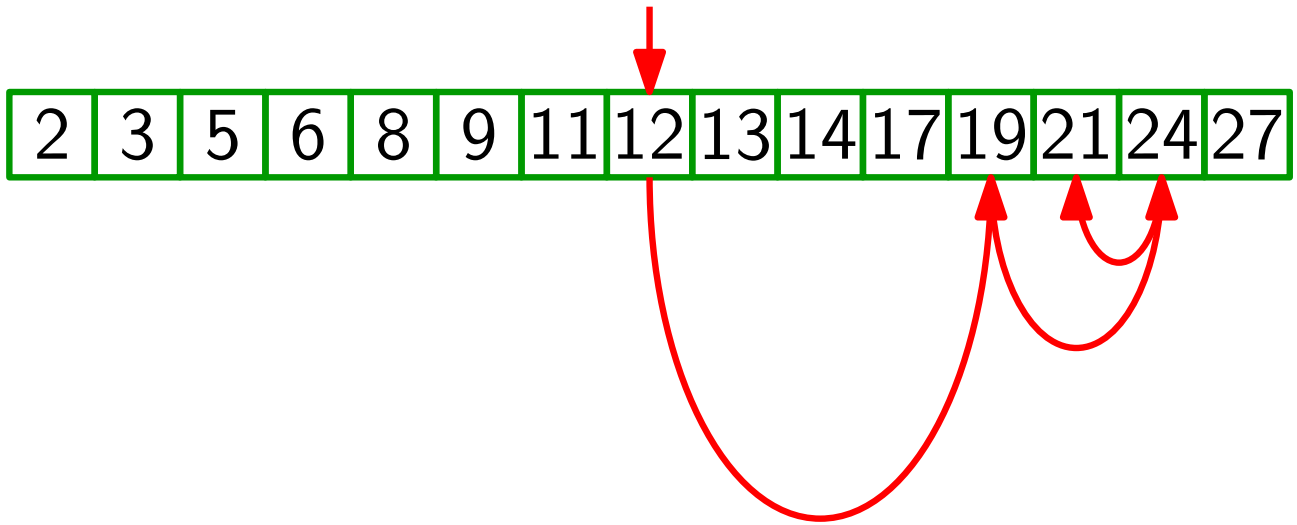
grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

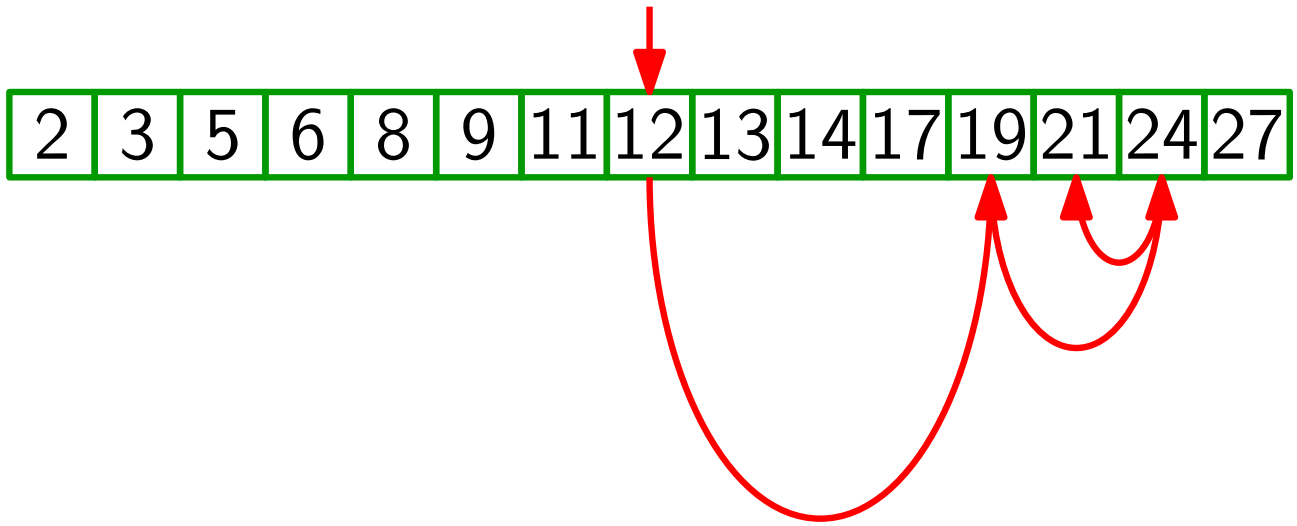
genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

$$= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	**?**	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

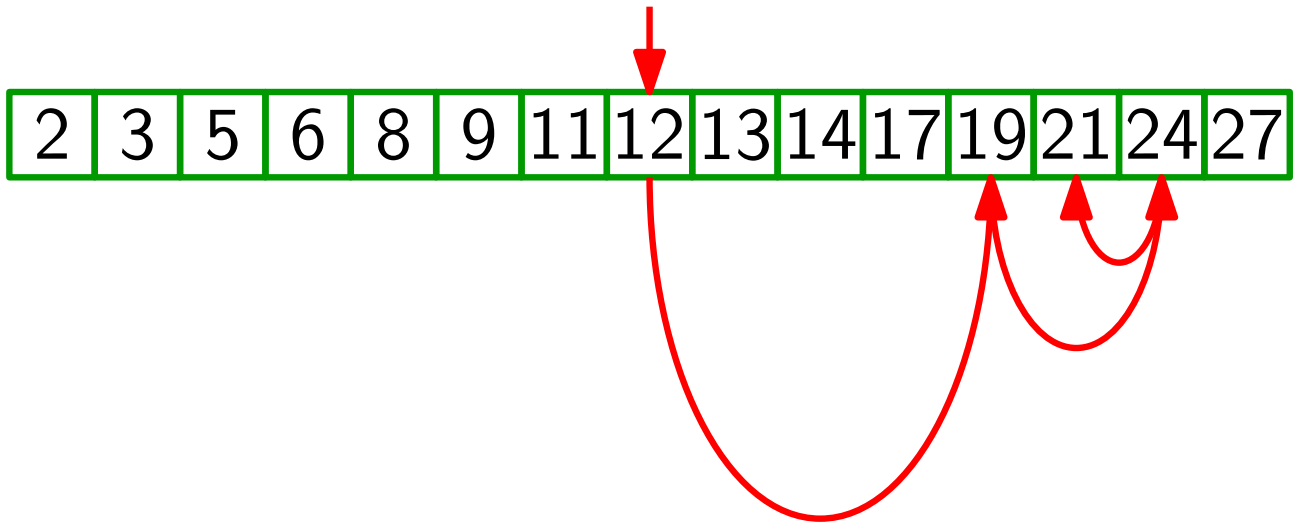
genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

Übung! $= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

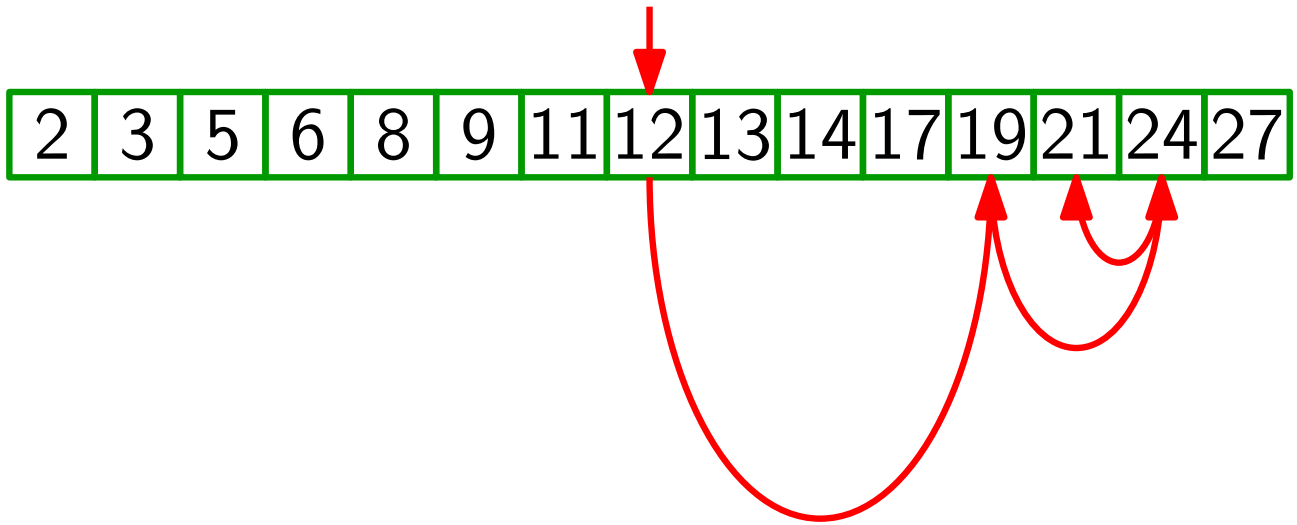
genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \cdots \leq T(1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

Übung! $= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

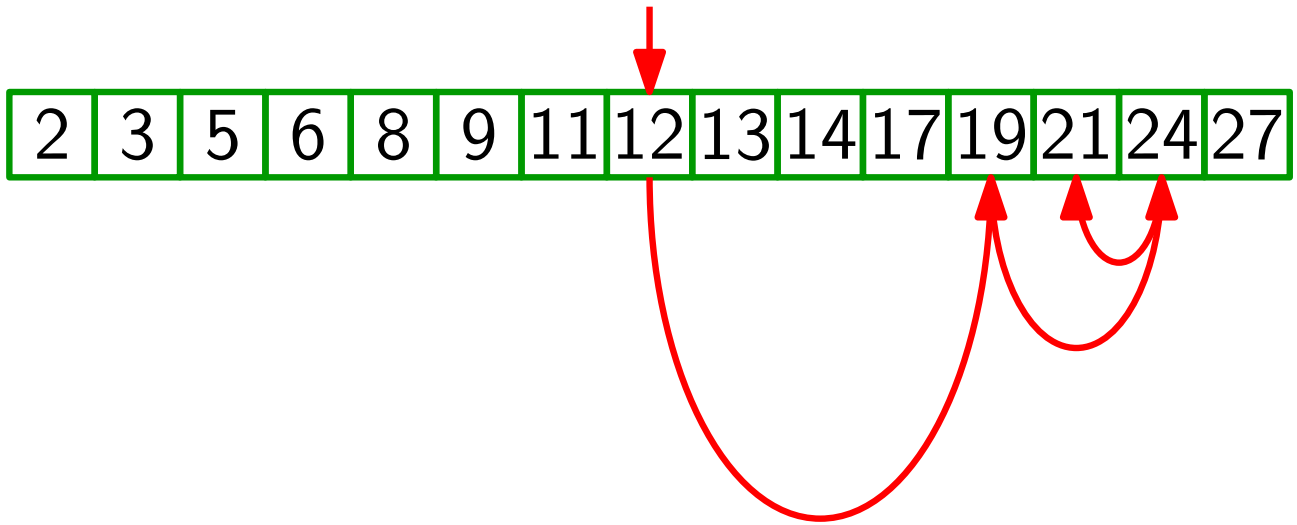


Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld



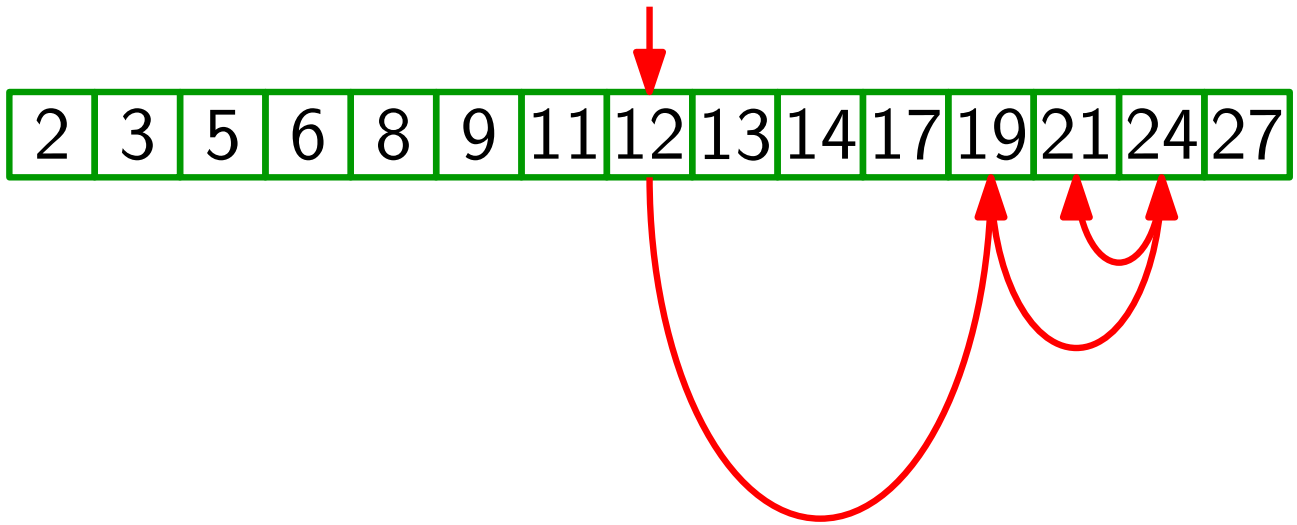
Suche 21!

	hier	*im Worst Case*	
Lineare Suche:	13	n	Schritte
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*

20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

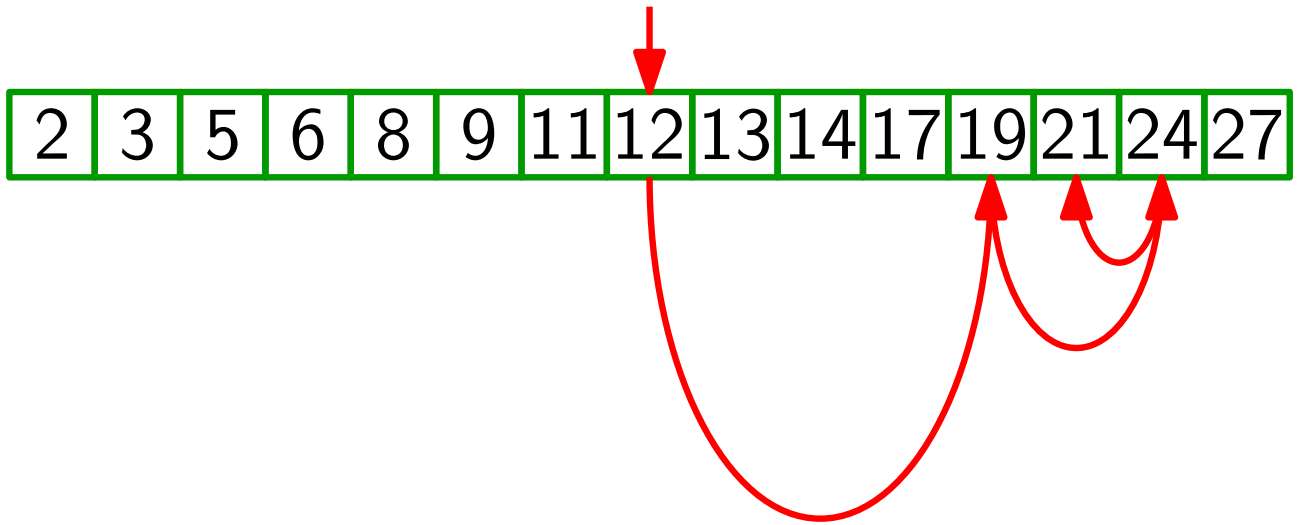


Suche 21!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

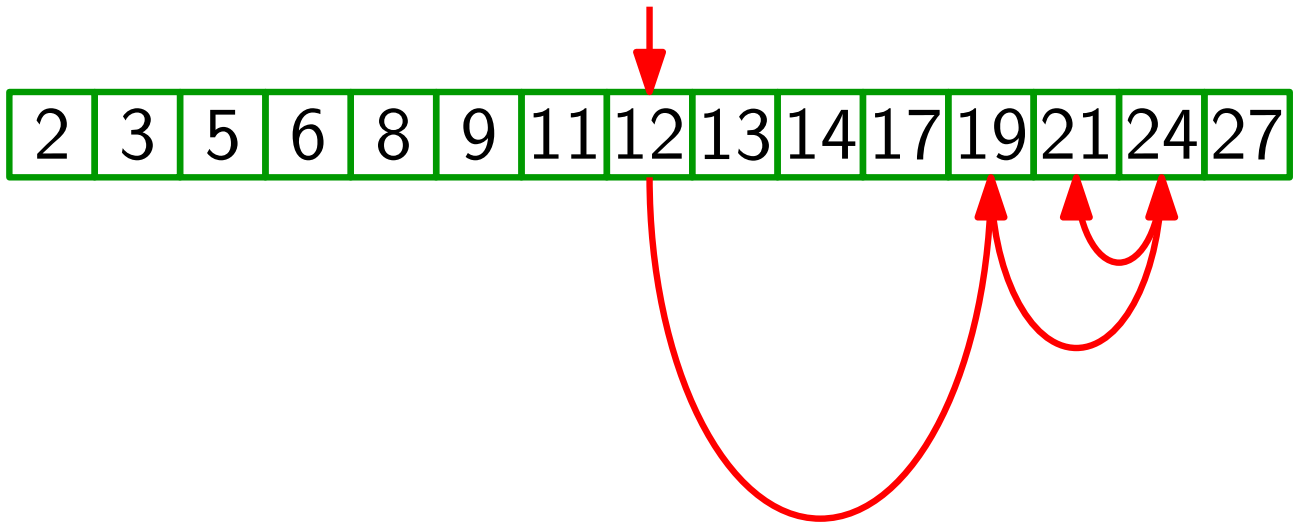


Suche 21!

	hier	*im Worst Case*		≈ 1 Mio.
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

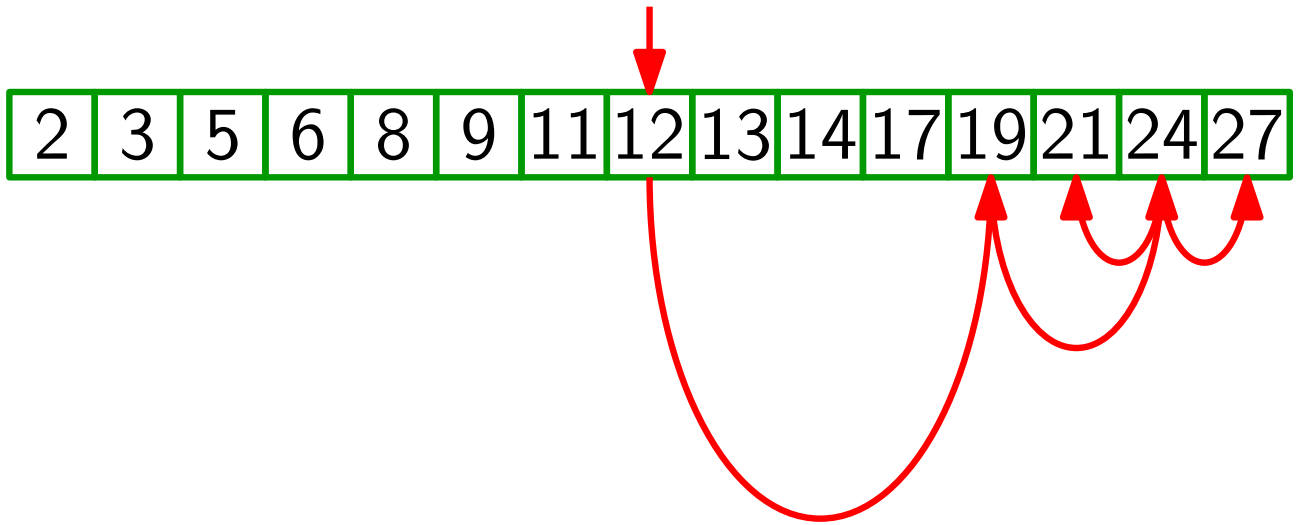


Suche 21!
Suche 27!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	≈ 1 Mio. $2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

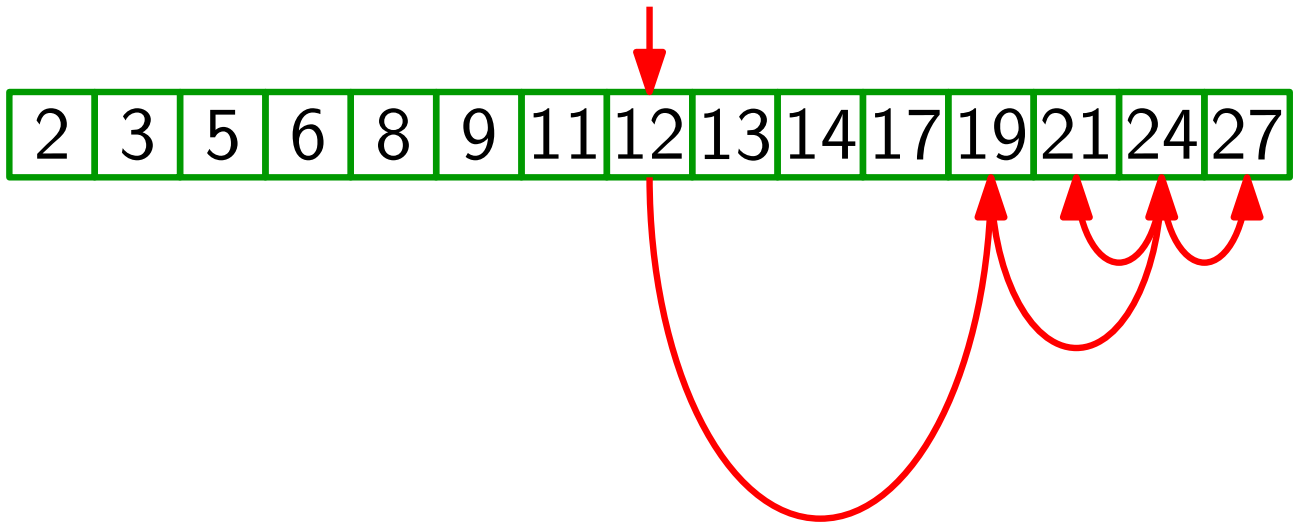


Suche 21!
Suche 27!

	hier	*im Worst Case*		≈ 1 Mio.
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

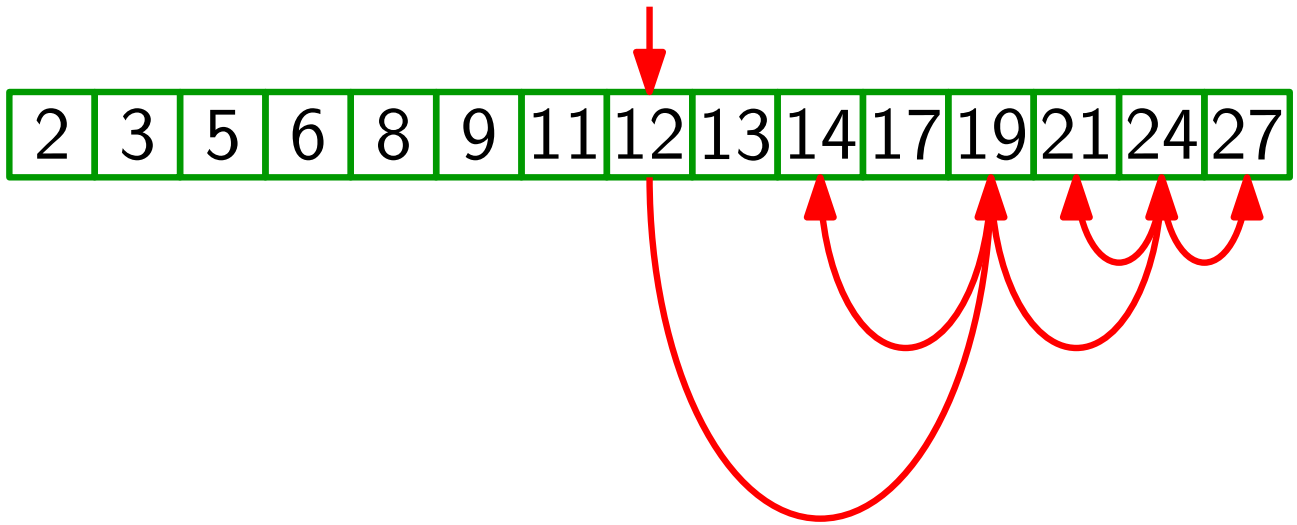


Suche 21!
Suche 27!
Suche 17!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	≈ 1 Mio. $2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

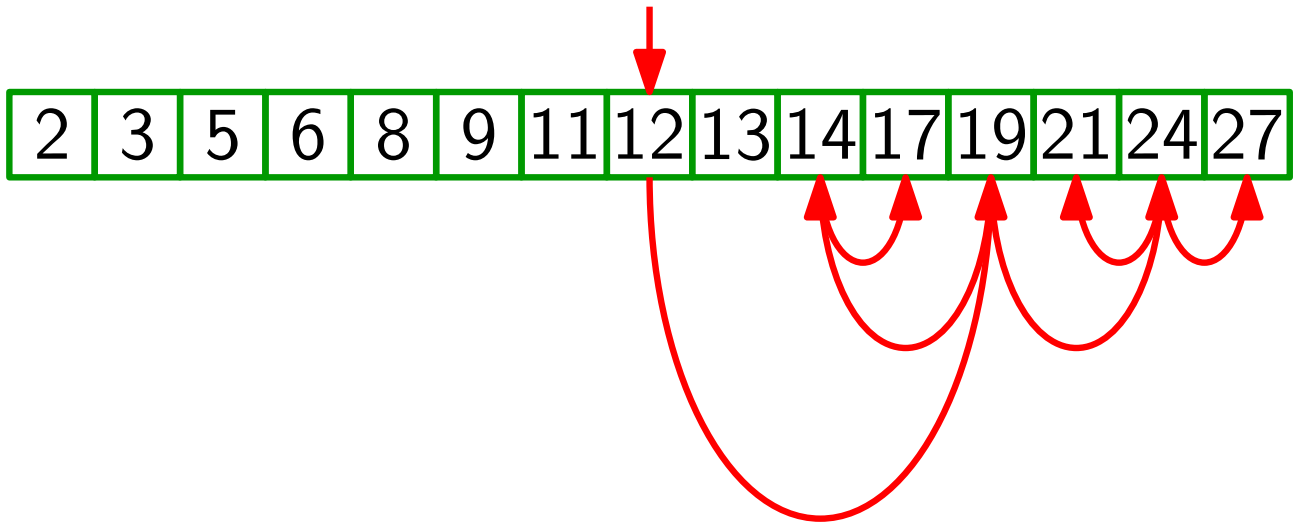


Suche 21!
Suche 27!
Suche 17!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	≈ 1 Mio. $2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

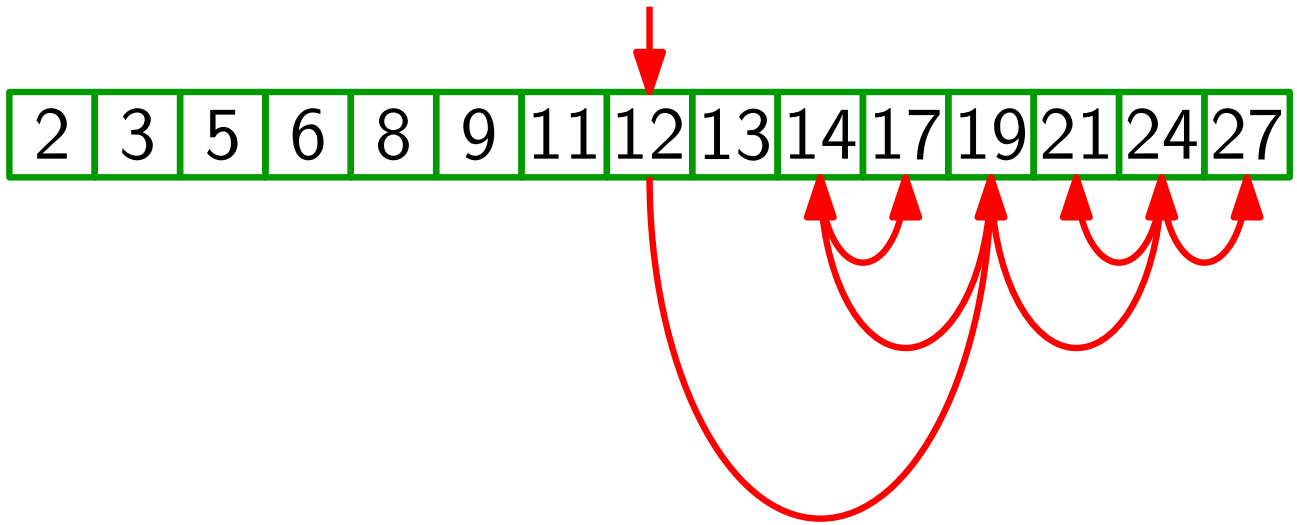


Suche 21!
Suche 27!
Suche 17!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	≈ 1 Mio. $2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

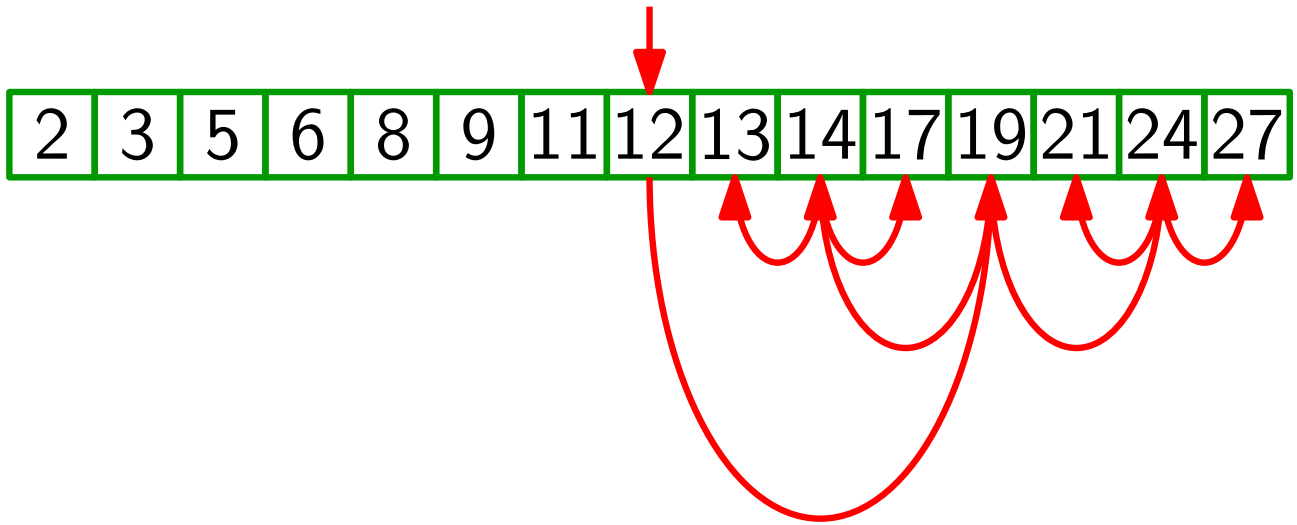


Suche 21!
Suche 27!
Suche 17!
Suche 13!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	≈ 1 Mio. $2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

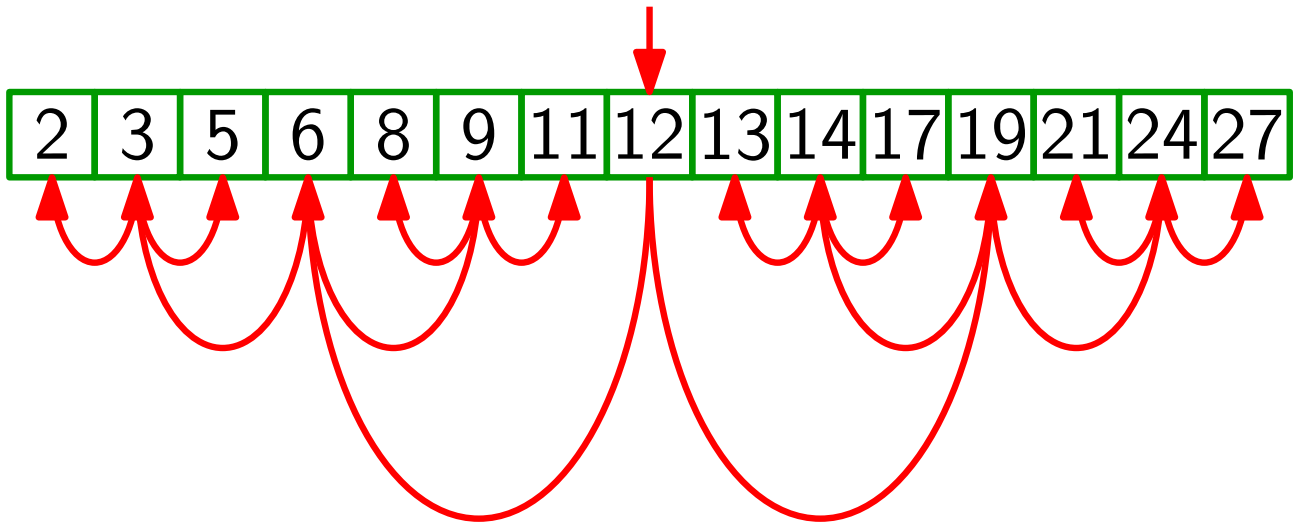


Suche 21!
Suche 27!
Suche 17!
Suche 13!

	hier	*im Worst Case*		
Lineare Suche:	13	n	Schritte	≈ 1 Mio. $2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

Suche im sortierten Feld

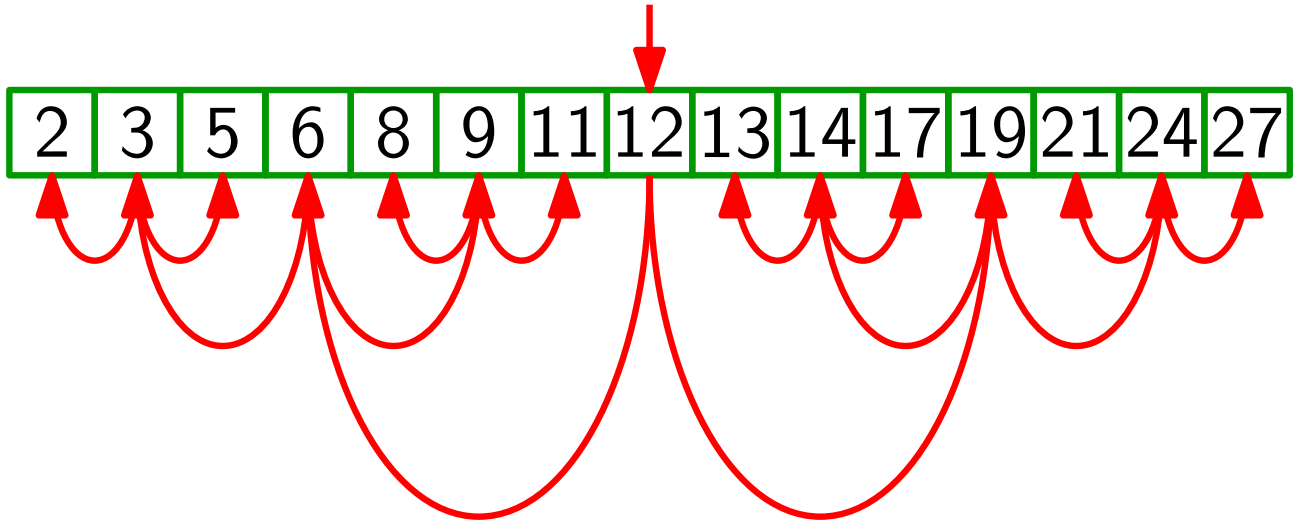


Suche 21!
Suche 27!
Suche 17!
Suche 13!

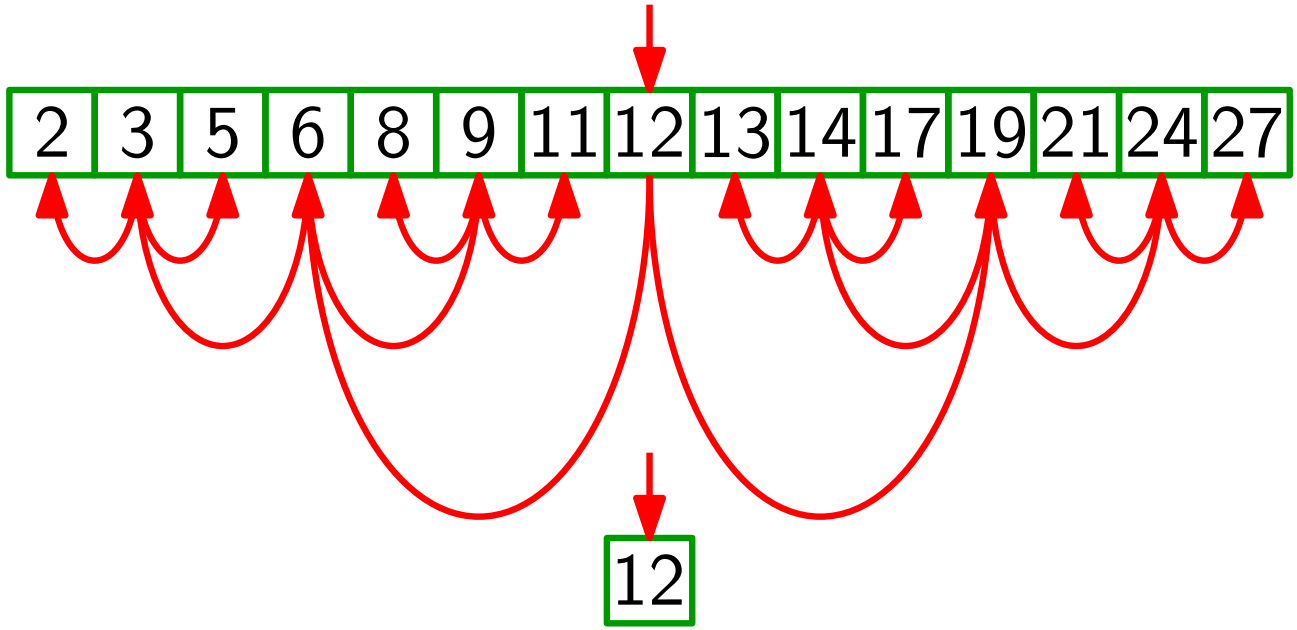
	hier	*im Worst Case*		≈ 1 Mio.
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20}-1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n+1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. $=$ und $<$).

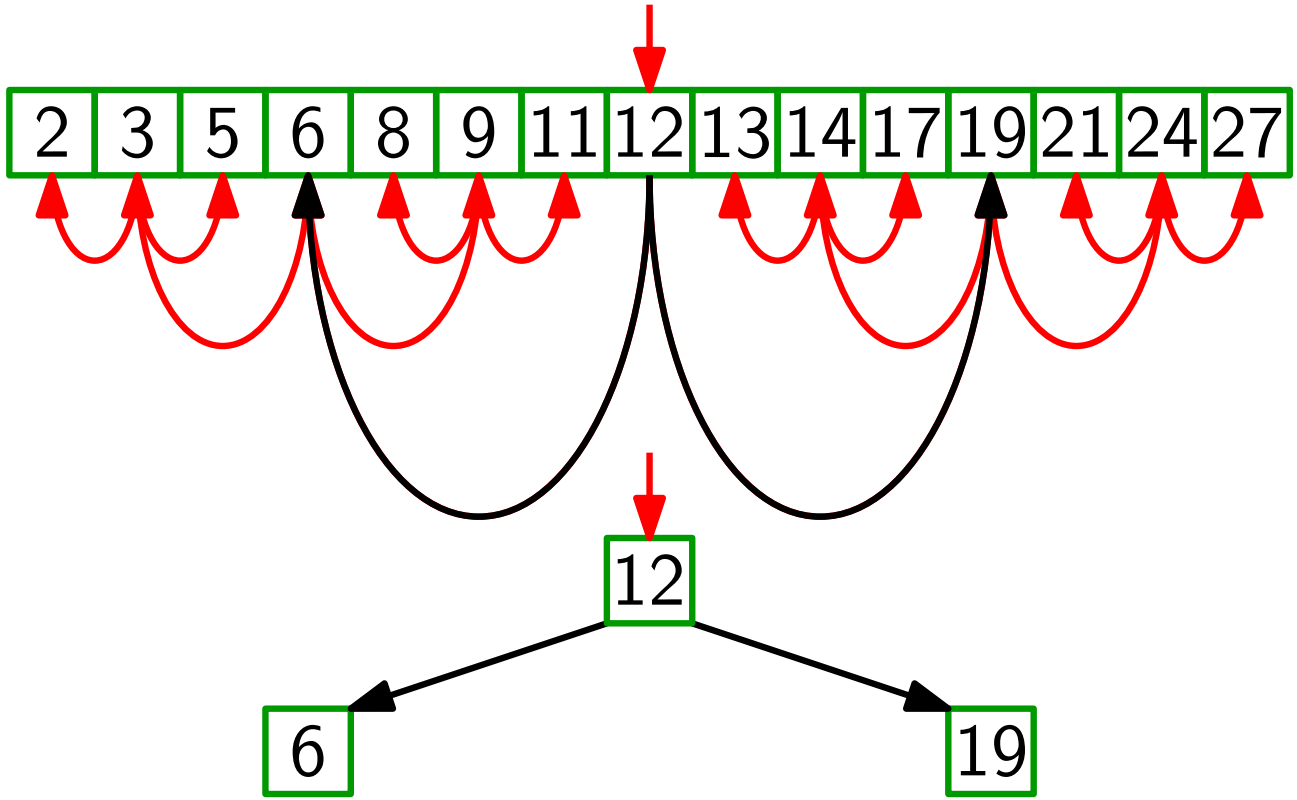
Suche im sortierten Feld



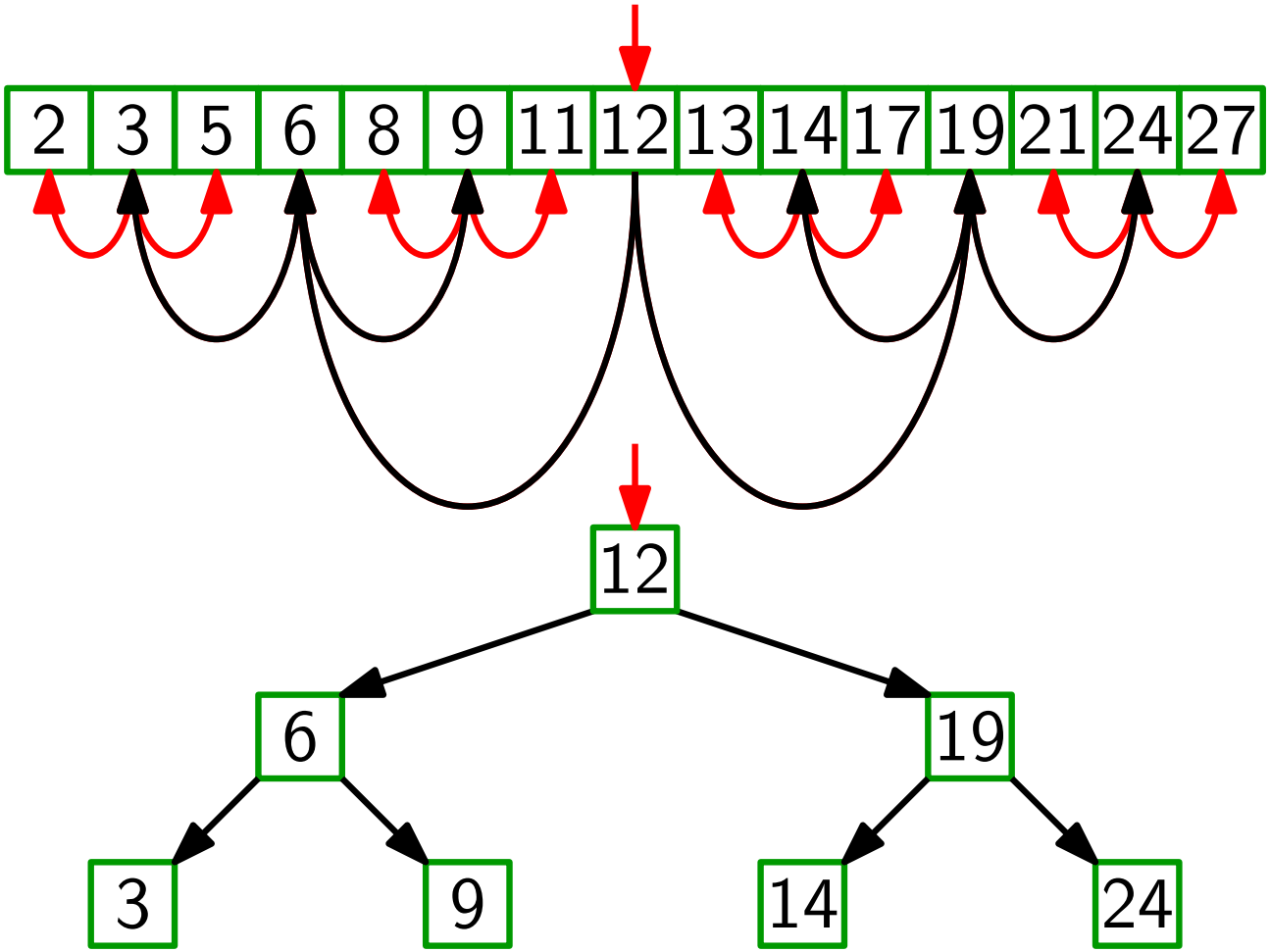
Suche im sortierten Feld



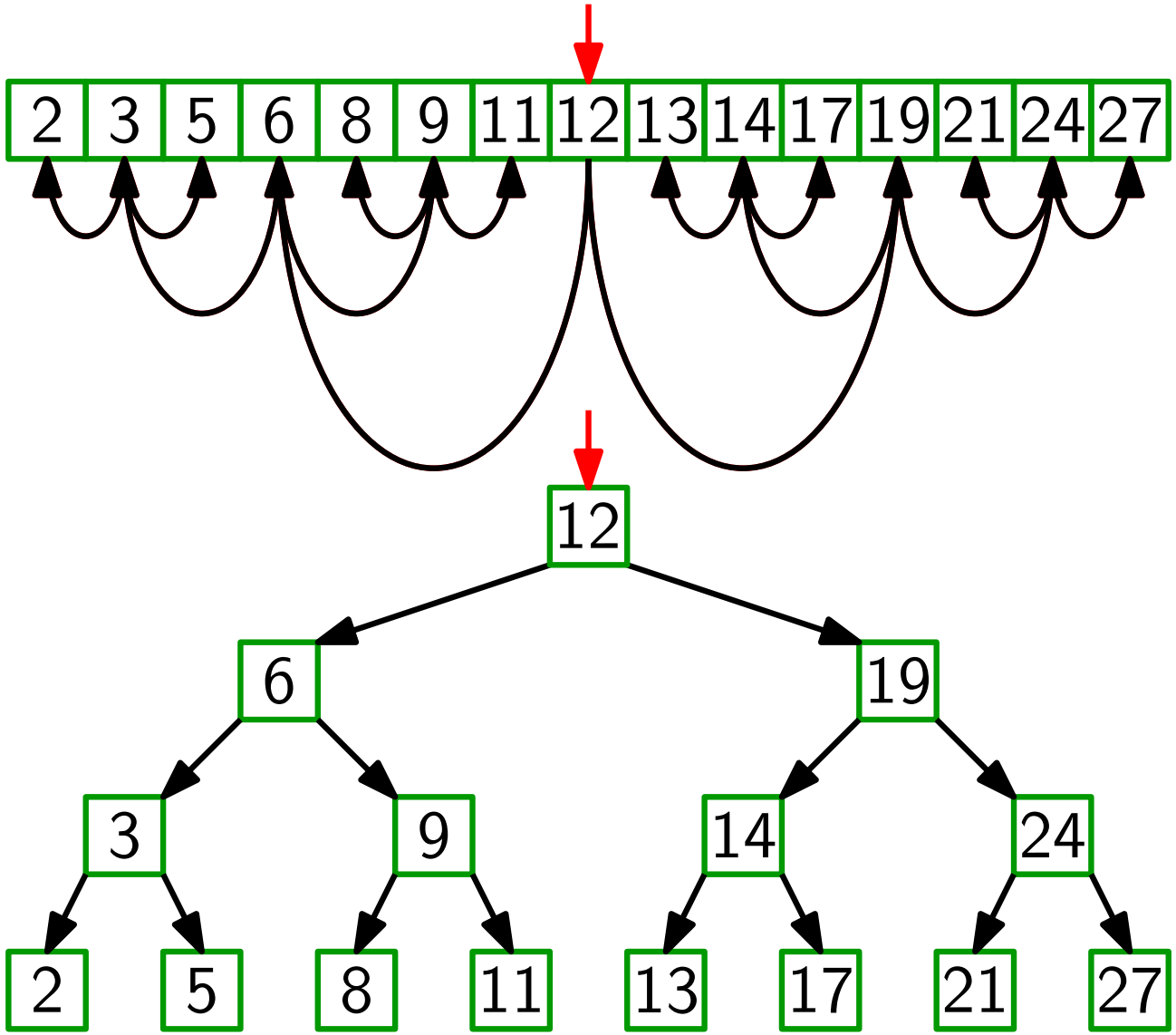
Suche im sortierten Feld



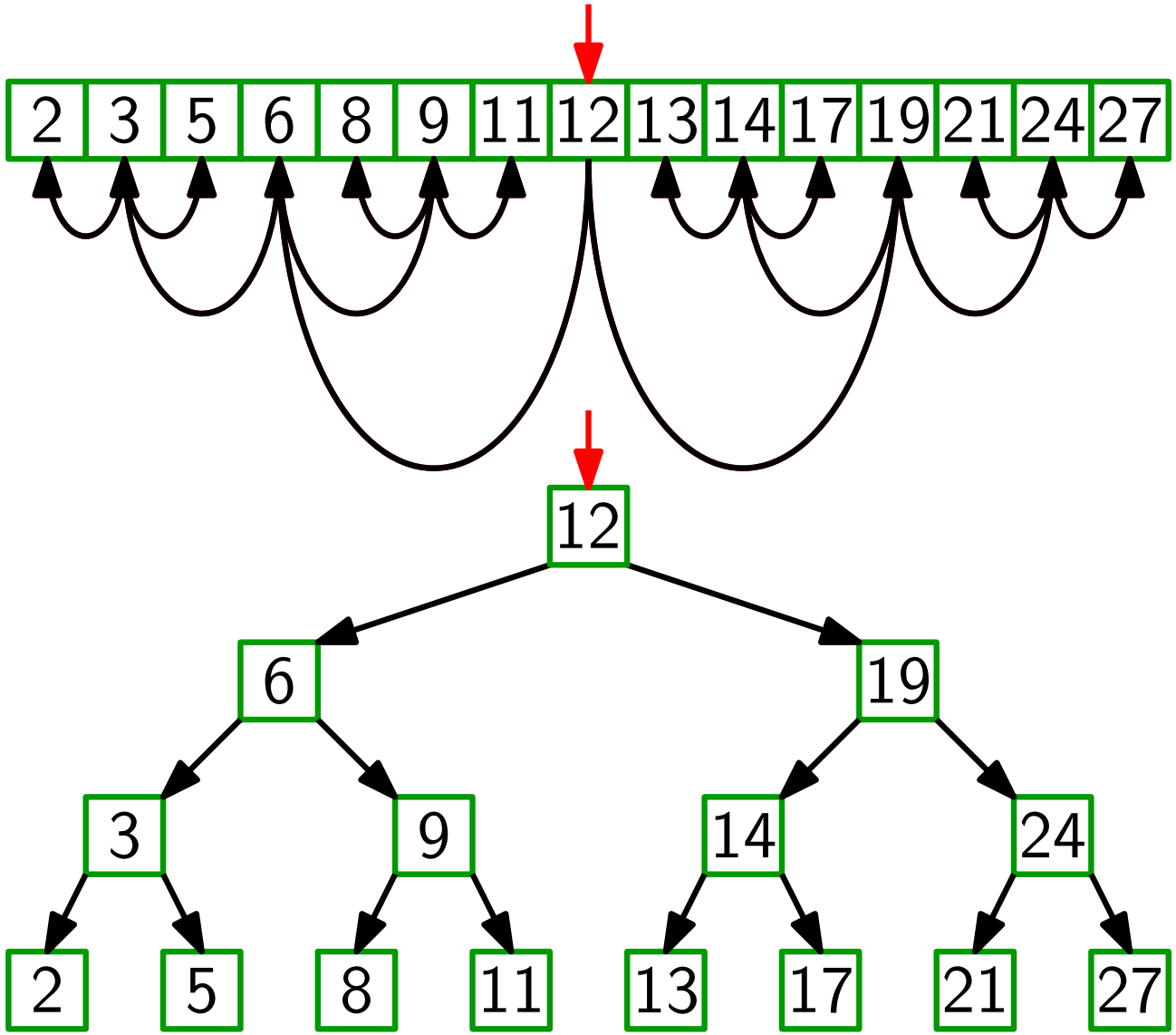
Suche im sortierten Feld



Suche im sortierten Feld

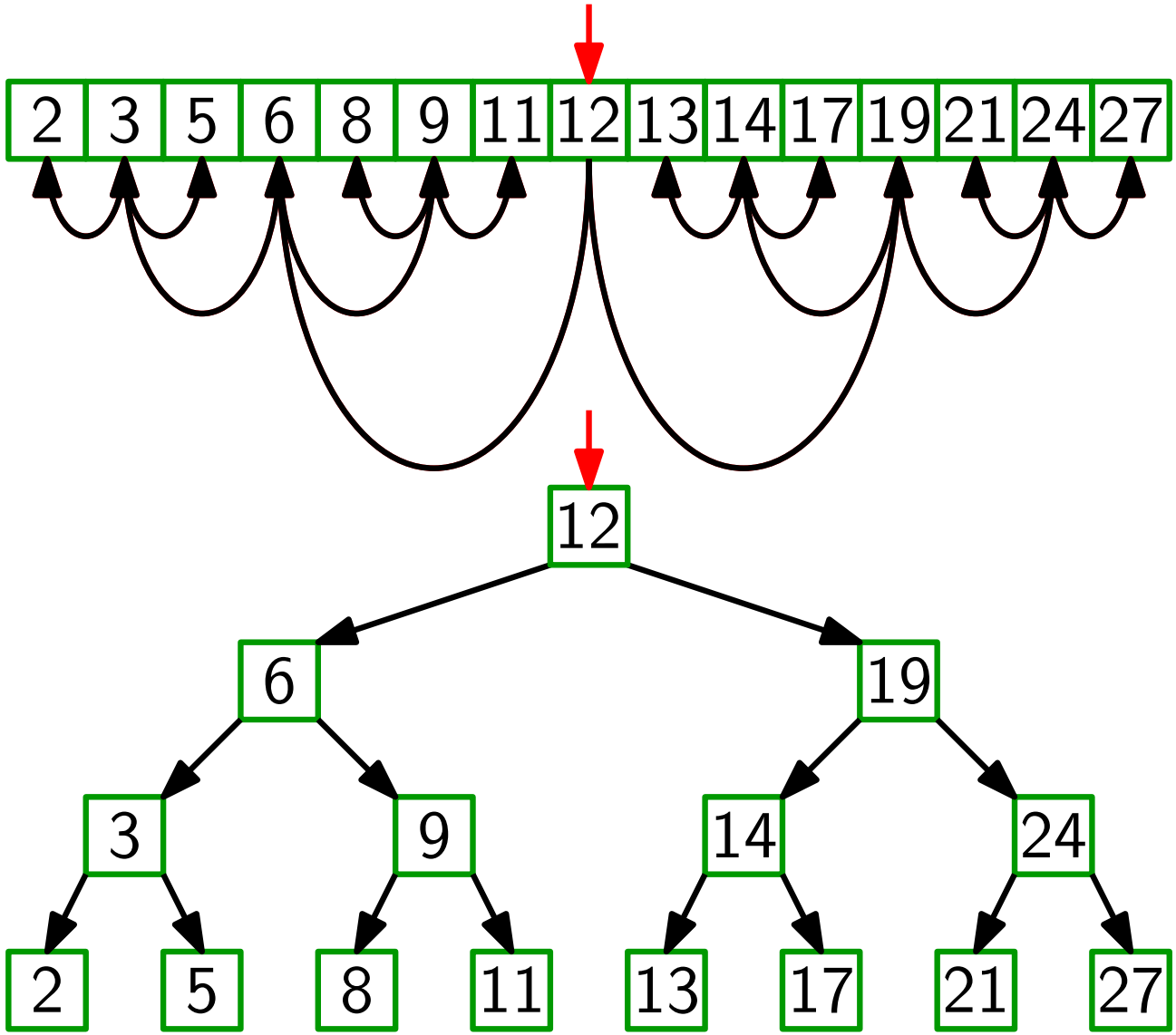


Suche im sortierten Feld



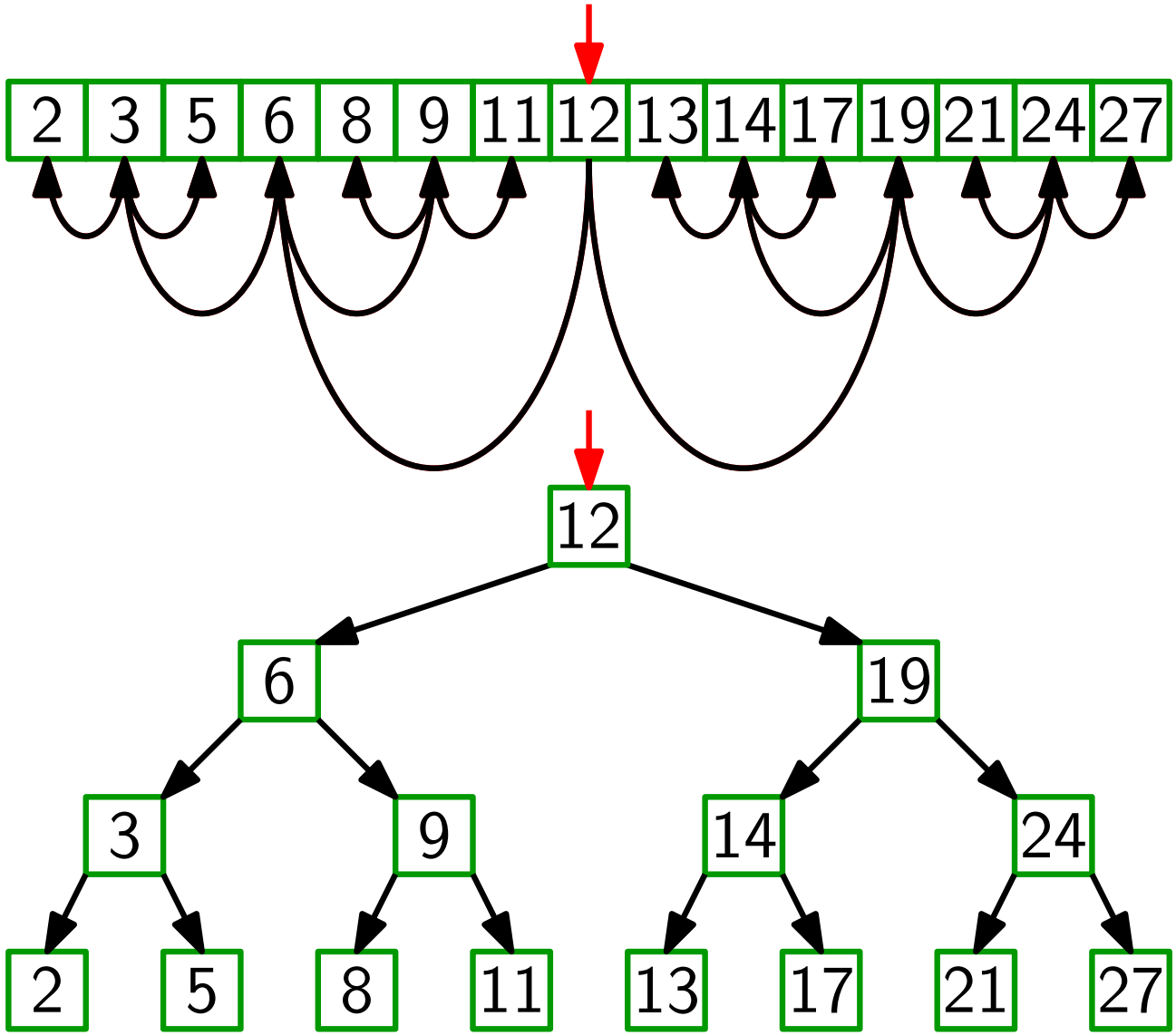
Binärer Suchbaum

Suche im sortierten Feld



Binärer Suchbaum

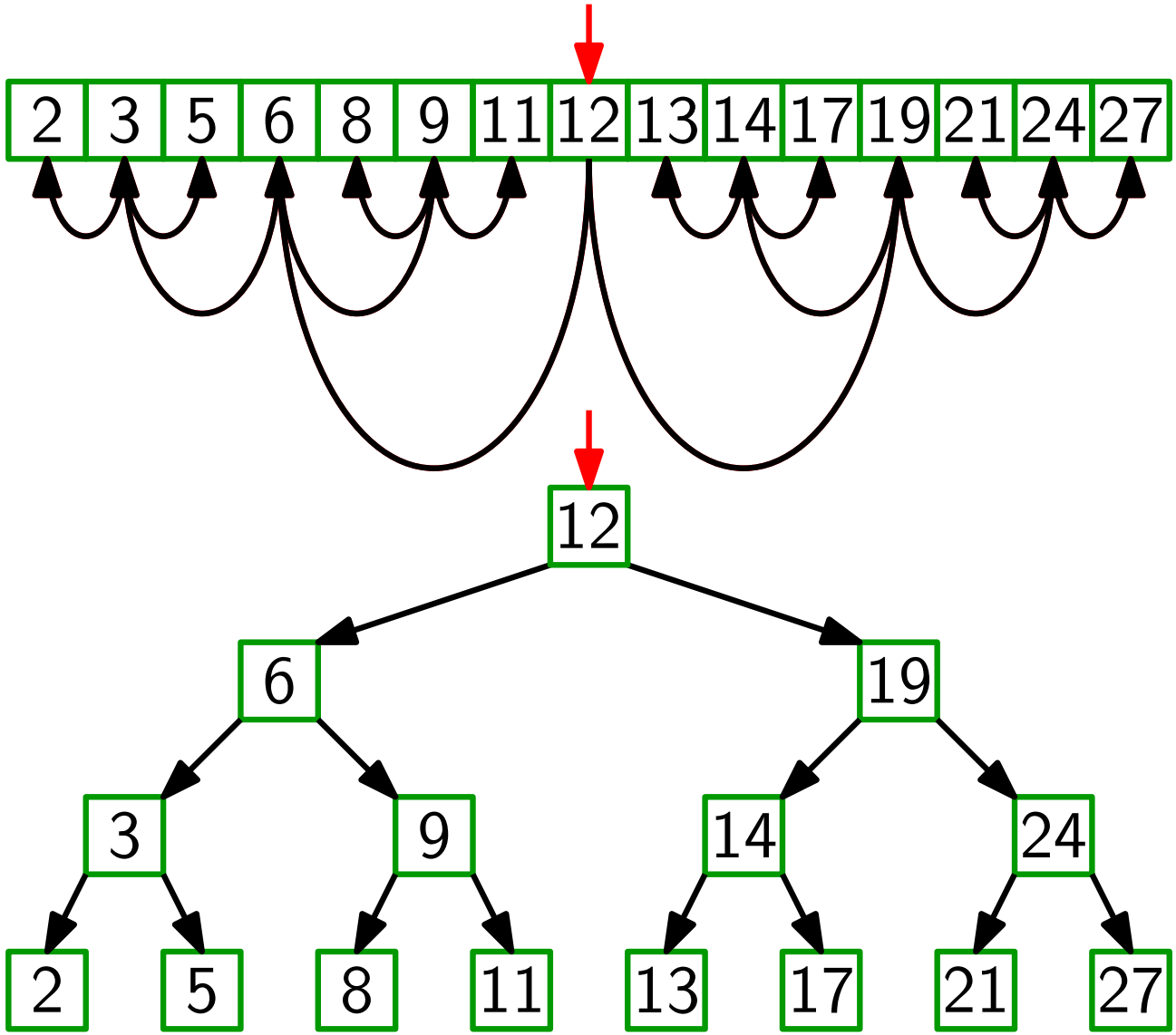
Suche im sortierten Feld



Binärer Suchbaum

zusammen-
hängender
Wald

Suche im sortierten Feld

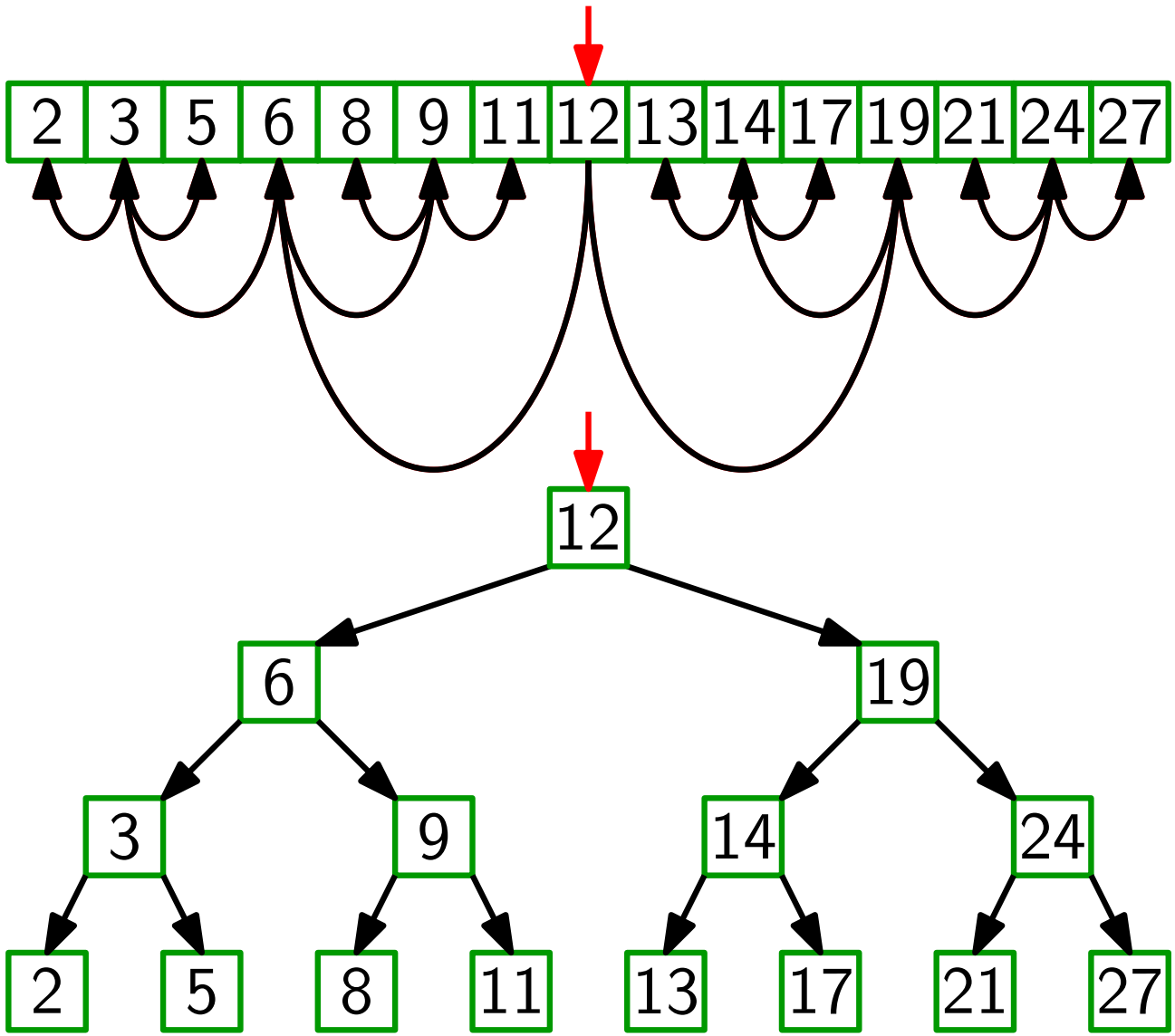


Binärer Suchbaum

zusammen-hängender Wald

kreisfreier Graph

Suche im sortierten Feld

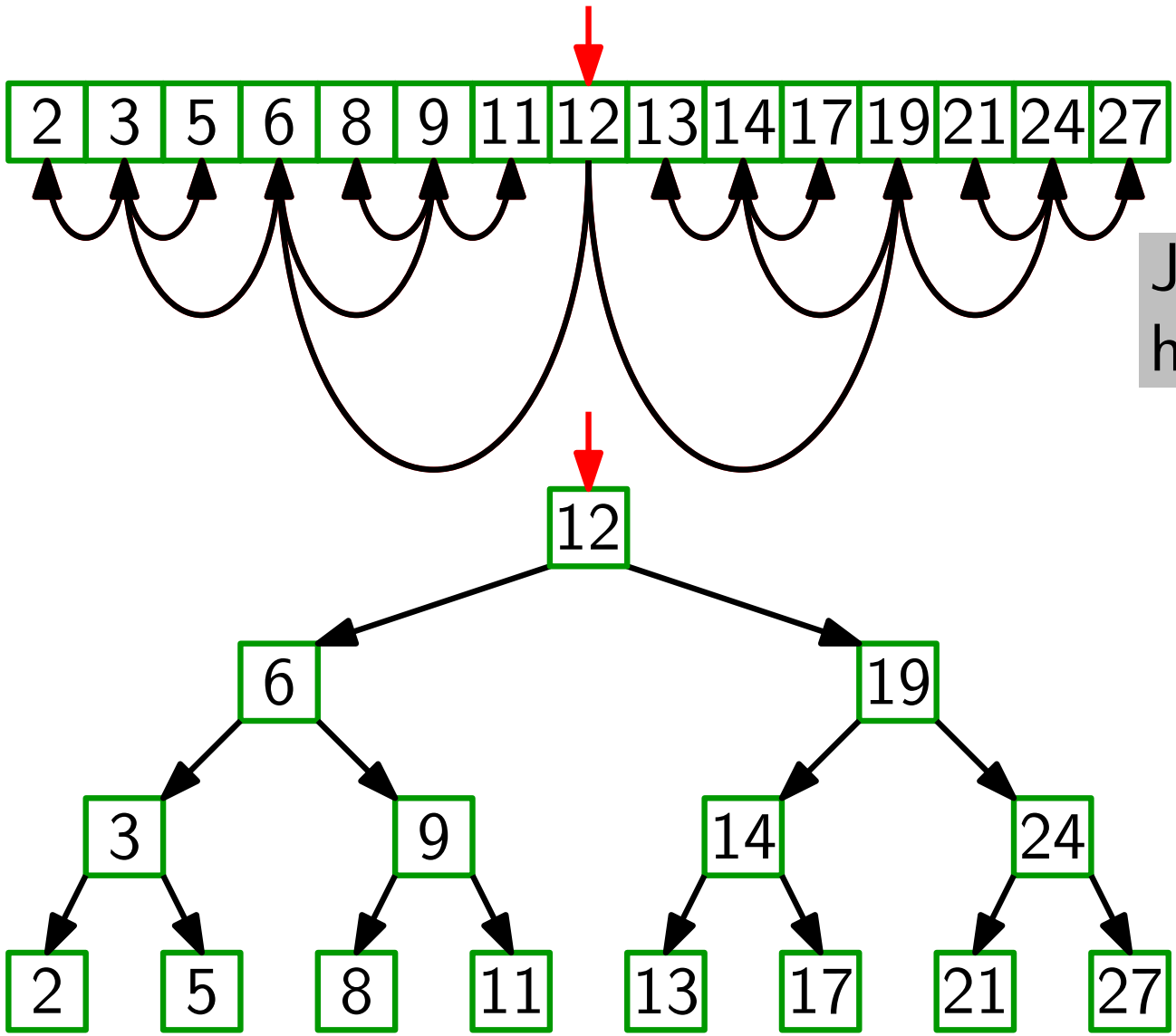


Binärer Suchbaum

zusammen-hängender Wald

kreisfreier Graph

Suche im sortierten Feld



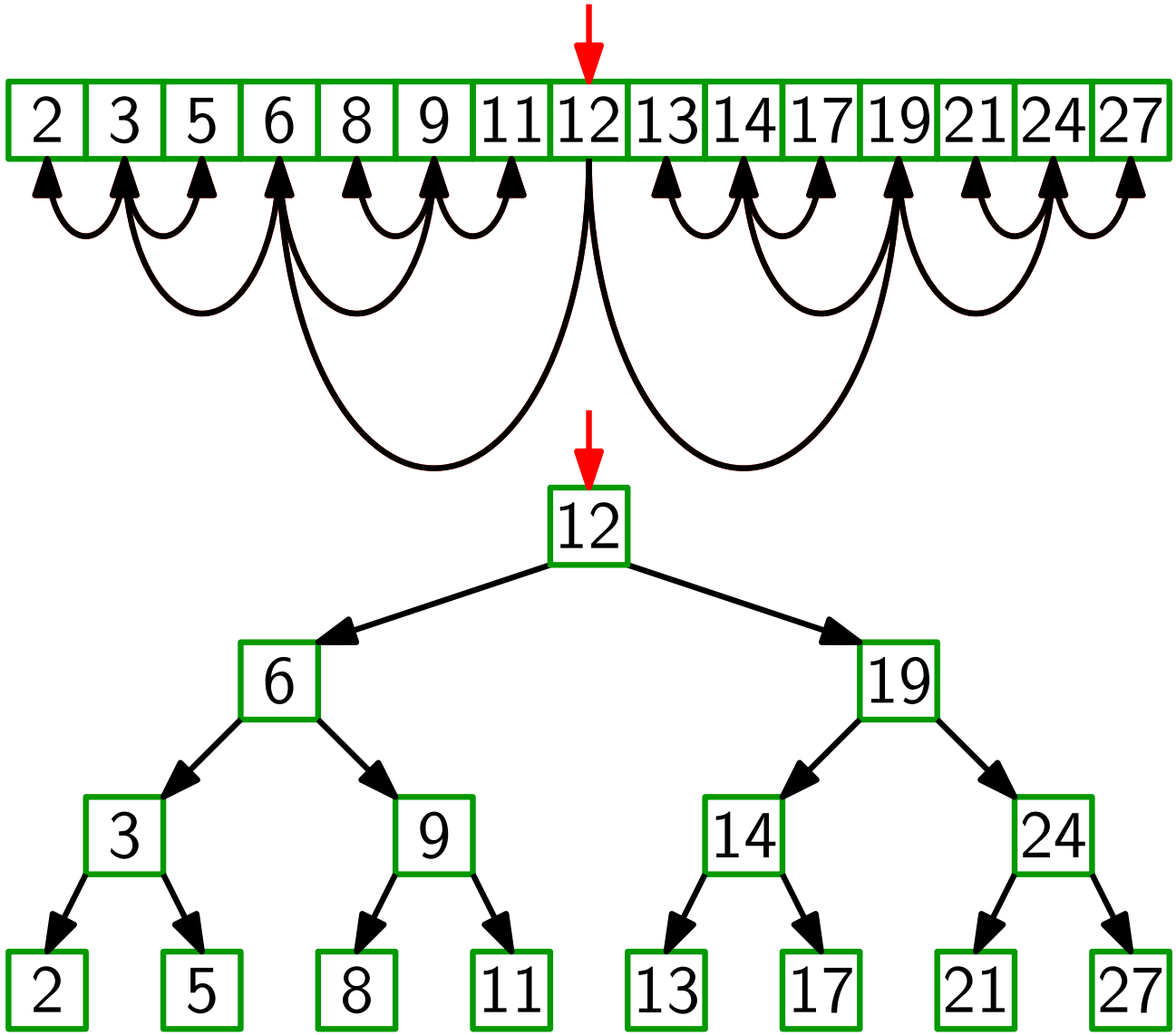
Jeder Knoten hat höchstens zwei Kinder.

Binärer Suchbaum

zusammen-hängender Wald

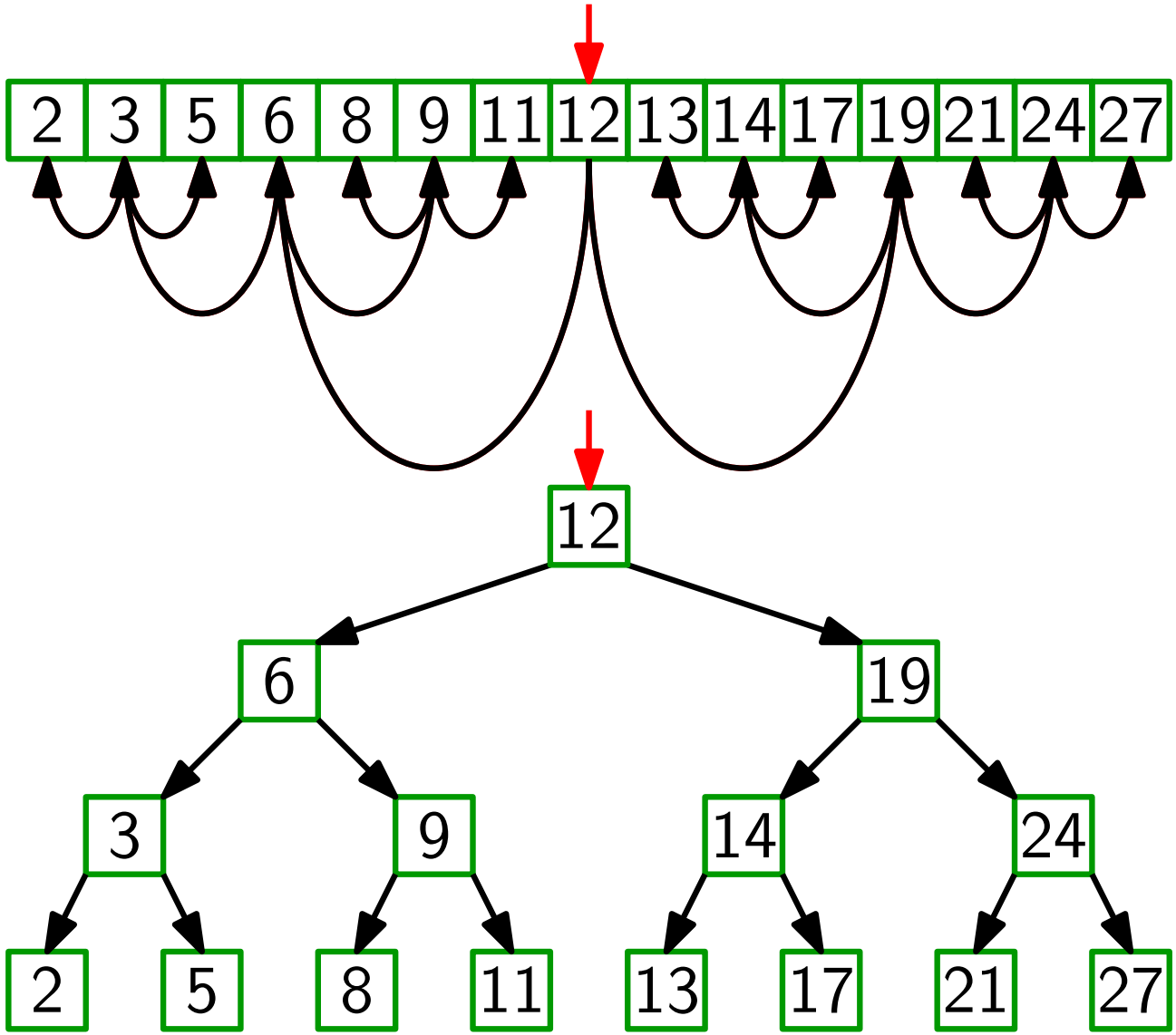
kreisfreier Graph

Suche im sortierten Feld



Binärer Suchbaum

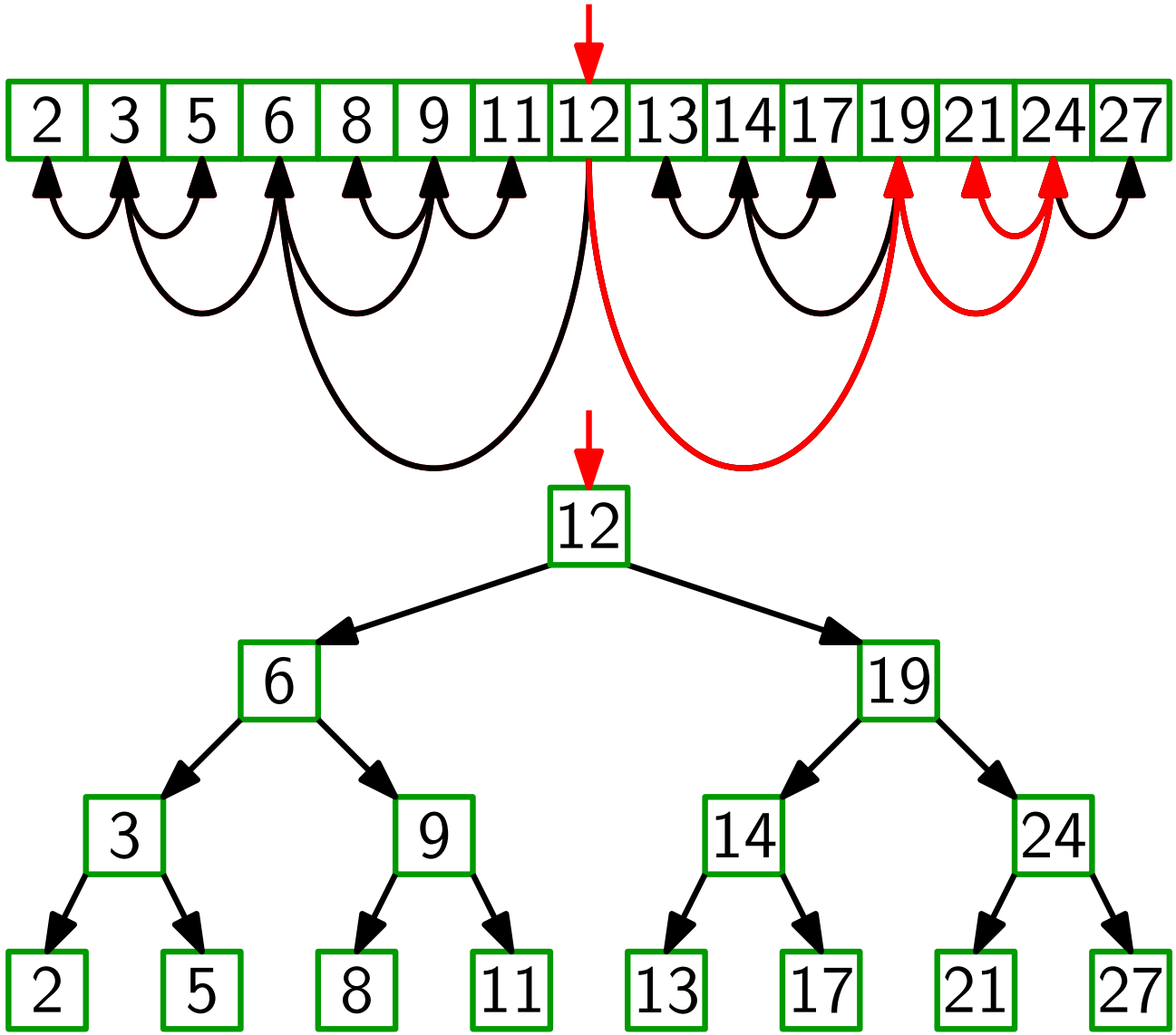
Suche im sortierten Feld



Suche 21!

Binärer Suchbaum

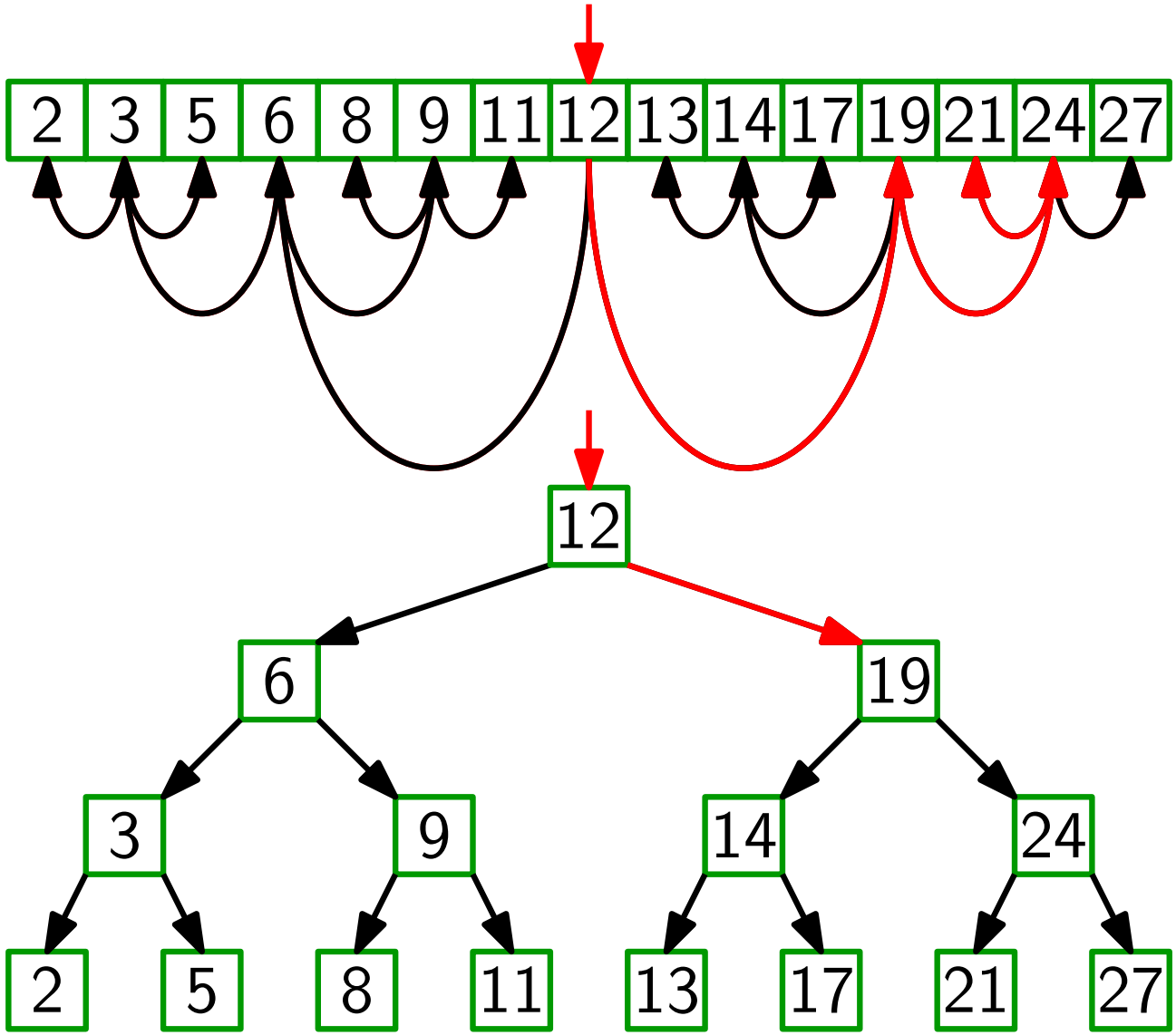
Suche im sortierten Feld



Suche 21!

Binärer Suchbaum

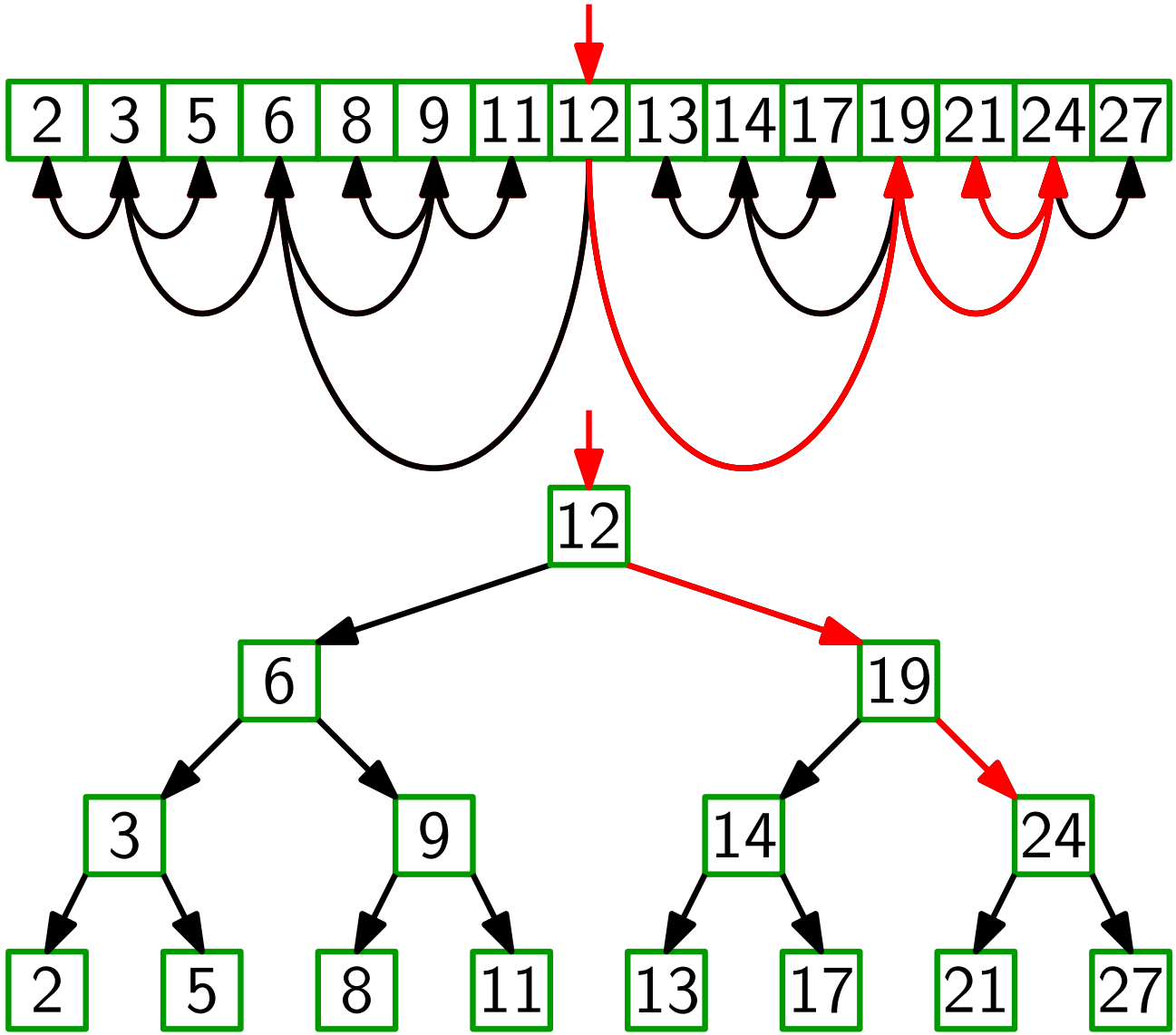
Suche im sortierten Feld



Suche 21!

Binärer Suchbaum

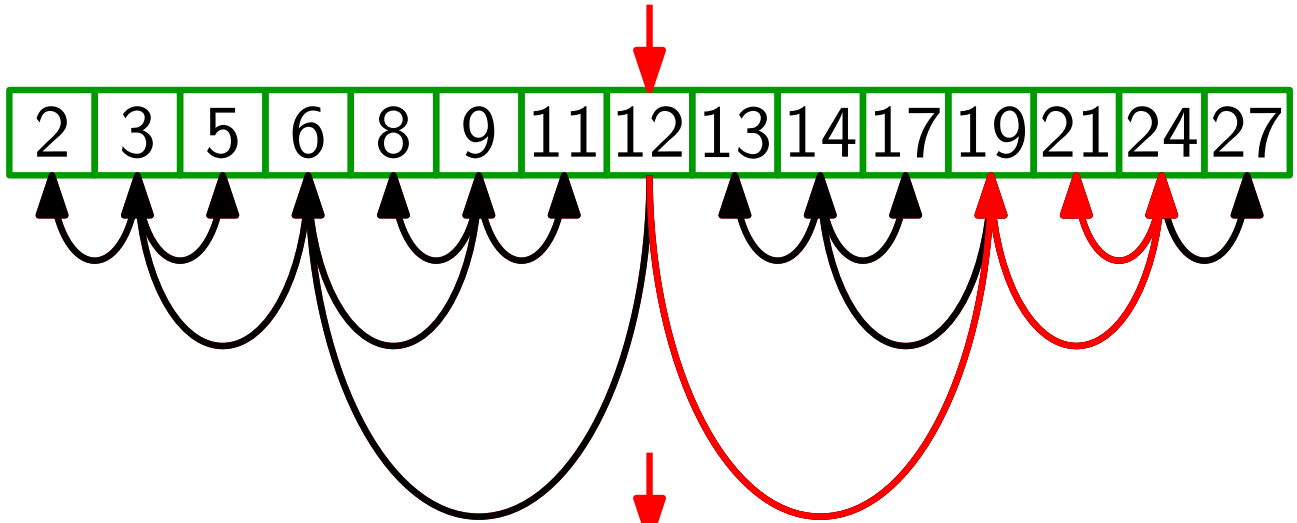
Suche im sortierten Feld



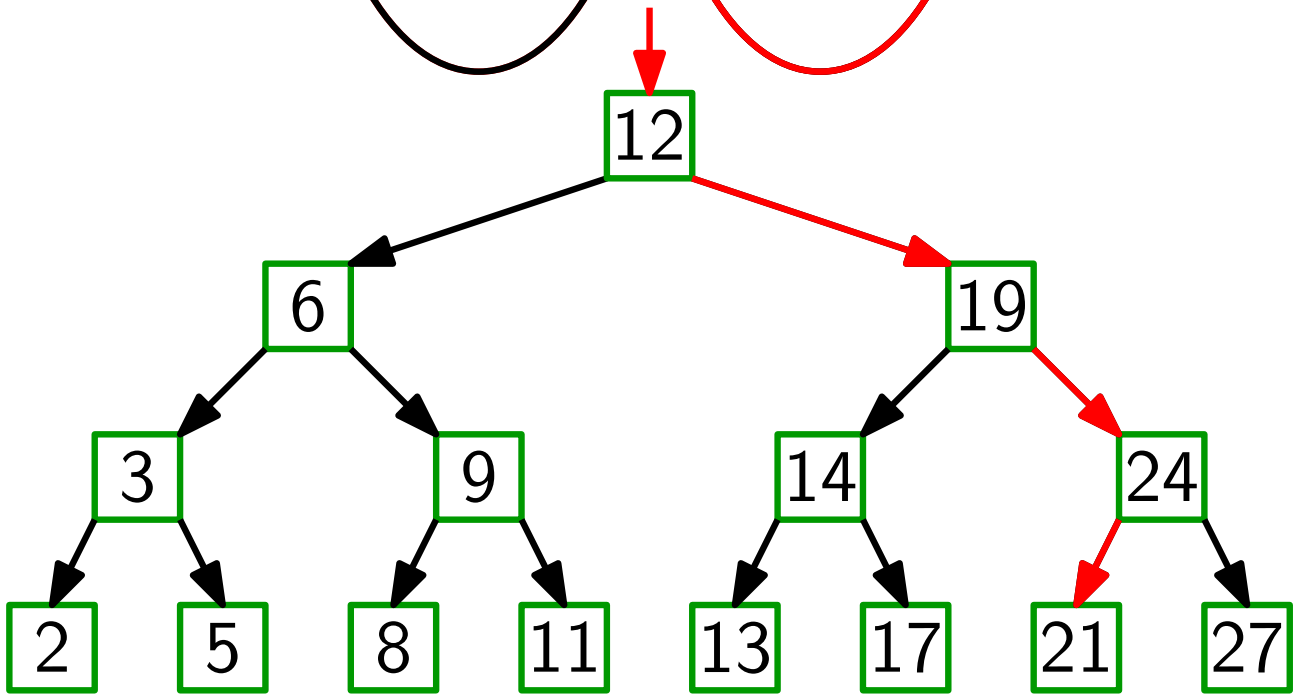
Suche 21!

Binärer Suchbaum

Suche im sortierten Feld

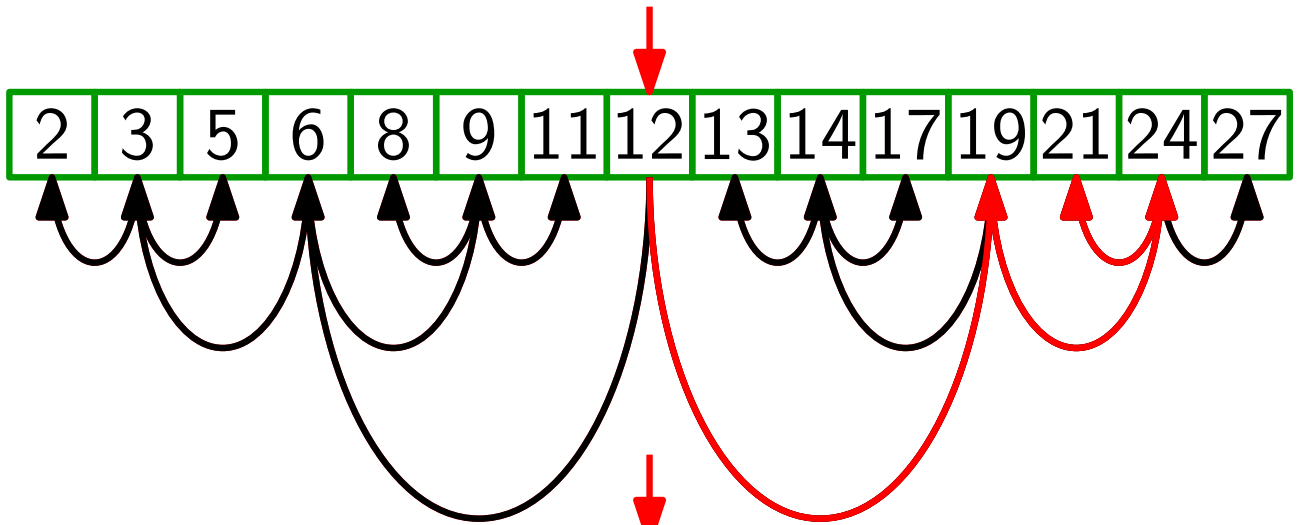


Suche 21!

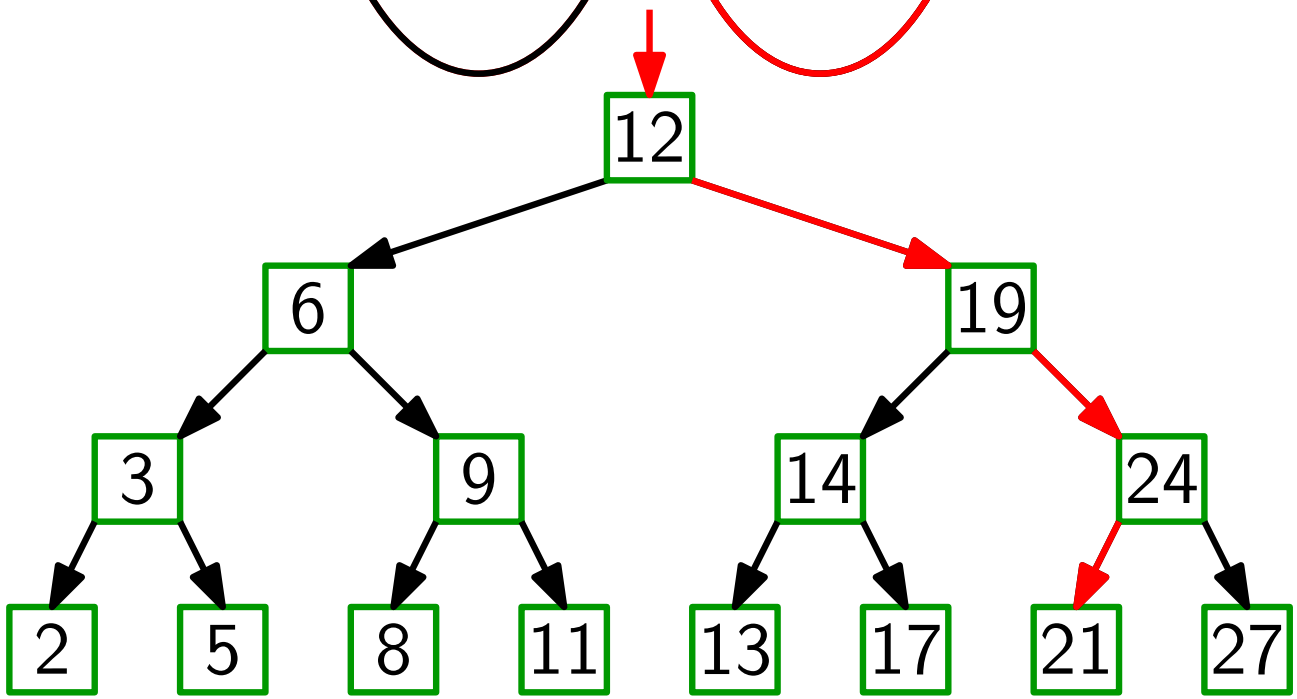


Binärer Suchbaum

Suche im sortierten Feld



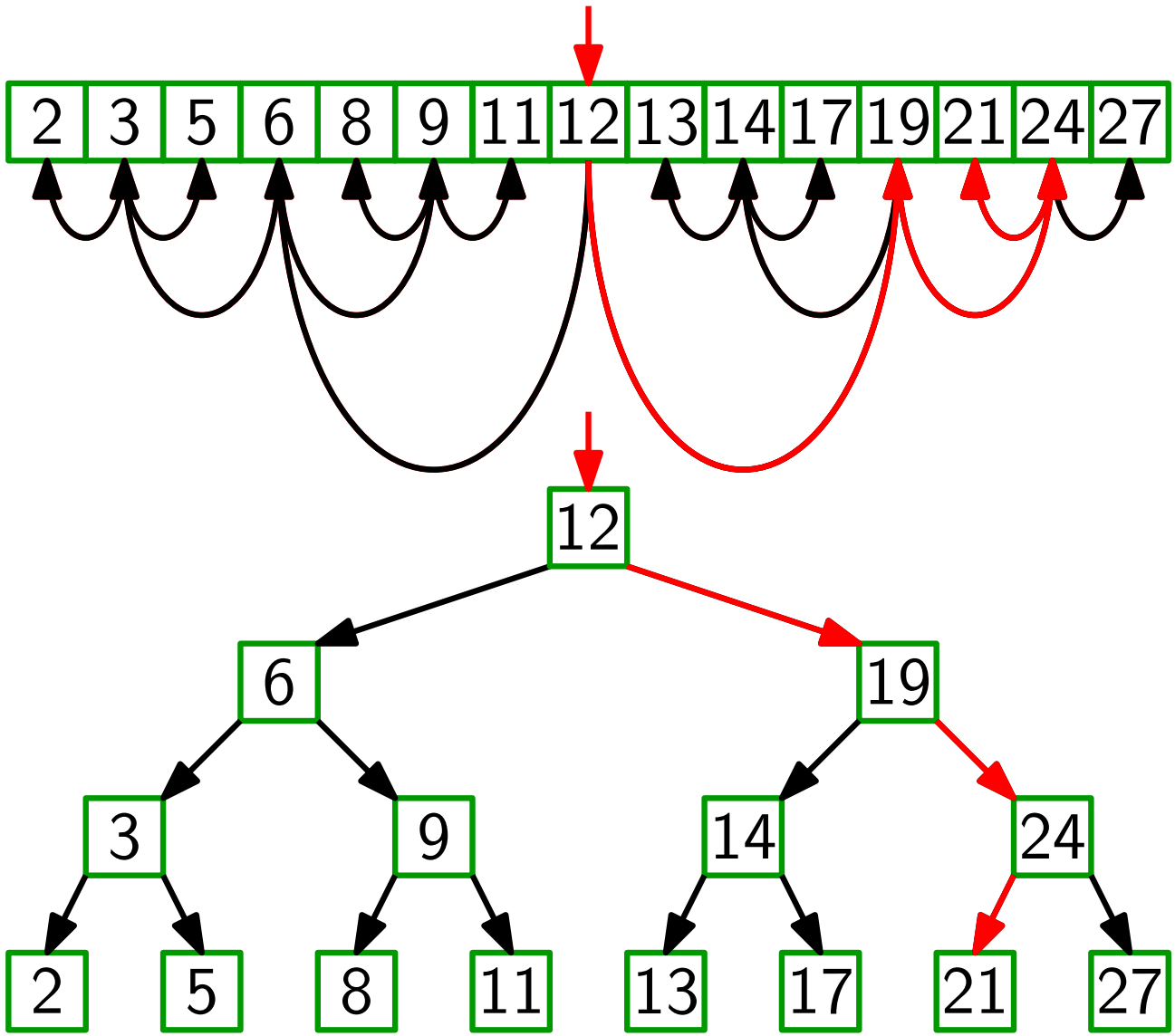
Suche 21!



Binärer Suchbaum

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

Suche im sortierten Feld

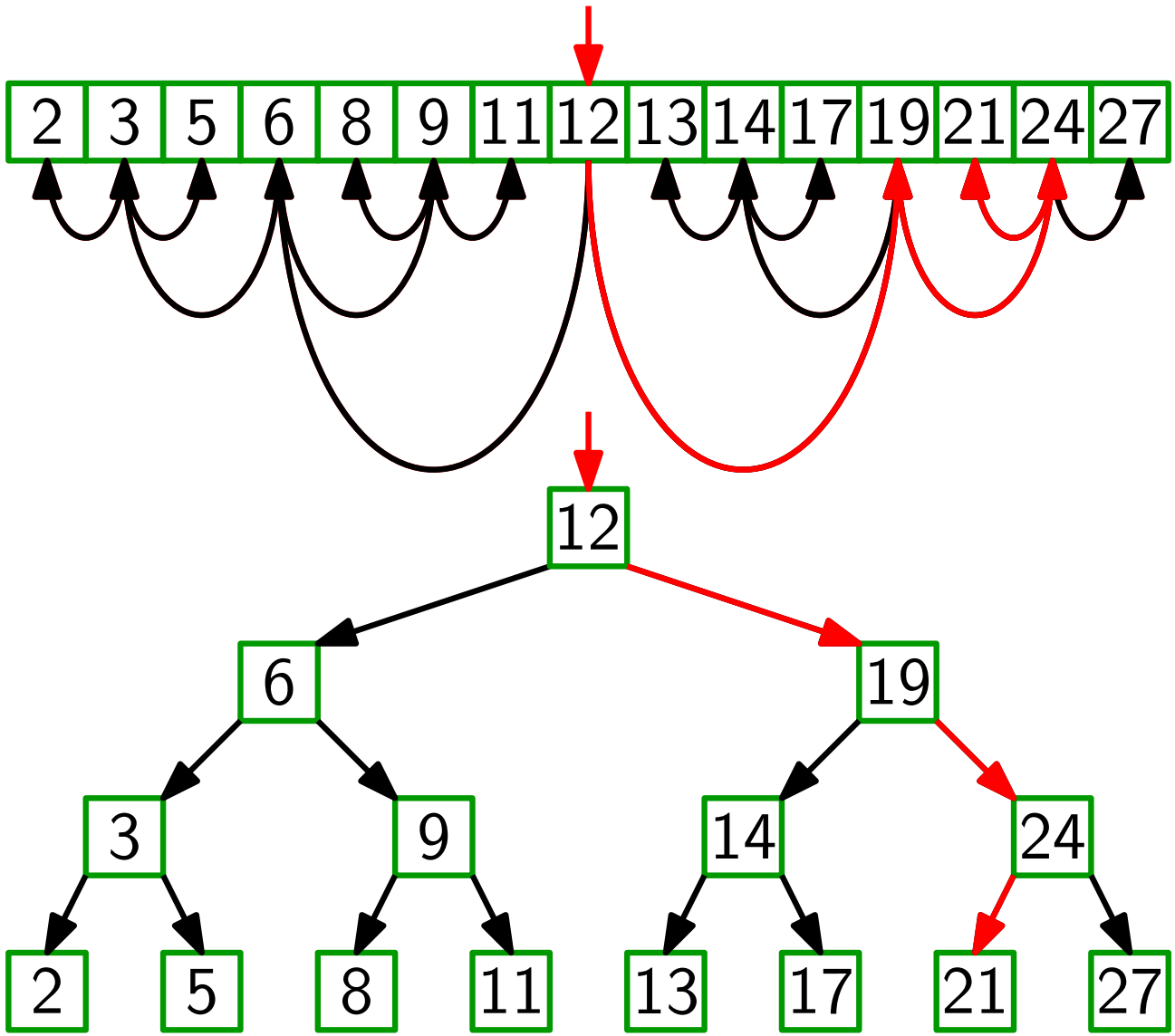


Suche 21!

Binärer Suchbaum

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft: Für jeden Knoten v gilt:

Suche im sortierten Feld

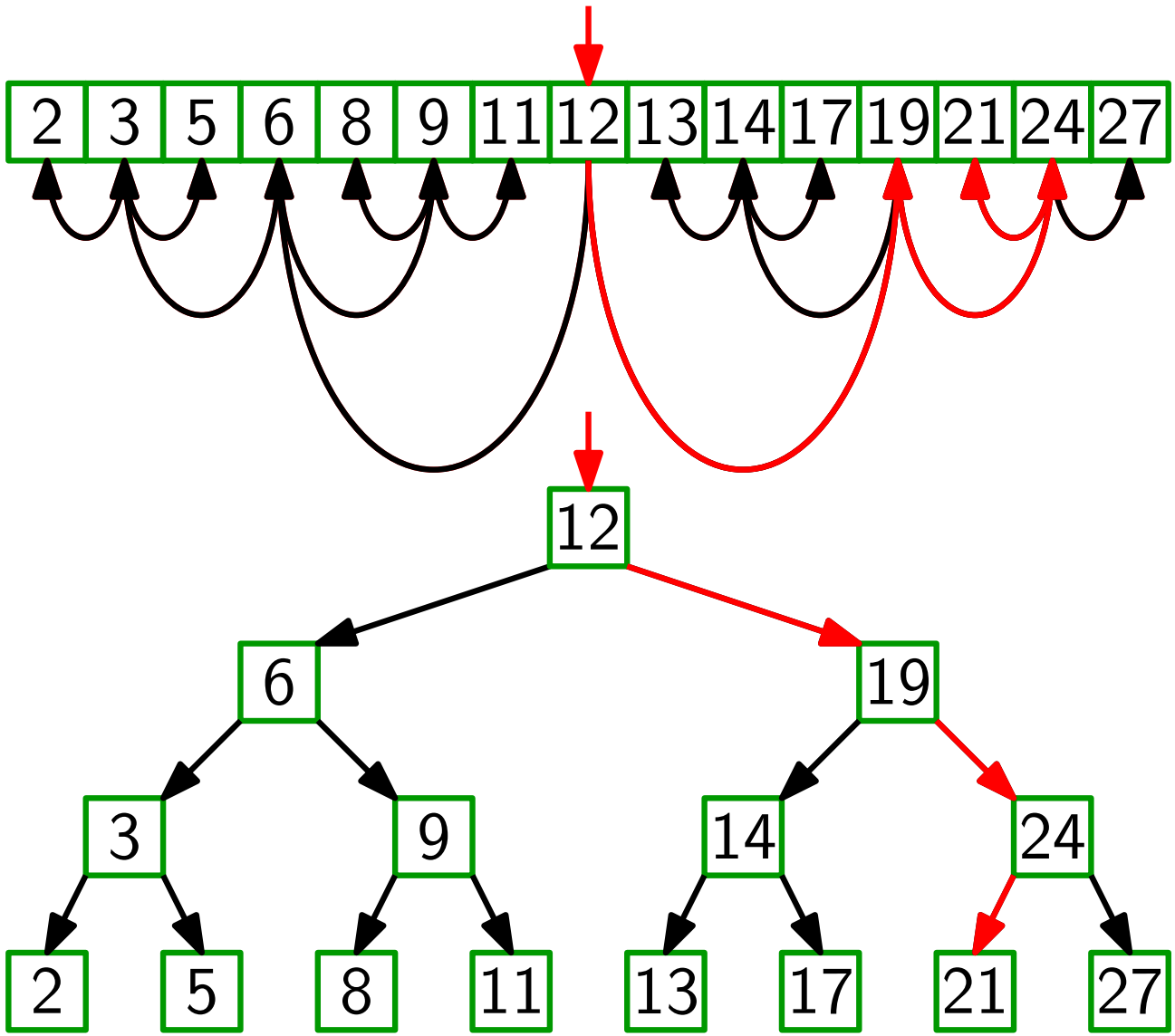


Suche 21!

Binärer Suchbaum

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft: Für jeden Knoten v gilt:
alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

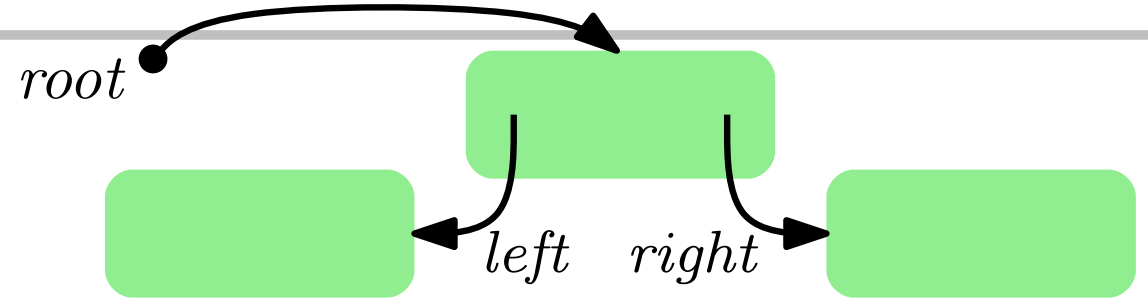
Binärer Suchbaum

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft: Für jeden Knoten v gilt:
alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
rechten $\geq$

Bin. Suchbaum

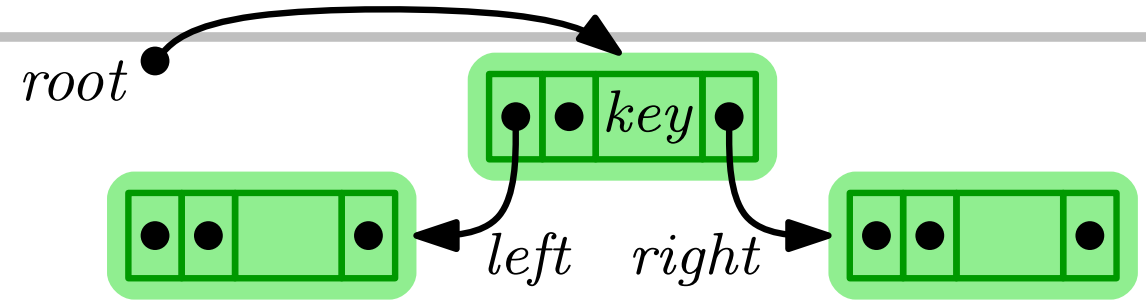
Abs. Datentyp	**Implementierung**
BinSearchTree()	

Bin. Suchbaum



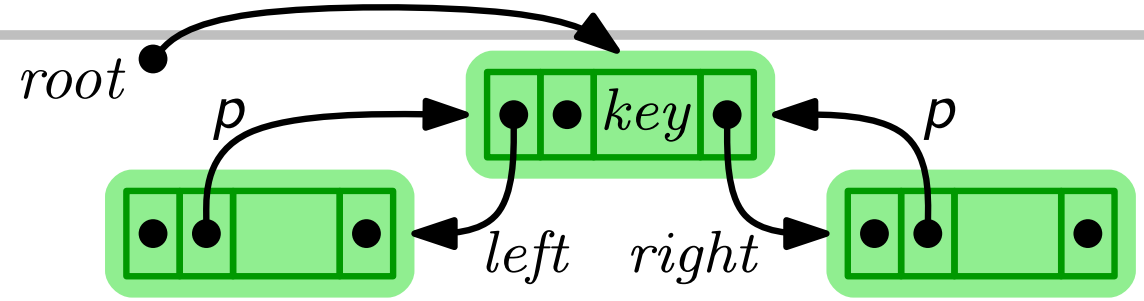
Abs. Datentyp	Implementierung
BinSearchTree()	

Bin. Suchbaum



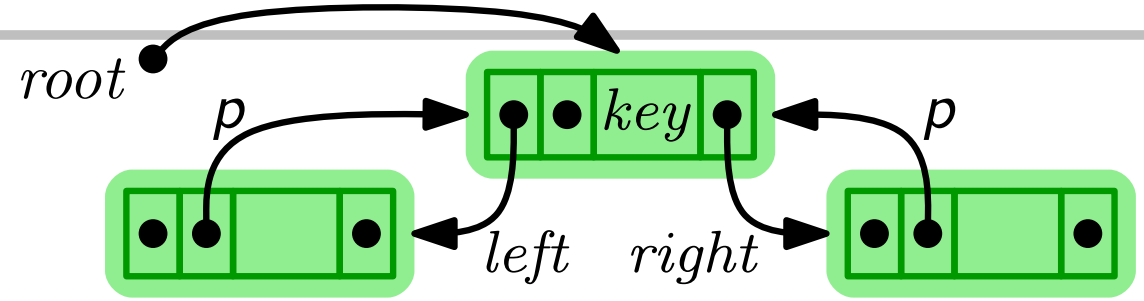
Abs. Datentyp	Implementierung
BinSearchTree()	

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp	Implementierung
BinSearchTree()	

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp

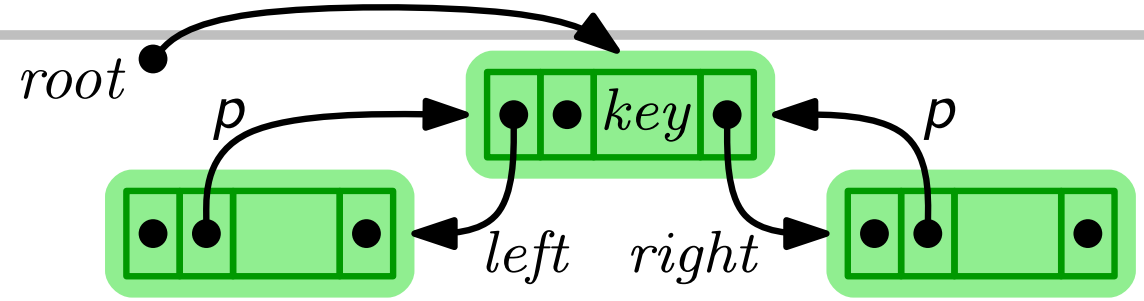
BinSearchTree()

Implementierung

Node

key *key*
Node *left*
Node *right*
Node *p*

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp

BinSearchTree()

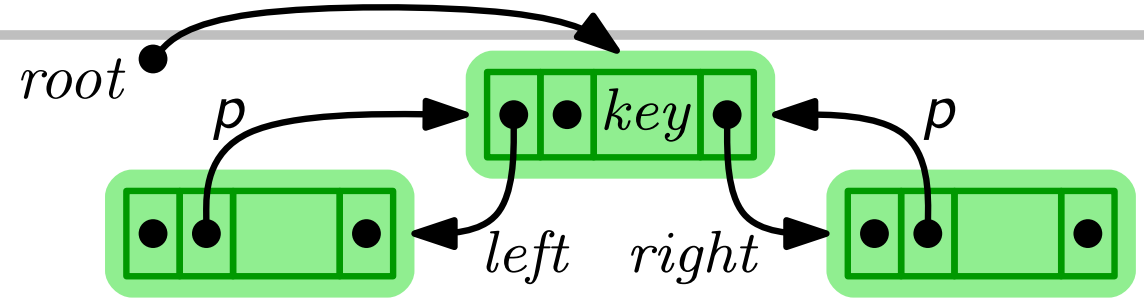
Implementierung

Node *root*

Node

key *key*
Node *left*
Node *right*
Node *p*

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp

BinSearchTree()

Implementierung

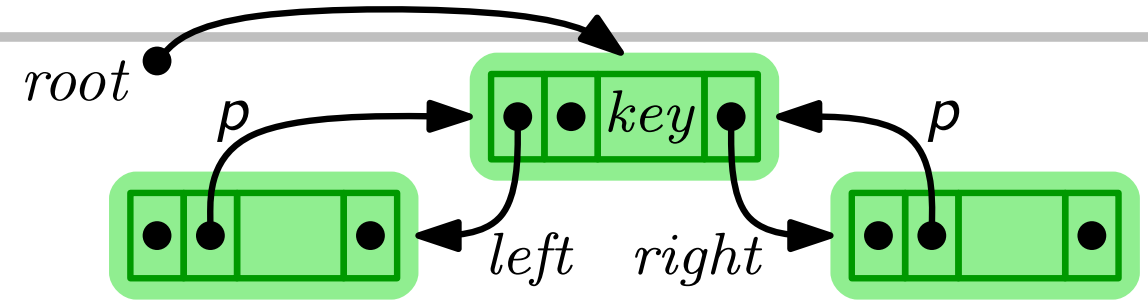
Node(key k, Node par)
$key = k$
$p = par$
$right = left = nil$

Node $root$

Node

key key
Node $left$
Node $right$
Node p

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp

BinSearchTree()

Implementierung

$root = nil$

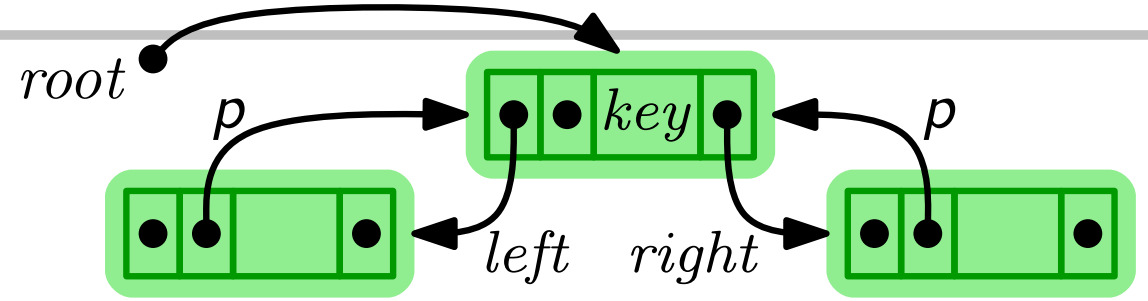
Node(key k, Node par)
$key = k$
$p = par$
$right = left = nil$

Node $root$

Node

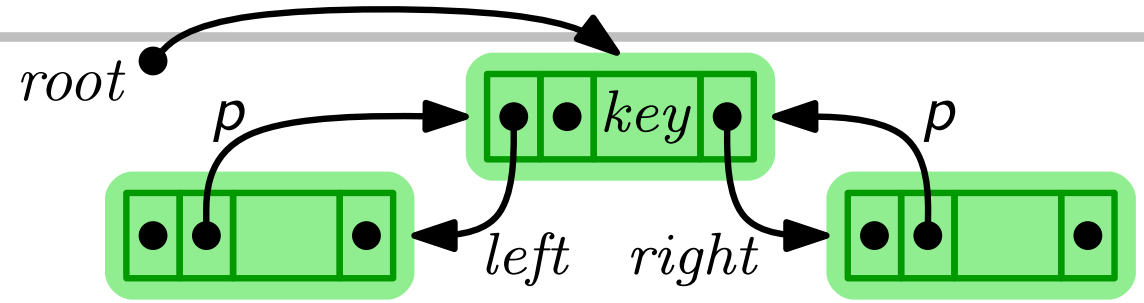
key key
Node $left$
Node $right$
Node p

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp	Implementierung		
BinSearchTree()	$root = nil$	Node(key k, Node par) $key = k$ $p = par$ $right = left = nil$ Node $root$	Node key key Node $left$ Node $right$ Node p
Node Search(key k)			
Node Insert(key k) Delete(Node x)			
Node Minimum() Node Maximum()			
Node Predecessor(Nd. x) Node Successor(Node x)			

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp	Implementierung		
BinSearchTree()	$root = nil$	Node(key k, Node par) $key = k$ $p = par$ $right = left = nil$	Node key key Node $left$ Node $right$ Node p
		Node $root$	
Node Search(key k)			
Node Insert(key k) Delete(Node x)			
Node Minimum() Node Maximum()			
Node Predecessor(Nd. x) Node Successor(Node x)			

To do!

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung: 1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

Inorder-Traversierung

(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

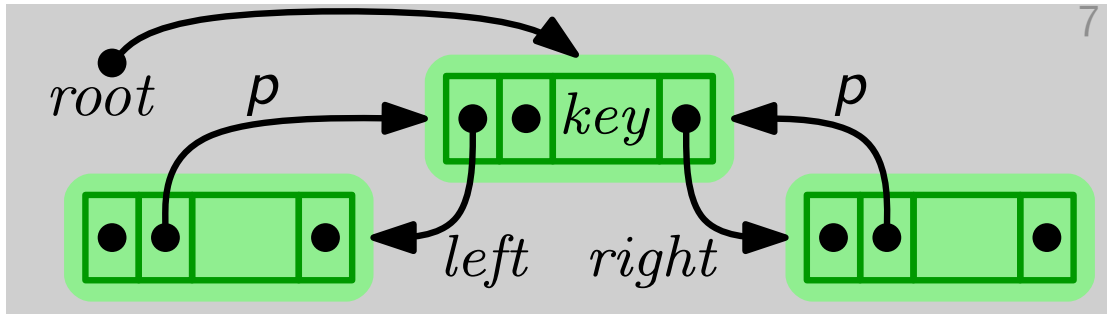
Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

Code:

InorderTreeWalk(Node $x = root$)

Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

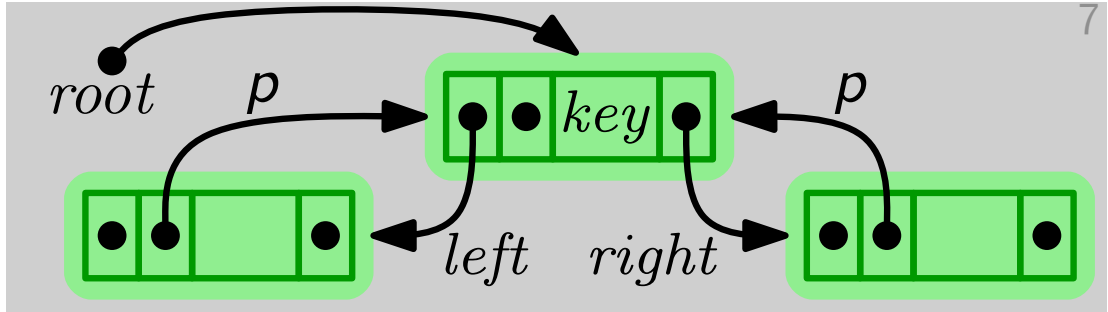
Lösung:
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

Code:

InorderTreeWalk(Node $x = root$)

Geben Sie eine rekursive Implementierung an!

Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

Lösung:
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen:

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.
Induktion über die Baumhöhe h.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.
Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$:

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$:

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.
T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.

T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.

T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*

Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.
T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*
Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Ausgabe (sortierte Schlüssel von T_{links}, dann $root.key$, dann sortierte Schlüssel von T_{rechts}) ist sortiert.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.
T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*
Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft $\Rightarrow$
Ausgabe (sortierte Schlüssel von T_{links}, dann $root.key$, dann sortierte Schlüssel von T_{rechts}) ist sortiert.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h.

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.
T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*
Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft $\Rightarrow$
Ausgabe (sortierte Schlüssel von T_{links}, dann $root.key$, dann sortierte Schlüssel von T_{rechts}) ist sortiert. ✓

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$T(n) =$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(\blacksquare) + T(\blacksquare) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n \; - \mathbf{1}$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

oder:

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n \; - \mathbf{1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} - 1 = n - 1$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} - 1 = n - 1$

Übung: zeig's mit Induktion!

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} - 1 = n - 1$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: #Kanten $=$ #Knoten $-1 = n-1$

$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n-1) + c_2 \cdot n$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n-k-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - \mathbf{1}$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#\text{Kanten} = \#\text{Knoten} - 1 = n - 1$

$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n-1) + c_2 \cdot n \in O(n)$.

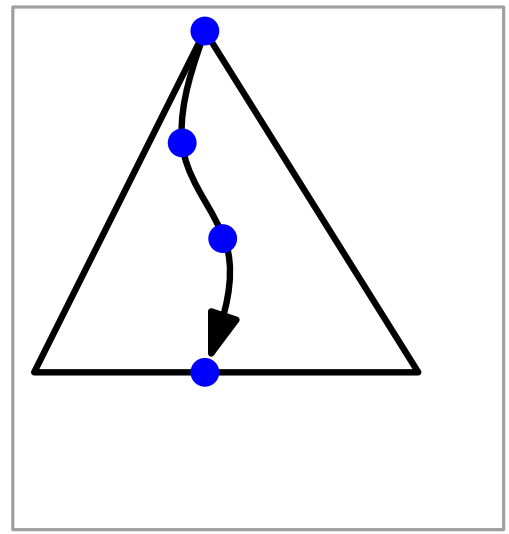
Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

Node Search(key k, Node $x = root$)



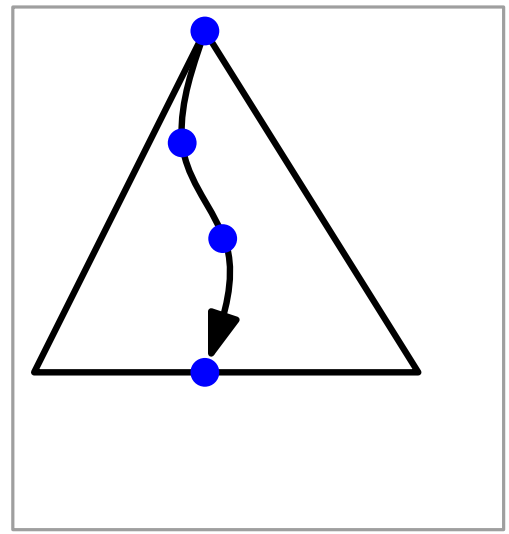
Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else  return Search(k, x.right)
```



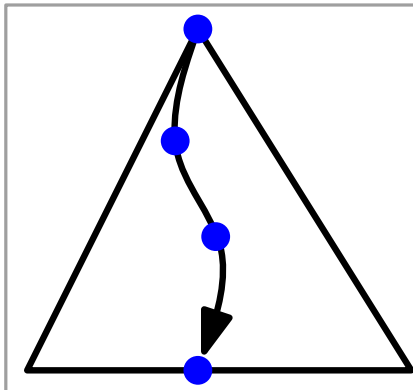
Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit:

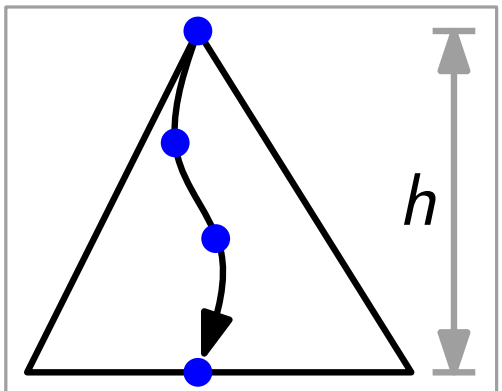
Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else  return Search(k, x.right)
```



Laufzeit:

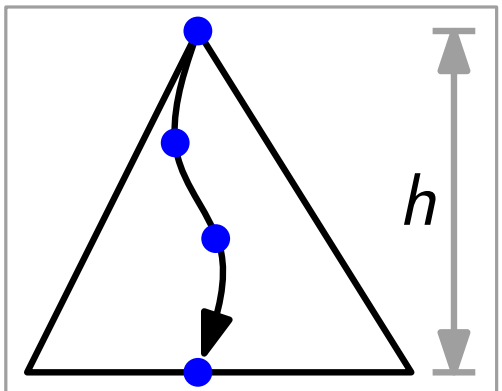
Code:

```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

Code:

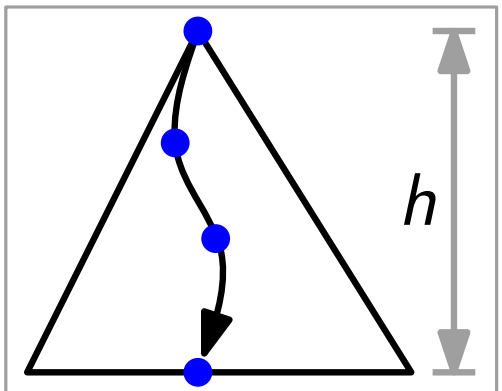
```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

Code:

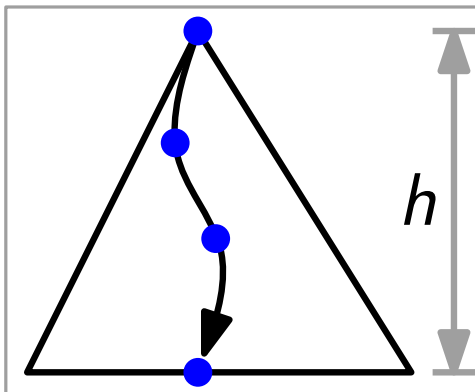
```
InorderTreeWalk(Node x = root)
  if x ≠ nil then
    InorderTreeWalk(x.left)
    gib x.key aus
    InorderTreeWalk(x.right)
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

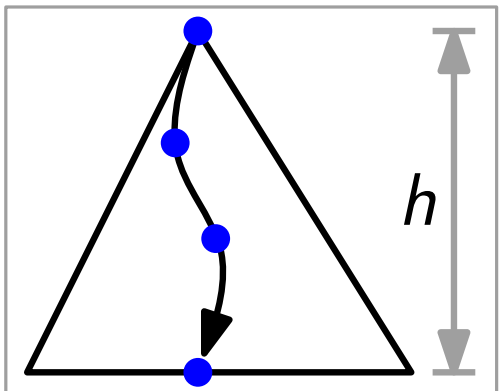
iterativ

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

iterativ

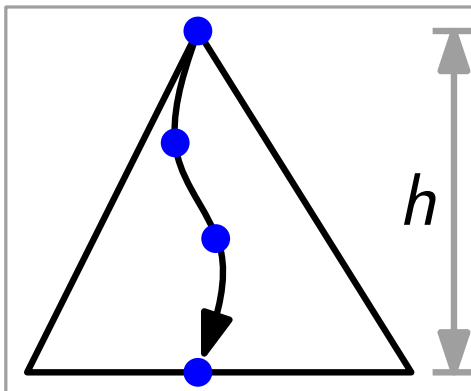
```
while x ≠ nil and x.key ≠ k do
  if k < x.key then
    x = x.left
  else x = x.right
return x
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
    if x == nil or x.key == k then
        return x
    if k < x.key then
        return Search(k, x.left)
    else  return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

iterativ

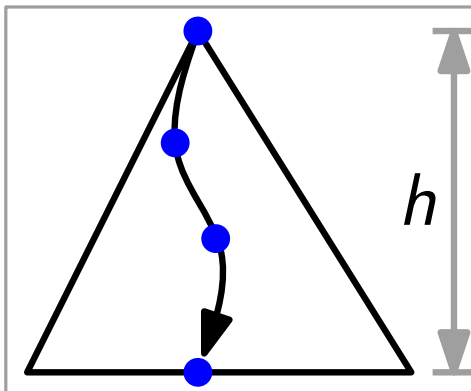
```
while x ≠ nil and x.key ≠ k do
    if k < x.key then
        x = x.left
    else  x = x.right
return x
```

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

iterativ

```
while x ≠ nil and x.key ≠ k do
  if k < x.key then
    x = x.left
  else x = x.right
return x
```

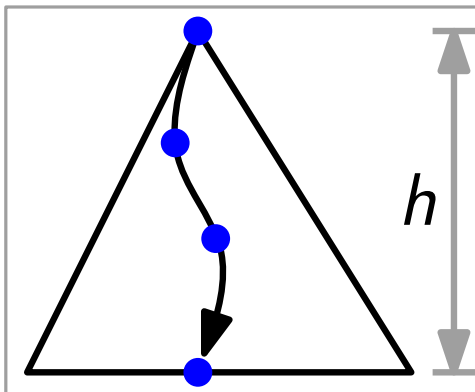
Laufzeit:

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

iterativ

```
while x ≠ nil and x.key ≠ k do
  if k < x.key then
    x = x.left
  else x = x.right
return x
```

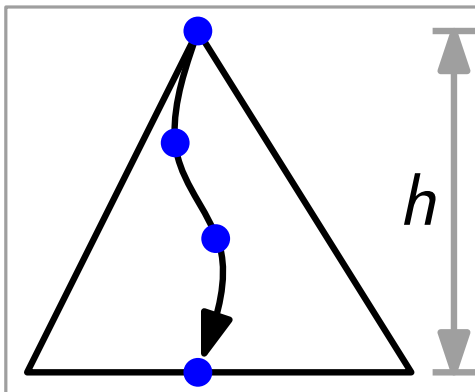
Laufzeit: $O(h)$

Suche

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key k, Node x = root)
  if x == nil or x.key == k then
    return x
  if k < x.key then
    return Search(k, x.left)
  else return Search(k, x.right)
```



Laufzeit: $O(h)$

iterativ

```
while x ≠ nil and x.key ≠ k do
  if k < x.key then
    x = x.left
  else x = x.right
return x
```

Laufzeit: $O(h)$

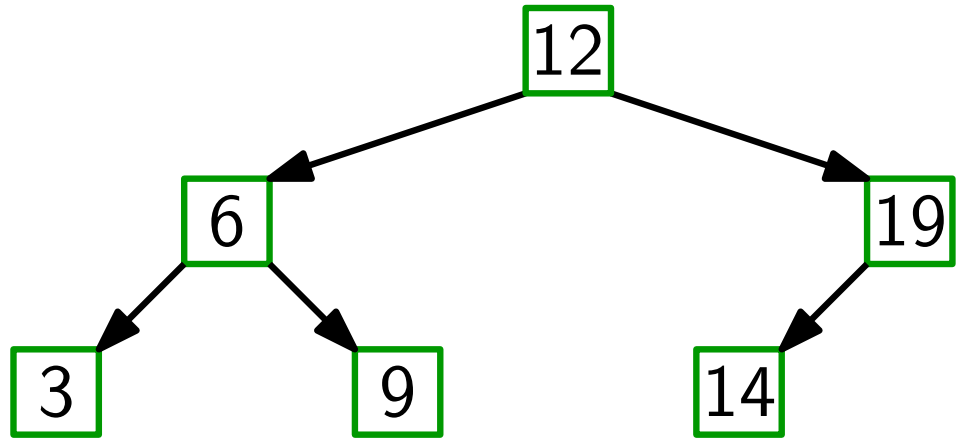
Trotzdem schneller, da keine Verwaltung der rekursiven Methodenaufrufe.

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?

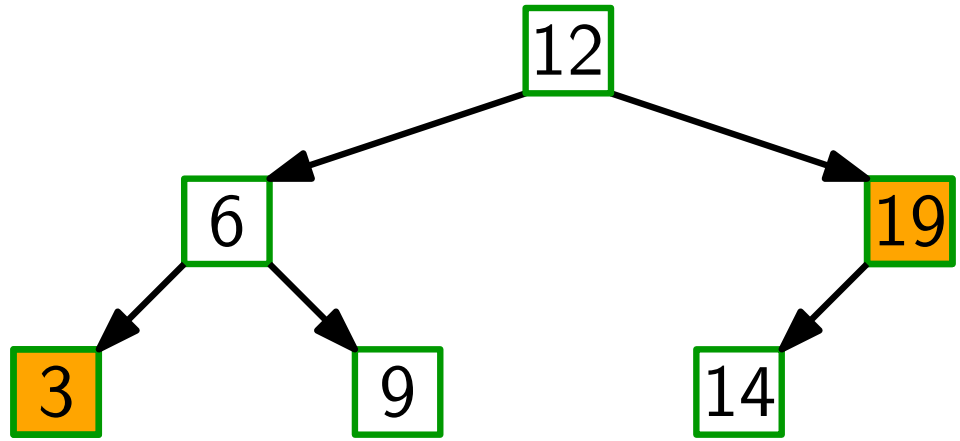
Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Minimum & Maximum

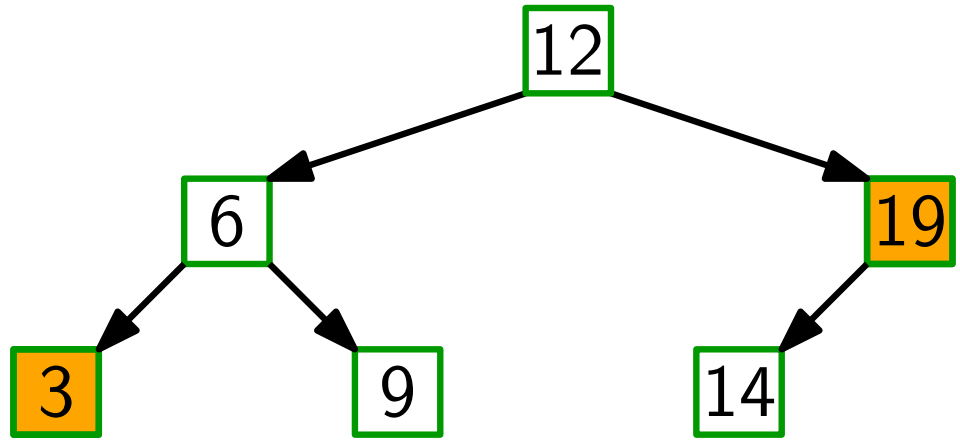
Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



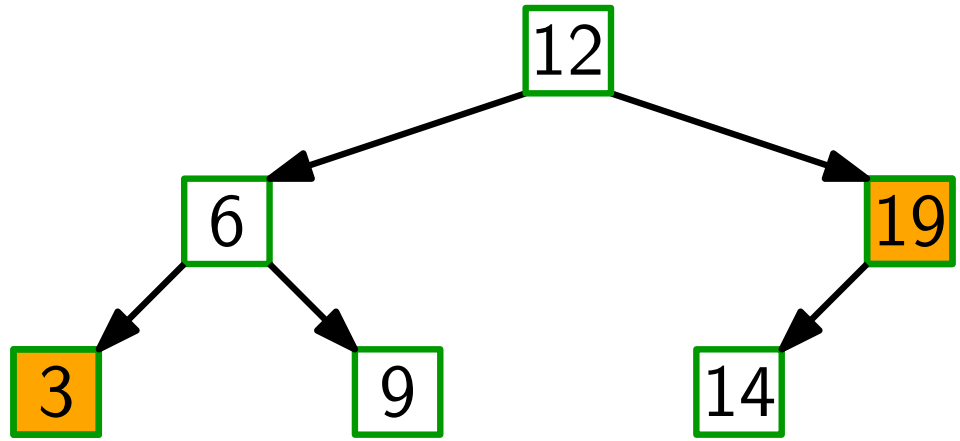
Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

Aufgabe: Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

Node Minimum(Node $x = root$) — *iterativ!*

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

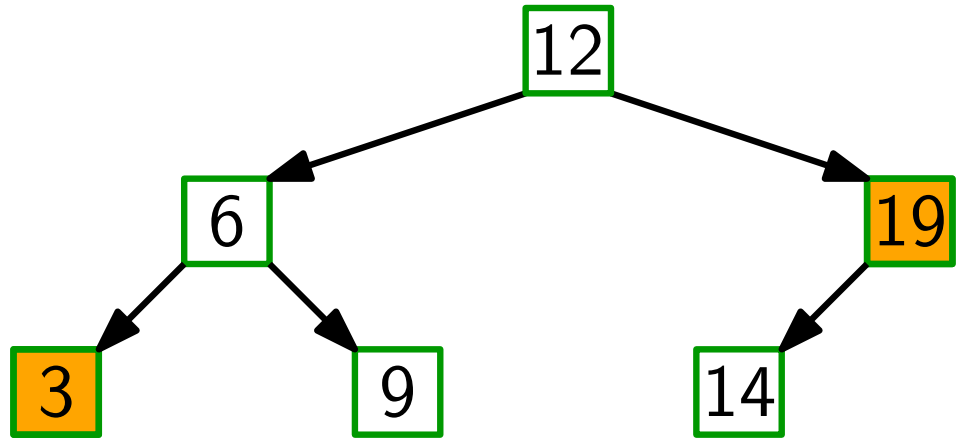
Aufgabe: Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

Node Minimum(Node $x = root$) — *iterativ!*

```
while x.left ≠ nil do
    x = x.left
return x
```

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

Aufgabe: Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

```
Node Minimum(Node x = root)
  if x == nil then return nil
  while x.left ≠ nil do
    x = x.left
  return x
```

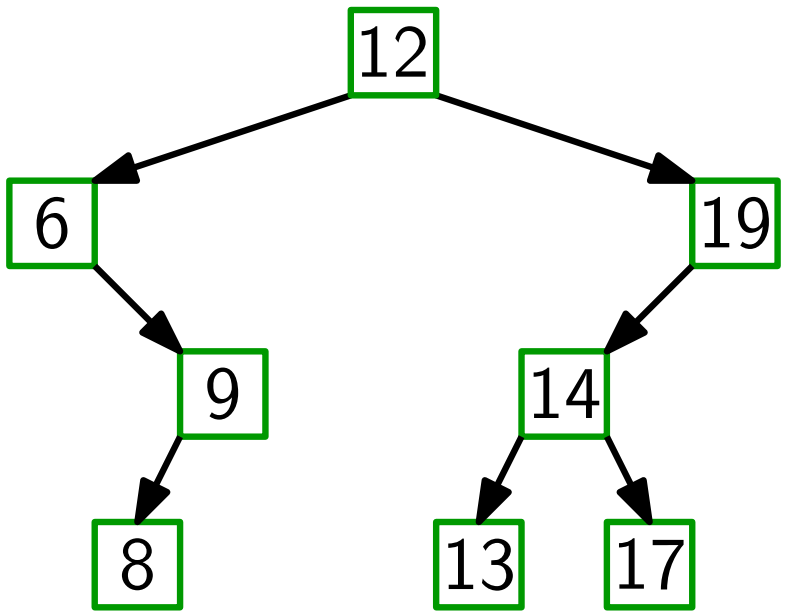
— *iterativ!*

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Nachfolger (und Vorgänger)

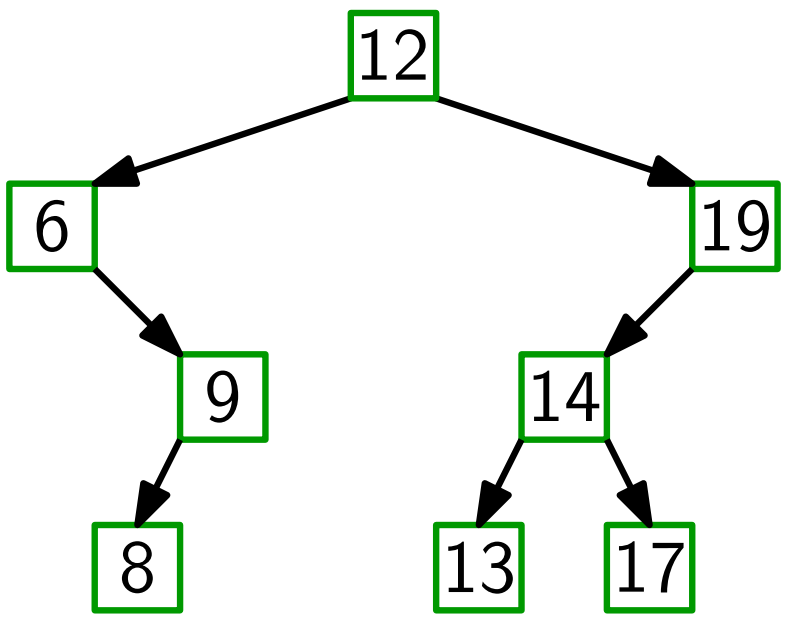
Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.



Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

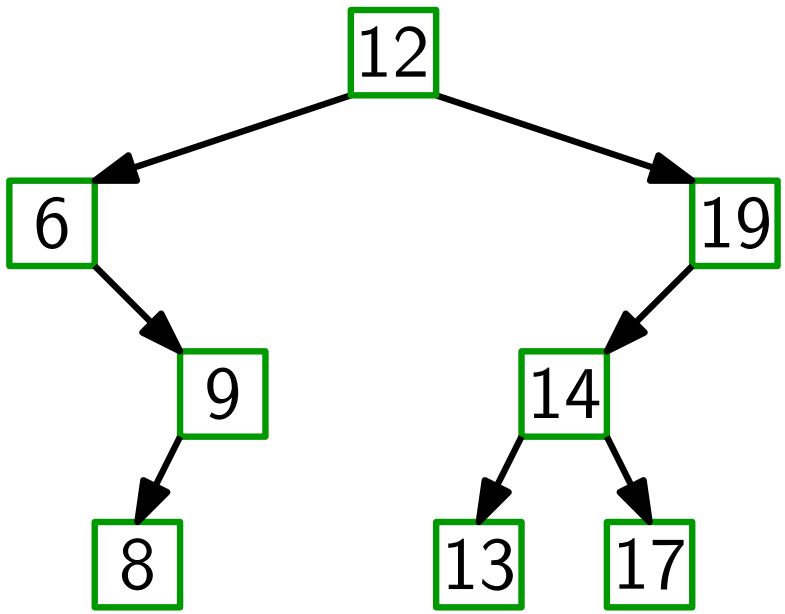
Erinnerung: Nachfolger(x) =



Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

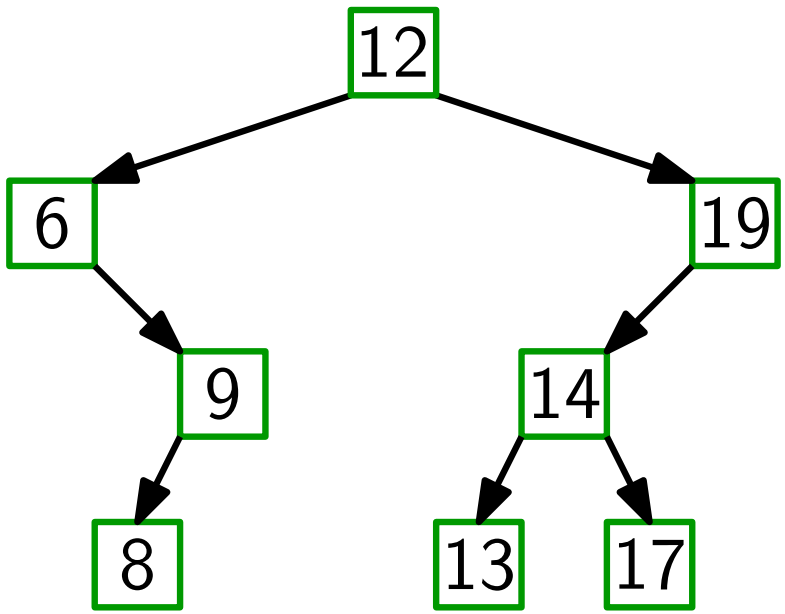


Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \min_y\{y.key \mid y.key > x.key\}$.

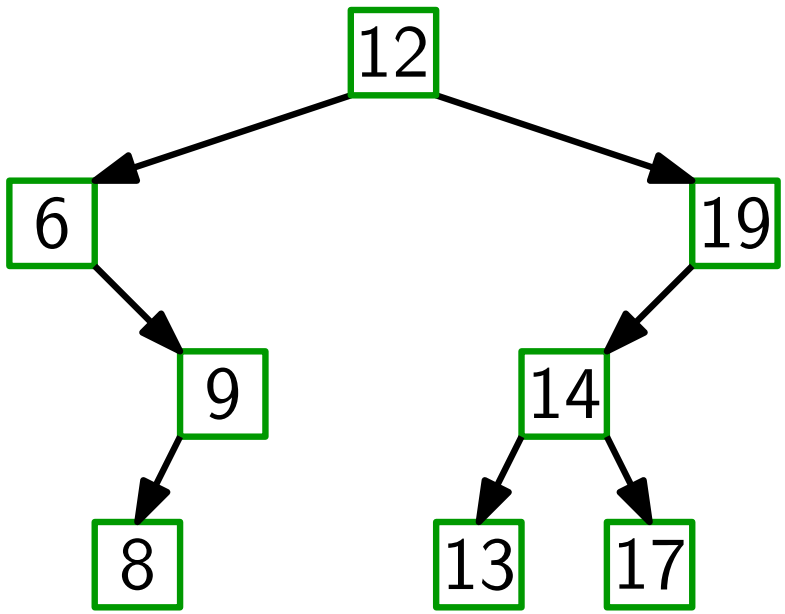


Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.

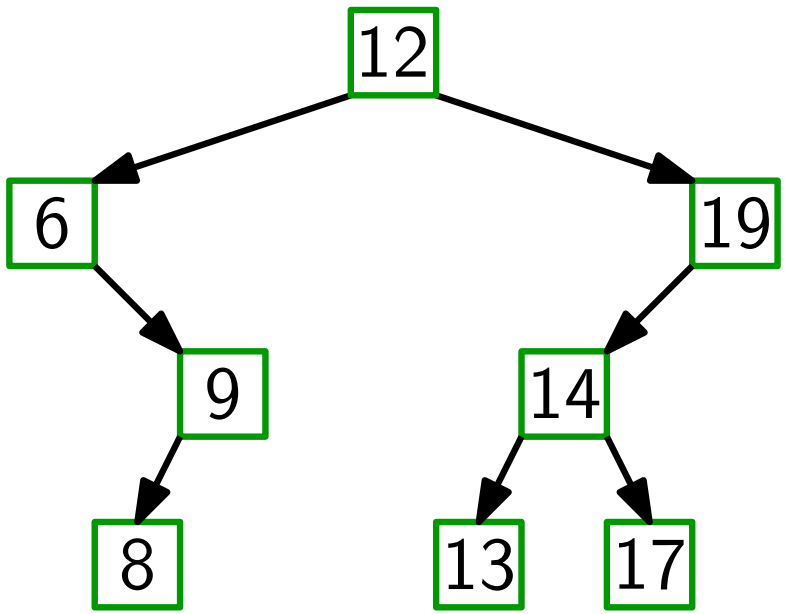


Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



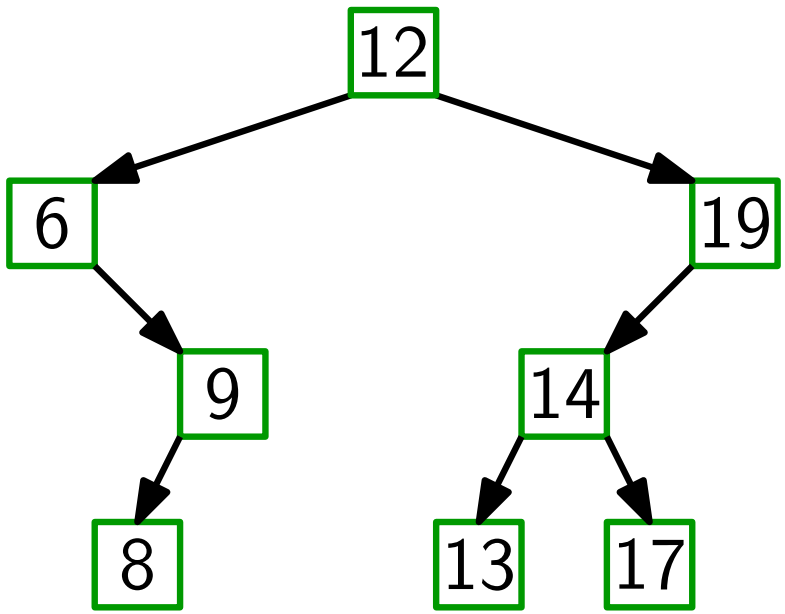
Nachfolger(19) $:= nil$

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Nachfolger(19) $:= nil$

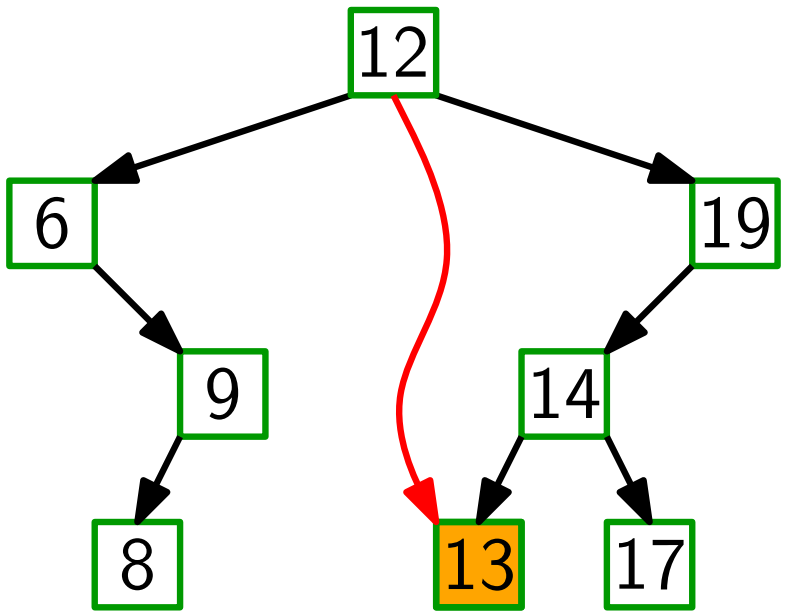
Nachfolger(12) $=$?

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Nachfolger(19) := nil

Nachfolger(12) = ?

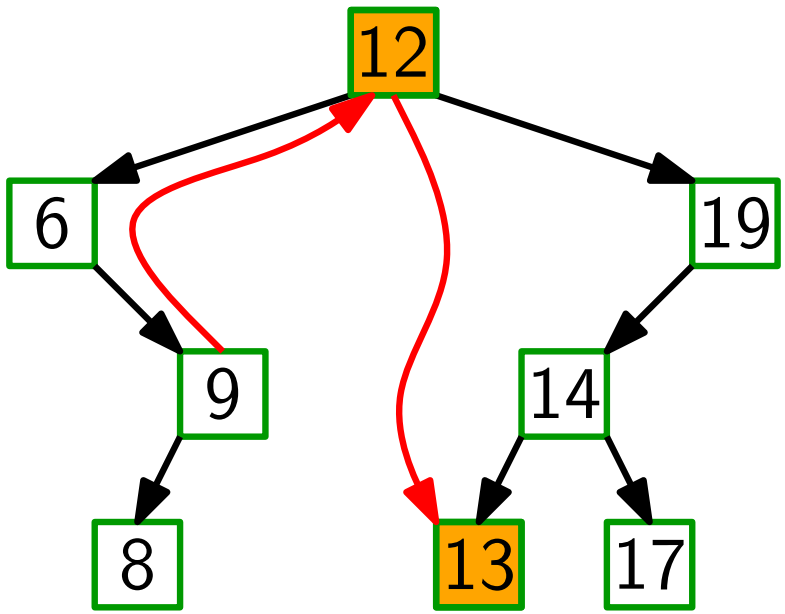
13 == Minimum(„12.$right$“)

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Nachfolger(19) := nil

Nachfolger(12) = ?

Nachfolger(9) = ?

13 == Minimum(„12.$right$“)

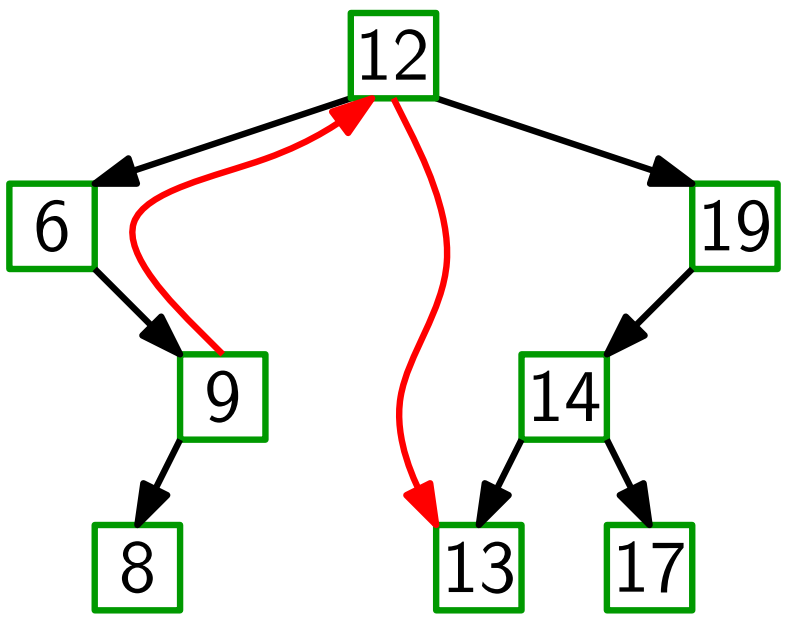
9 hat kein rechtes Kind; 9 == Maximum(„12.$left$“)

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.

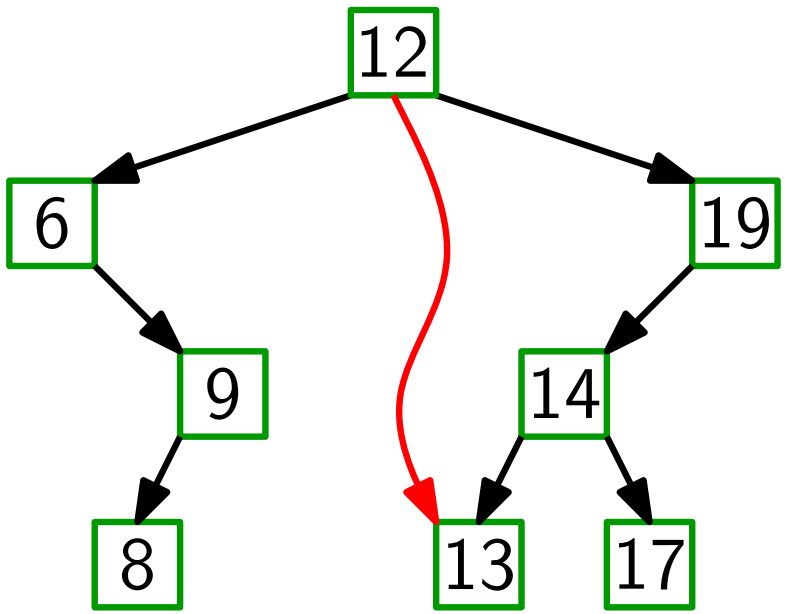


Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Node Successor(Node x)

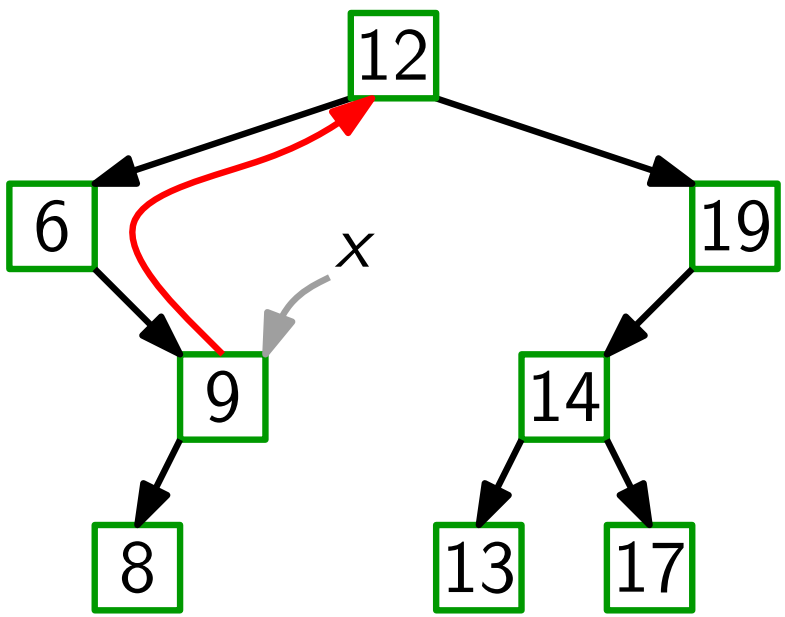
if $x.right \neq nil$ **then**
  return Minimum($x.right$)

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Node Successor(Node x)

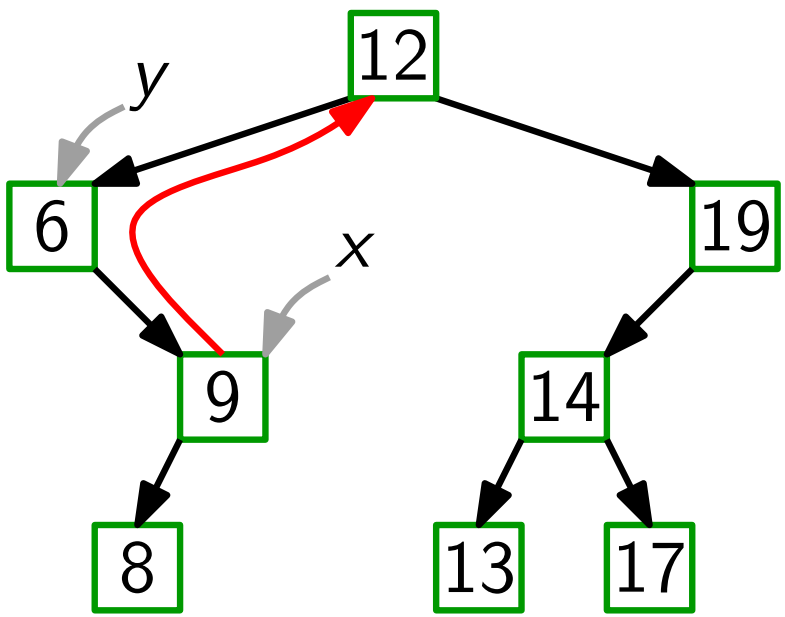
if $x.right \neq nil$ **then**
  return Minimum($x.right$)
$y = x.p$
while $y \neq nil$ **and** $x == y.right$ **do**
  $x = y$
  $y = y.p$
return y

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Node Successor(Node x)

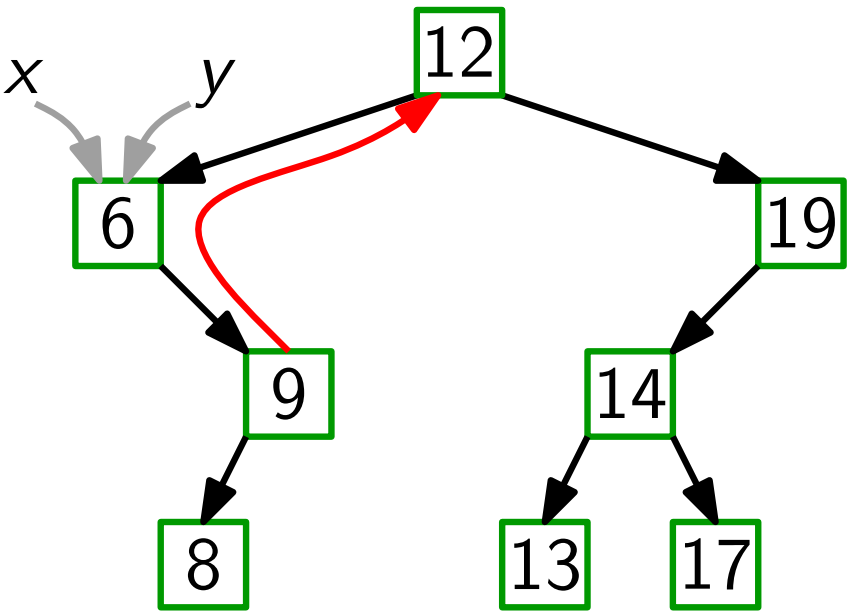
if $x.right \neq nil$ **then**
  return Minimum($x.right$)
$y = x.p$
while $y \neq nil$ **and** $x == y.right$ **do**
  $x = y$
  $y = y.p$
return y

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



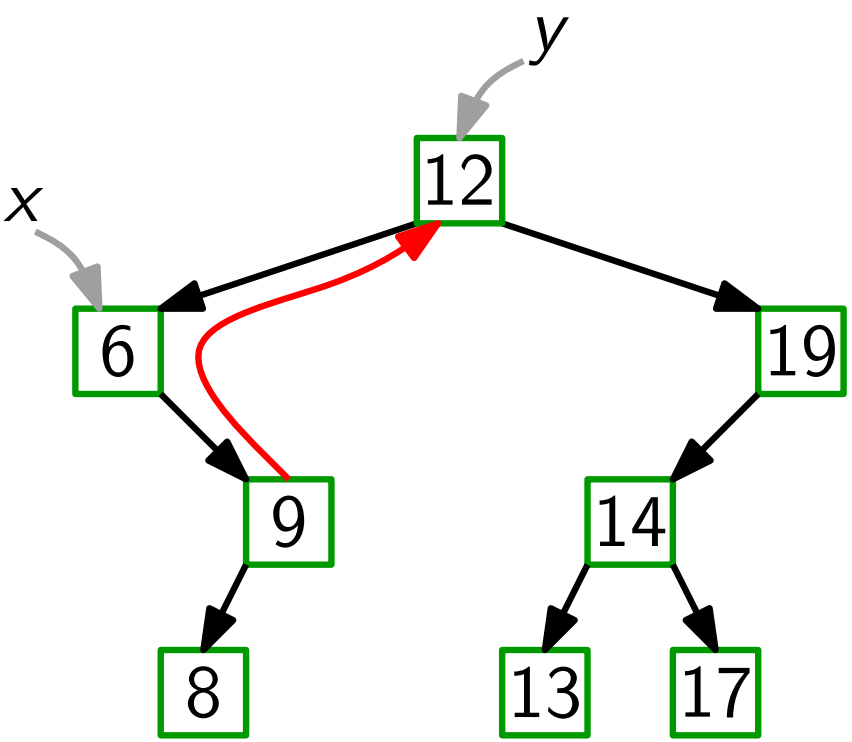

```
Node Successor(Node x)
    if x.right ≠ nil then
        return Minimum(x.right)
    y = x.p
    while y ≠ nil and x == y.right do
        x = y
        y = y.p
    return y
```

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



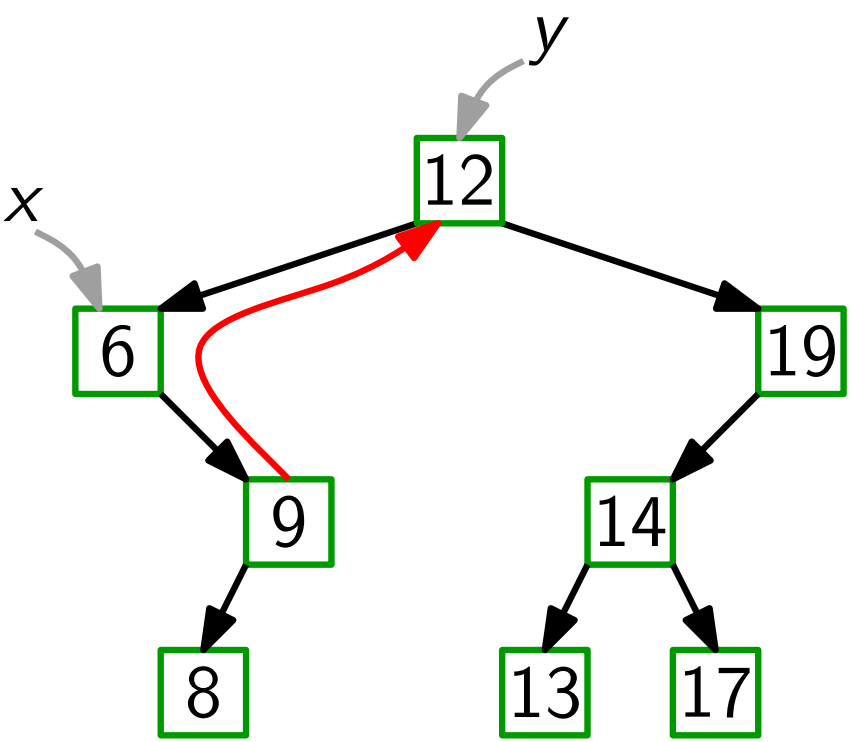

```
Node Successor(Node x)
  if x.right ≠ nil then
    return Minimum(x.right)
  y = x.p
  while y ≠ nil and x == y.right do
    x = y
    y = y.p
  return y
```

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Node Successor(Node x)

if $x.right \neq nil$ **then**
  return Minimum($x.right$)

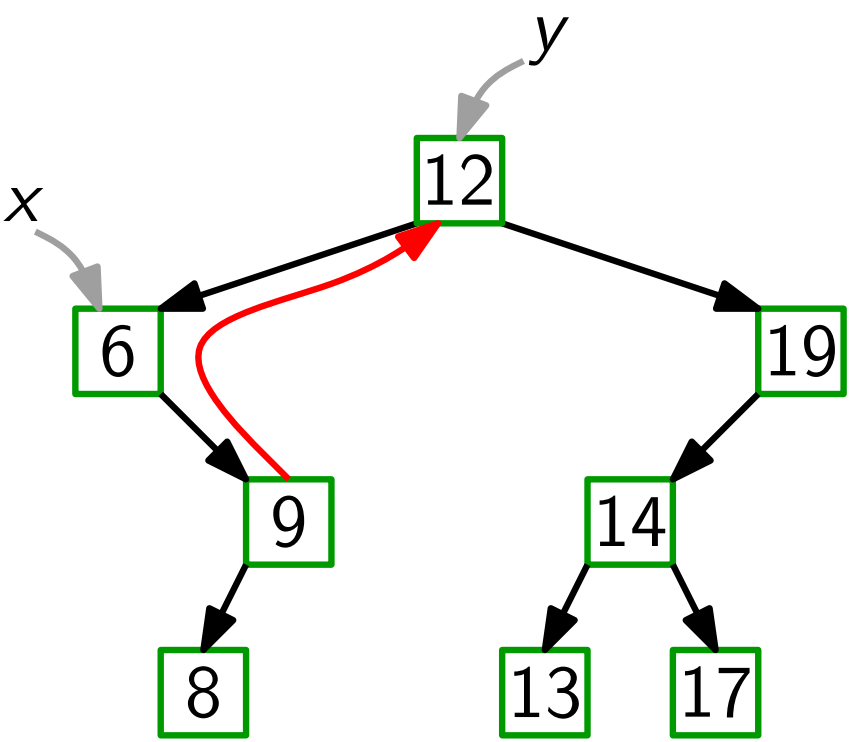
$y = x.p$
while $y \neq nil$ **and** $x == y.right$ **do**
  $x = y$
  $y = y.p$
return y

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.



Node Successor(Node x)

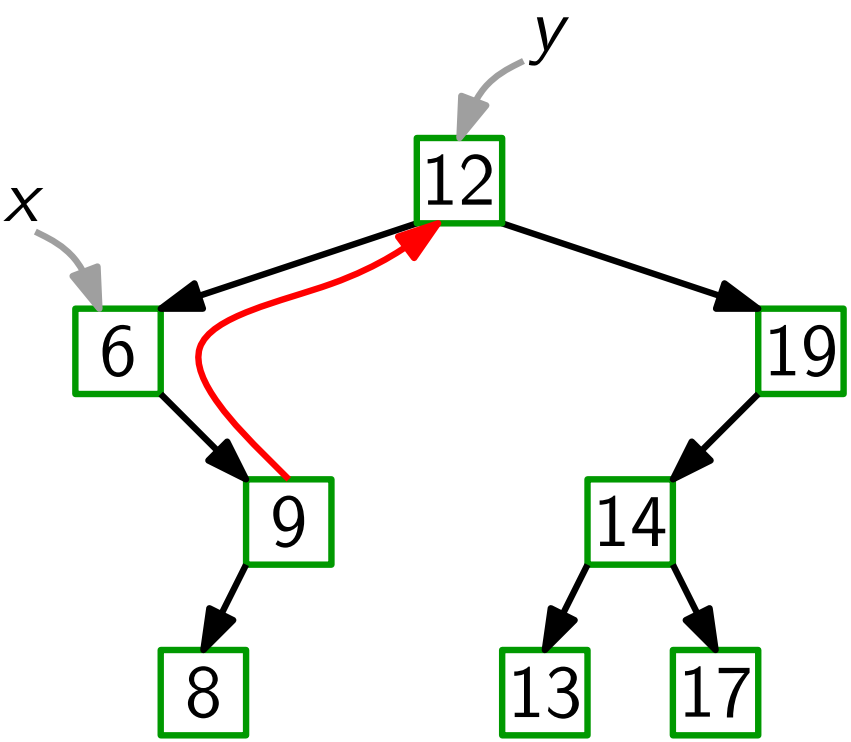
if $x.right \neq nil$ **then**
  return Minimum($x.right$)
$y = x.p$
while $y \neq nil$ **and** $x == y.right$ **do**
  $x = y$
  $y = y.p$
return y

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: Nachfolger(x) = Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen y mit $y.key > x.key$.

$= \arg\min_y \{y.key \mid y.key > x.key\}$.

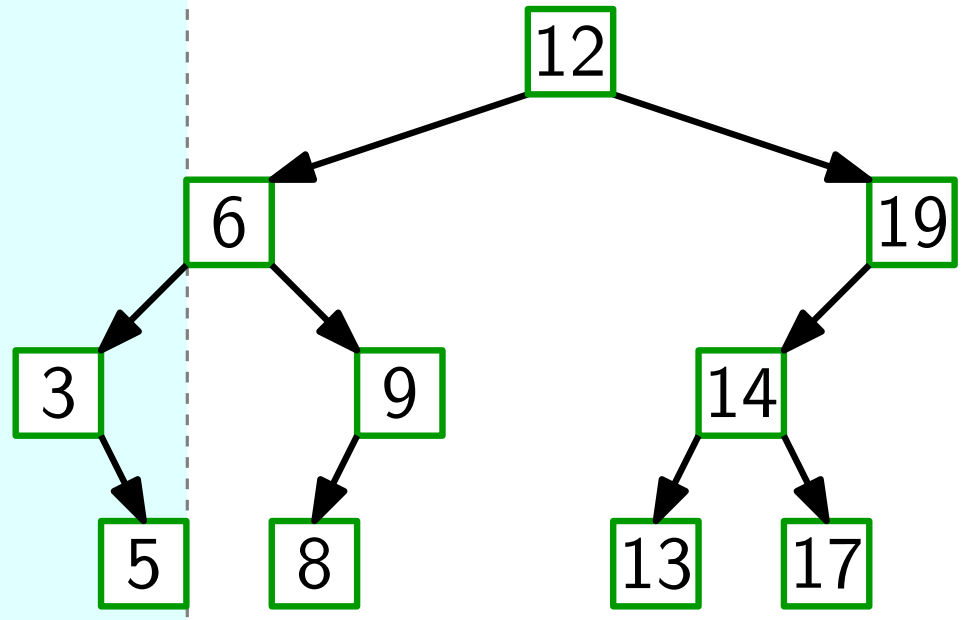


Tipp: Probieren Sie auch z.B. Successor("19")!

```
Node Successor(Node x)
    if x.right ≠ nil then
        return Minimum(x.right)
    y = x.p
    while y ≠ nil and x == y.right do
        x = y
        y = y.p
    return y
```

Einfügen

Node Insert(key k)



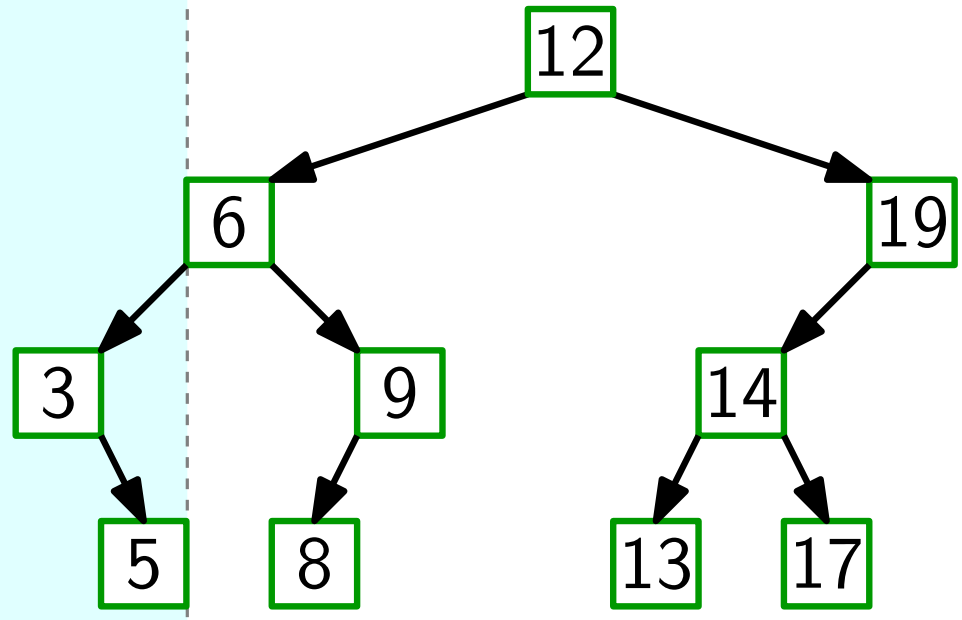
Insert(11)

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$



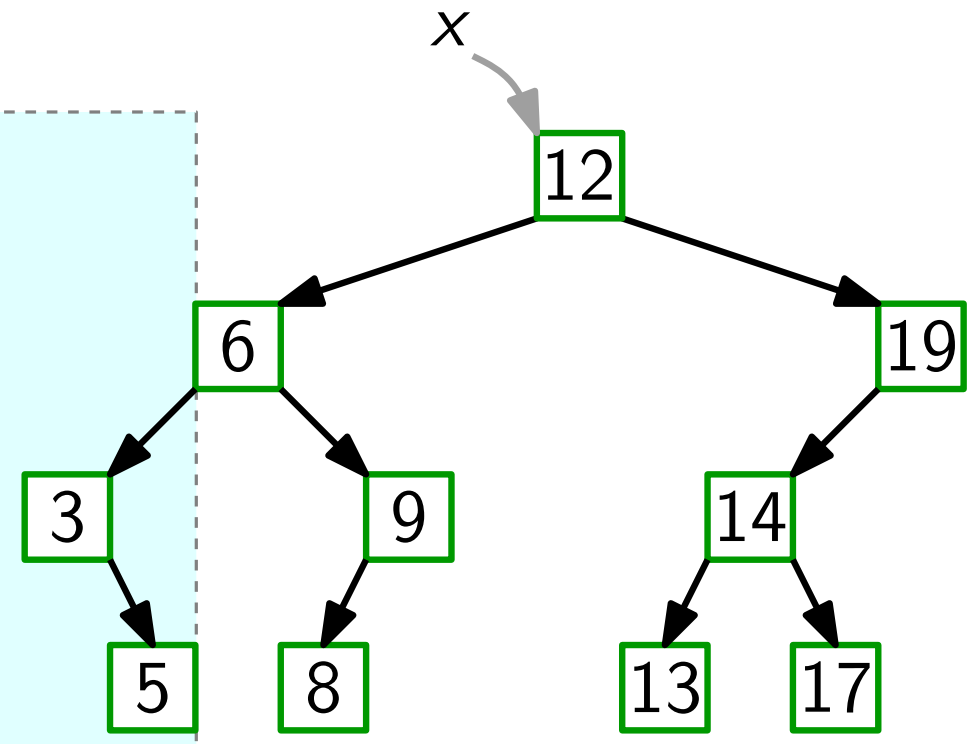
Insert(11)

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

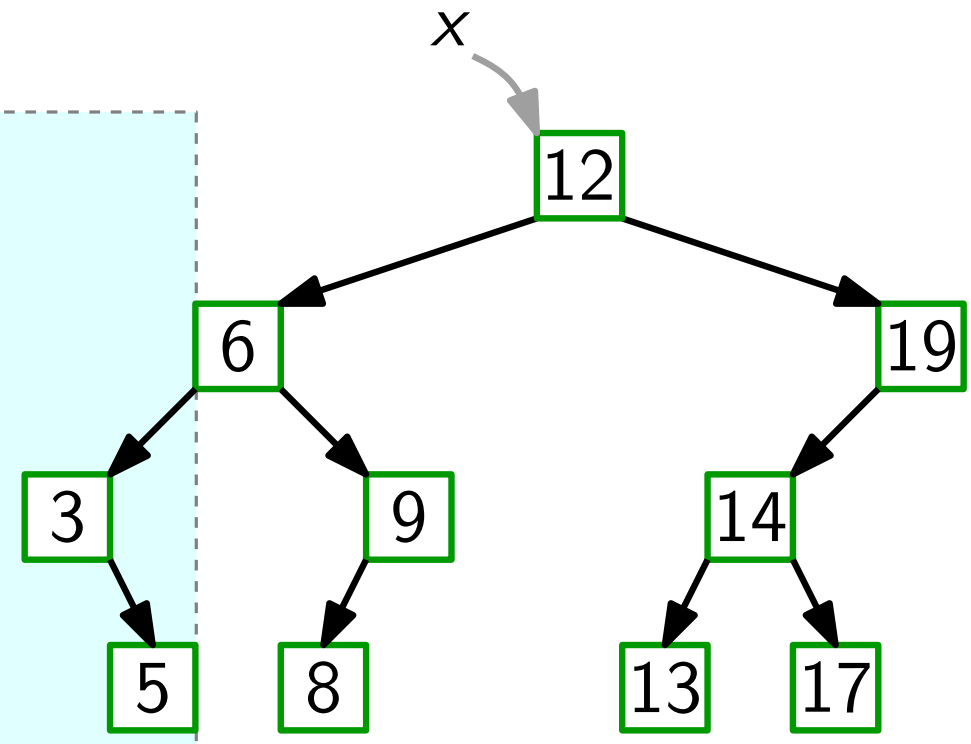
$x = root$



Insert(11)

Einfügen

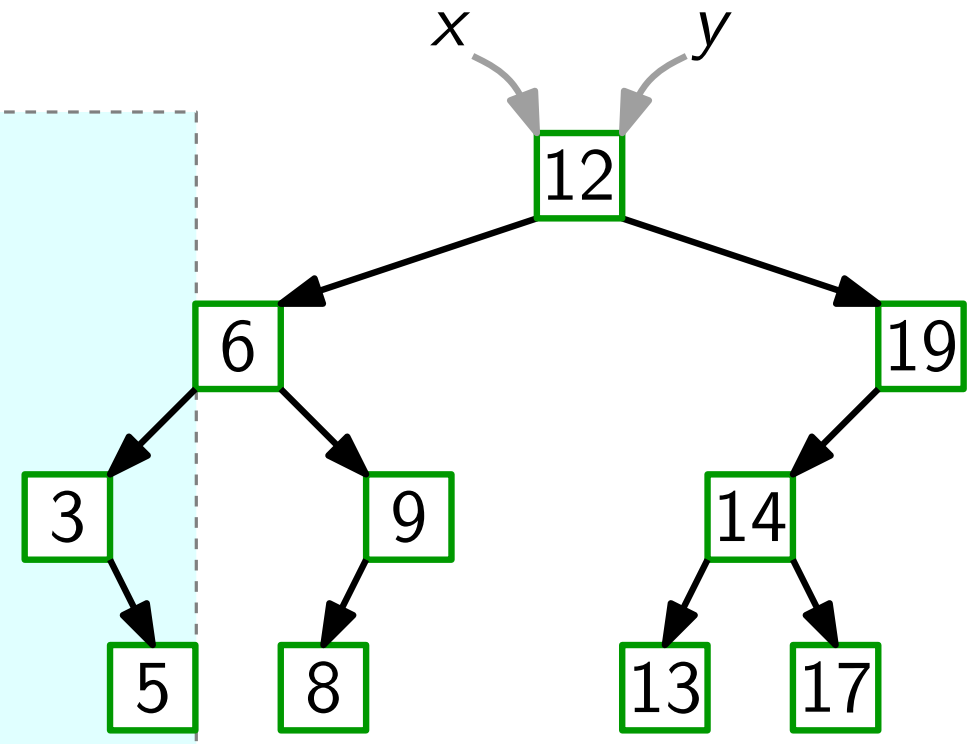
```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
```



Insert(11)

Einfügen

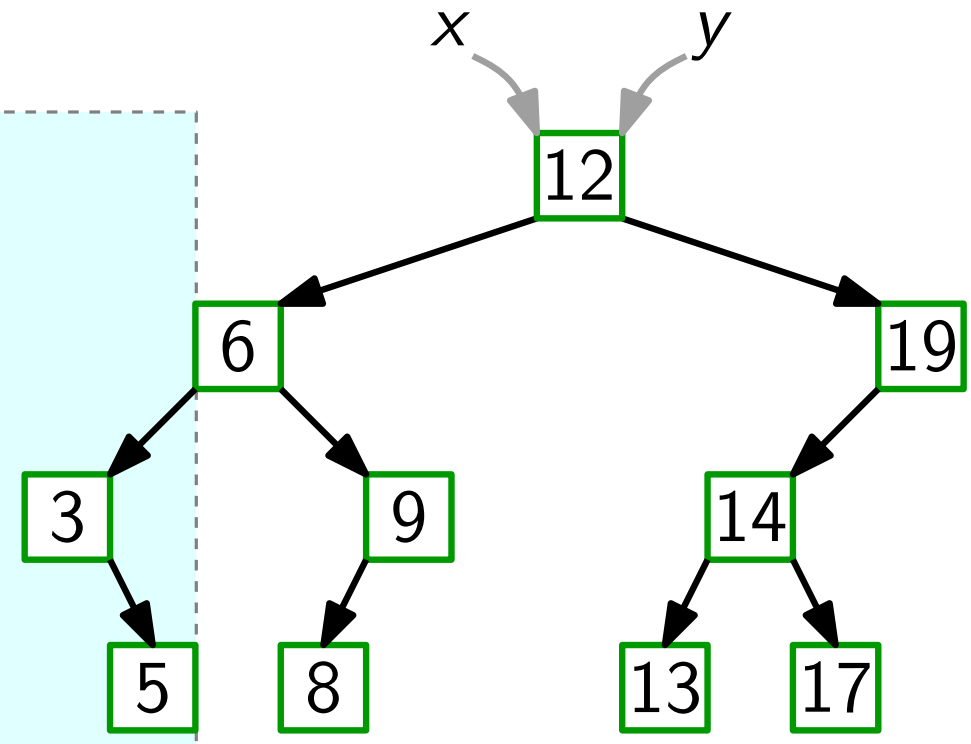
Node Insert(key k)
  $y = nil$
  $x = root$
  while $x \neq nil$ **do**
    $y = x$



Insert(11)

Einfügen

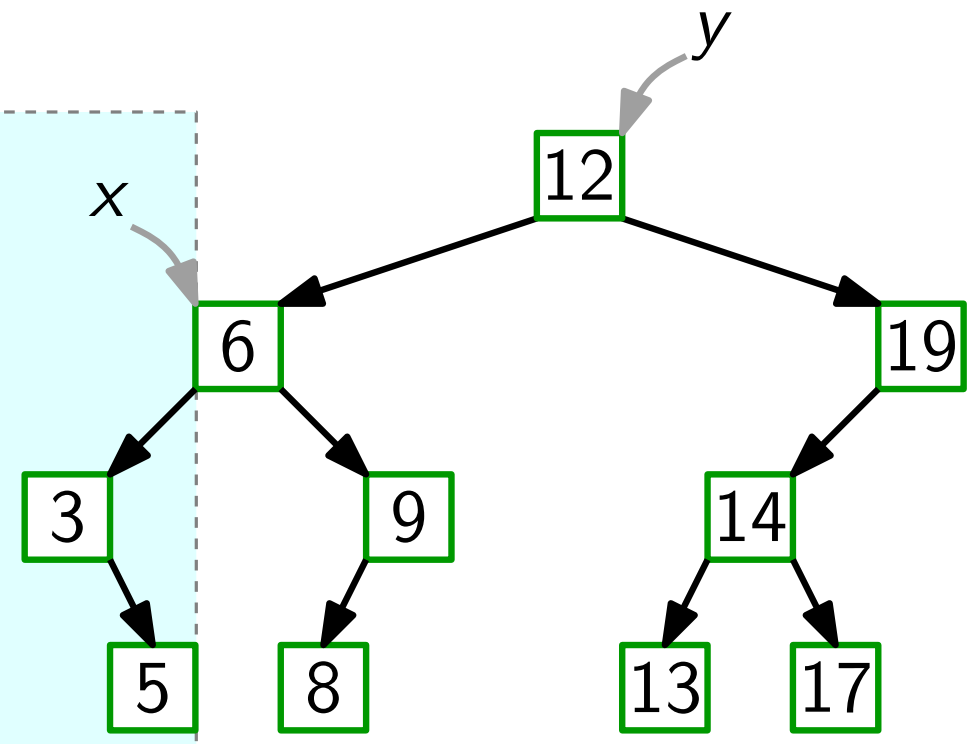
```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
```



Insert(11)

Einfügen

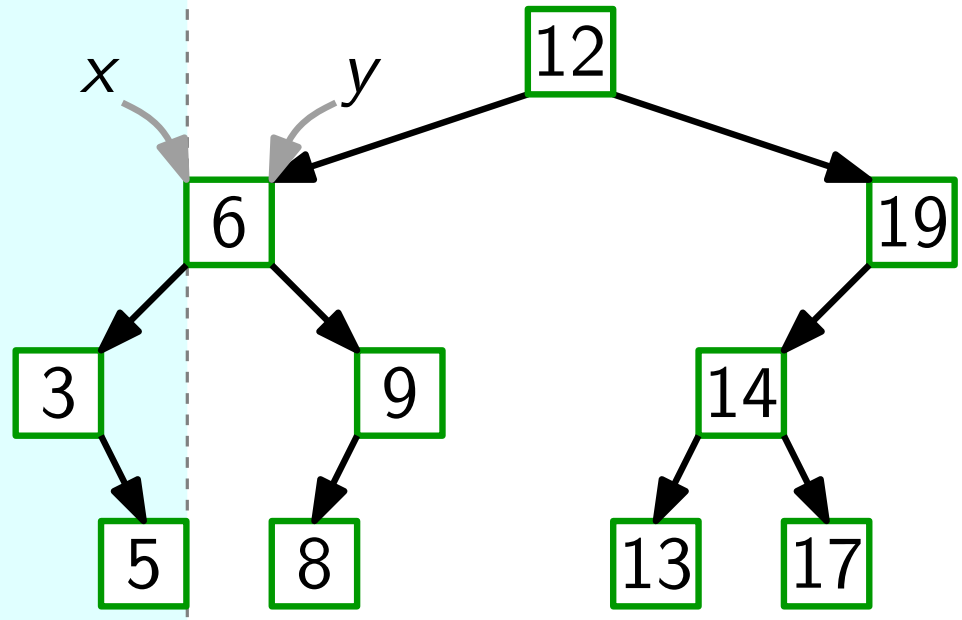
```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
```



Insert(11)

Einfügen

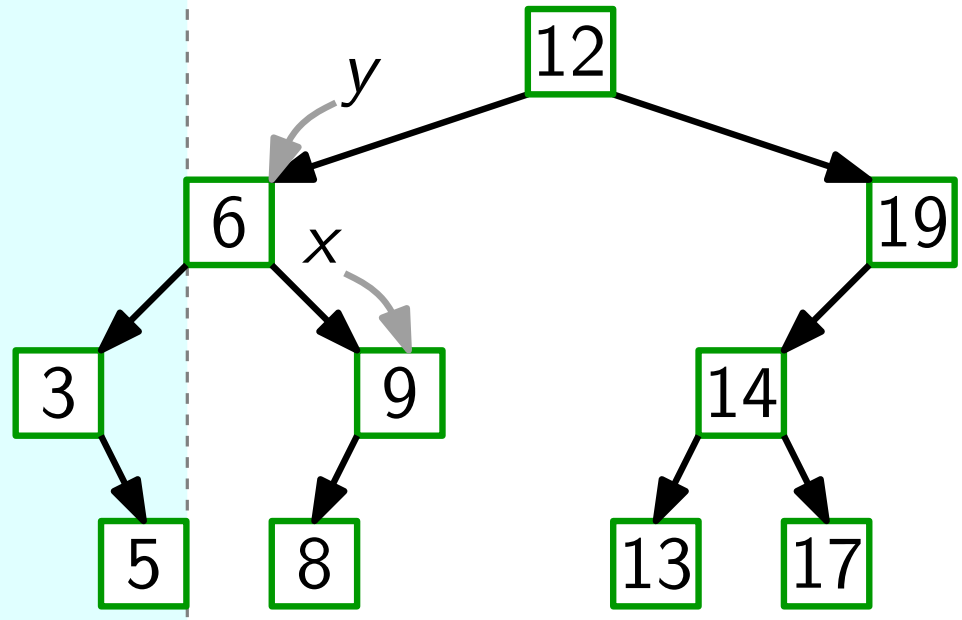
```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
```



Insert(11)

Einfügen

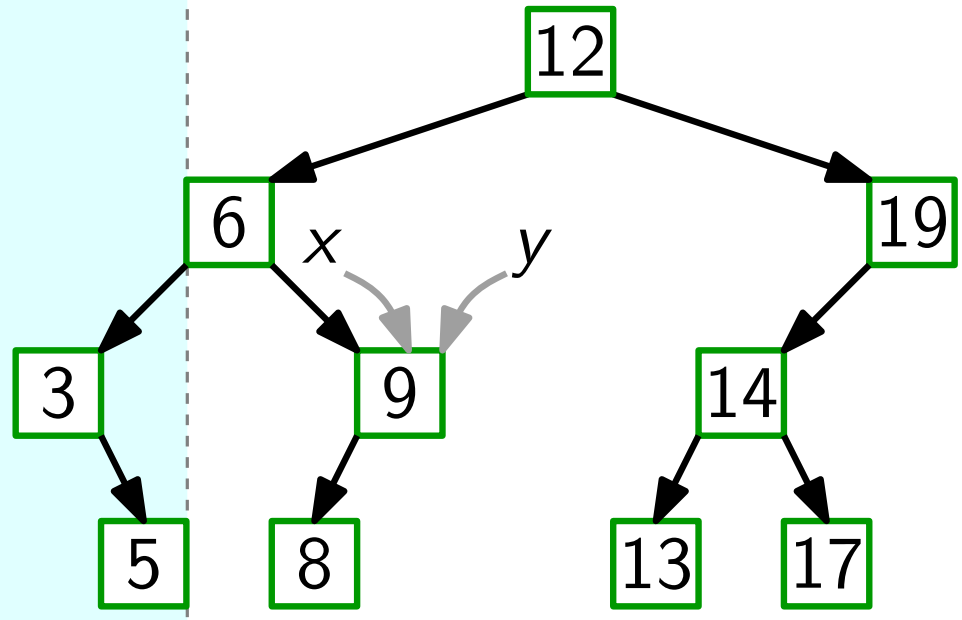
```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
```



Insert(11)

Einfügen

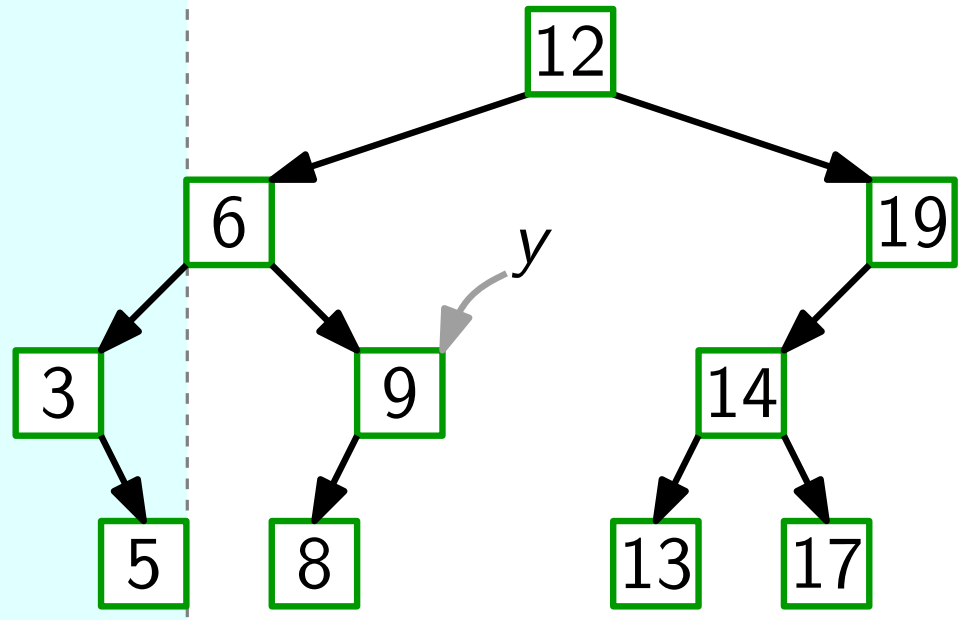
```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
```



Insert(11)

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
```

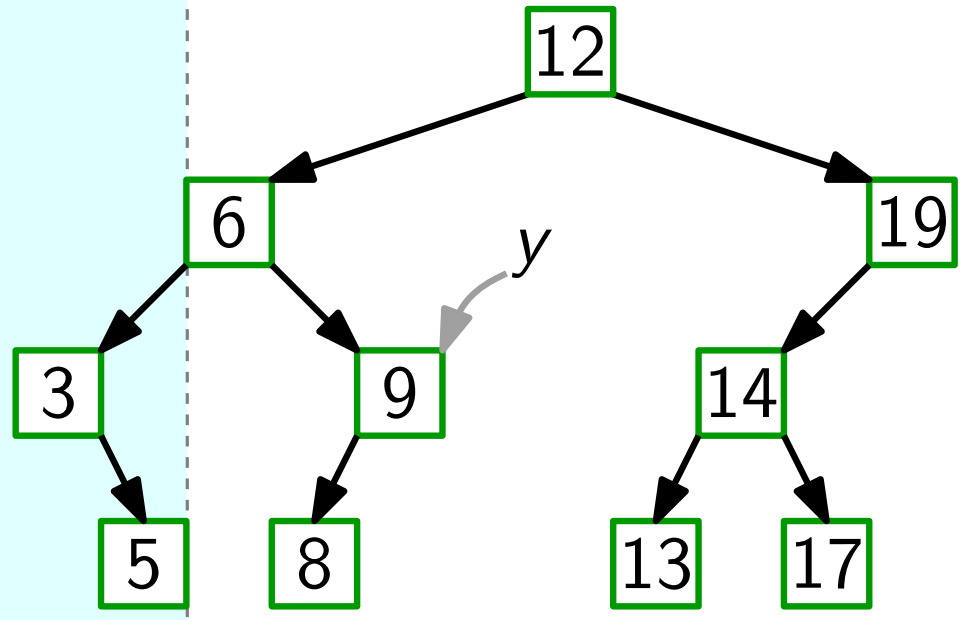


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
```

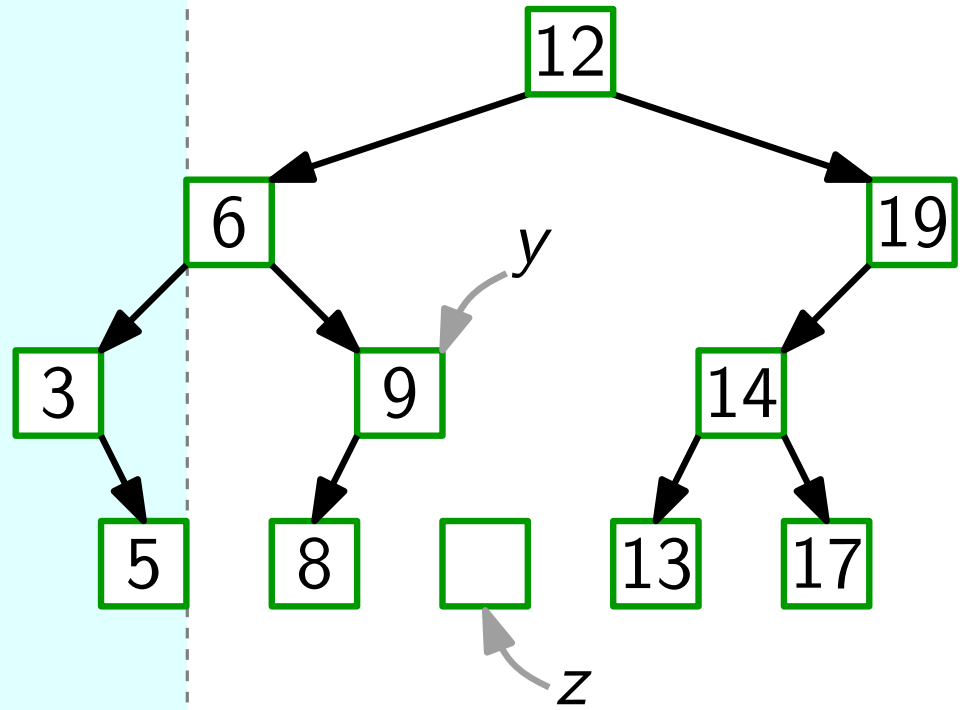


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
```

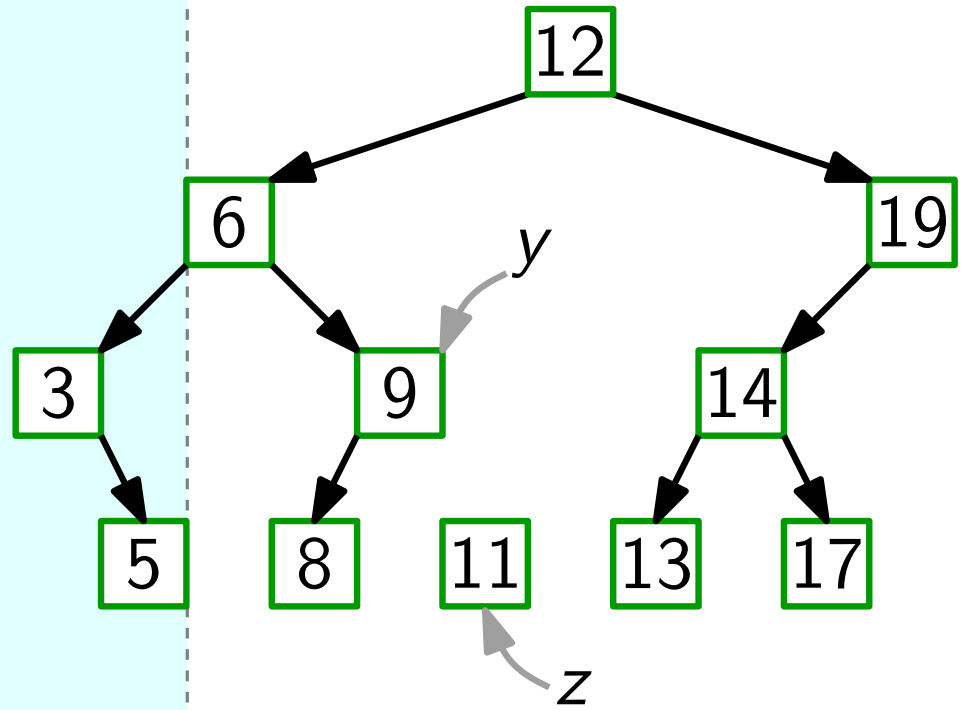


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
```

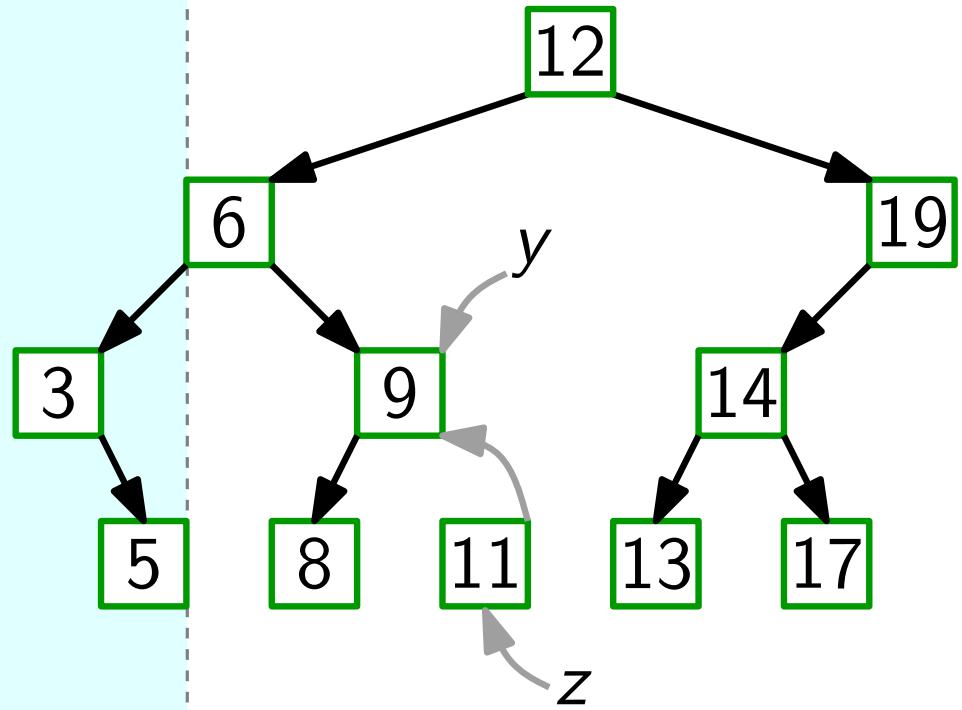


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
```

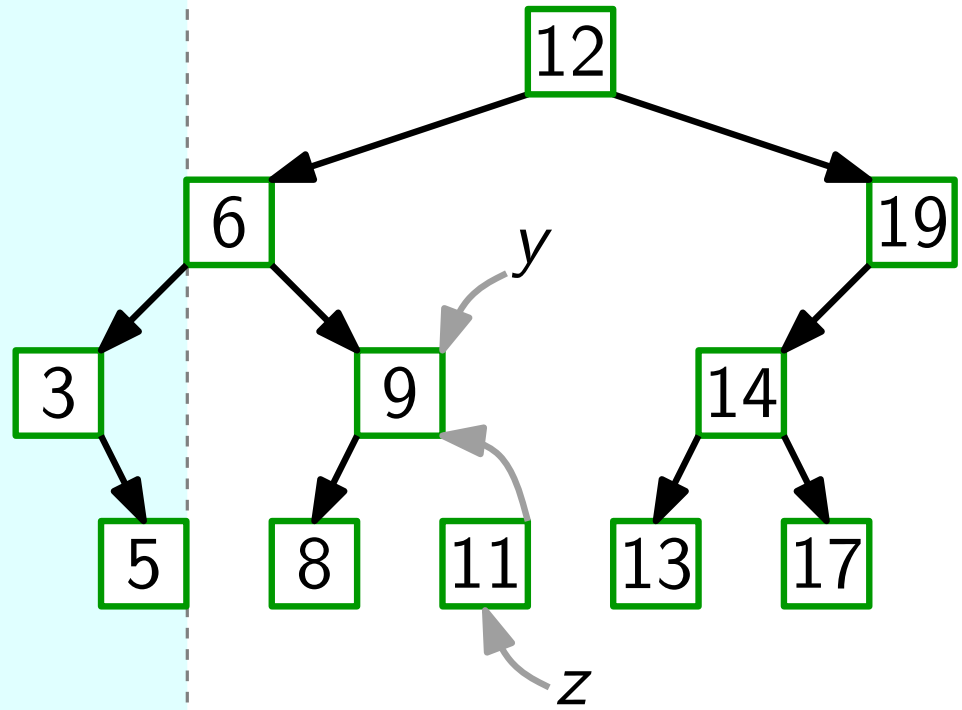


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
```

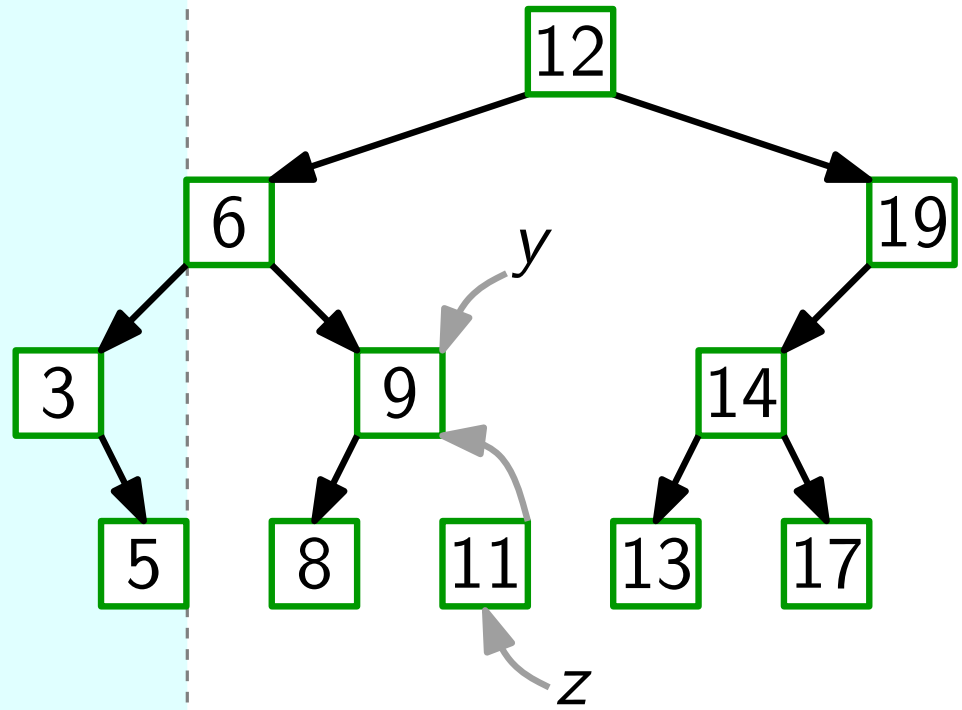


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
```

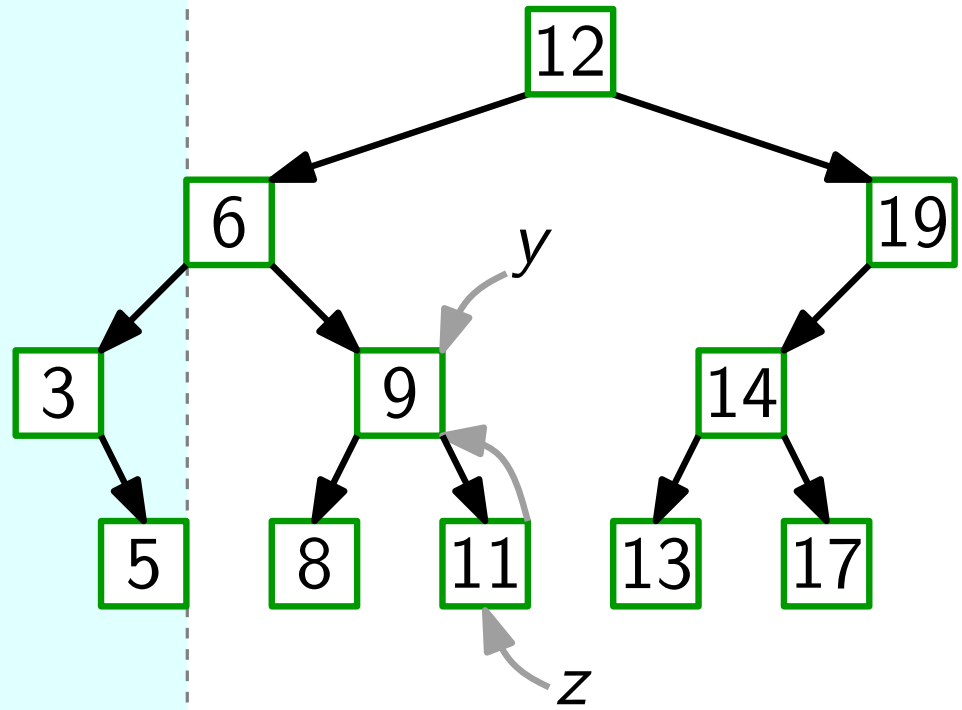


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
```

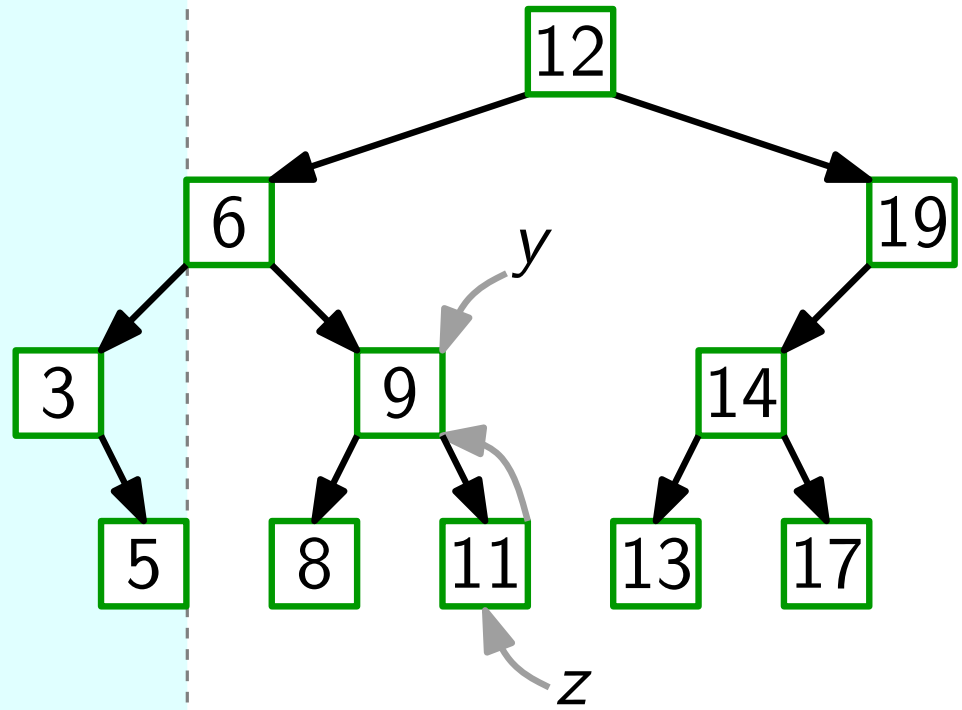


Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    return z
```

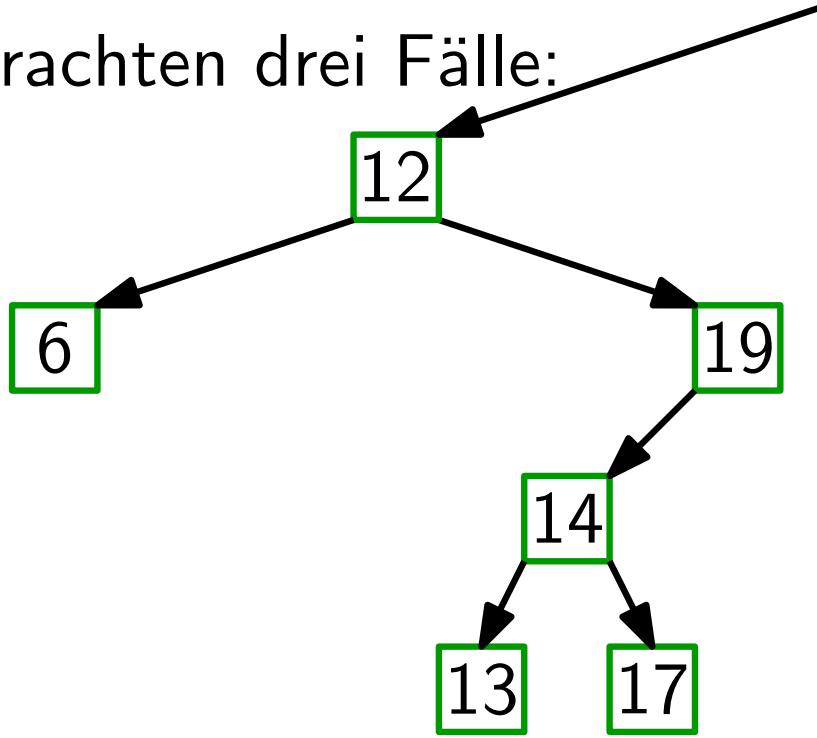


Insert(11)

$x == nil$

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



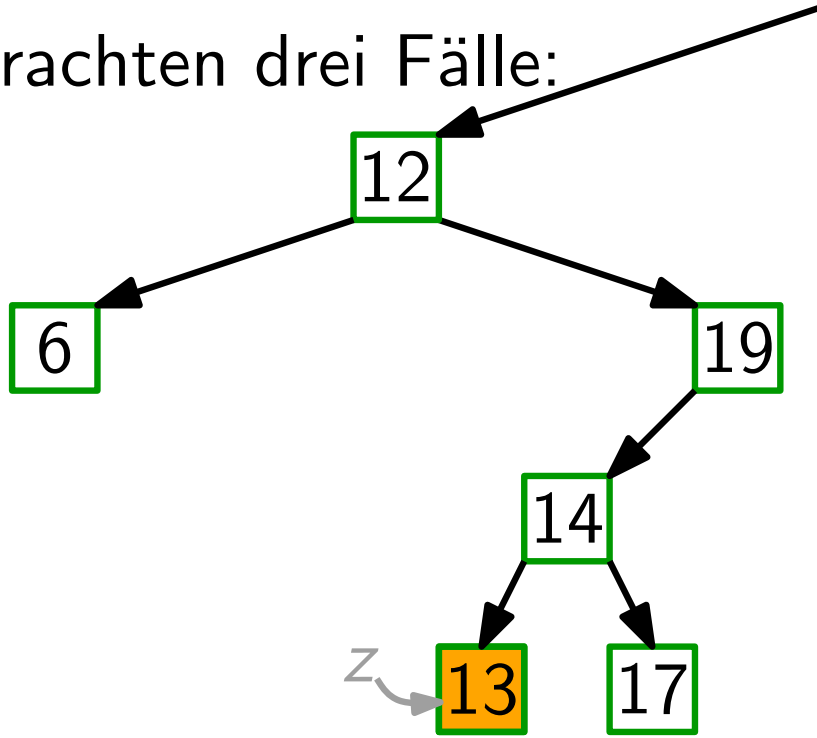
1. z hat keine Kinder.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



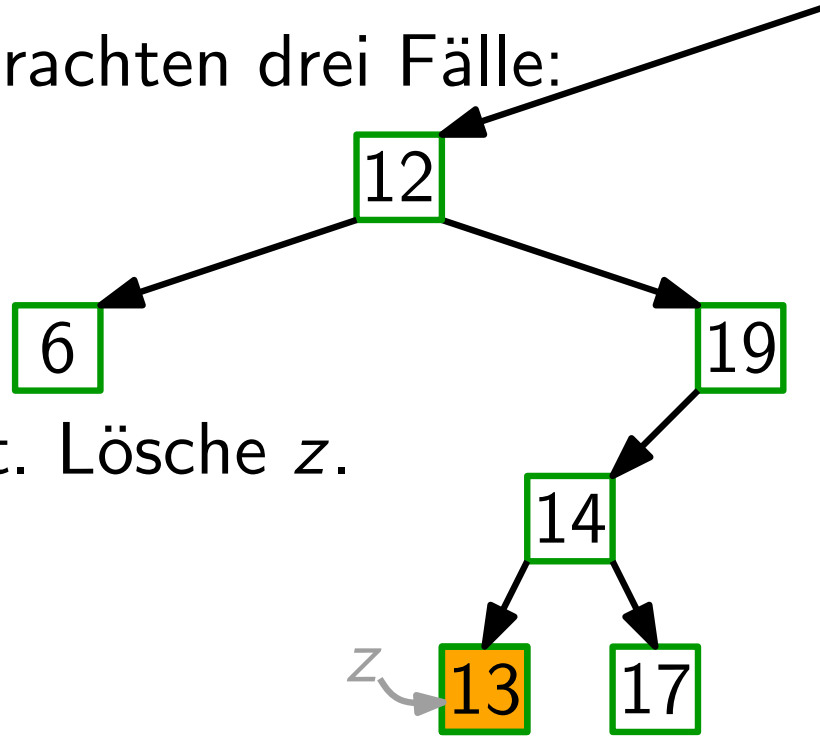
1. z hat keine Kinder.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

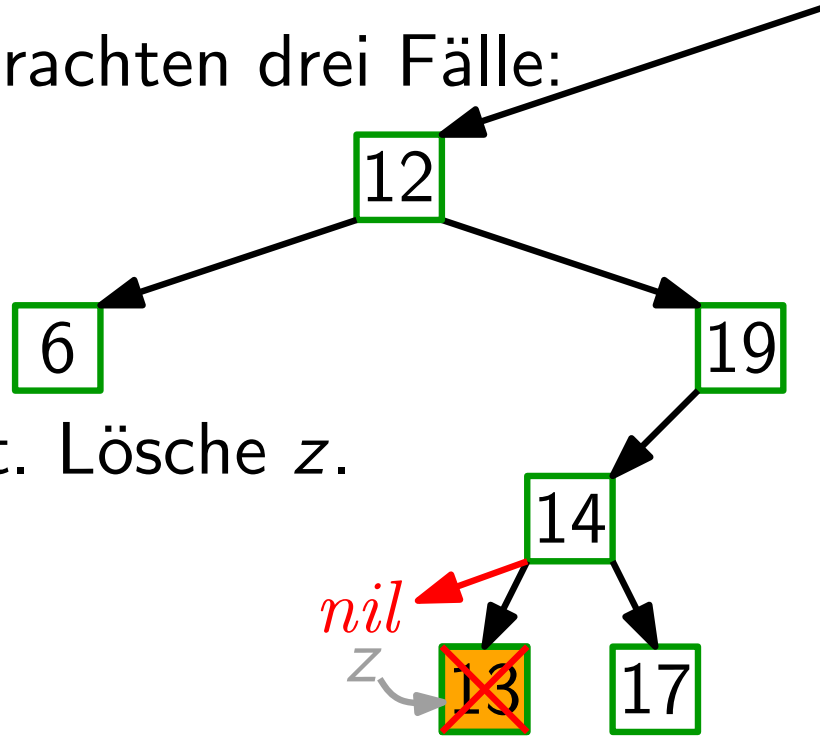
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

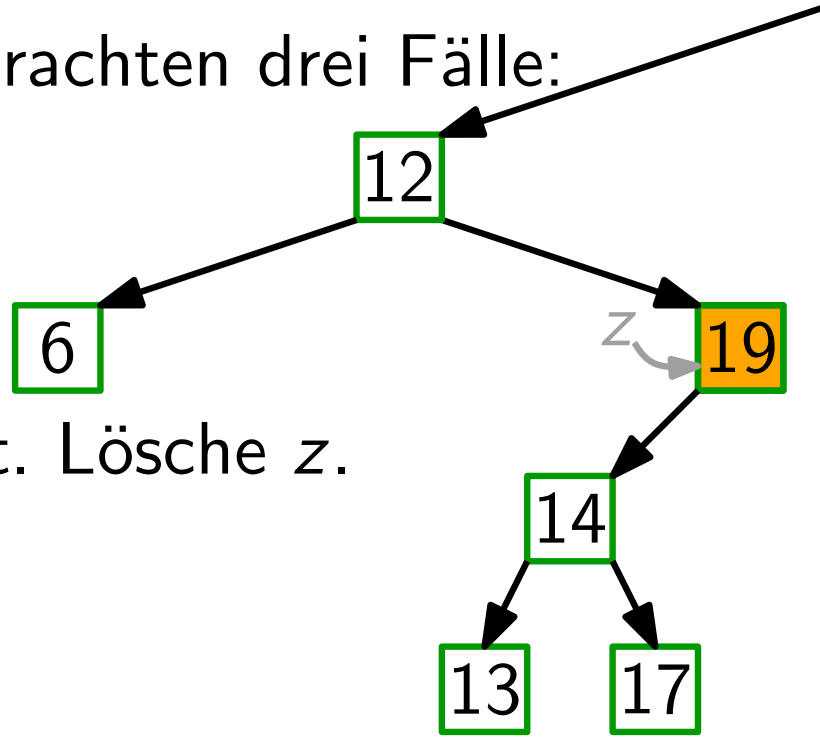
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

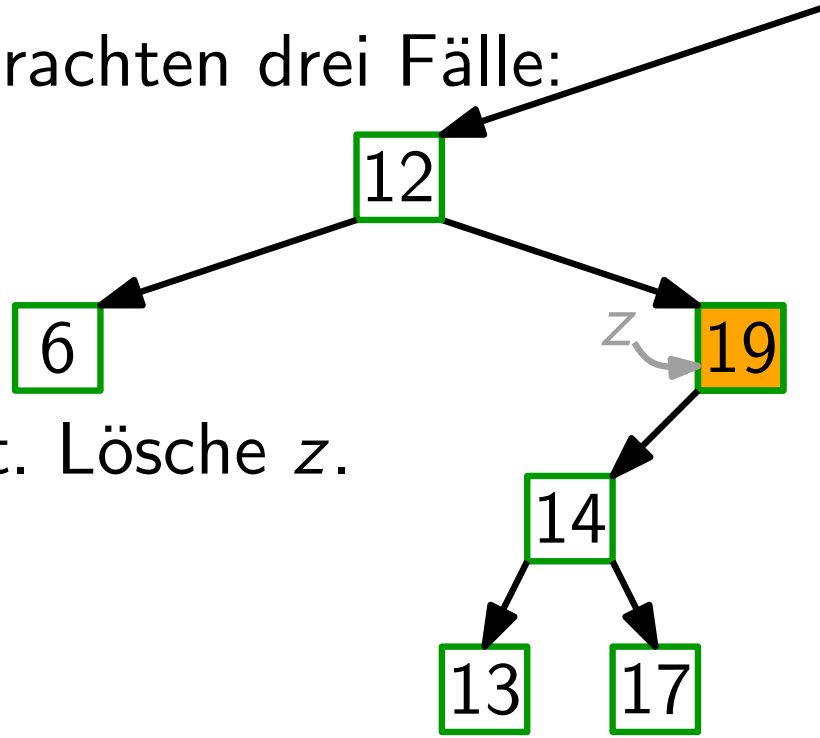
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

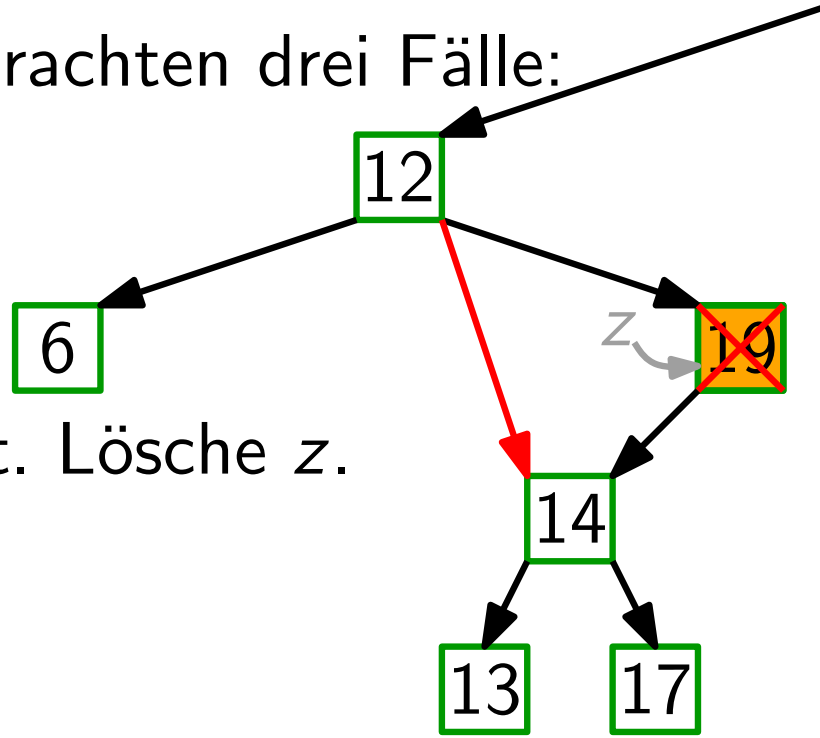
2. z hat ein Kind x.

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

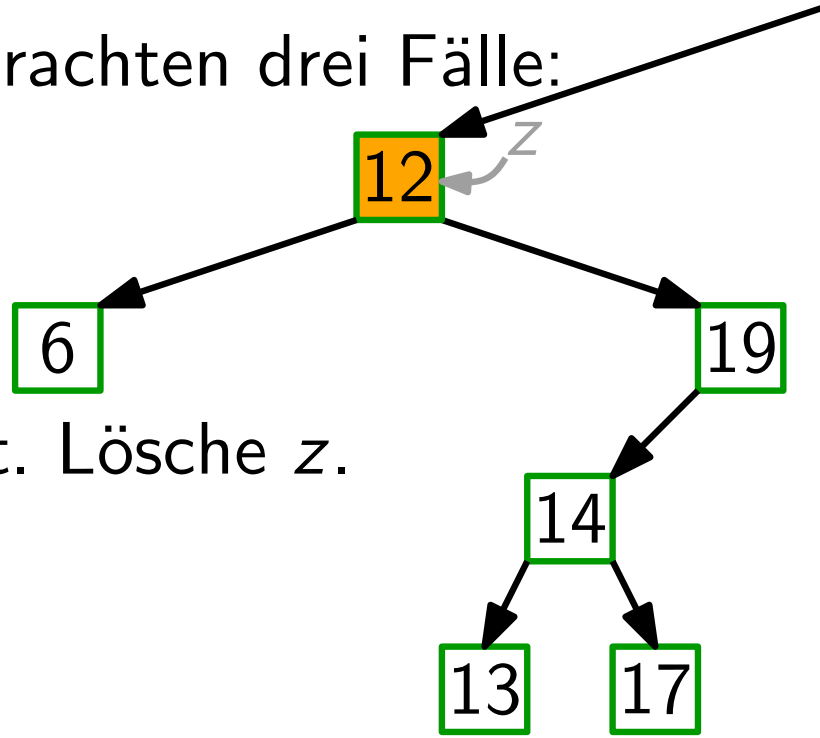
2. z hat ein Kind x.

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

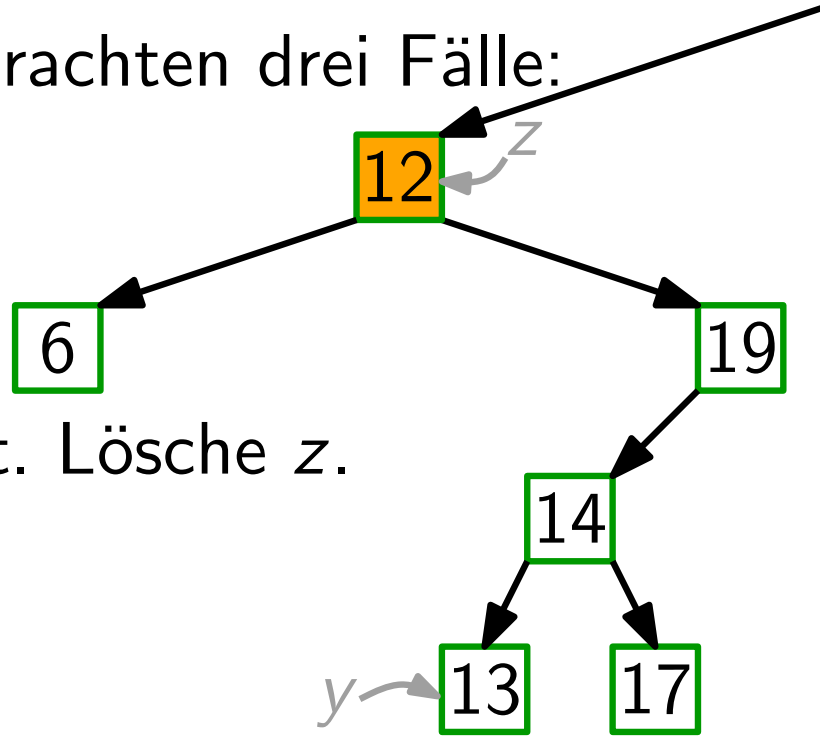
2. z hat ein Kind x.

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

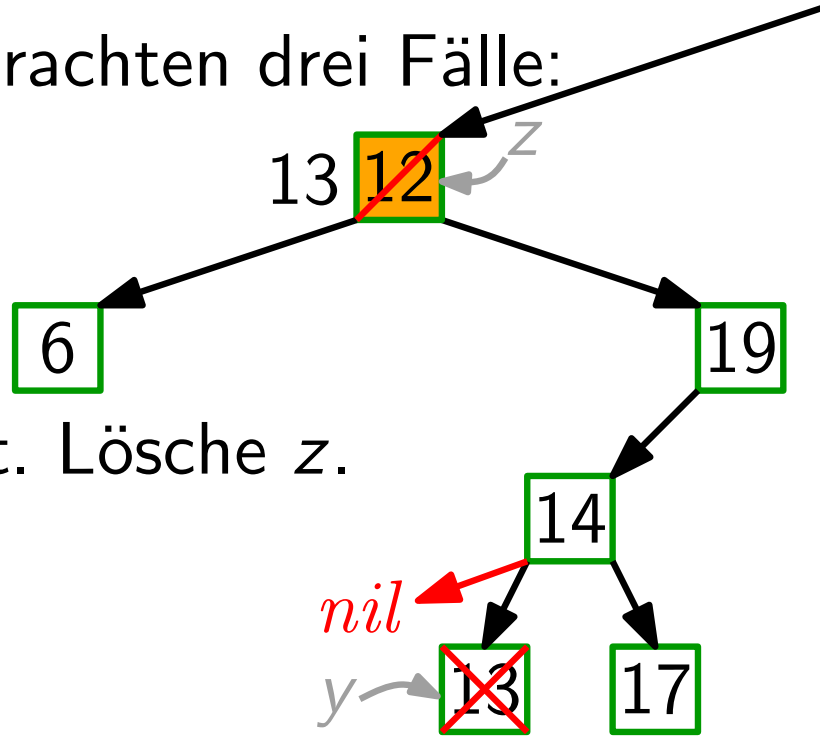
Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y =$ Successor(z) und $z.key = y.key$. Lösche y. (Fall 1 oder 2!)

Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist,
setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z.

2. z hat ein Kind x.

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x.
Setze $x.p = z.p$. Lösche z.

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y =$ Successor(z) und $z.key = y.key$. Lösche y. (Fall 1 oder 2!)

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber:

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel:

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren* $\Rightarrow$ $h \in O(\log n)$

Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren* $\Rightarrow$ $h \in O(\log n)$

Achtung: Die Vorlesung am Do, 7.12., fällt aus!