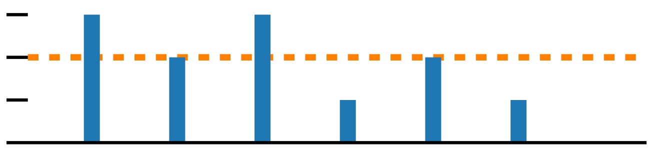
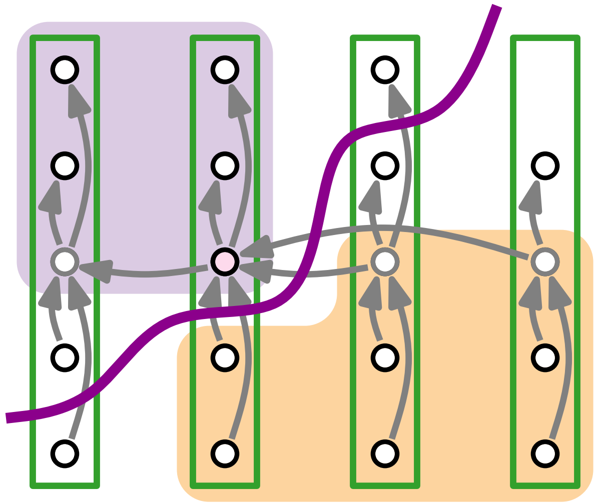
Algorithmen und Datenstrukturen

Vorlesung 10:
Das Auswahlproblem





Alexander Wolff

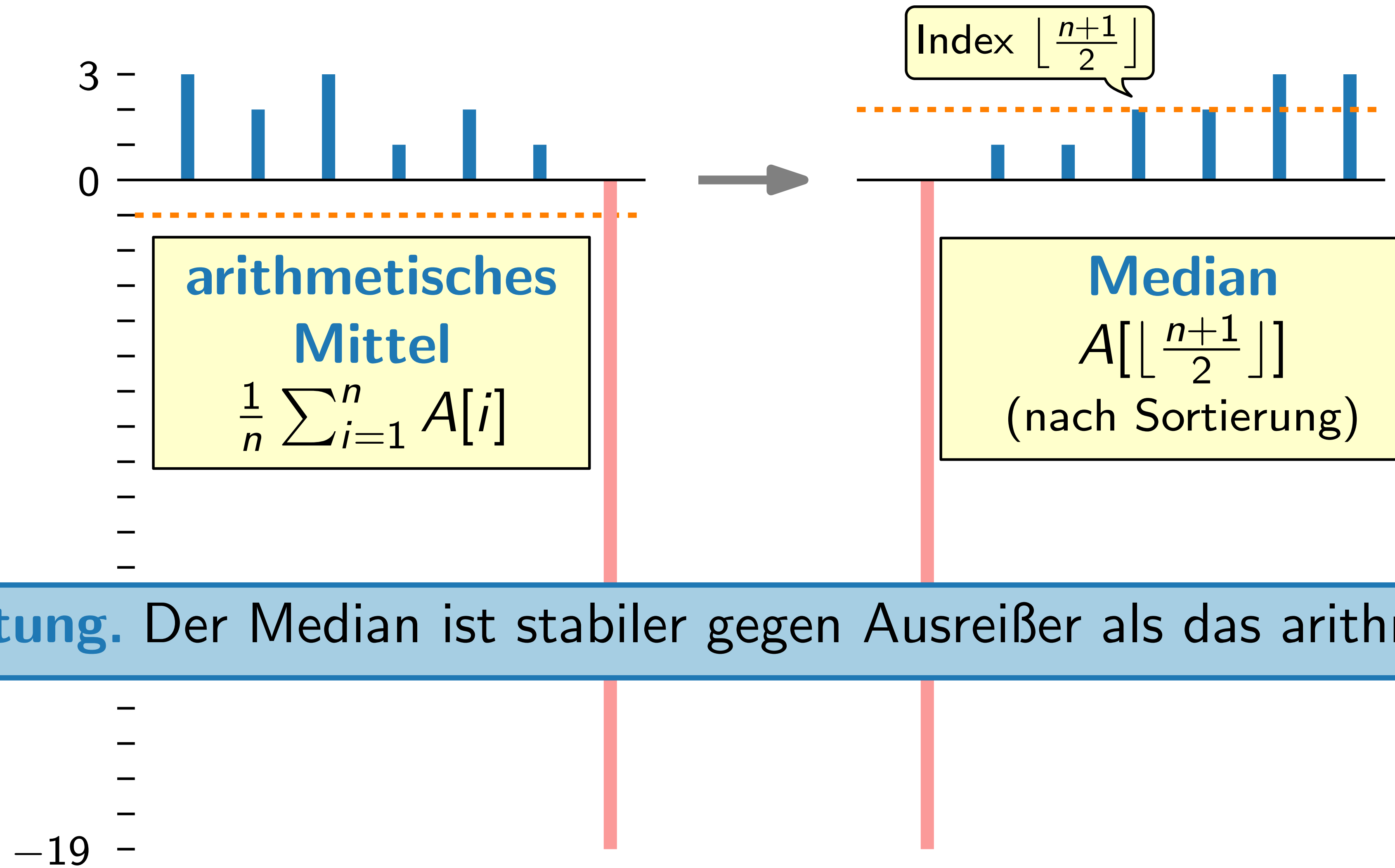
Wintersemester 2024

Analyse von Messreihen

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \ldots n]$

Gesucht: Ein „guter“ Mittelwert

Beispiel.



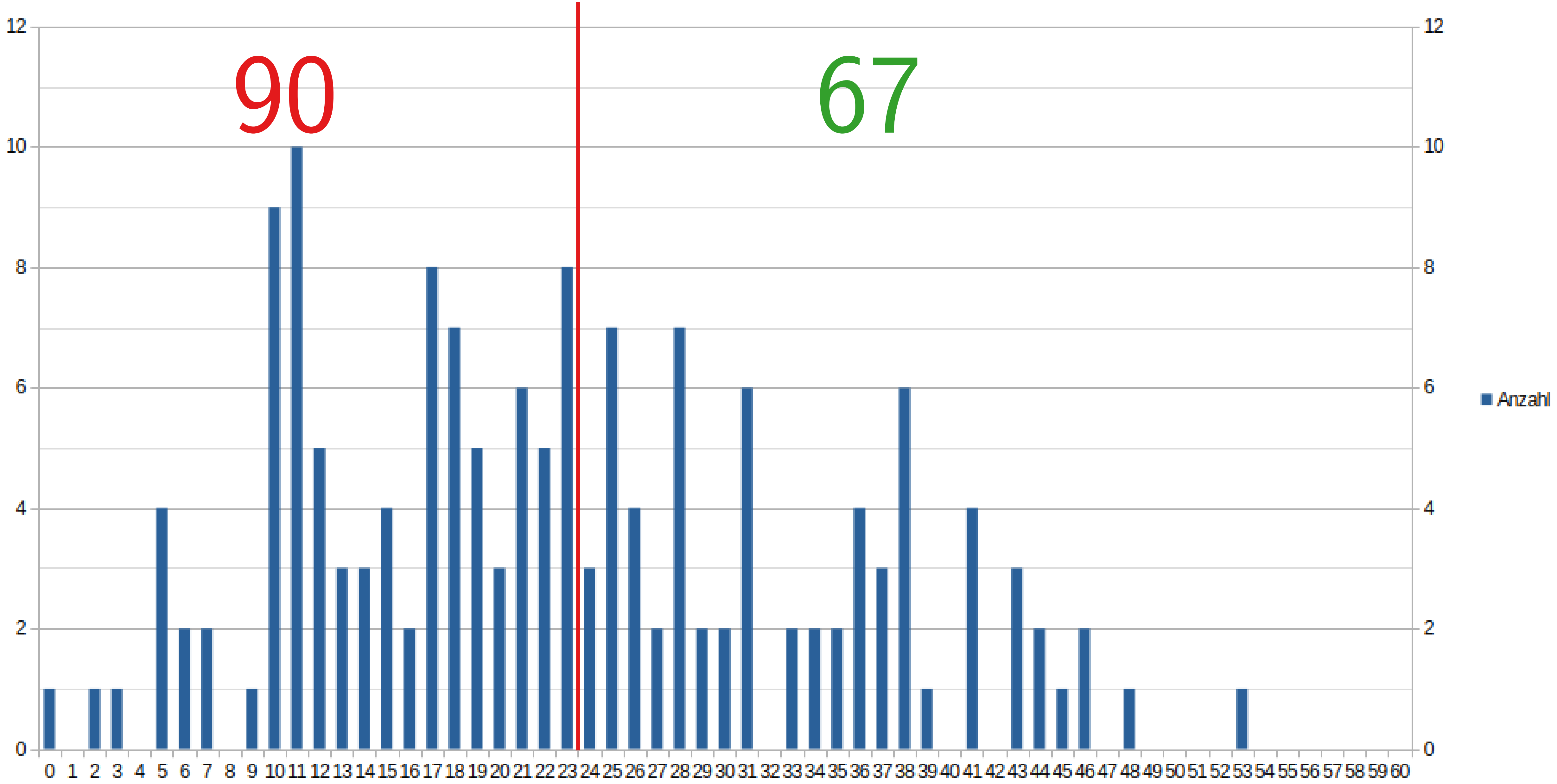
arithmetisches Mittel
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A[i]$

Median
$A[\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]$
(nach Sortierung)

Berechnung?

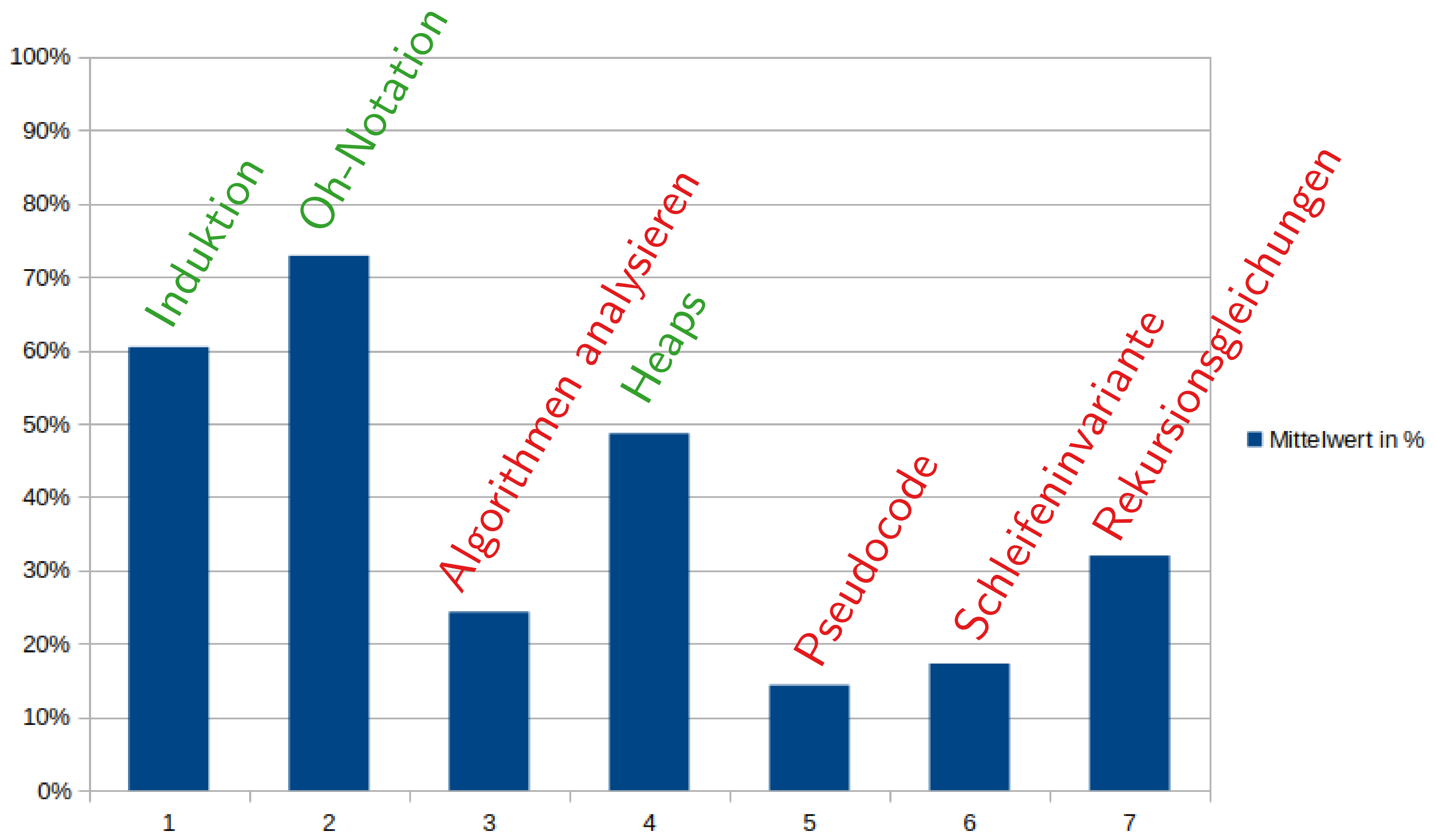
Beobachtung. Der Median ist stabiler gegen Ausreißer als das arithmetische Mittel.

1. Zwischentest



$n = 157$ arithmetisches Mittel $= 22{,}9$ Median $= 19{,}5$

Ergebnisse nach Aufgabe



Das Auswahlproblem

Gegeben: Eine Reihe von n Messwerten $A[1 \dots n]$
Gesucht: Das i-kleinste Element

Lösung. Sortiere und gib $A[i]$ zurück!

Worst-Case-Laufzeit: $\Theta(n \log n)$ wenn man nichts über die Verteilung der Zahlen weiß

Geht das besser?

Spezialfälle

Geht das auch in linearer Zeit?

$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$: Median

$i = 1$: Minimum

$i = n$: Maximum

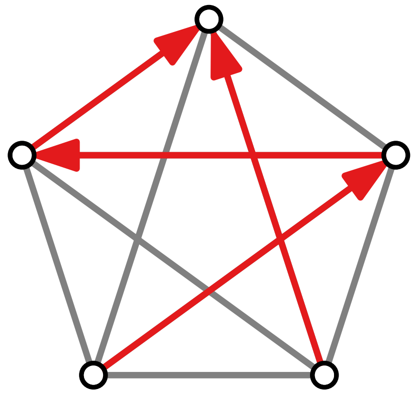
$\left.\begin{array}{l} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array}\right\}$ Laufzeit $\Theta(n)$

Geht beides zusammen mit weniger als $2(n-1)$ Vergleichen?

```
MINIMUM(int[] A)
  min = A[1]
  for i = 2 to A.length do
    if min > A[i] then min = A[i]
  return min
```

Anzahl Vergleiche $= n - 1$

Ist das optimal?



Betrachte ein K.O.-Turnier.

Bis ein Gewinner feststeht, muss *jeder* – außer dem Gewinner – mindestens einmal verlieren.

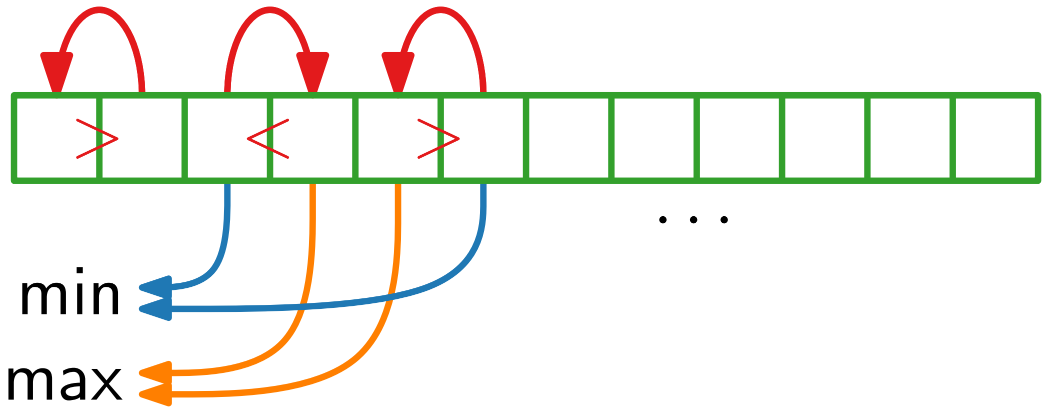
Also sind $n-1$ Vergleiche optimal.

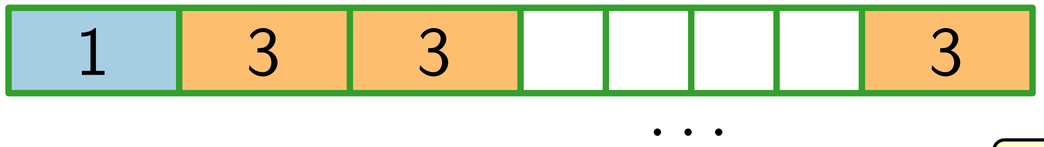
Zuerst zur zweiten Frage

Sei $V_{\text{minmax}}(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die man braucht, um Minimum **und** Maximum von n Zahlen zu bestimmen.

Klar. $V_{\text{minmax}}(n) \leq 2 \cdot V_{\text{min}}(n) = 2 \cdot (n-1)$

Frage. Geht es auch mit weniger Vergleichen?





Anzahl der Vergleiche

$= 1 \cdot 1 + (n/2 - 1) \cdot 3 = 3n/2 - 2$

n gerade

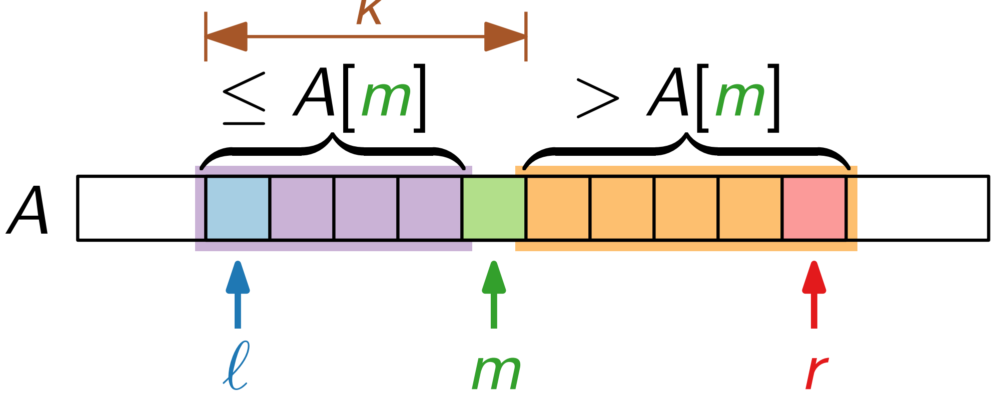
Ist das optimal?

Auswahl per Teile & Herrsche

Zur Erinnerung...

RANDOMIZED
QUICKSORT($A, \ell = 1, r = A.length$)

if $\ell < r$ **then**
- $m =$ RANDOMIZEDPARTITION(A, ℓ, r)
- QUICKSORT($A, \ell, m-1$)
- QUICKSORT($A, m+1, r$)



Finde i.-kleinstes Element in $A[\ell \dots r]$!

RANDOMIZEDSELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

if $\ell == r$ **then return** $A[\ell]$
$m =$ RANDOMIZEDPARTITION(A, ℓ, r)
$k = m - \ell + 1$ *Rang* von $A[m]$ in $A[\ell \dots r]$
if $i == k$ **then**
- **return** $A[m]$

else
- **if** $i < k$ **then**
  - **return** RSELECT($A, \ell, m-1, i$)
- **else**
  - **return** RSELECT($A, m+1, r, i-k$)

Laufzeitanalyse

Anzahl Vergleiche von RandomizedSelect ist ZV; hängt von n und i ab.

Trick. Geh davon aus, dass das gesuchte i. Element immer im **größeren** Teilfeld liegt.

1					m			n

$\Rightarrow$ resultierende Zufallsvariable $V(n)$ ist

- obere Schranke für tatsächliche Anzahl von Vergleichen
- unabhängig von i

$$V(n) = \underbrace{V_{\text{Part}}(n)}_{= n-1} + \begin{cases} V(n-1) & \text{falls } m = 1 \\ V(n-2) & \text{falls } m = 2 \\ \dots & \\ V(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{falls } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ \dots & \\ V(n-2) & \text{falls } m = n-1 \\ V(n-1) & \text{falls } m = n \end{cases}$$

Alle Fälle gleich wahrscheinlich!

vorausgesetzt alle Elemente sind verschieden!

$$\Rightarrow \boxed{E[V(n)] \le n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)]} \le c \overset{?}{\cdot} n \quad \left(\begin{matrix}\text{für ein} \\ c > 0\end{matrix}\right)$$

Substitutionsmethode

Wir schreiben $f(n)$ für $E[V(n)]$.

$1)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Dann gilt $f(n) \le n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} f(k)$

Wir wollen prüfen, ob es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(n) \le cn$.

Beweis per Induktion.

$$
\begin{aligned}
\text{Also:} \quad f(n) &\le n + \frac{2}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} c \cdot k \qquad \boxed{\text{laut Induktionsannahme}} \\
&= n + \frac{2c}{n} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \Big) \\
&= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right) \\
&\le n + \frac{c}{n} \big(n(n-1) - (n/2-1)(n/2-2) \big) \\
&= n + c(n - 1 - n/4 + 3/2 - 2/n) \le n + c \cdot \frac{3n+2}{4} \\
&= cn + \underbrace{\Big(n - c \cdot \frac{n-2}{4}\Big)}_{\le 0?!} \le cn \quad \text{falls } c \ge \frac{4n}{n-2} = \frac{4}{1-2/n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 4^{+}
\end{aligned}
$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$E[V(n)] \le n - 1 + 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} E[V(k)] \le \overbrace{(4+\varepsilon)}^{c :=} n \qquad \boxed{\text{falls } n \ge \frac{8}{\varepsilon} + 2}$$

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann in erwartet linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq \frac{8}{\varepsilon} + 2$ Zahlen die i.-kleinste Zahl $(1 \leq i \leq n)$ mit erwartet $(4 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

Frage: Geht das auch **deterministisch**, d.h. ohne Zufall?

M.a.W. Kann man das Auswahlproblem auch im **schlechtesten Fall** in linearer Zeit lösen?

Vorbereitung

Wir verwenden wieder Divide & Conquer –

aber diesmal mit einer garantiert **guten** Aufteilung in Teilfelder.

d.h. **balanciert:**

jede Seite sollte $\geq \gamma n$ Elem. enthalten, für ein festes $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

$\textsc{Partition}'(\text{int}[]\ A, \text{int}\ \ell, \text{int}\ r, \text{int}\ pivot)$

~~$pivot = A[r]$~~
$i = \ell$
for $j = \ell$ **to** $r \cancel{- 1}$ **do**
  if $A[j] \leq pivot$ **then**
    $A[i] \leftrightarrow A[j]$
    $i = i + 1$
~~$A[i] \leftrightarrow A[r]$~~
return i

Wir gehen für die Analyse wieder davon aus, dass alle Elemente verschieden sind.

Anzahl der Vergleiche, die $\textsc{Partition}'$ macht: $r - \ell + 1 = n$

Select: deterministisch

Select(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.

2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.

3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.

4. $m = \text{Partition}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$

   $A[m]$ k-kleinstes Element

5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$

   x

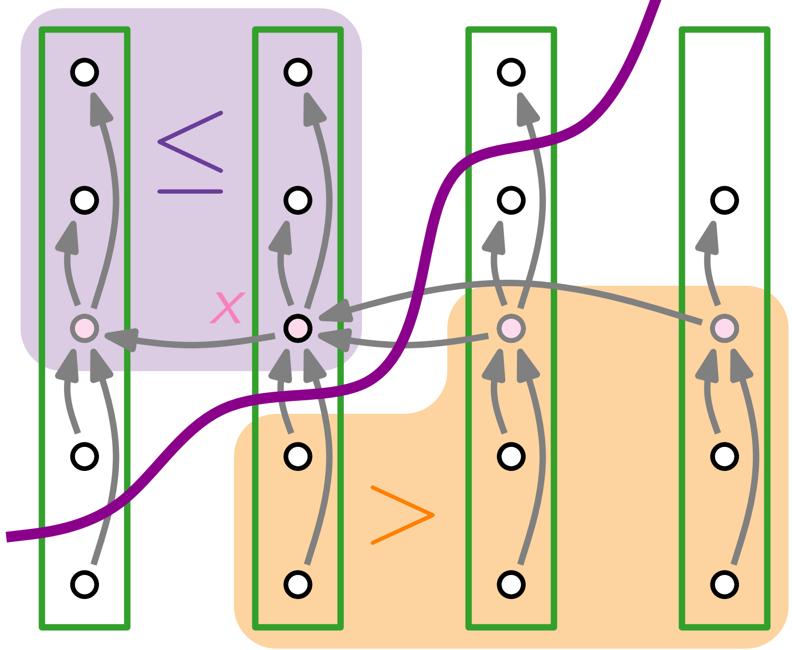
   else

   if $i < k$ **then**

   return Select($A, \ell, m-1, i$)

   else

   return Select($A, m+1, r, i-k$)



Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right) \geq \frac{3n}{10} - 3$

SELECT: deterministisch

SELECT(int[] A, int ℓ, int r, int i)

1. Teile die n Elemente der Eingabe in $\lfloor n/5 \rfloor$ 5er-Gruppen und eine Gruppe mit den restlichen (n mod 5) Elementen.
2. Sortiere jede der $\lceil n/5 \rceil$ Gruppen und bestimme ihren Median.
3. Bestimme **rekursiv** den Median x der Gruppen-Mediane.
4. $m = \text{PARTITION}'(A, \ell, r, x)$; $k = m - \ell + 1$

   $A[m]$ k-kleinstes Element
5. **if** $i == k$ **then return** $A[m]$

   x

   else

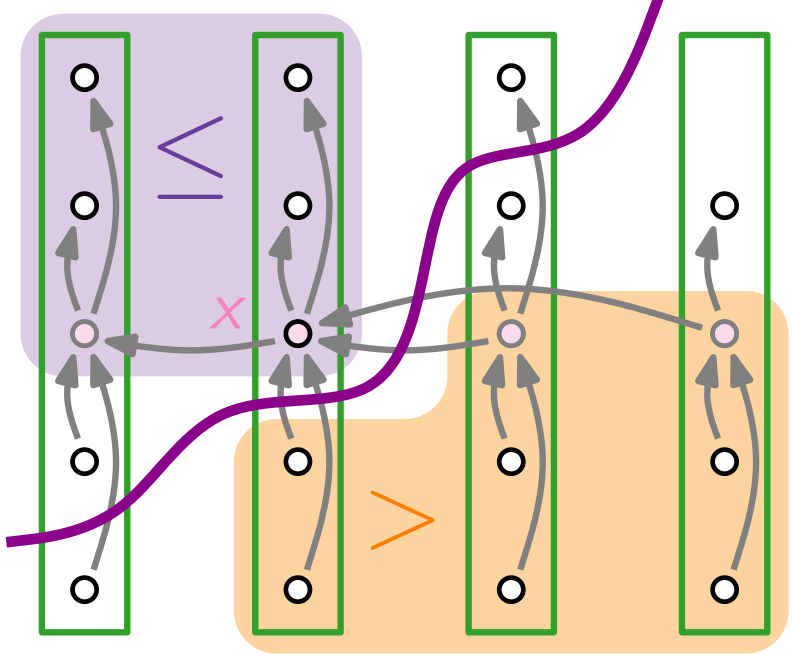
   if $i < k$ **then**

   return SELECT$(A, \underbrace{\ell, m-1}, i)$

   else

   $\leq 7n/10 + 3$ Elemente

   return SELECT$(A, \overbrace{m+1, r}, i-k)$



Anzahl(●) $\geq 3\left(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 1\right) \geq \frac{3n}{10} - 3$

Laufzeitanalyse

Beobachtung. Es genügt wieder, Vergleiche zu zählen!

PARTITION′: $1n$, Sortieren: $\approx \frac{n}{5} \cdot V_{\mathrm{IS}}(5) = 2n$ Vergleiche

Ansatz.

$$V(n) \leq \begin{cases} \overbrace{V(\lceil n/5 \rceil)}^{\text{Schritt 3}} + \underbrace{V(7n/10+3)}_{\text{Schritt 5}} + 3n & \text{falls } n \geq n_0, \\ \mathcal{O}(1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gibt $c, n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $V(n) \leq cn$.

$$\Rightarrow\ V(n) \leq c \cdot (n/5 + 1) + c \cdot (7n/10 + 3) + 3n$$

$$= c \cdot (9n/10 + 4) + 3n \ = cn + \big(3n - c \cdot (n/10 - 4)\big)$$

falls $c \geq \frac{3n}{n/10-4} = \frac{30}{1-40/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 30^+$ bzw. $n \geq \frac{40c}{c-30}$

$$\Rightarrow\ \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und } n \geq \frac{1200}{\varepsilon} + 40 \text{ gilt: } V(n) \leq \underbrace{(30+\varepsilon)}_{c} \cdot n$$

$c \geq \frac{3n}{n/10-4}$
$\Leftrightarrow c(n/10 - 4) \geq 3n$
$\Leftrightarrow cn/10 - 4c - 3n \geq 0$
$\Leftrightarrow n(c/10 - 3) \geq 4c$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{4c}{c/10-3}$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{40c}{c-30}$

Ergebnis und Diskussion

Satz. Das Auswahlproblem kann auch im schlechtesten Fall in linearer Zeit gelöst werden.

Genauer: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass man in einer Folge von $n \geq 1200/\varepsilon + 40$ Zahlen die i-kleinste Zahl mit höchstens $(30 + \varepsilon)n$ Vergleichen finden kann.

- Der Algorithmus LazySelect [Floyd & Rivest, 1975] löst das Auswahlproblem mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathcal{O}(1/\sqrt[4]{n})$ mit $\frac{3}{2}n + o(n)$ Vergleichen

- Die besten deterministischen Auswahl-Algorithmen (*sehr kompliziert!*) benötigen $3n$ Vergleiche im schlechtesten Fall.
- **Jeder** deterministische Auswahl-Algorithmus benötigt im schlechtesten Fall mindestens $2n$ Vergleiche.

Satz. Durch Suche des Medians in $\mathcal{O}(n)$ Zeit kann QuickSort im *Worst-Case* in $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit sortieren. (Aber die Konstanten in der Laufzeit sind hoch.)

Vergleich Sortieralgorithmen

	Bester Fall	Erw. Fall	Schl. Fall	in-situ	stabil
InsertionSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
SelectionSort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗
BubbleSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
MergeSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✗	✓
HeapSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
QuickSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
CountingSort	$\mathcal{O}(n+k)$	$\mathcal{O}(n+k)$	$\mathcal{O}(n+k)$	✗	✓
RadixSort	$\mathcal{O}(s \cdot (n+b))$	$\mathcal{O}(s \cdot (n+b))$	$\mathcal{O}(s \cdot (n+b))$	✗	✓
BucketSort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$ wenn Eingabe zufällig gleichverteilt	$\mathcal{O}(n^2)$	✗	✓