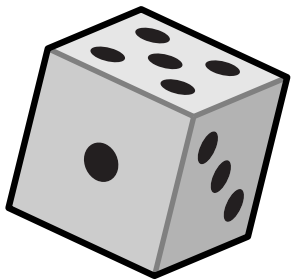
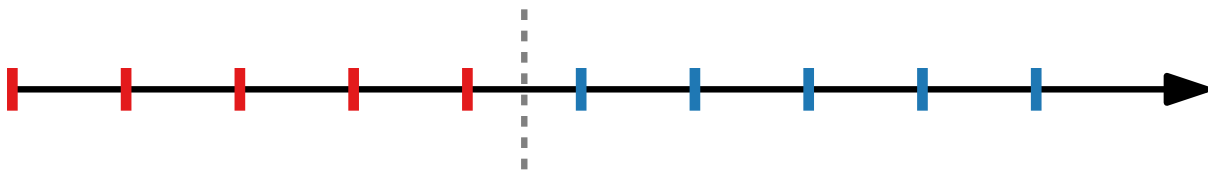


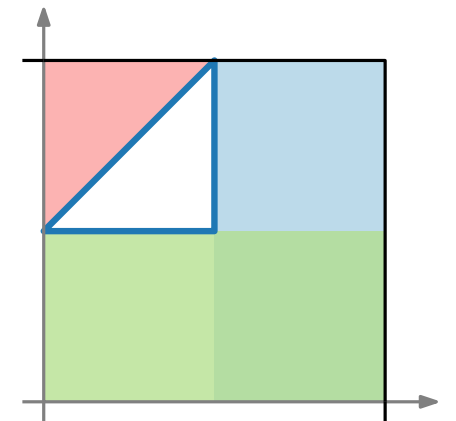
Algorithmen und Datenstrukturen



Vorlesung 7: Zufallsexperimente



Alexander Wolff



Wintersemester 2024

Ein Experiment

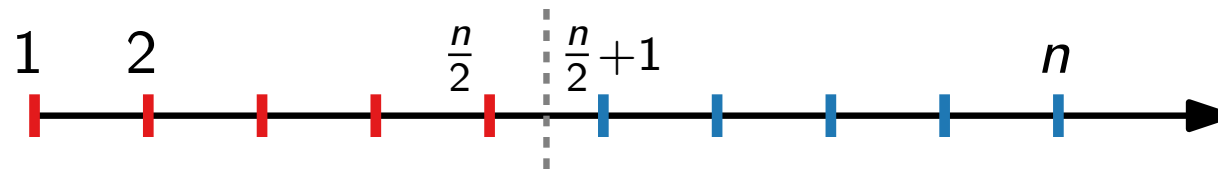
Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander) n mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

Wer is(s)t zufriedener?

$$\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} = \frac{n+1}{2}$$



Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und n (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl n sei gerade.

Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$.

Sei S_n die Menge all dieser Permutationen. $\Rightarrow |S_n| = n!$

Ergebnismenge Ω

Beobachtungsmenge Ω'

Sei $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine **Zufallsvariable**, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von M , kurz: der **Erwartungswert** $\mathbf{E}[M]$ von M .

Definition. $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$ (Def. für *diskrete ZV*)

„gewichtetes Mittel“ der Werte in Ω'

Es gilt: $\sum_{i \in \Omega'} \mathbf{Pr}[M = i] = 1$.

Problem: Was ist $\mathbf{Pr}[M = 7]$?

Ein Trick

Definition. $E[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \Pr[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für $i = 1, \dots, n$):

Sei $M_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow E[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \Pr[M_i = 0] + 1 \cdot \Pr[M_i = 1] = \Pr[M_i = 1]$

Beispiel. Zahlenfolge = $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\Pr[M_i = 1] =$ Wahrscheinlichkeit, dass i . Zahl die bisher größte ist

$$= \frac{\text{Anzahl der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{Anz. Permut., bei denen } i. \text{ Zahl am größten}}{\text{Anz. aller Permut. von } i \text{ Zahlen}} = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$$

Voraussetzung:
Alle Ergebnisse sind
gleich wahrscheinlich!

Ein Trick

Definition. $E[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \Pr[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für $i = 1, \dots, n$):

Sei $M_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow E[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \Pr[M_i = 0] + 1 \cdot \Pr[M_i = 1] = \Pr[M_i = 1]$

Beispiel. Zahlenfolge = (7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)

$\Pr[F_i = 1] =$ Wahrscheinlichkeit, dass i . Zahl größer als $\frac{n+1}{2}$ ist

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{Anzahl der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} \\ &= \frac{\text{Anz. Permut., bei denen } i. \text{ Zahl} > n/2}{\text{Anz. aller Permut. von } n \text{ Zahlen}} = \frac{(n-1)! \cdot \frac{n}{2}}{n!} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anzahl Essen, nach denen der Münchner zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

Linearität des
Erwartungswerts

Indikatorvariable

$$3) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \ln n \quad \text{harmonische Reihe}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \ln n$$

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

M.a.W.: man kann erwarten, dass der Franke **exponentiell zufriedener** ist als der Münchner!

Average-Case-Laufzeit von INSERTIONSORT

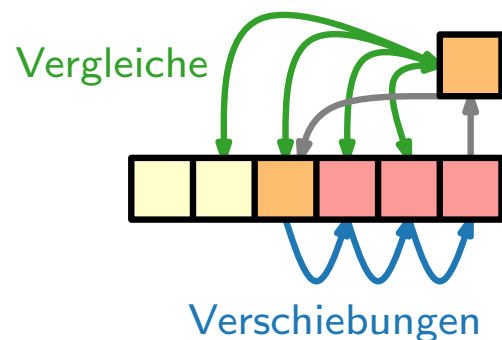
Beobachtung. Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

Hier: Was ist die durchschnittliche Laufzeit über **alle** Permutationen der Eingabe $A[1 \dots n]$ (für festes n)?

Einfacher: Was ist die durchschnittliche Laufzeit über **alle** Permutationen der Eingabe $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$?

Wissen: $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

Beobachtung. Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen T_{IS} zählen, denn



wenn wir ein Element einfügen
(innere Schleife von INSERTIONSORT), gilt:

$$\# \text{ Verschiebungen} \leq \# \text{ Vergleiche} \leq \# \text{ Verschiebungen} + 1$$

$$\text{d.h. insg. gilt: } T_{IS} \leq V_{IS} \leq T_{IS} + (n - 1).$$

Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

Beobachtung. Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die **erwartete** Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

Warum?

Betrachte Definition:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i=0}^{n^2} i \cdot \mathbf{Pr}[T = i]$$

hier: # Verschiebungen
(d.h. Laufzeit)

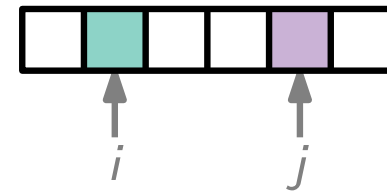
Anteil der Permutationen,
die i Verschiebungen verursachen.

Erwartete Laufzeit von INSERTIONSORT

T := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation $A[1 \dots n]$ von $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um T auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$



$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} =$ Anzahl Positionen, um die $A[j]$ nach links verschoben wird.

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} \text{ und } \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist $\mathbf{E}[T_{ij}]$?

Laut Def. $\mathbf{E}[T_{ij}] = \Pr[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}] = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{4} \quad \square$$

1) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ arithmetische Reihe

Zusammenfassung INSERTIONSORT

Satz. [alt]

Im **besten Fall** benötigt INSERTIONSORT $n - 1 \in \Theta(n)$ Vergleiche und 0 Verschiebungen.

Im **schlechtesten Fall** benötigt INSERTIONSORT $n(n - 1)/2 \in \Theta(n^2)$ Vergleiche/Verschiebungen.

Satz. [neu]

Im **Durchschnitt** benötigt INSERTIONSORT $n(n - 1)/4 \in \Theta(n^2)$ Verschiebungen und zwischen $n(n - 1)/4$ und $n(n - 1)/4 + (n - 1)$, d.h. $\Theta(n^2)$, Vergleiche.

Kurz: Bei INSERTIONSORT gilt

Average Case $\stackrel{\text{asymptotisch}}{=} \text{Worst Case!}$

Geburtstagswahrscheinlichkeiten

Frage: Wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit**, dass mindestens zwei Leute hier in der Vorlesung am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

Frage': Wie groß ist der **Erwartungswert** für die Anzahl X von Paaren von Leuten hier in der Vorlesung, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um X auszudrücken?

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ gleichen Geburtstag haben} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \left. \vphantom{X_{ij}} \right\} \begin{array}{l} \text{für} \\ 1 \leq i < j \leq k; \\ k = \text{Anz. Leute} \end{array}$$

$$\text{Dann gilt } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k X_{ij}.$$

Geburtstagserwartungen

Es gilt: $X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ und $X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}$.

Geburtstag von Person j

Annahme: Alle n Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

Gesucht: $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[\sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}\right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$

Linearität des Erwartungswerts!

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \geq 1 \Leftrightarrow k(k-1) \geq 2n.$$

$$\begin{aligned} n &= 365 \\ k(k-1) &\geq 730 \\ k &= 28 \Rightarrow \\ 28 \cdot 27 &= 756 \geq 730 \end{aligned}$$

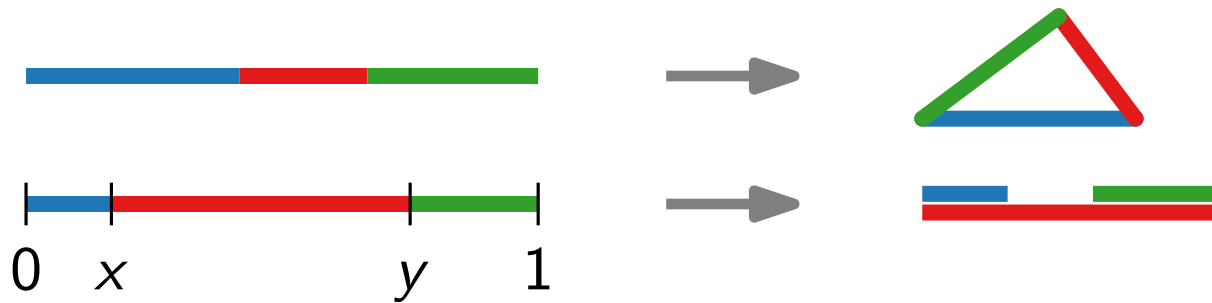
Für ein Jahr mit $n = 365$ Tagen braucht man also nur $k \geq 28$ Personen um ein Pärchen mit gleichem Geburtstag erwarten zu können. \square

Bonustrack

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen $x \in [0, 1]$ und $y \in [0, 1]$.

(Die ZV x & y sind also nicht diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



Mit anderen Worten – was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\max\{x, y - x, 1 - y\} < 1/2$?

Tipp: Betrachten Sie das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.

