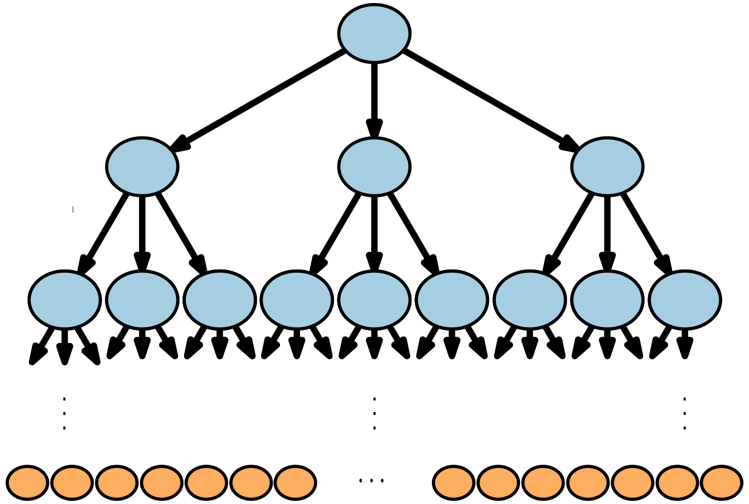
Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen



Vorlesung 5: Rekursionsgleichungen

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Alexander Wolff

Wintersemester 2024

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $$T_{\mathrm{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$$

$$= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n$$

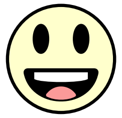
$$= V_{\mathrm{MS}}(n) \quad = \mathcal{O}(n \log_{\cancel{2}} n)$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

„Runde auf" zu nächster Zweierpotenz $n' < 2n$

MergeSort

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.



Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxSum in $\mathcal{O}(n)$ – also in linearer – Zeit!
- **Und wenn...** $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

  Gilt dann auch $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

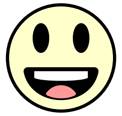
$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \quad = \mathcal{O}(n \log_{\cancel{2}} n) \end{aligned}$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

MergeSort

„Runde auf" zu nächster Zweierpotenz $n' < 2n$

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.



Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxSum in $\mathcal{O}(n)$ – also in linearer – Zeit!
- **Und wenn...** $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

  Gilt dann auch $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$?

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓
Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$
$\leq$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$\leq$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \qquad \text{(wegen } \mathbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} + 4n \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) +$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} + 4n \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + \quad 4n$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \mathbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \mathbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n
\end{aligned}
$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$?

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen IA)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
&\leq c \cdot n \log_2 n
\end{aligned}
$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen **IA**)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}$$

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen \textbf{IA})} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$)

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \mathbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n$$

$$\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
&\leq 2c\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \mathbf{IA}\text{)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n \\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n \\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für n = Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \le c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \ge 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \le 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \le c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
&\le 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \mathbf{IA}\text{)}\\
&= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n\\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n\\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n\\
&\le c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \ge 4.
\end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \le c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \ge 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \le 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \le c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$\le 2c\frac{n}{2}\log_2\frac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen \textbf{IA})}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{=1}) + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n$$

$$\le c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \ge 4.$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2}\log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}\\
&= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + 4n\\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n\\
&= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n\\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}
$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$\leq 2c\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)}$$

$$= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n - cn + 4n$$

$$= c \cdot n \log_2 n + (4 - c)n$$

$$\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + dn \quad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + dn \\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + dn \\
&= c \cdot n \log_2 n + (d - c)n \\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}
$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$ (mit $T(1) = 0$)

auch $T \in \mathcal{O}(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$ (für alle $n \geq 1$).

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) \leq 0$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k \log_2 k$ gilt für alle $k < n$.

Wir wissen: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + dn$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2}\log_2 \tfrac{n}{2} + dn \quad \text{(wegen IA)}\\
&= cn \cdot (\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_{=1}) + dn\\
&= c \cdot n \log_2 n - cn + dn\\
&= c \cdot n \log_2 n + (d - c)n\\
&\leq c \cdot n \log_2 n \quad \text{falls } c \geq d
\end{aligned}
$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0 \ldots$) $\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir:

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme:

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\ &\leq c \cdot \big(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\big) + 1 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\ &\leq c \cdot \left(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\right) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 1 \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\ &\leq c \cdot \left(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\right) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 1 \quad ⚡ \end{aligned}$$

I) Substitutionsmethode

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c$ ✔

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
&\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \qquad \text{(wegen } \textbf{IA}\text{)} \\
&\leq c \cdot \left(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil \right) + 1 \\
&\leq c \cdot n + 1 \quad \lightning
\end{aligned}
$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme:

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$
$$\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\ &= c \cdot n + 3 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
&\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\
&= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\
&= c \cdot n + 3
\end{aligned}
$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3 \\ &= c \cdot n + 3 \quad ⚡ \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Also zeigen wir: $T(n) \leq c \cdot n + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c + 1$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k + 1$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

$$\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1$$

$$= c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 3$$

$$= c \cdot n + 3 \quad ⚡$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir:

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n.

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

$\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot \big(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\big) - d - d + 1 \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - d - d + 1 \\ &\leq c \cdot n - d + (1 - d) \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
&\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\
&\leq c \cdot \left(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\right) - d - d + 1 \\
&\leq c \cdot n - d + (1 - d) \\
&\leq cn - d
\end{aligned}
$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
&\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\
&\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - d - d + 1 \\
&\leq c \cdot n - d + (1 - d) \\
&\leq cn - d \qquad \text{falls } d \geq 1.
\end{aligned}
$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \leq c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$.
D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \leq c - d$ falls $c \geq d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \leq c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - d - d + 1 \\ &\leq c \cdot n - d + (1 - d) \\ &\leq cn - d \qquad \text{falls } d \geq 1. \quad ✓ \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$

Nun probieren wir: $T(n) \le c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \le c - d$ falls $c \ge d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \le c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
&\le (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\
&\le c \cdot \big(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\big) - d - d + 1 \\
&\le c \cdot n - d + (1 - d) \\
&\le cn - d \qquad \text{falls } d \ge 1.
\end{aligned}
$$
✓

Nicht verzagen!

Noch ein Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ (mit $T(1) = 0$)

Behauptung: $T \in \mathcal{O}(n)$ ✓

Nun probieren wir: $T(n) \le c \cdot n - d$ für Konstanten $c, d > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage **schärfer!**

Beweis. Durch Induktion über n. **Induktionsanfang:** $T(1) = 0 \le c - d$ falls $c \ge d$ ✓

Induktionsannahme: $T(k) \le c \cdot k - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\
&\le (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor - d) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\
&\le c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) - d - d + 1 \\
&\le c \cdot n - d + (1 - d) \\
&\le cn - d \qquad \text{falls } d \ge 1.
\end{aligned}
$$
✓

II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)

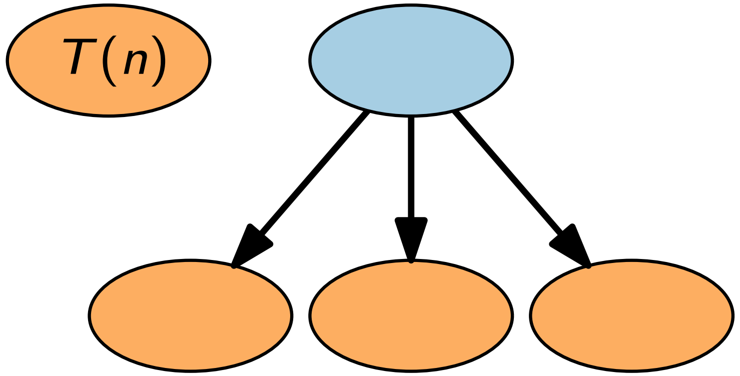
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)

$T(n)$

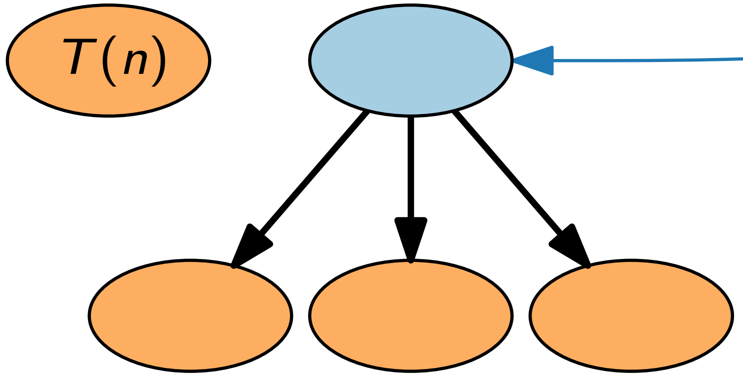
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



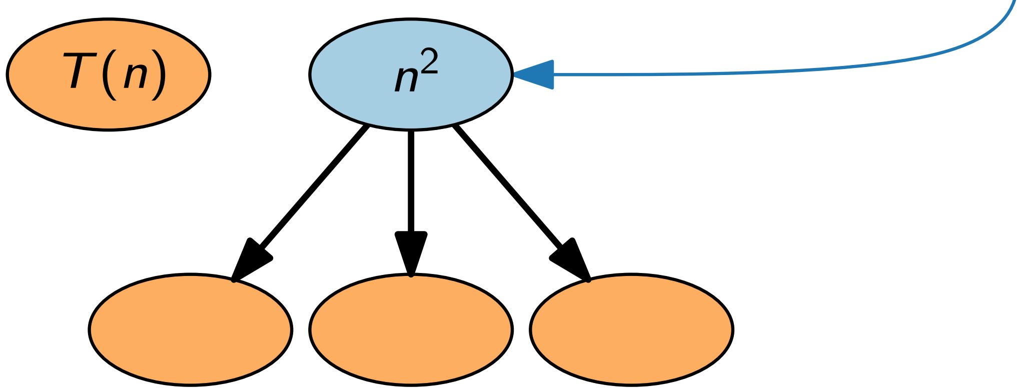
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + \boxed{n^2}$ (mit $T(1) = 1$)



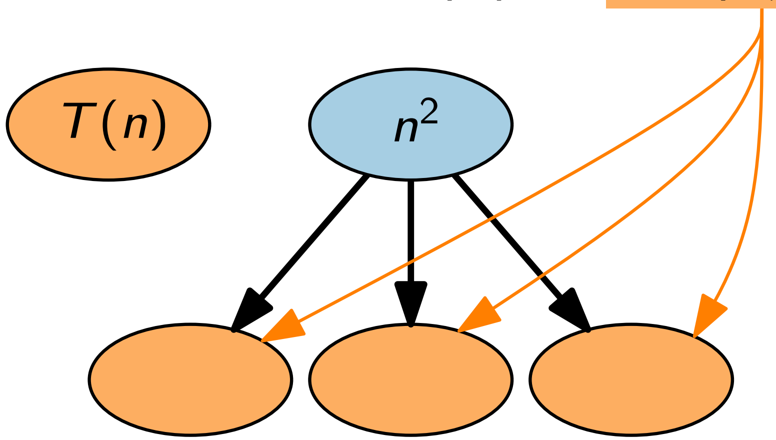
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + \boxed{n^2}$ (mit $T(1) = 1$)



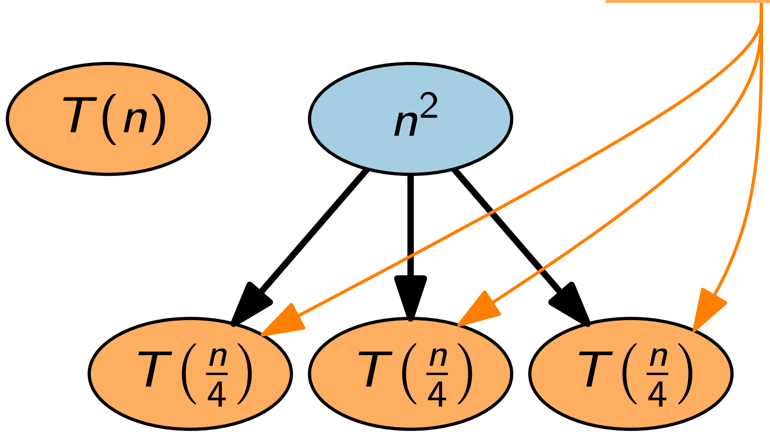
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



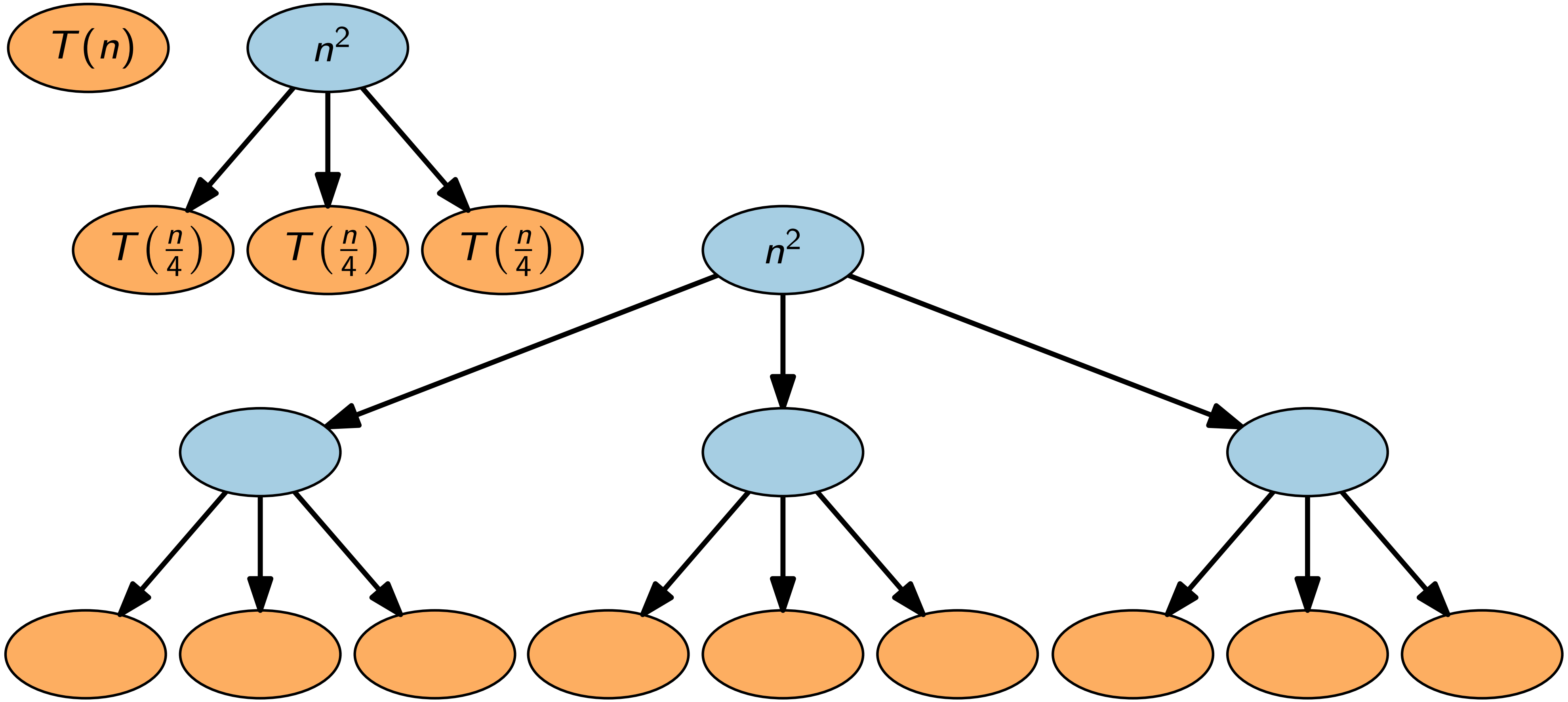
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



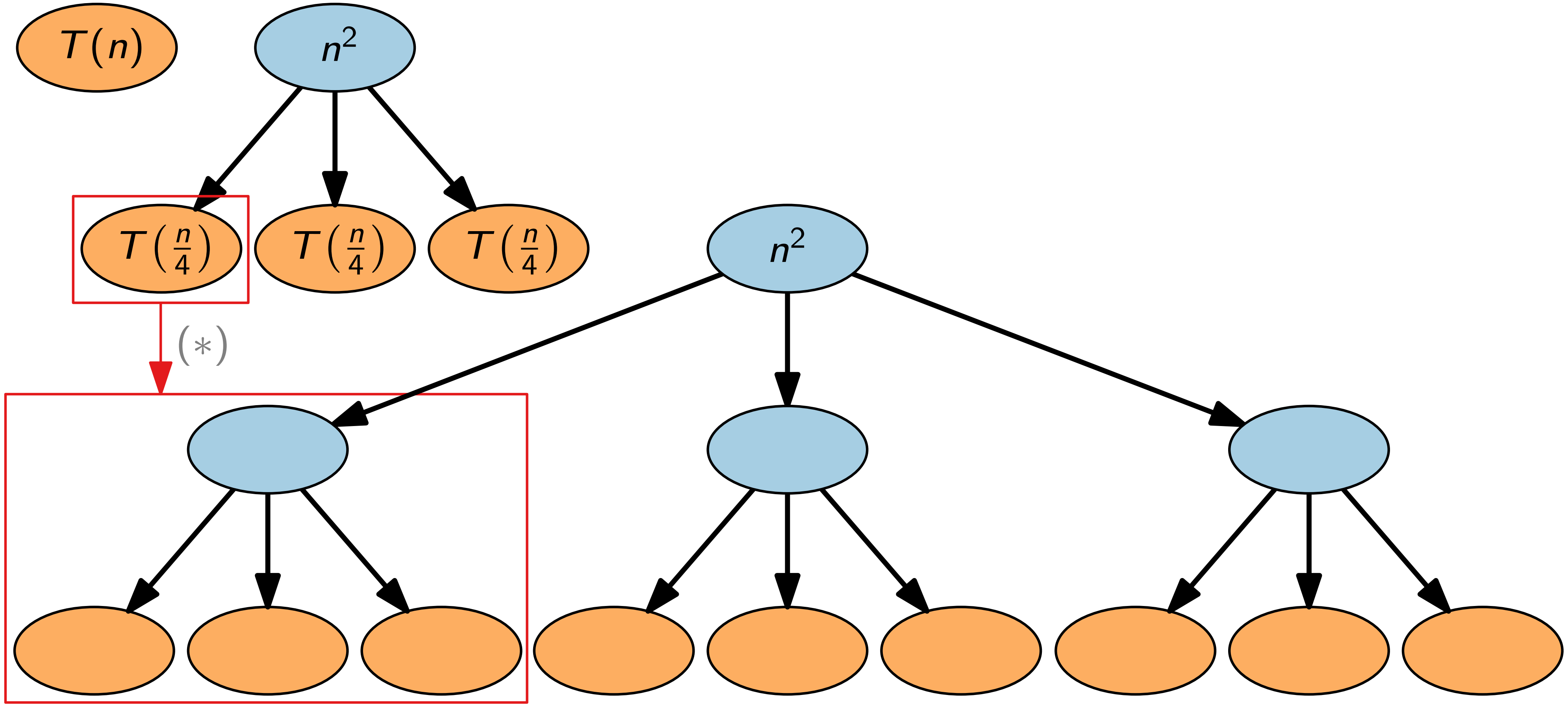
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ (mit $T(1) = 1$)



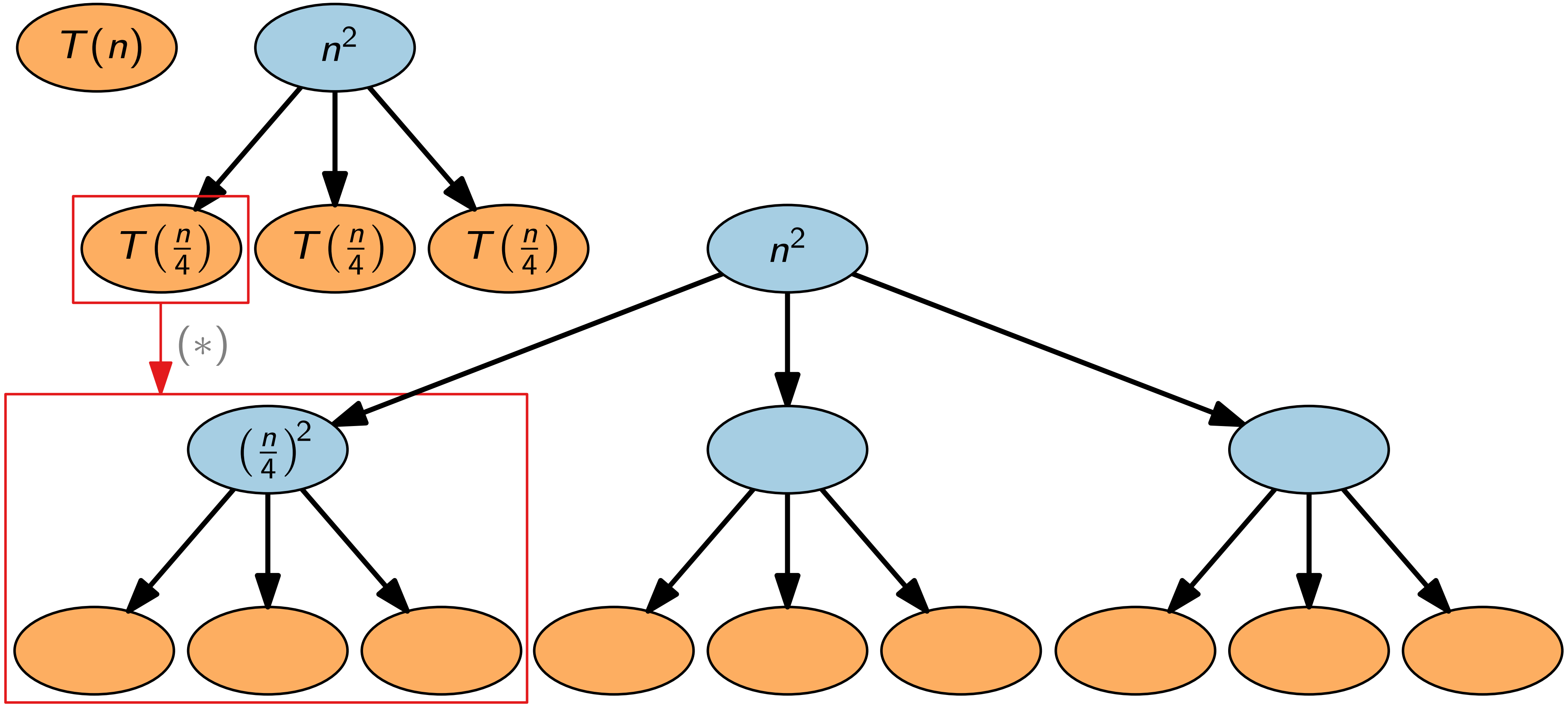
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



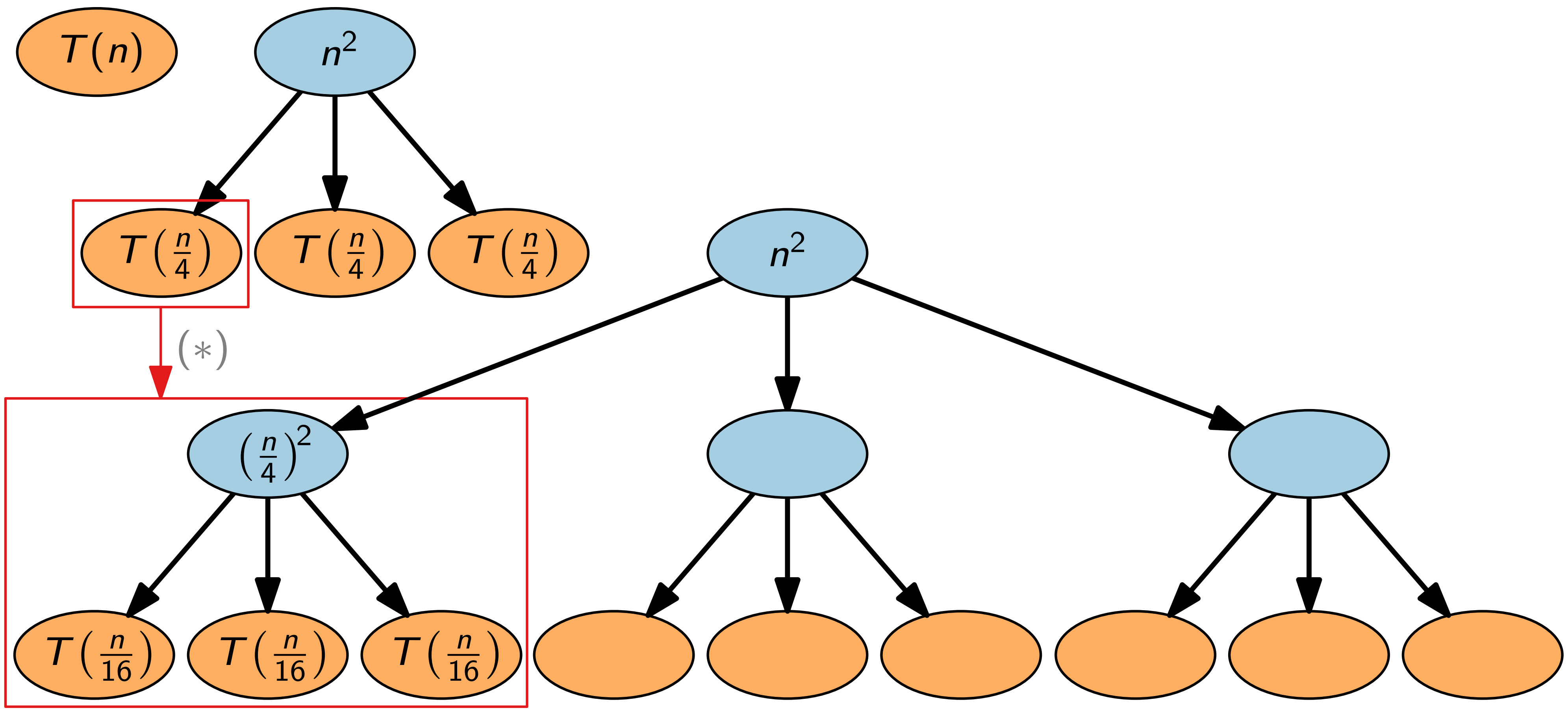
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



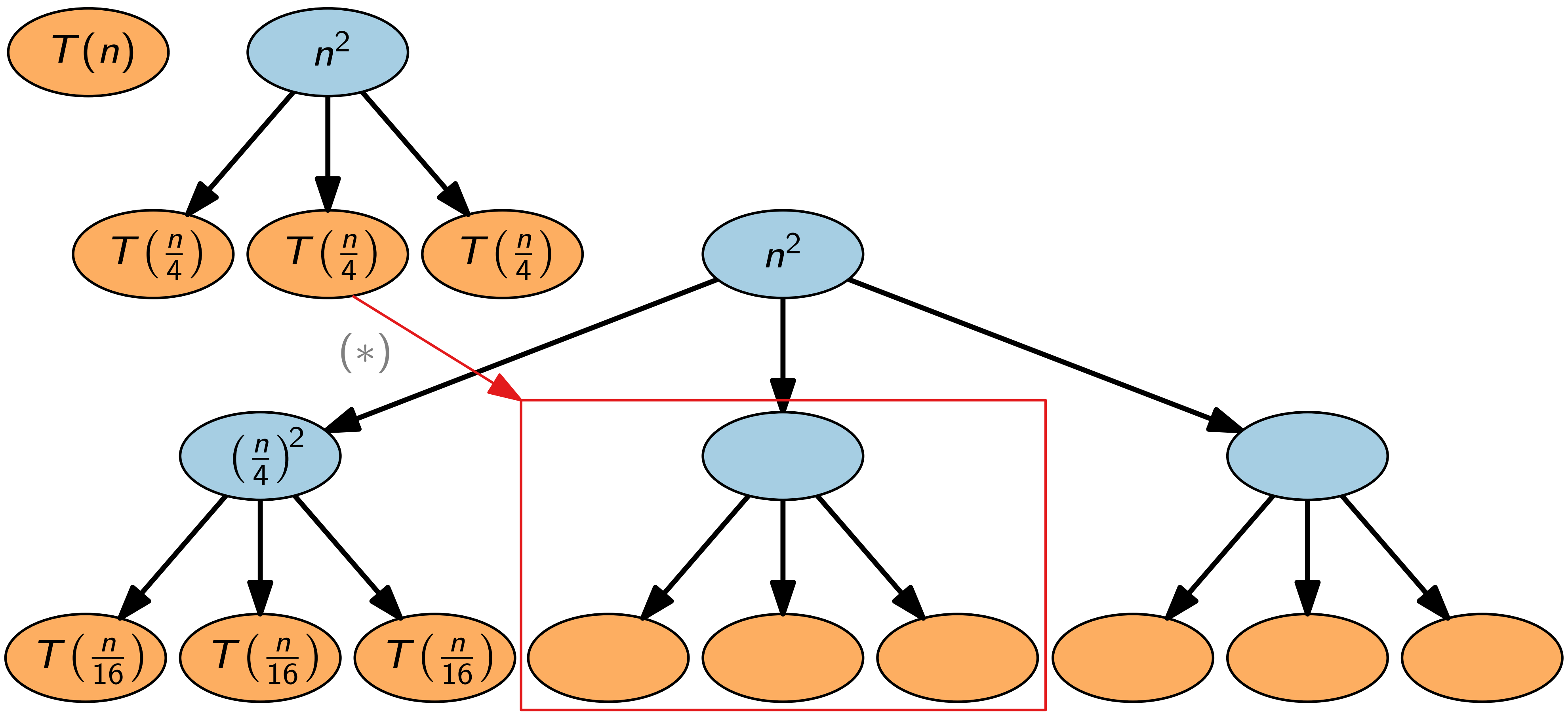
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



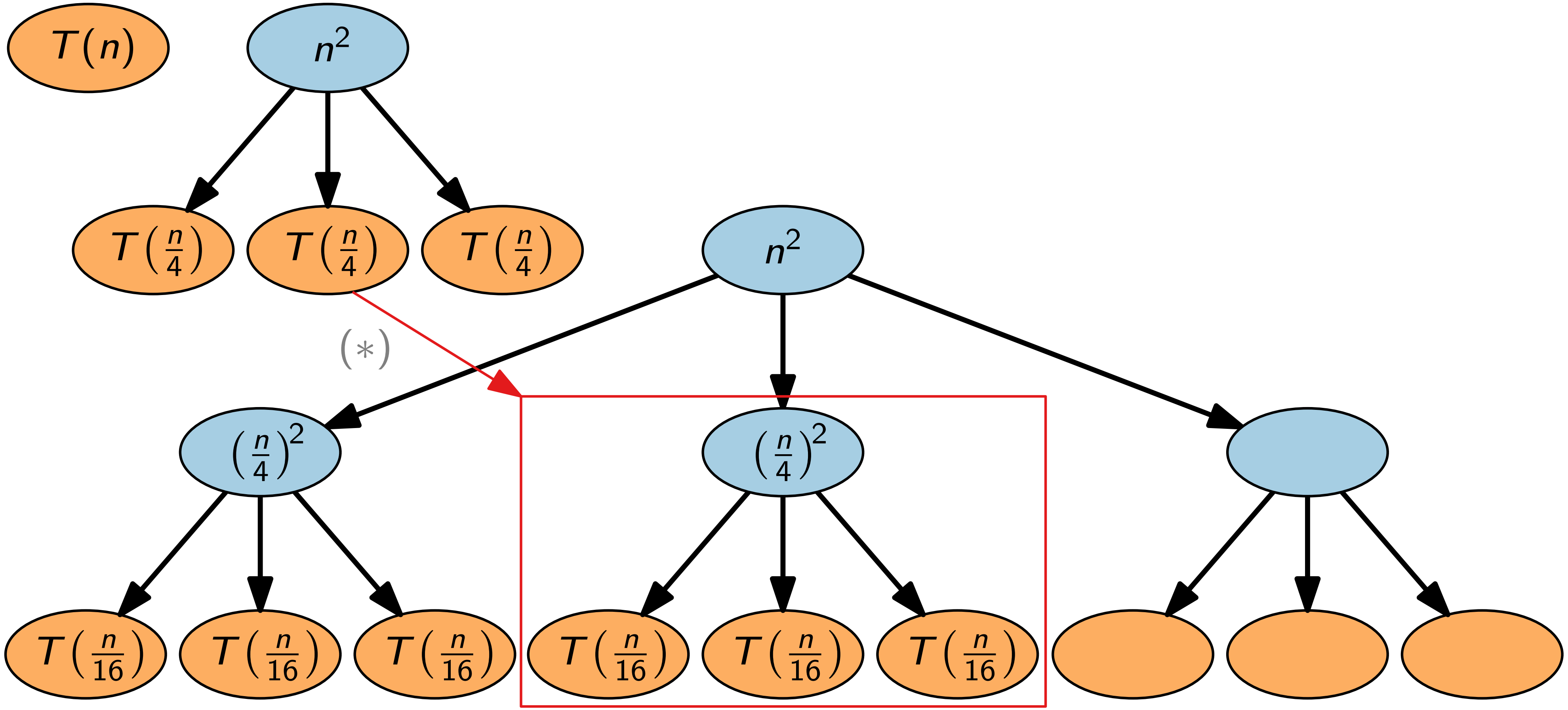
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



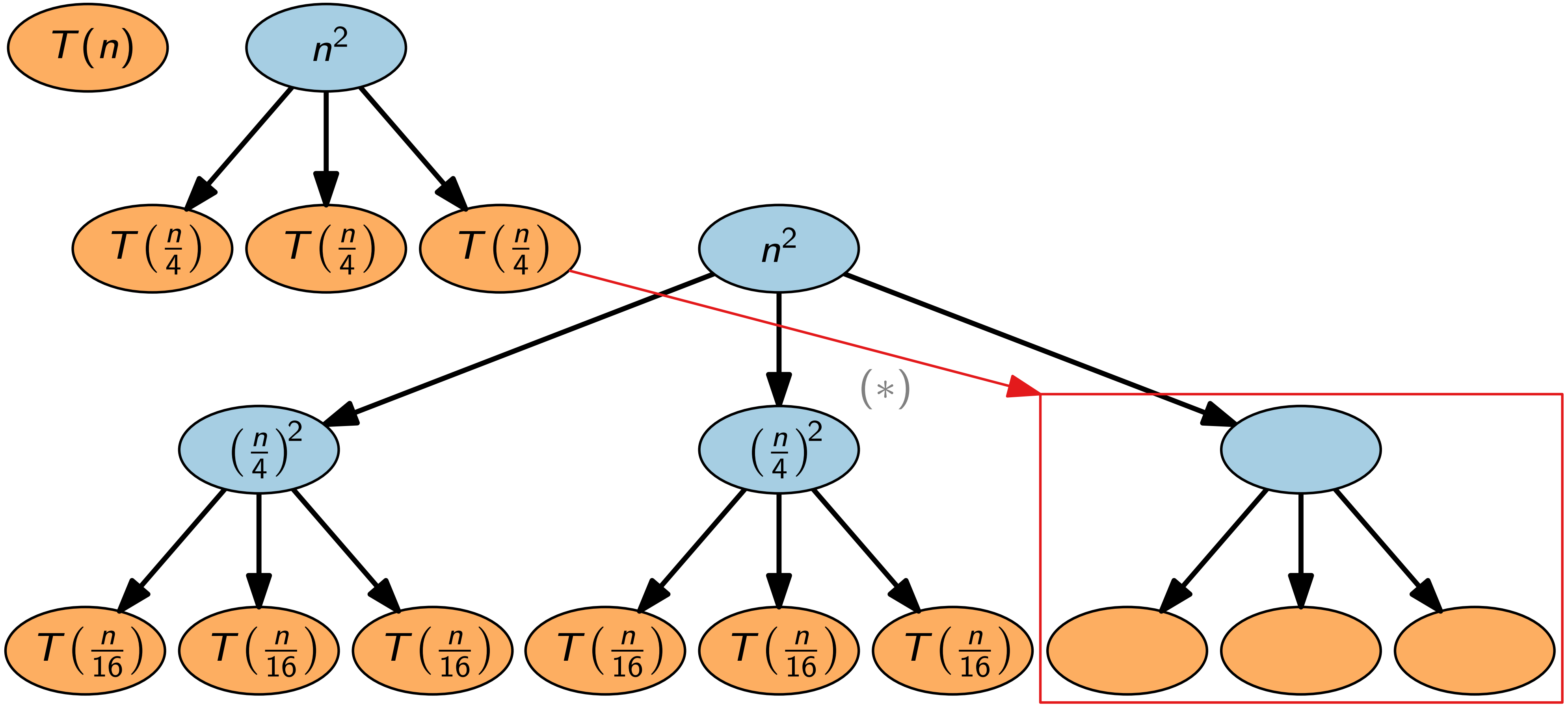
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



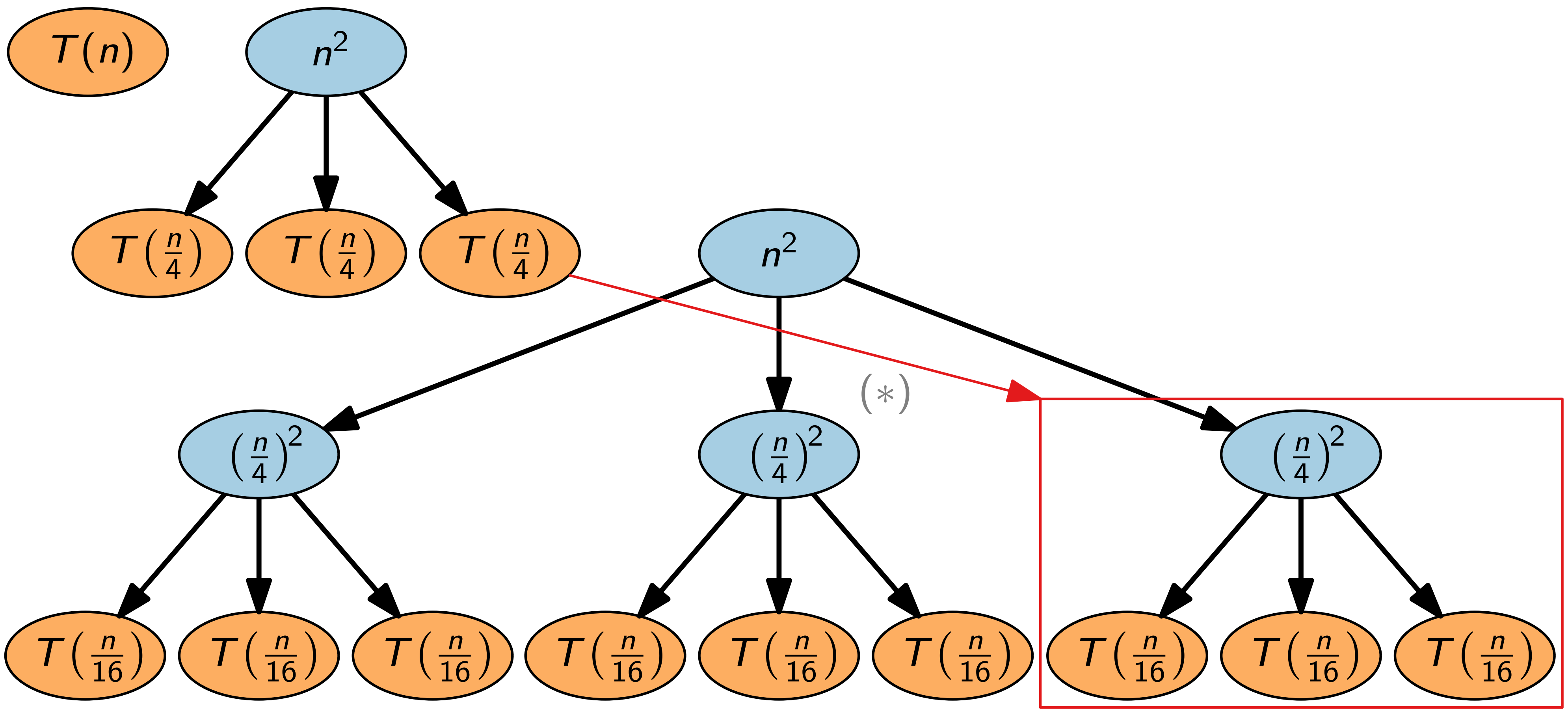
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



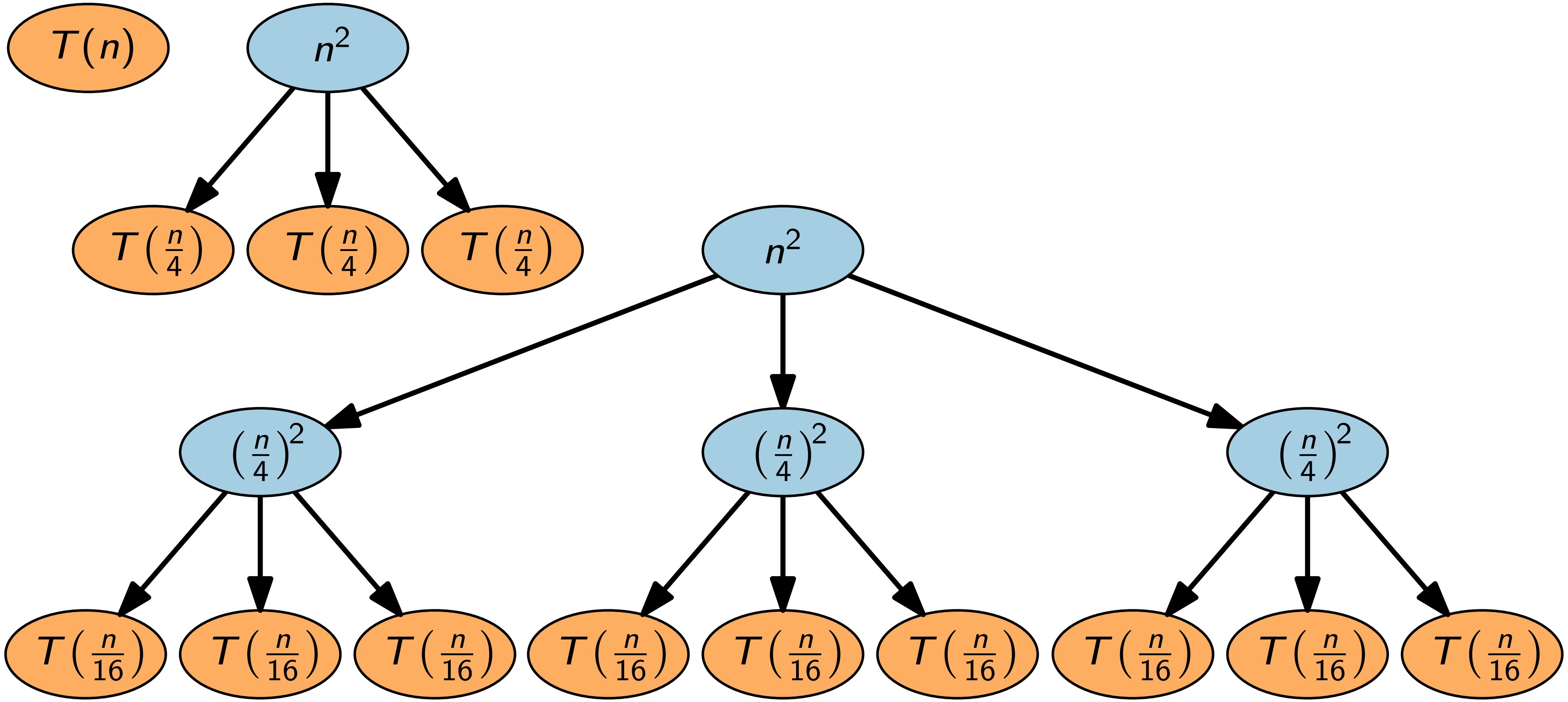
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



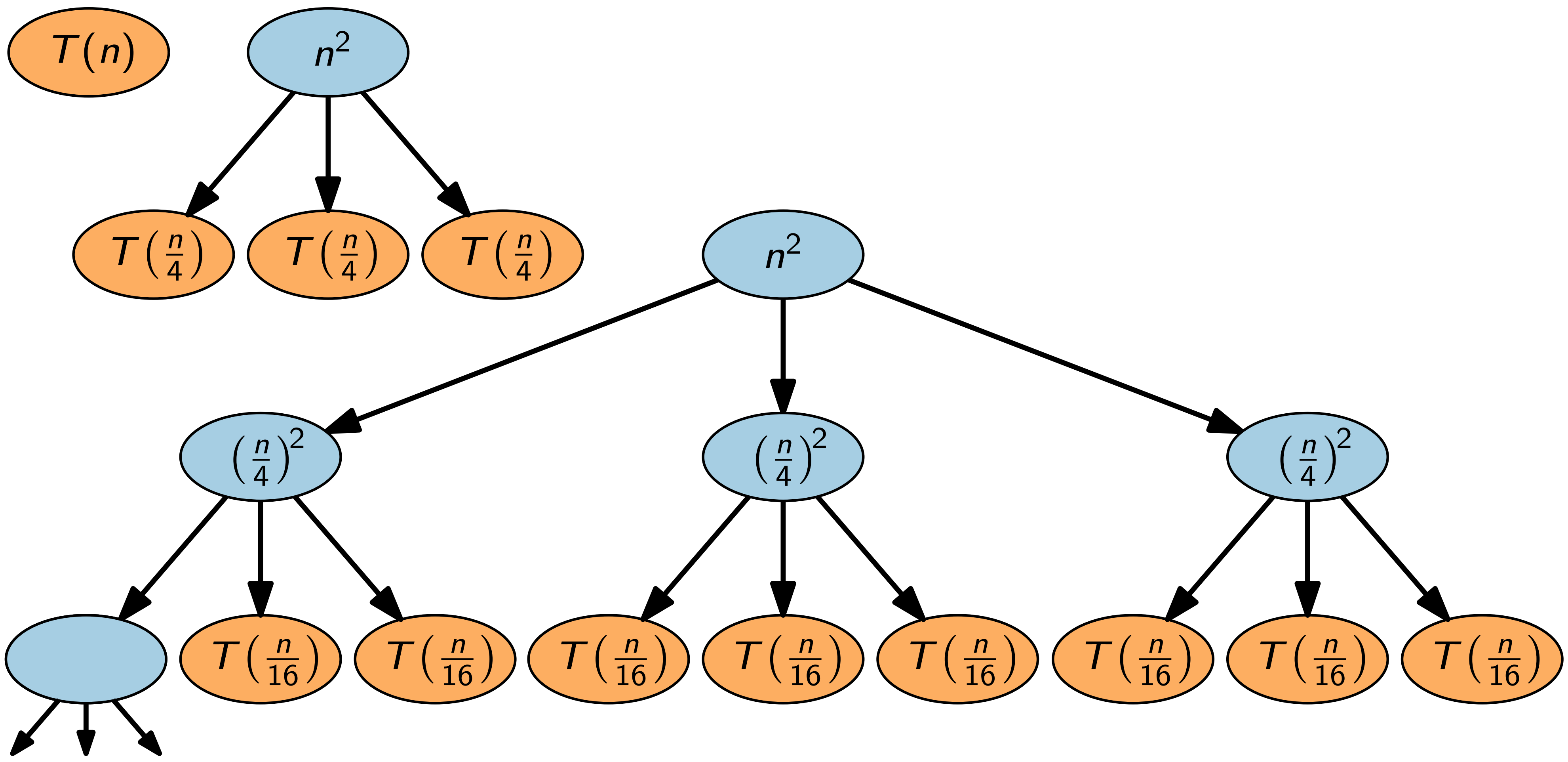
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



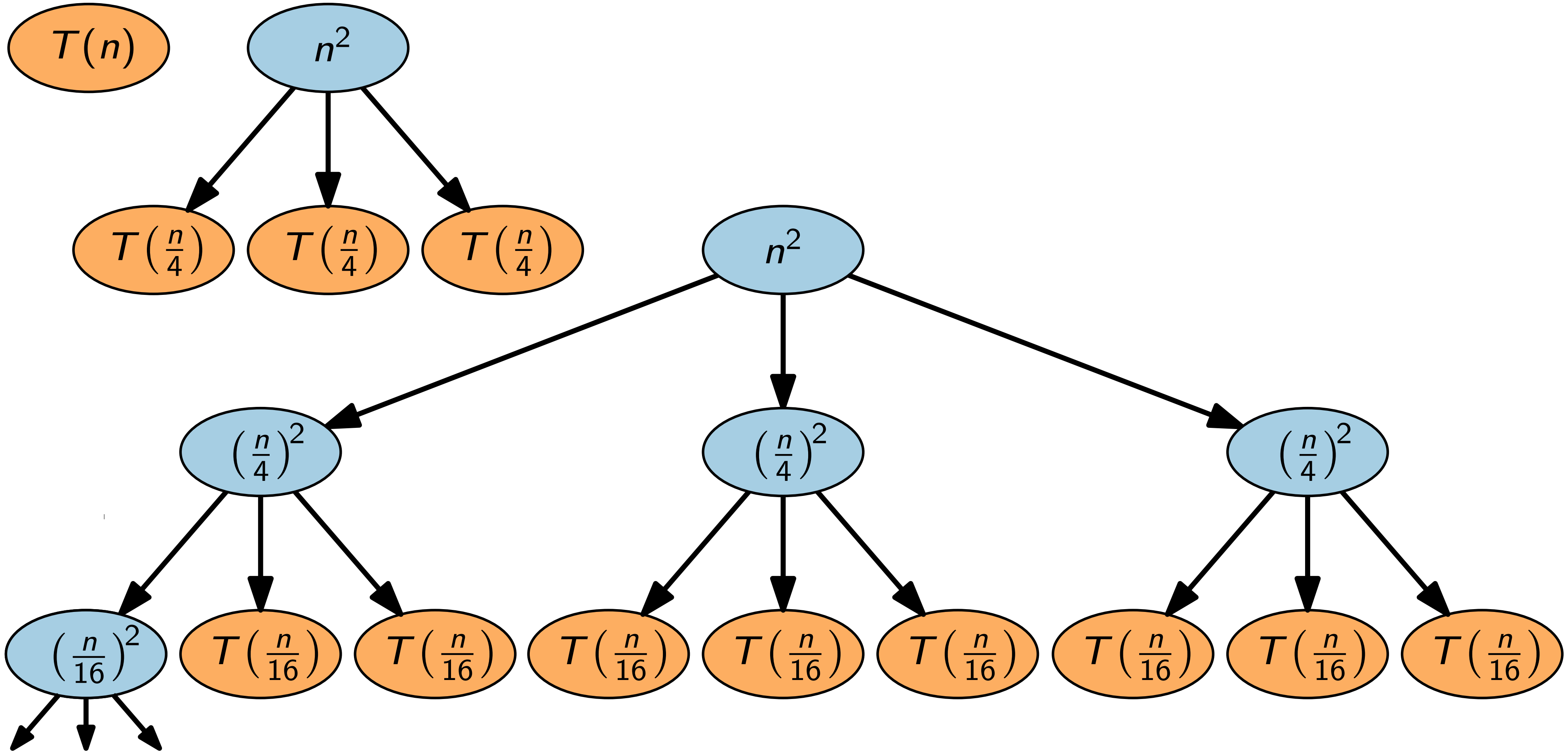
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



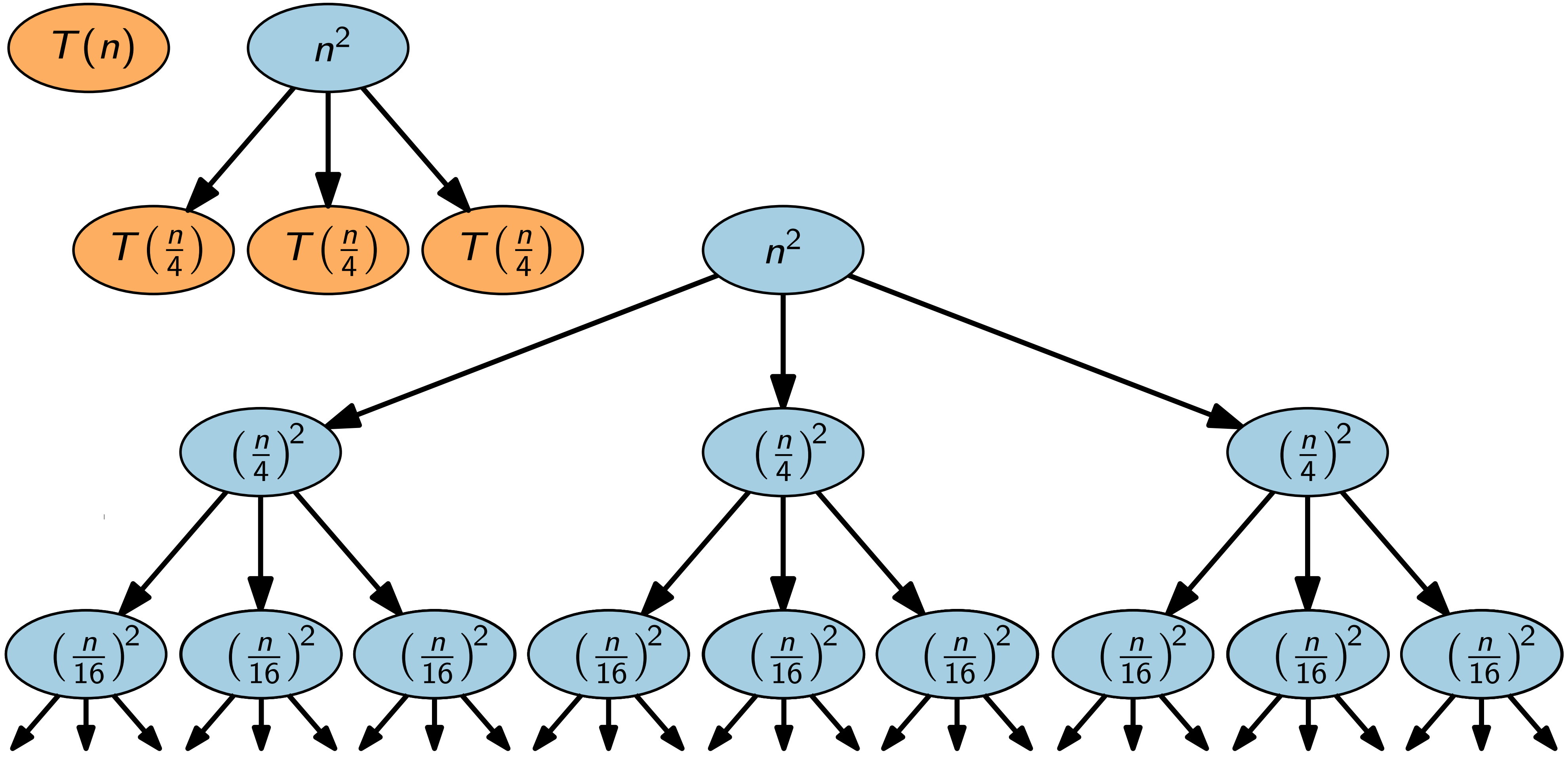
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



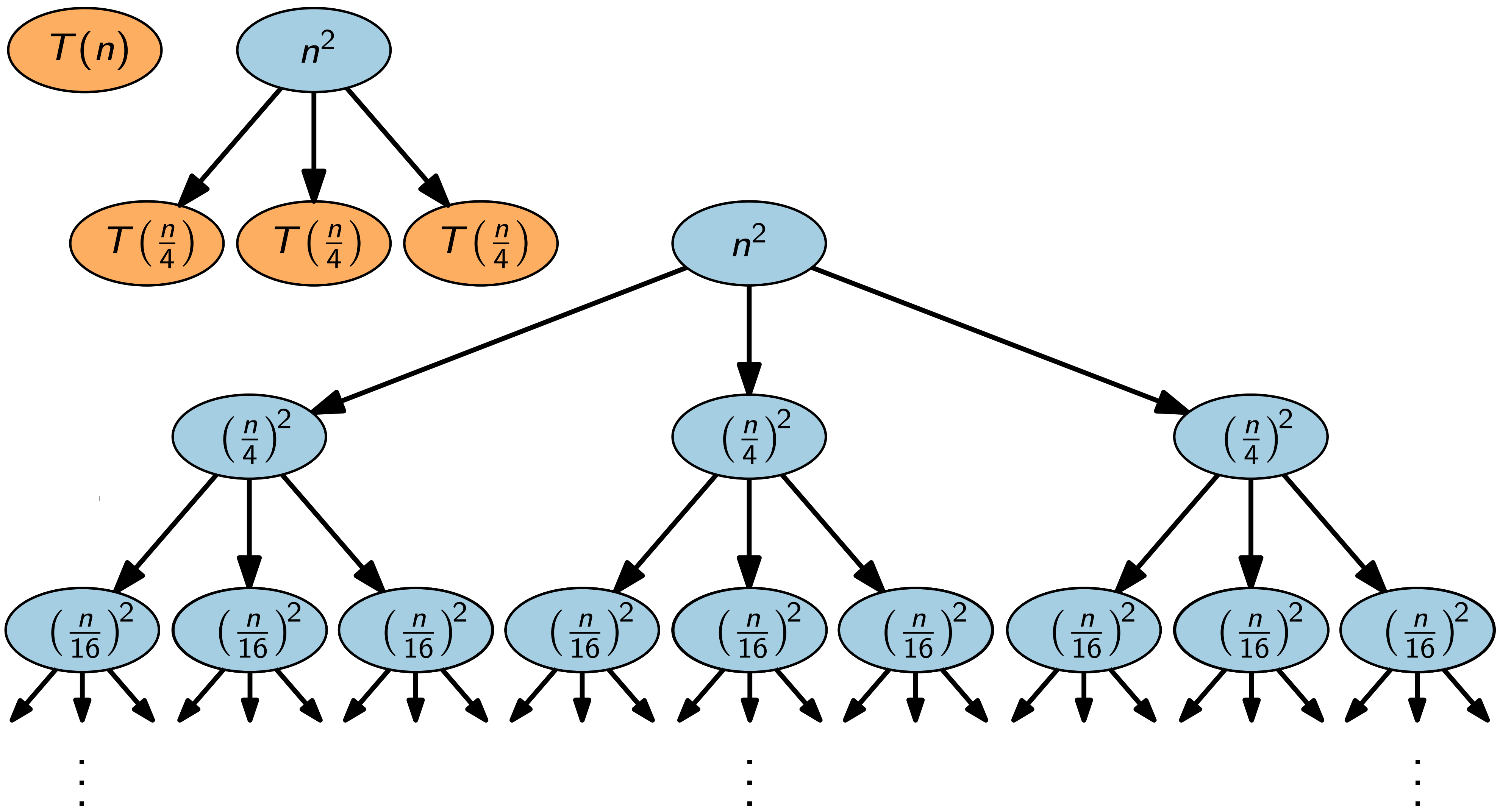
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = \boxed{3T(n/4)} + \boxed{n^2}$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



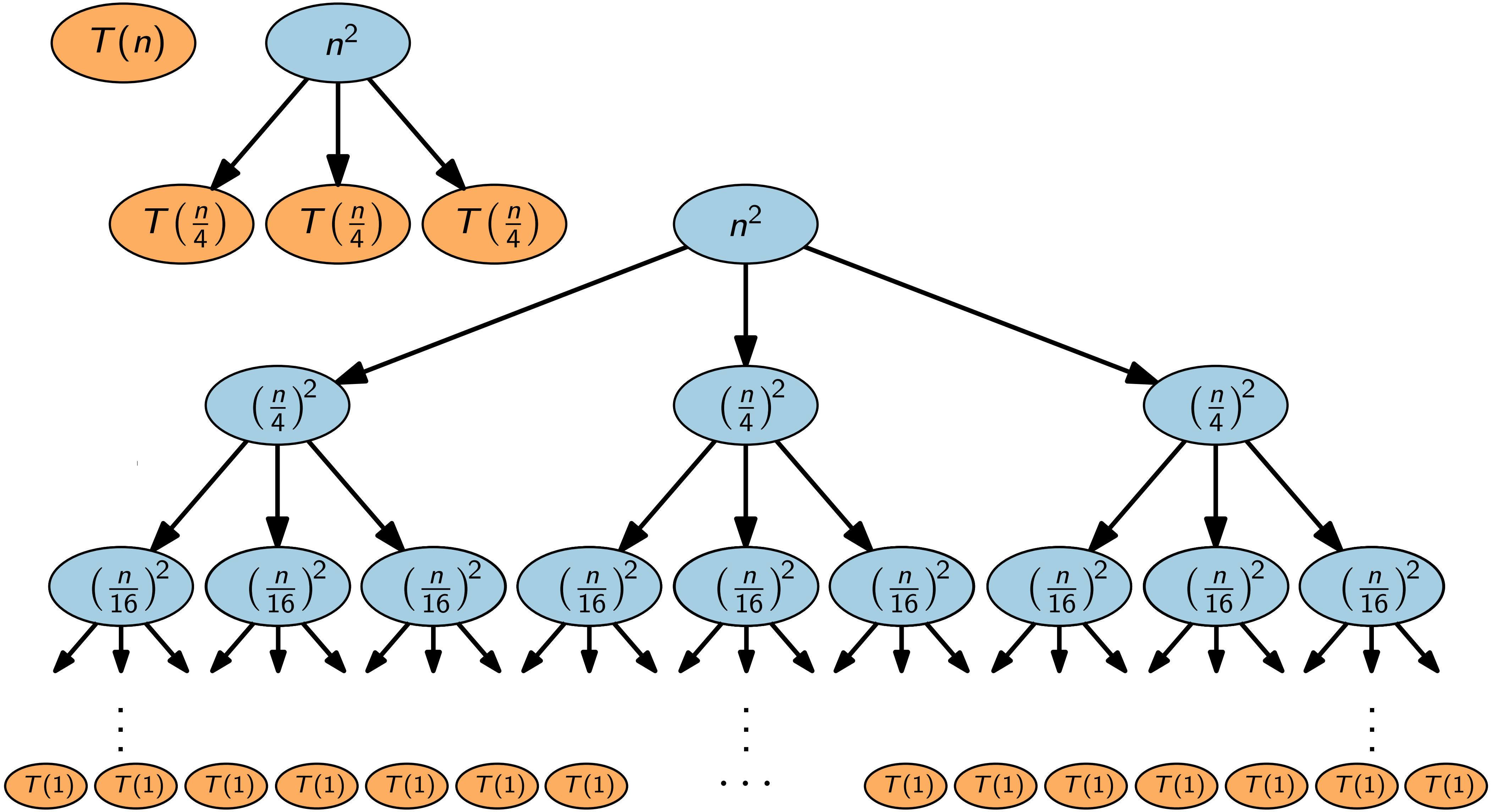
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



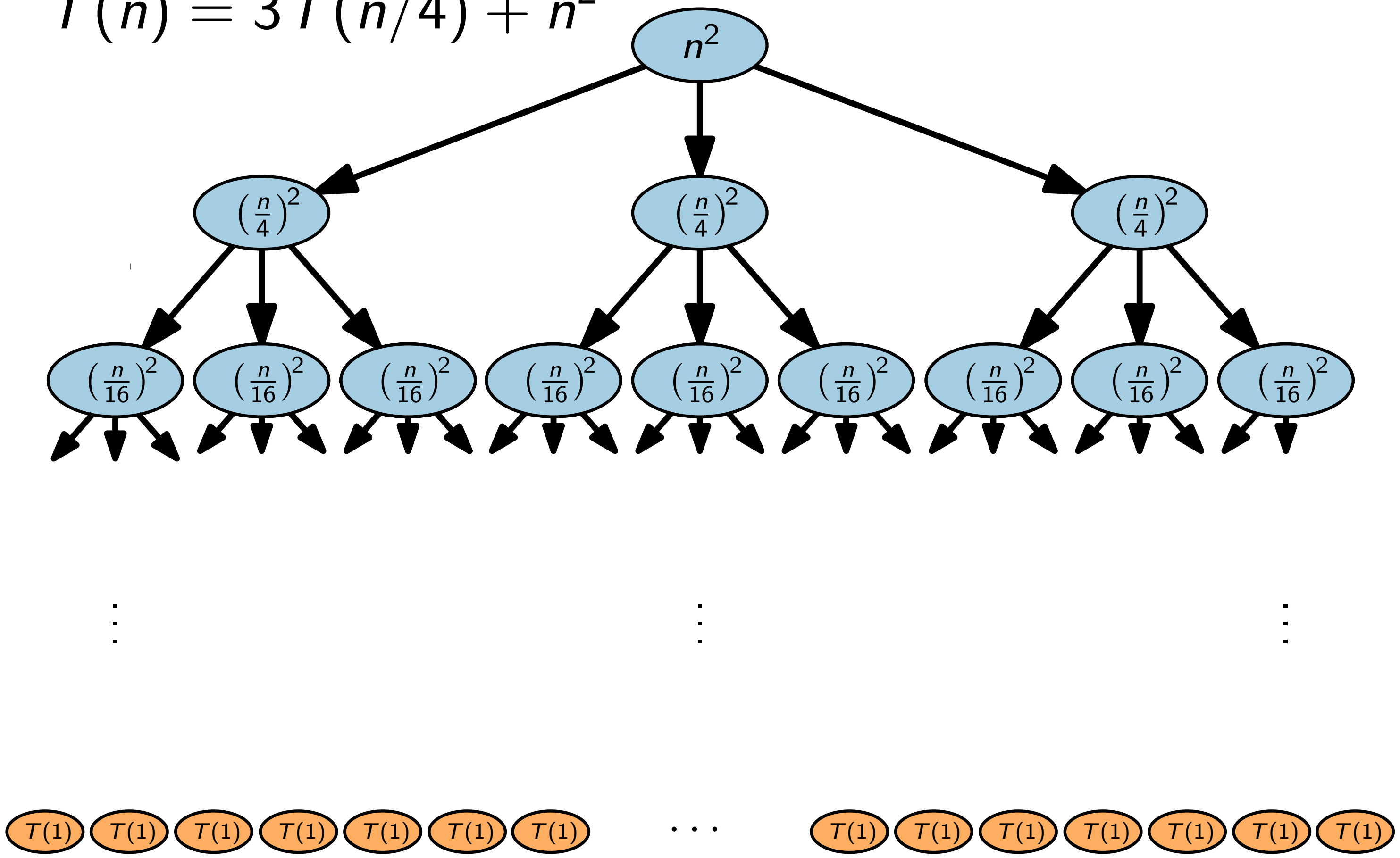
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$ $(*)$ (mit $T(1) = 1$)



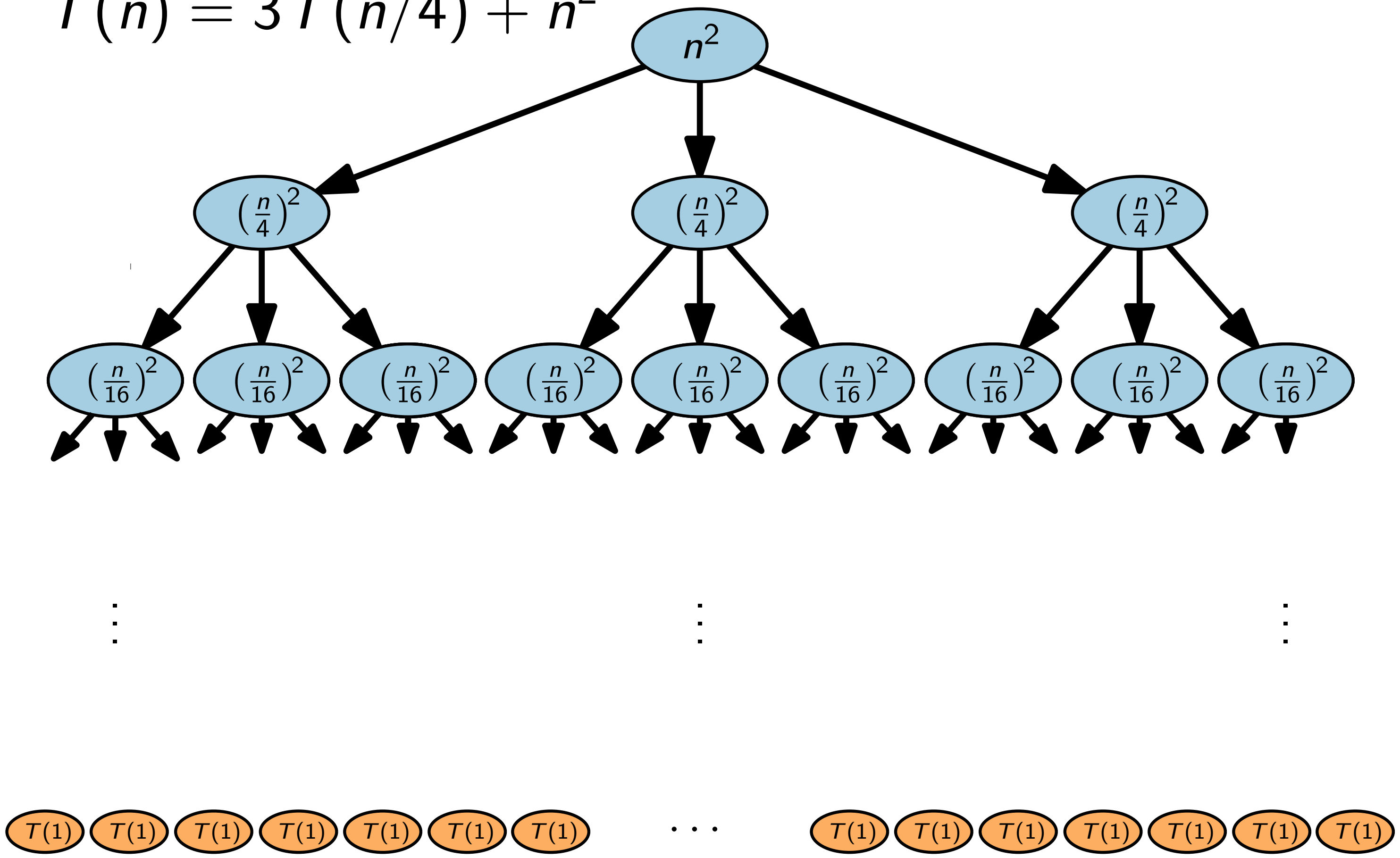
II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



II) Rekursionsbaummethode

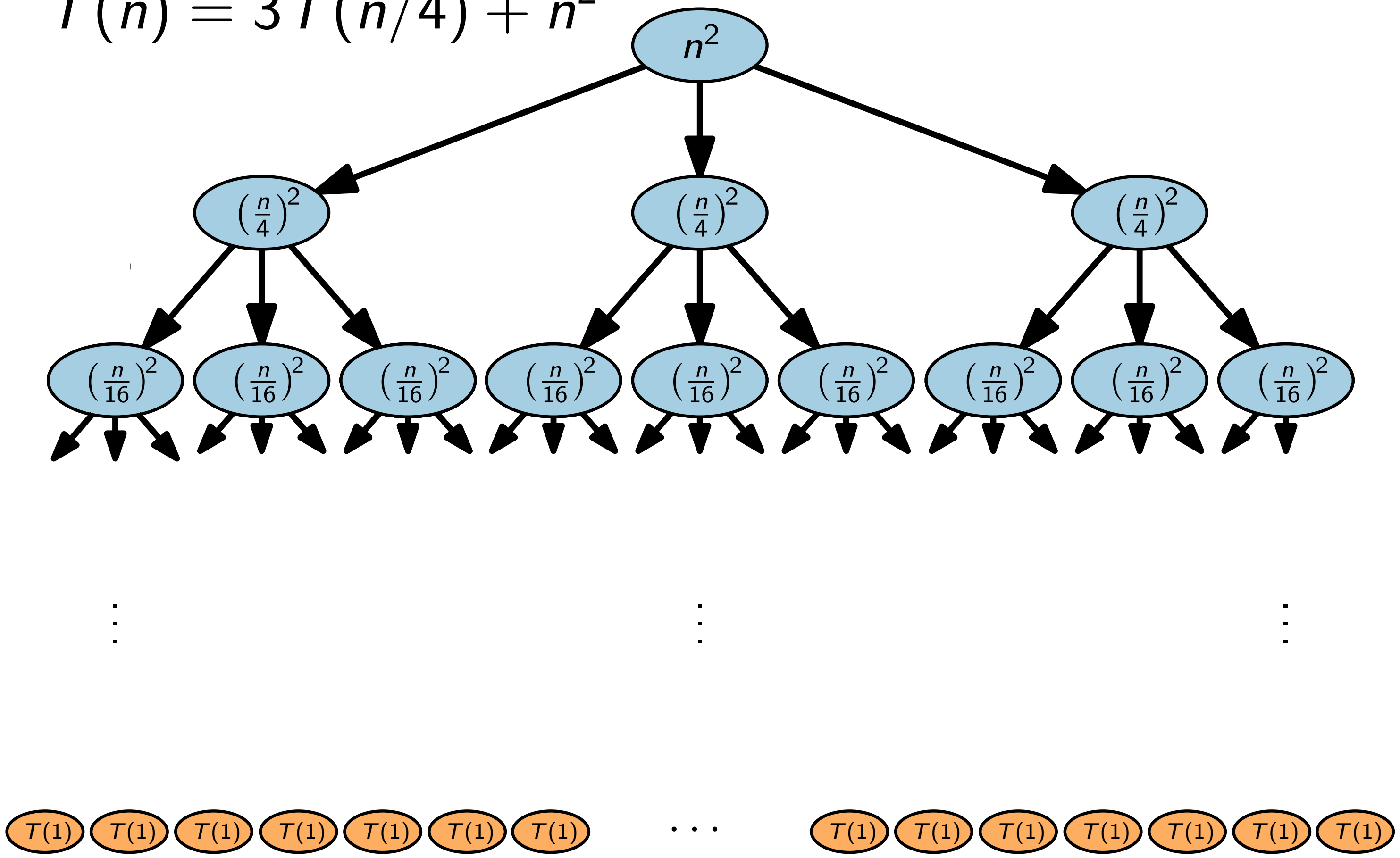
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)

II) Rekursionsbaummethode

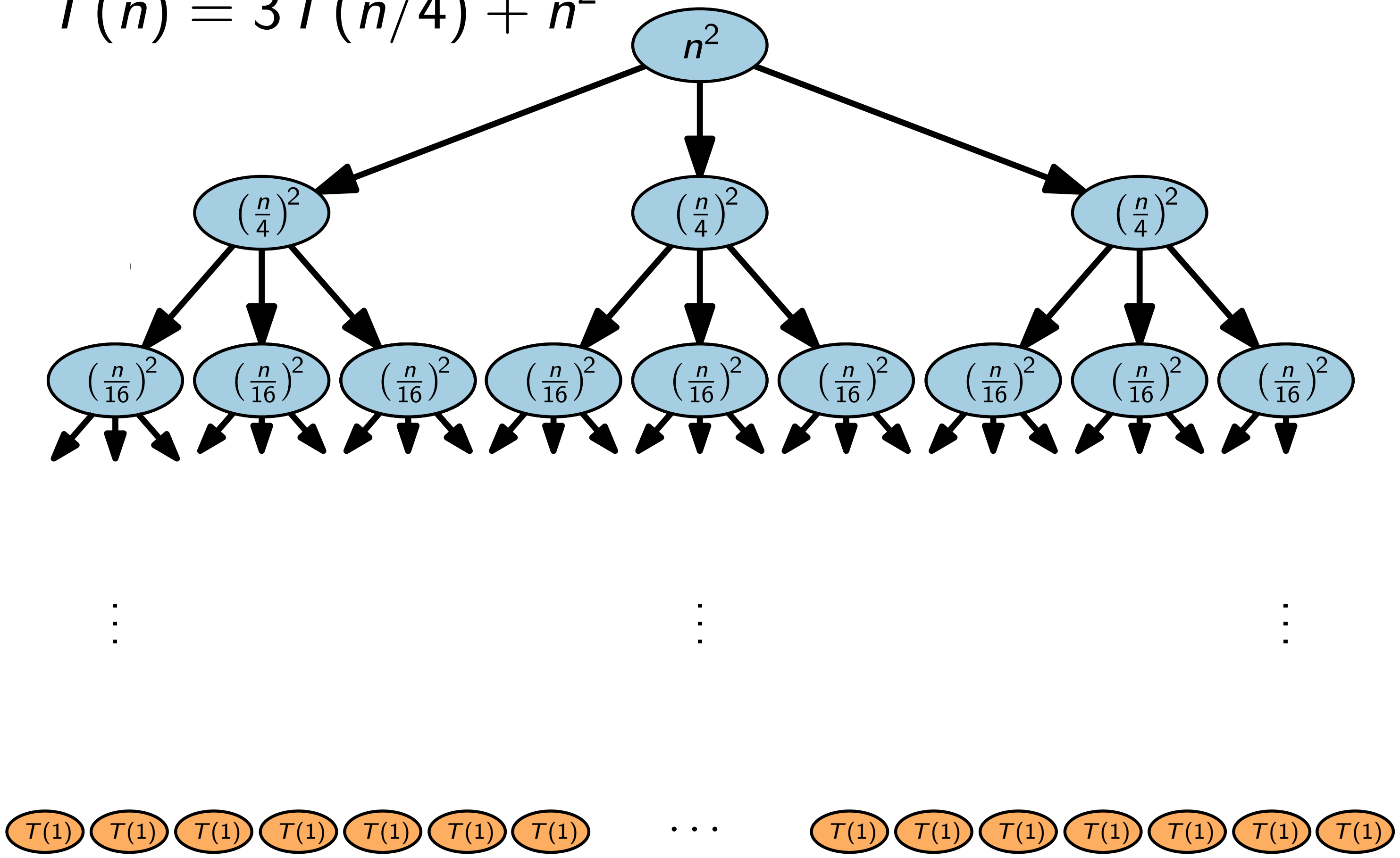
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0		

II) Rekursionsbaummethode

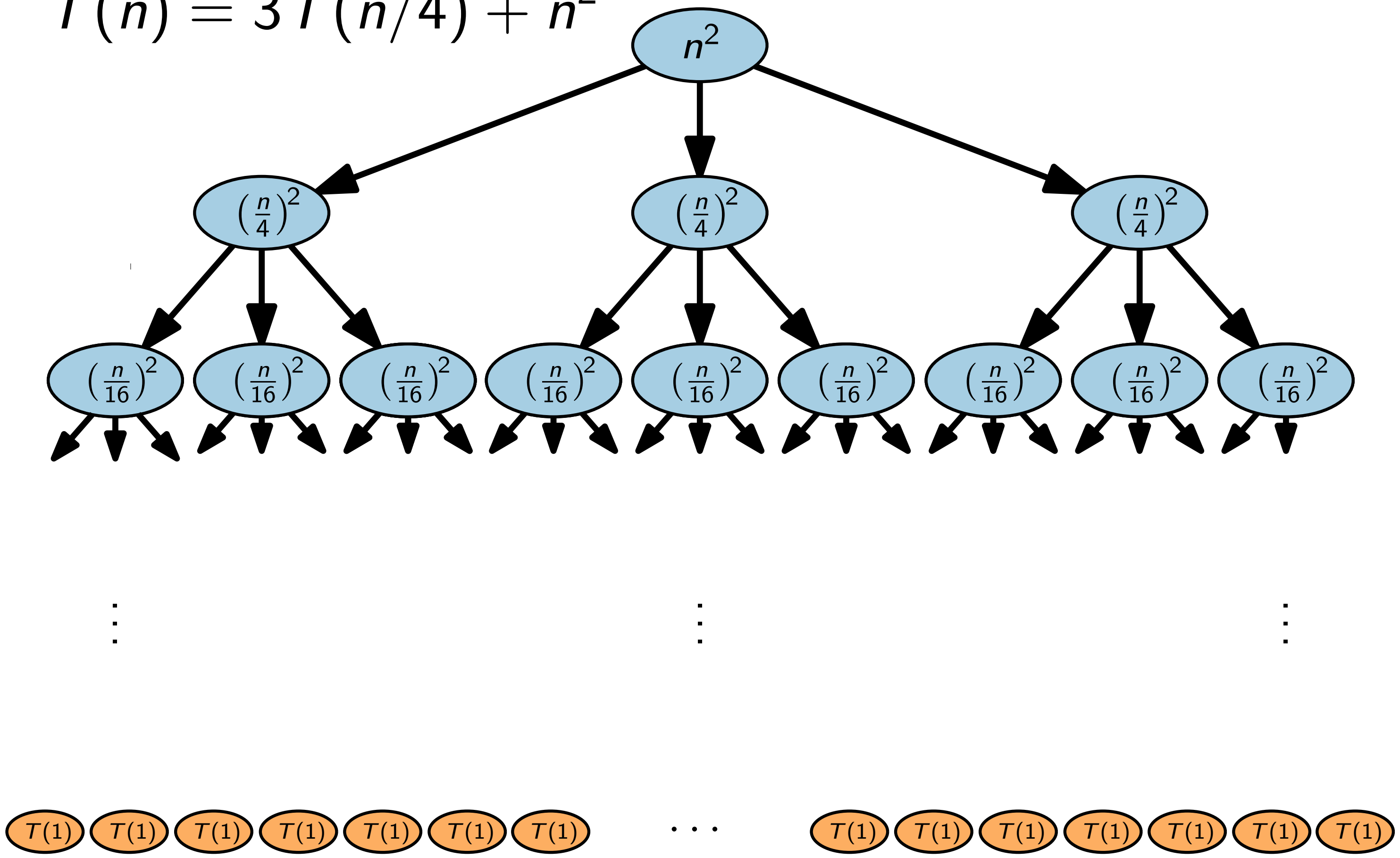
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	

II) Rekursionsbaummethode

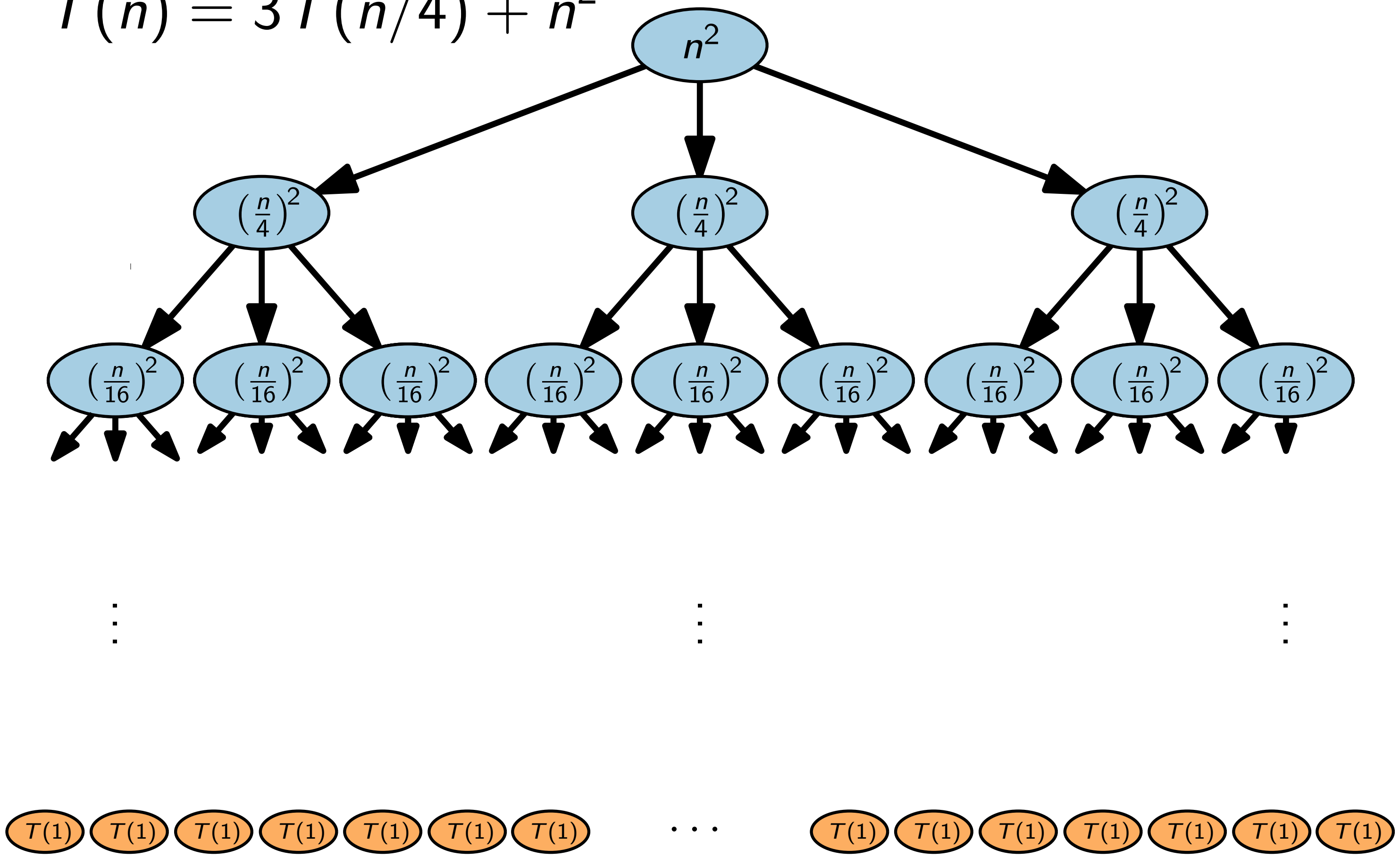
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2

II) Rekursionsbaummethode

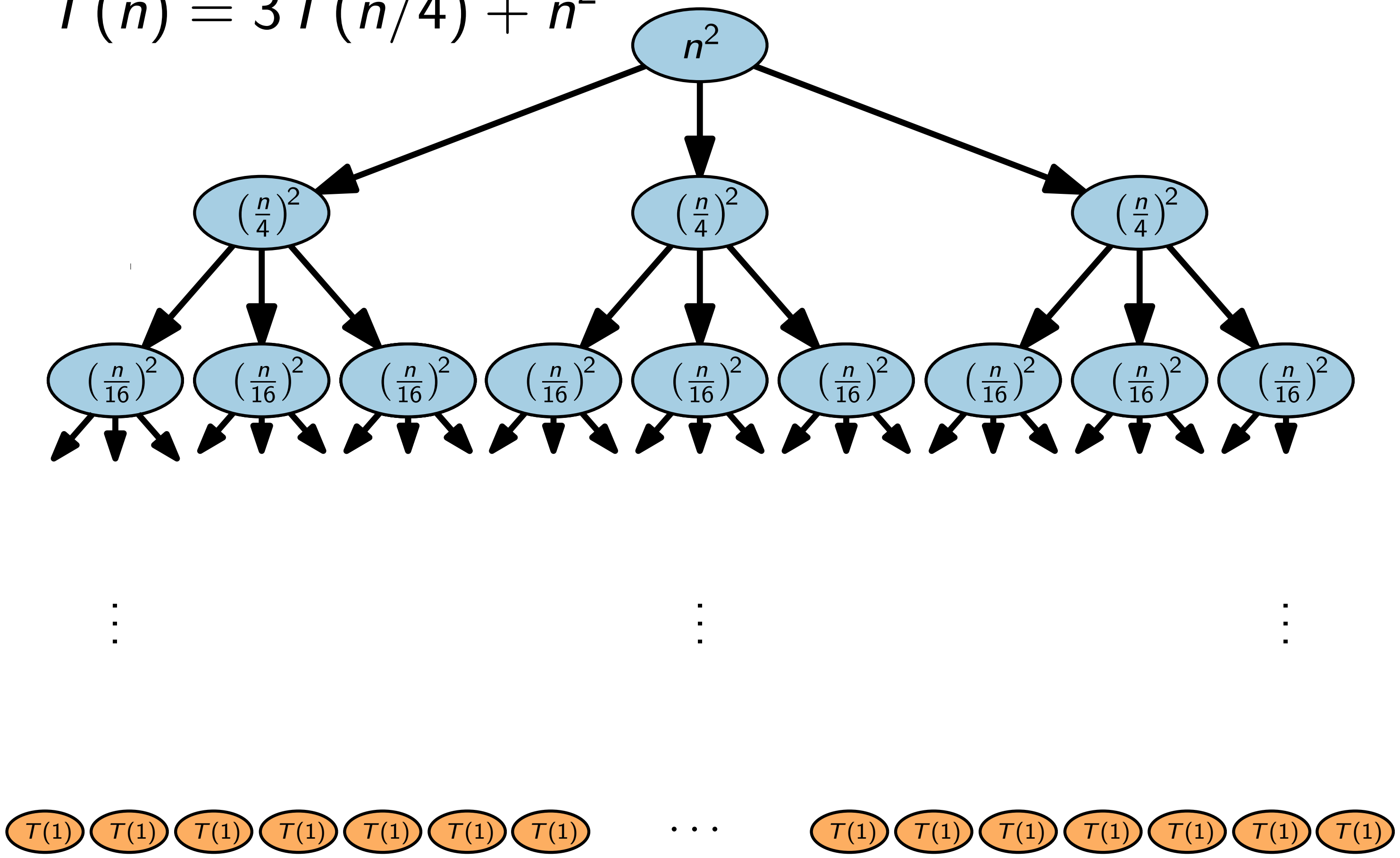
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1		

II) Rekursionsbaummethode

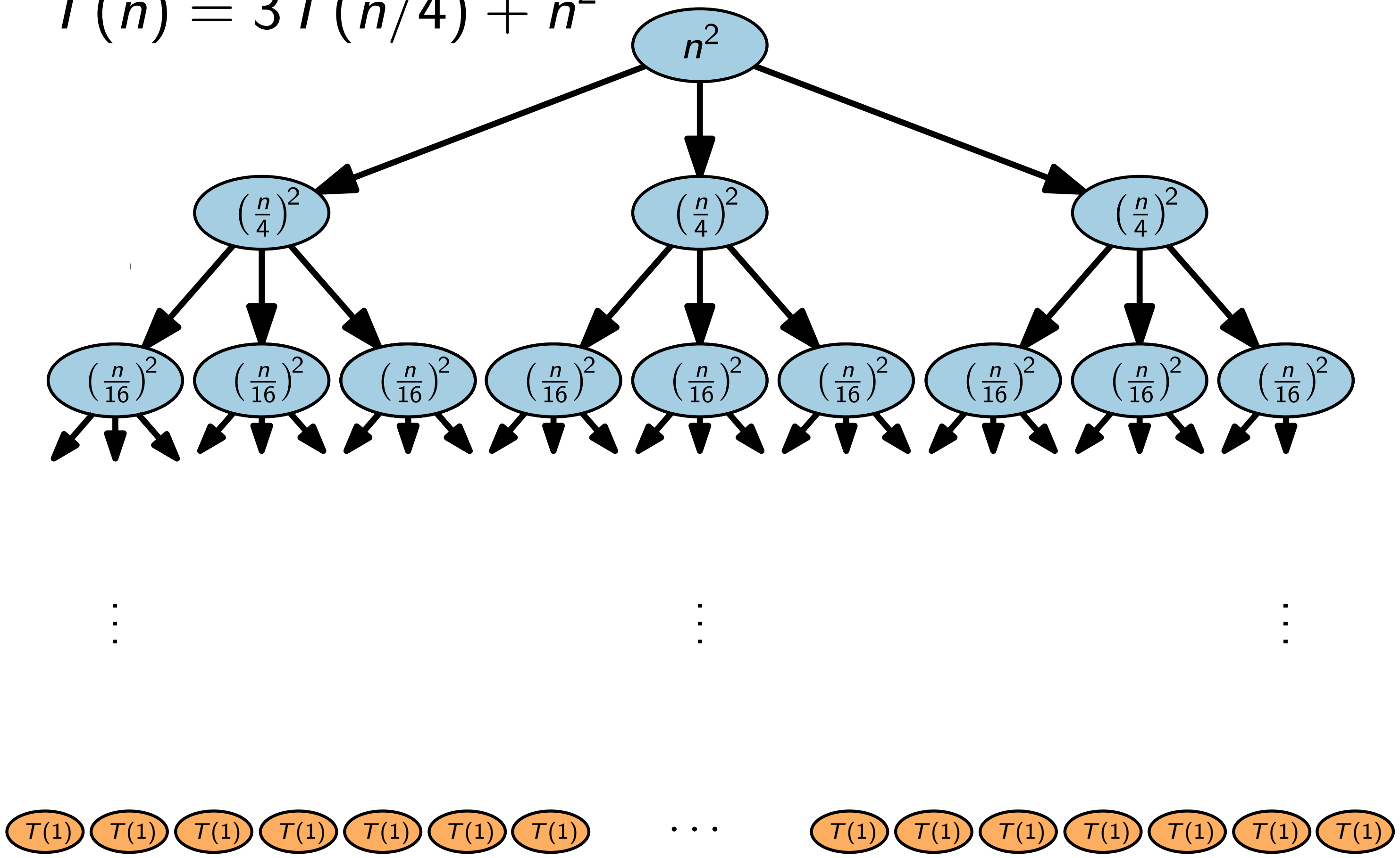
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	

II) Rekursionsbaummethode

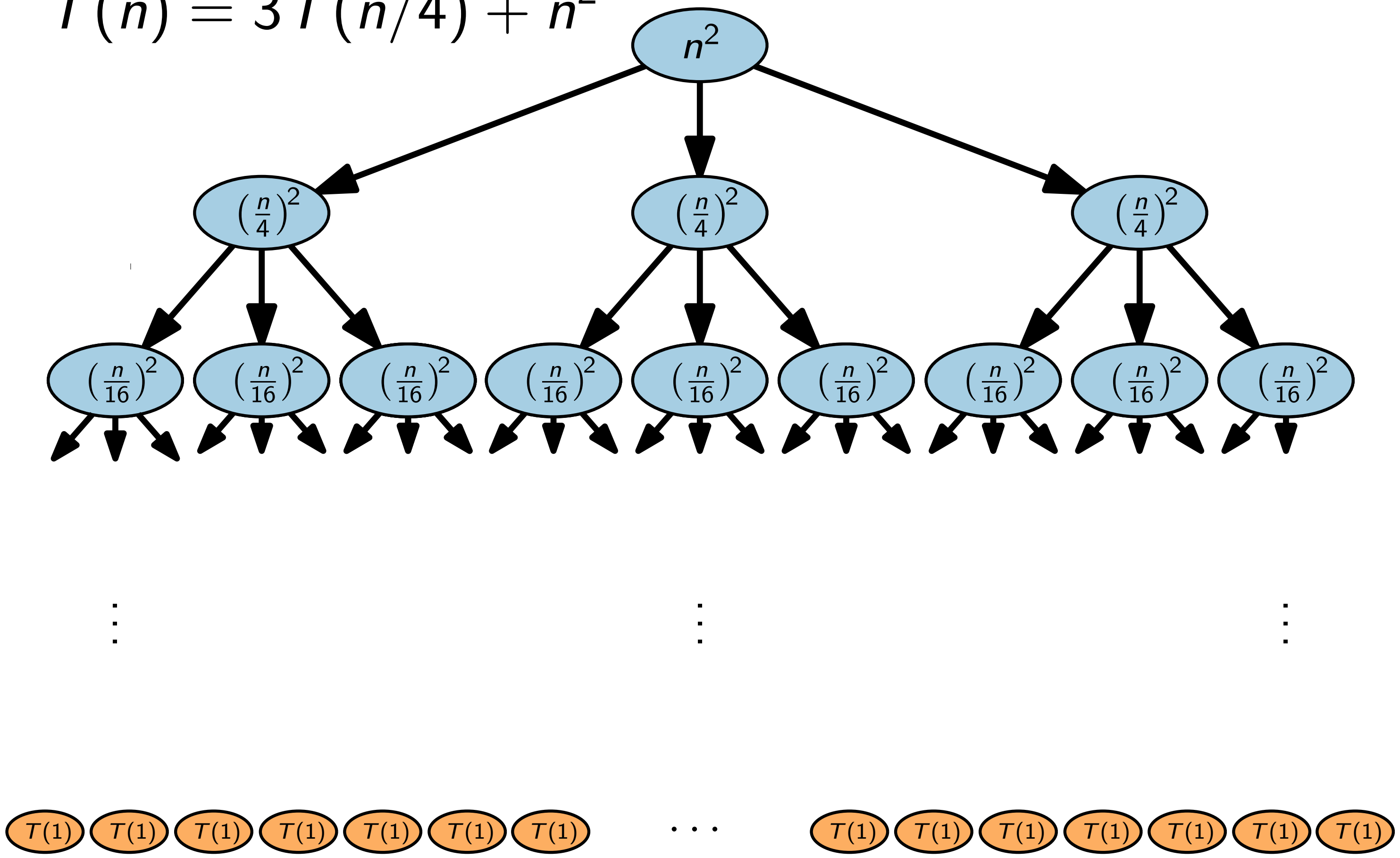
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$

II) Rekursionsbaummethode

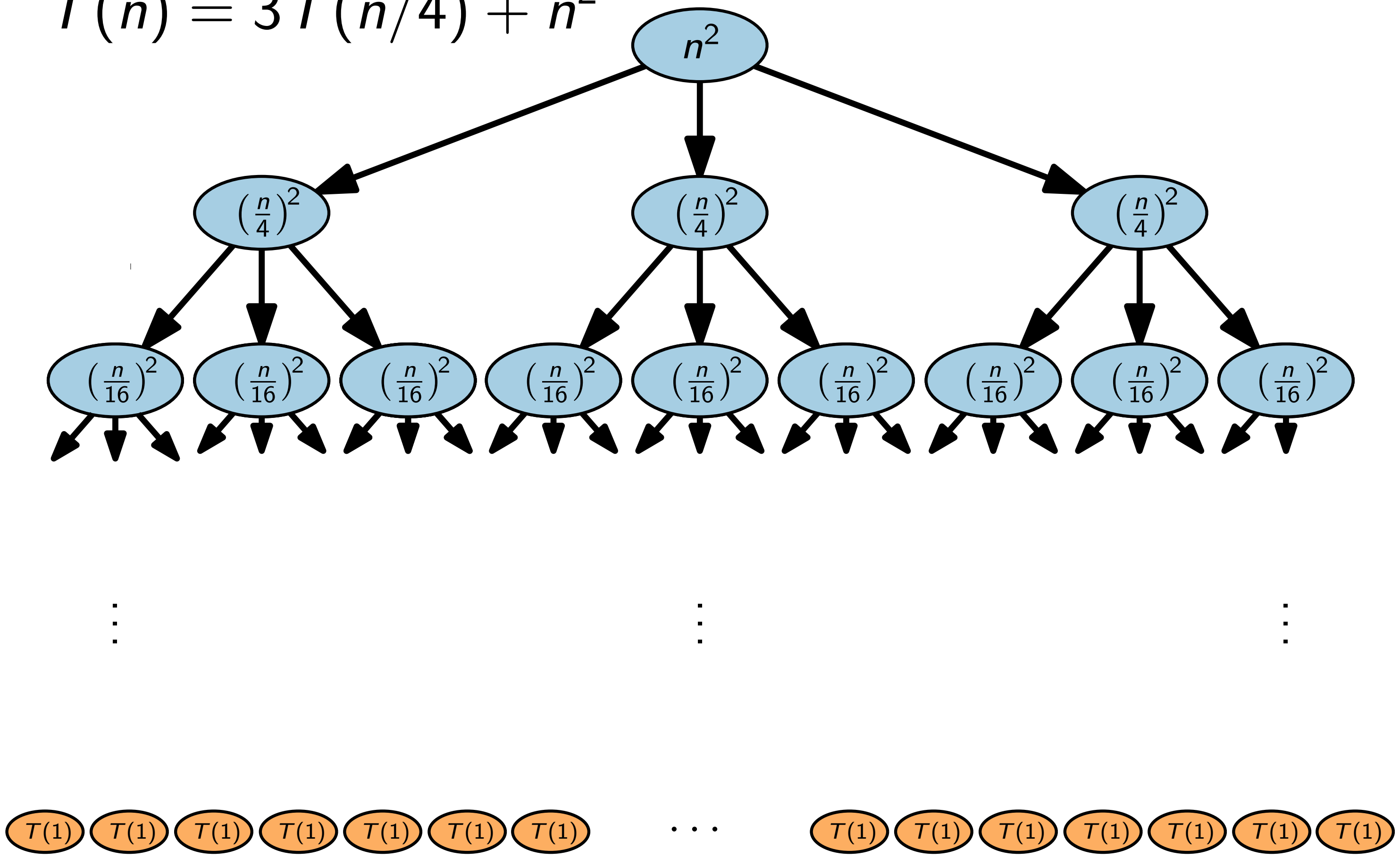
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2		

II) Rekursionsbaummethode

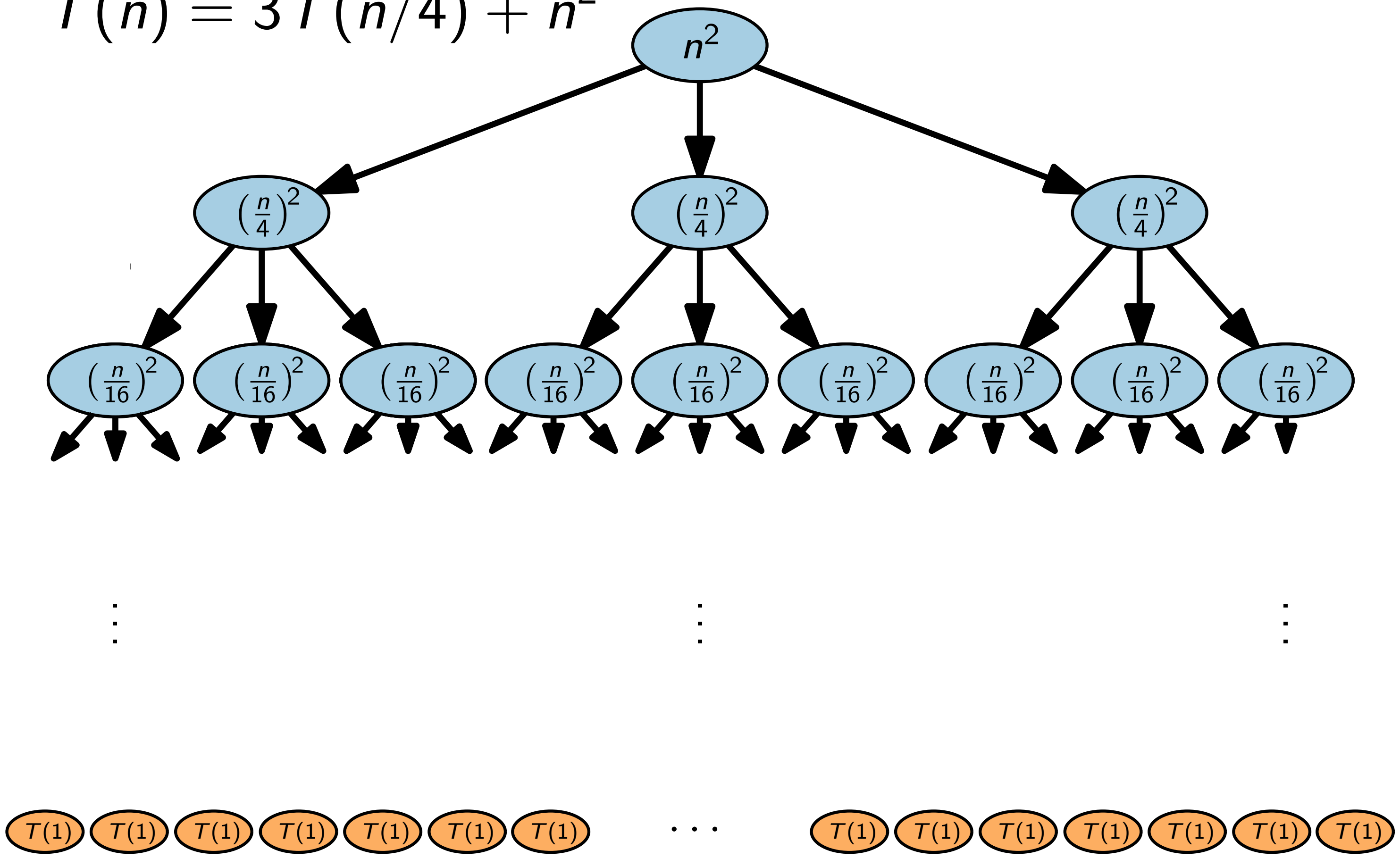
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	

II) Rekursionsbaummethode

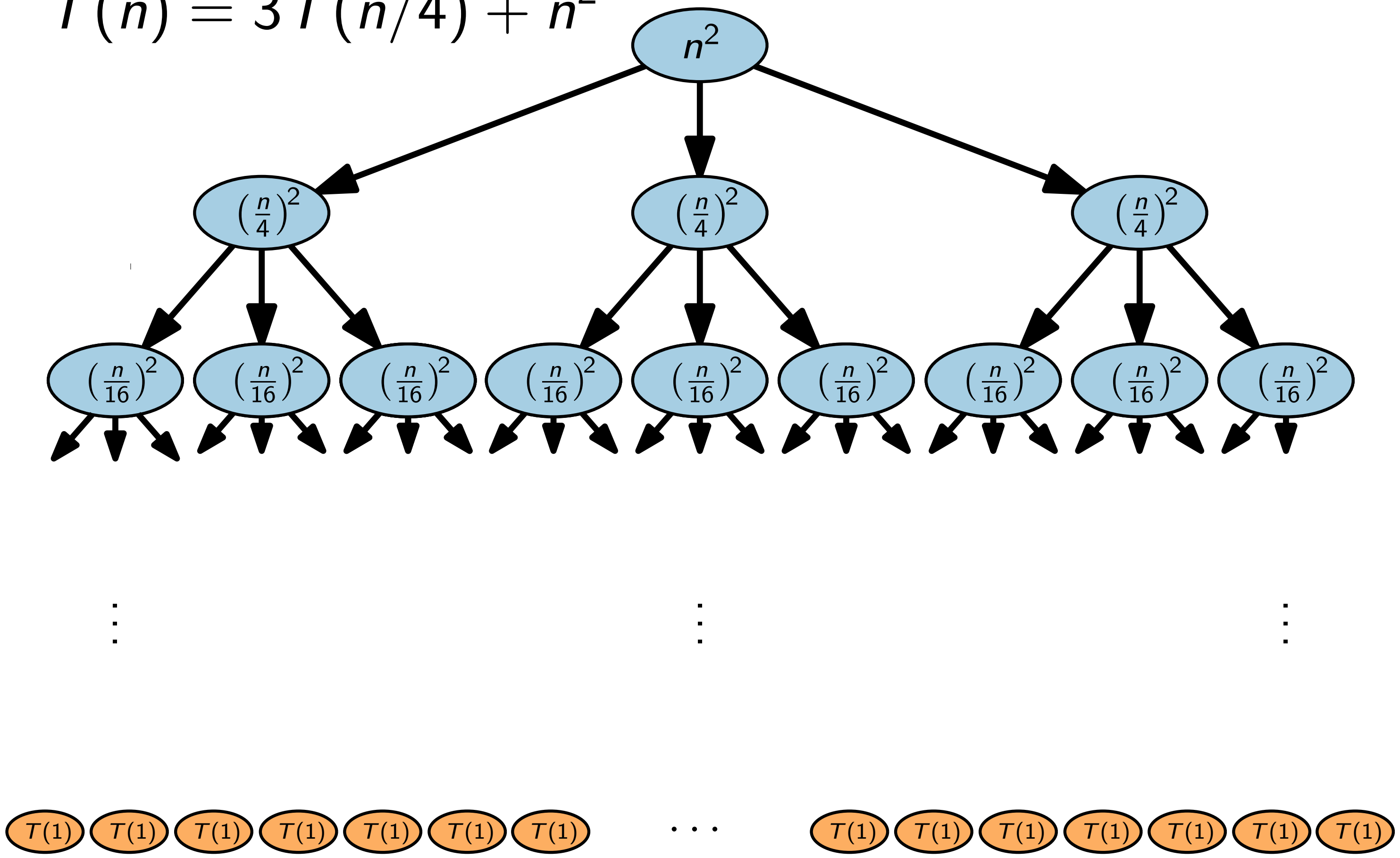
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$

II) Rekursionsbaummethode

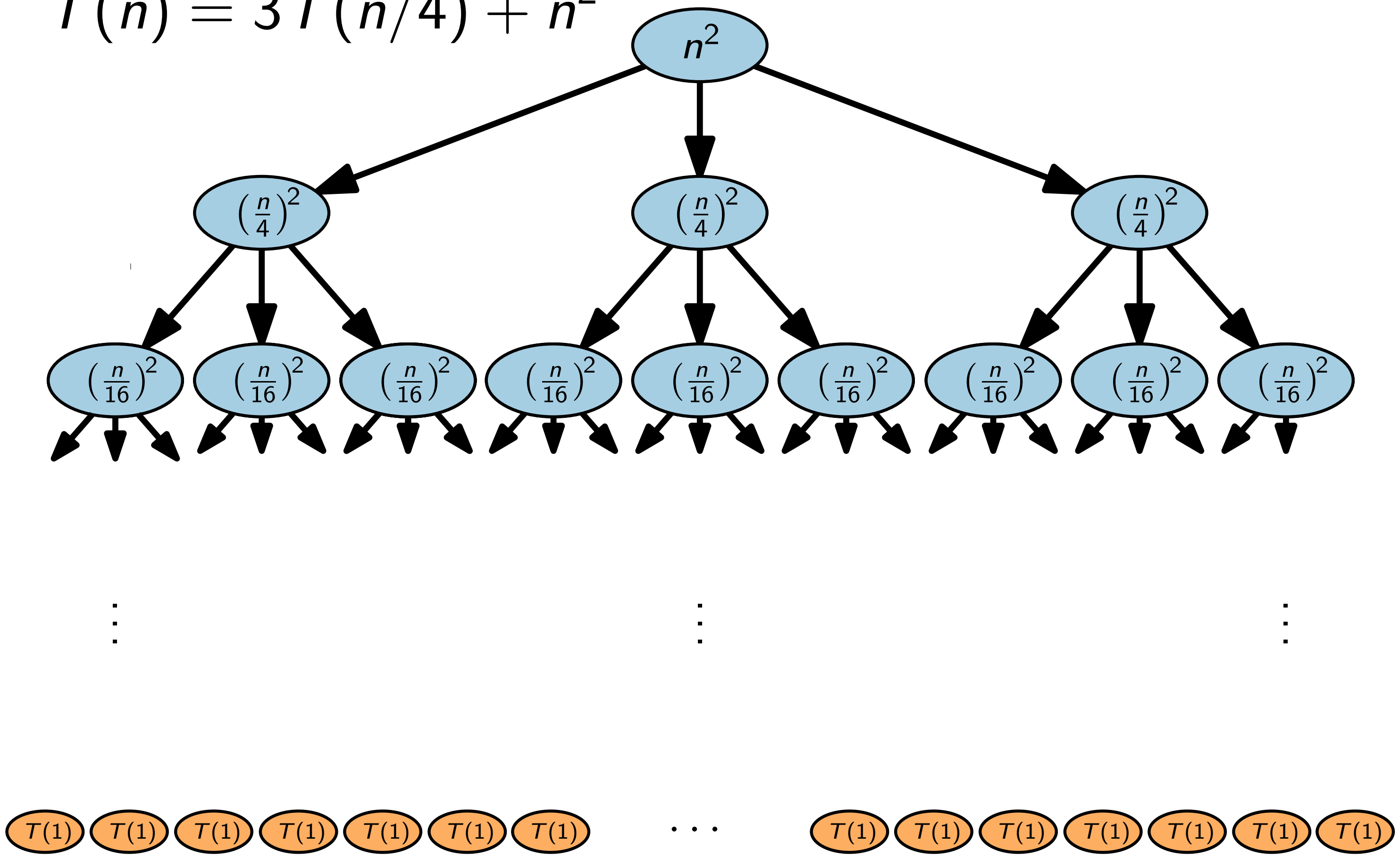
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$		
i		

II) Rekursionsbaummethode

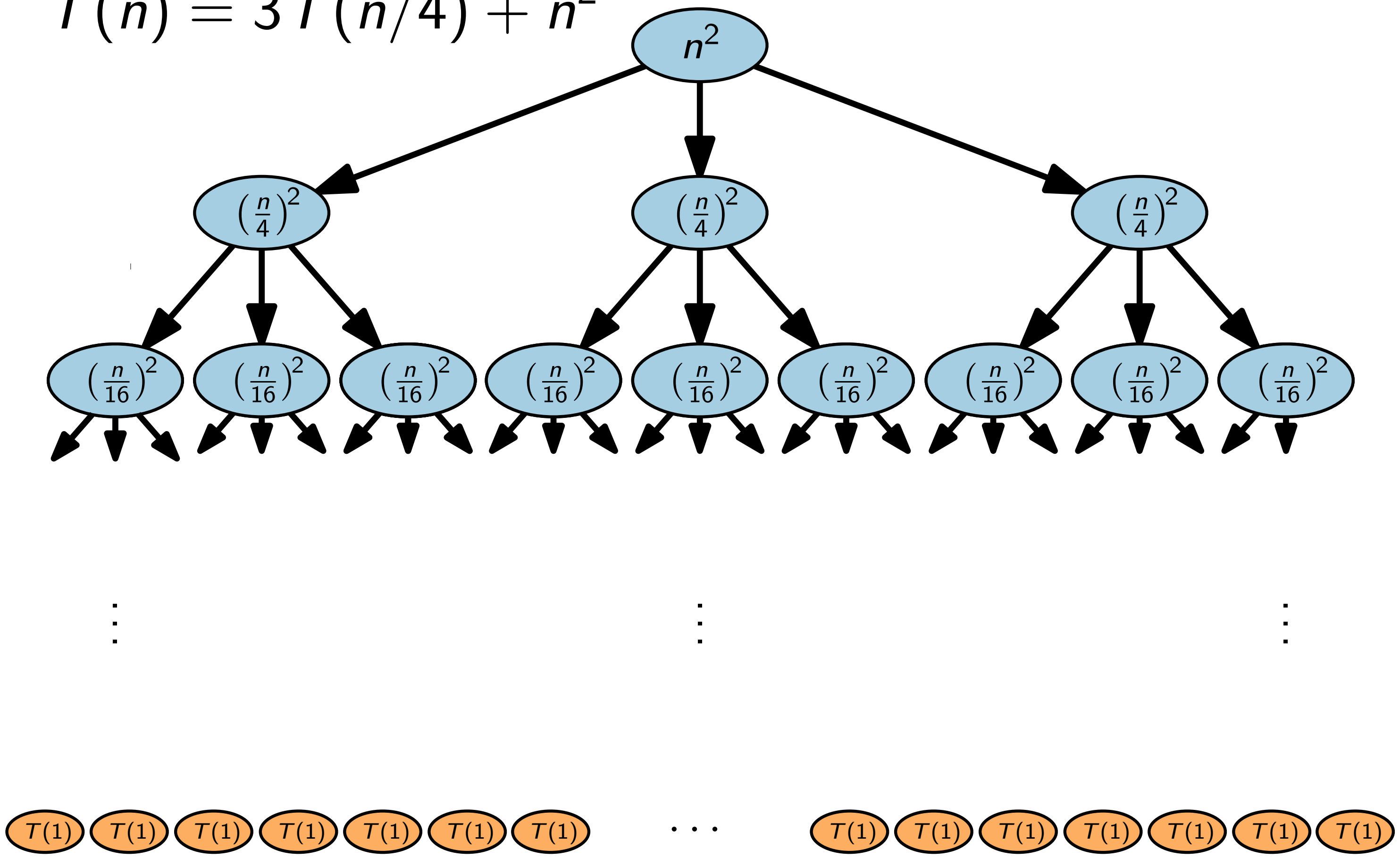
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	
i	3^i	

II) Rekursionsbaummethode

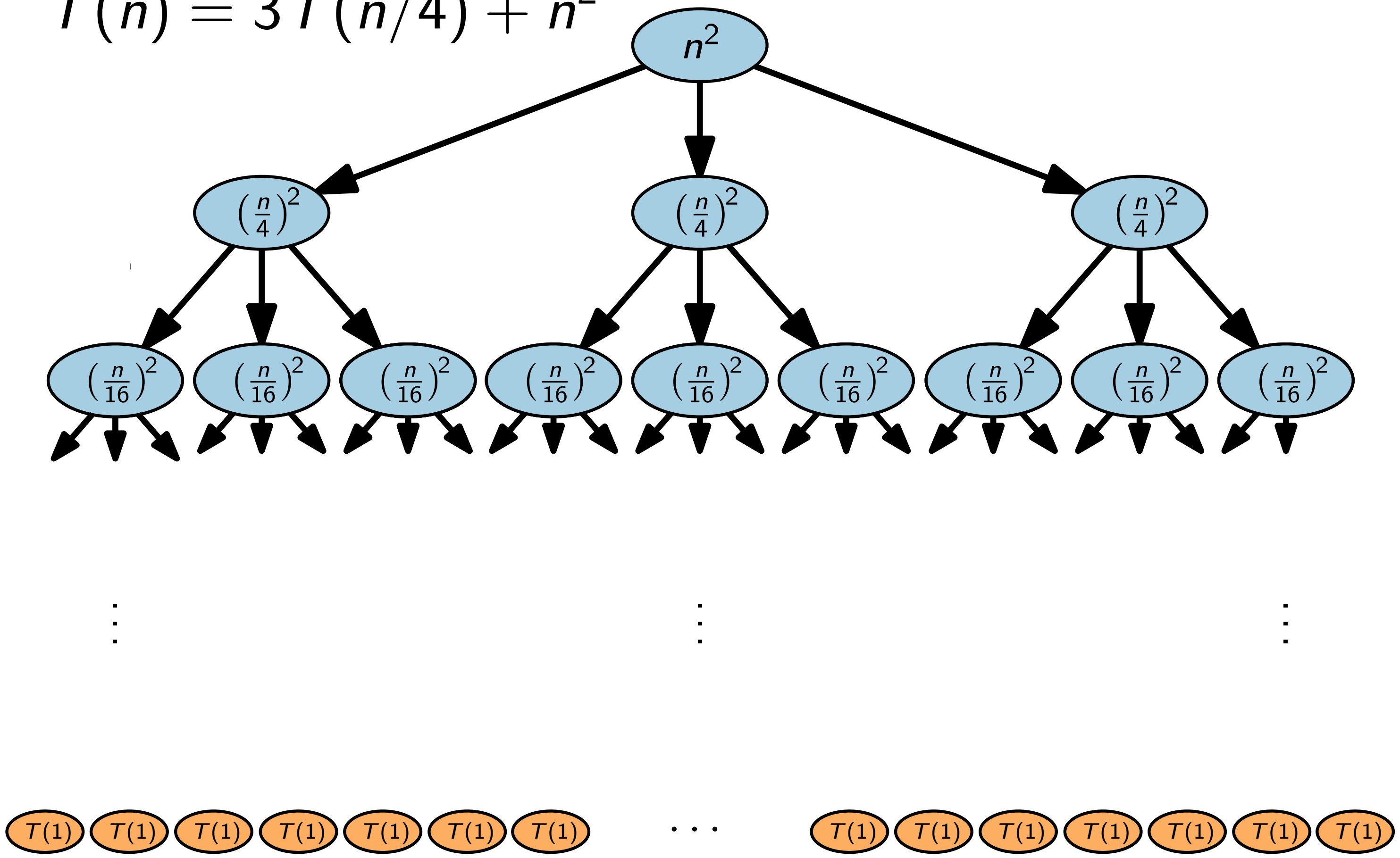
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$

II) Rekursionsbaummethode

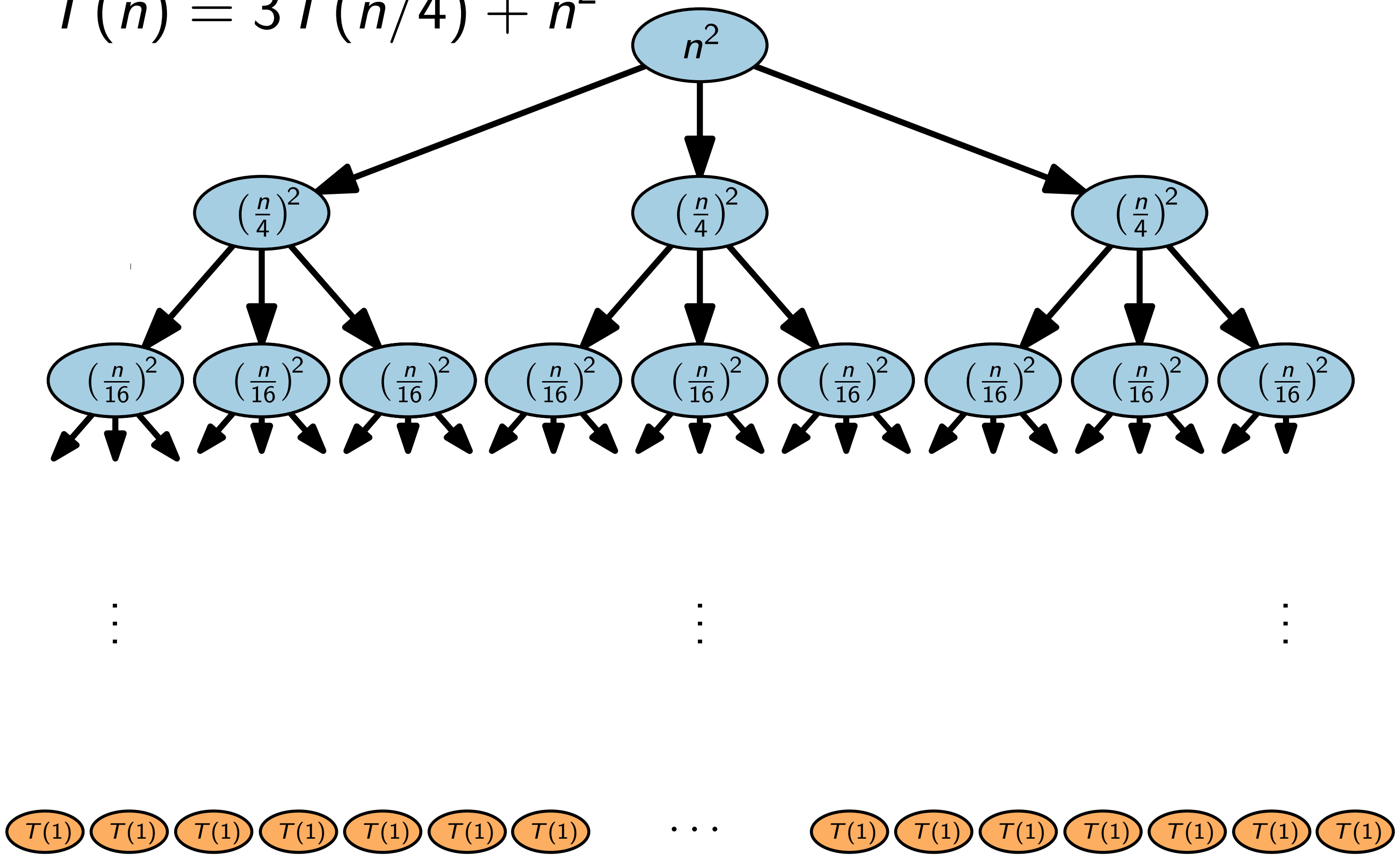
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$		

II) Rekursionsbaummethode

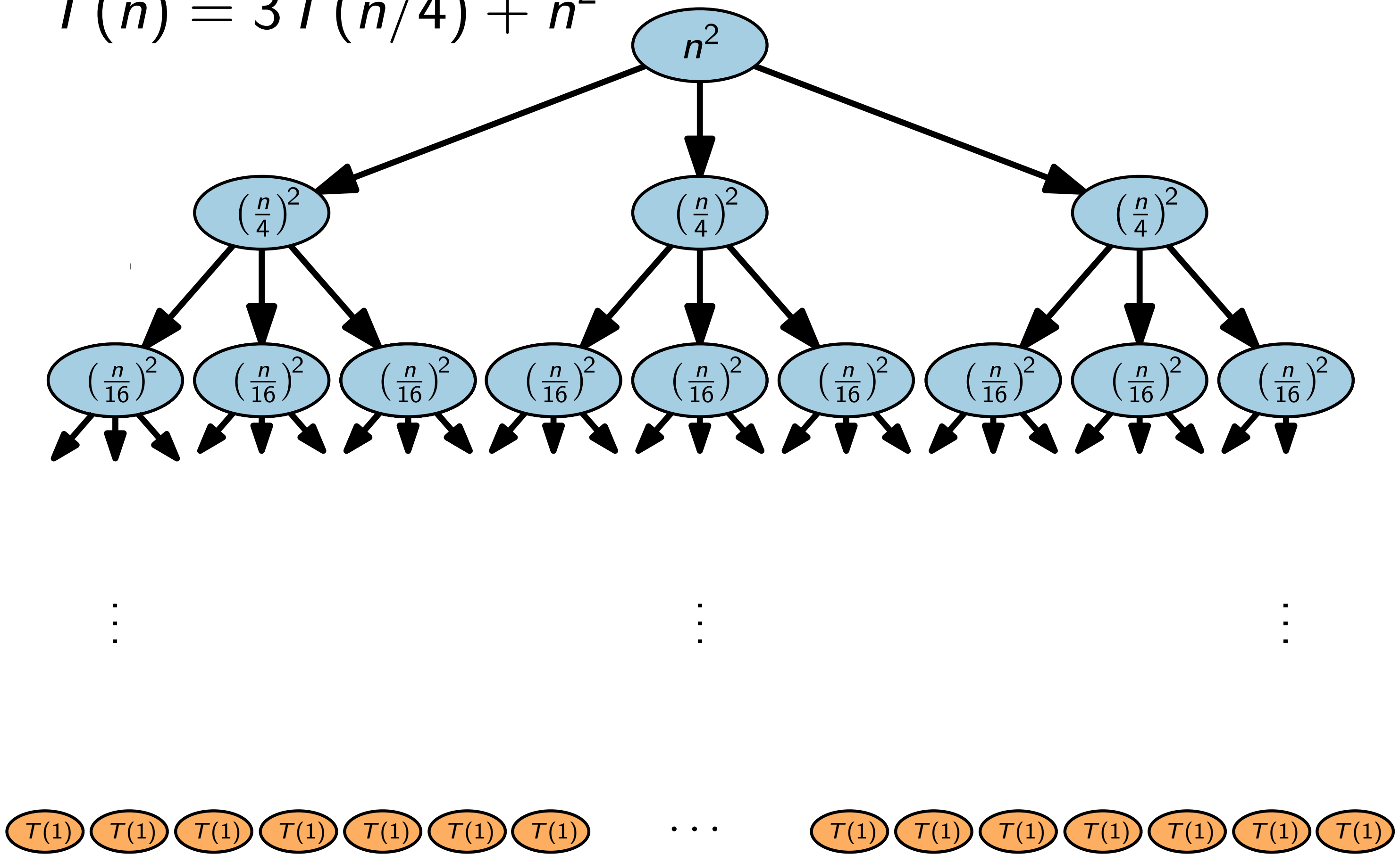
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$		
$\log_4 n$		

II) Rekursionsbaummethode

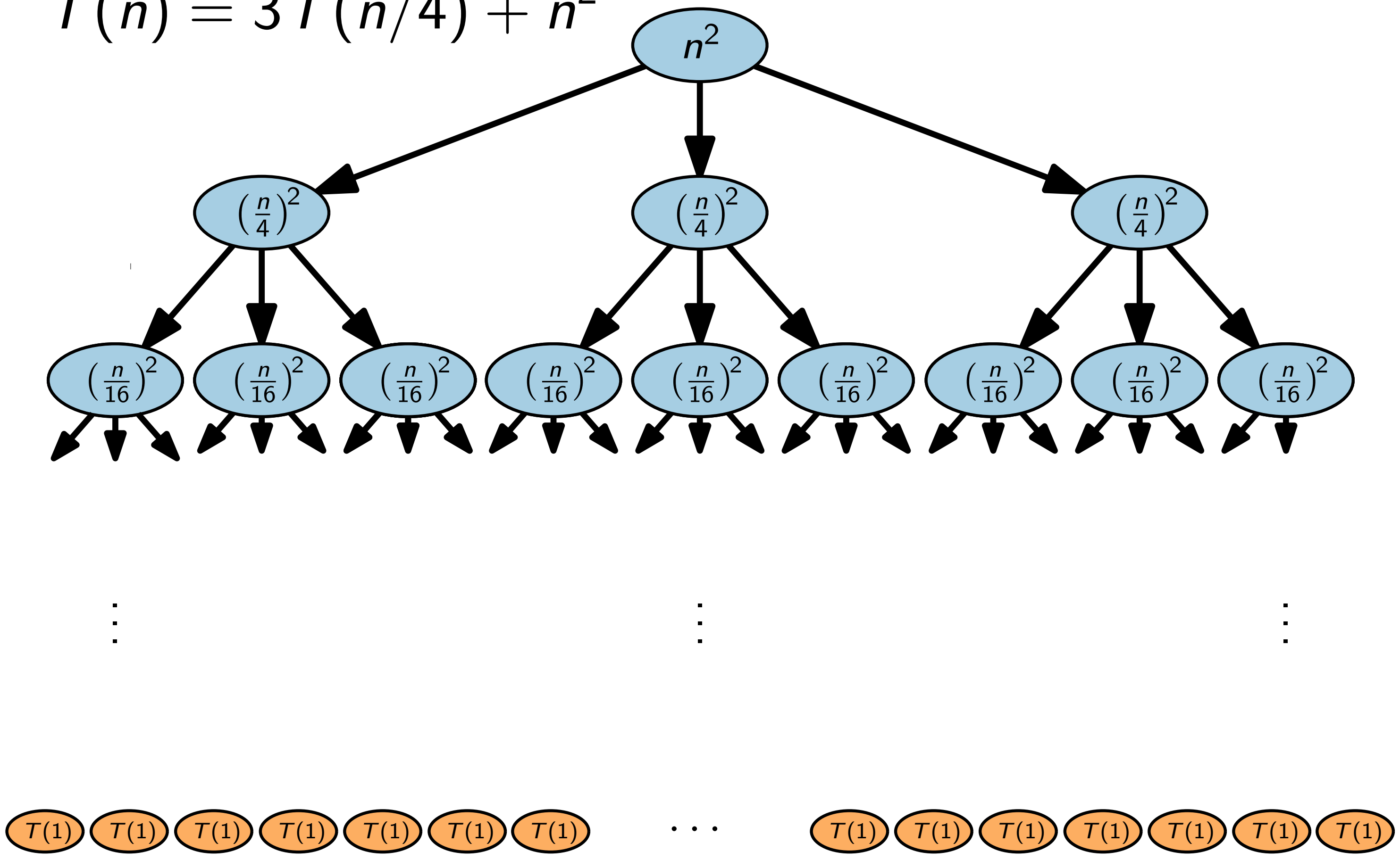
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$	

II) Rekursionsbaummethode

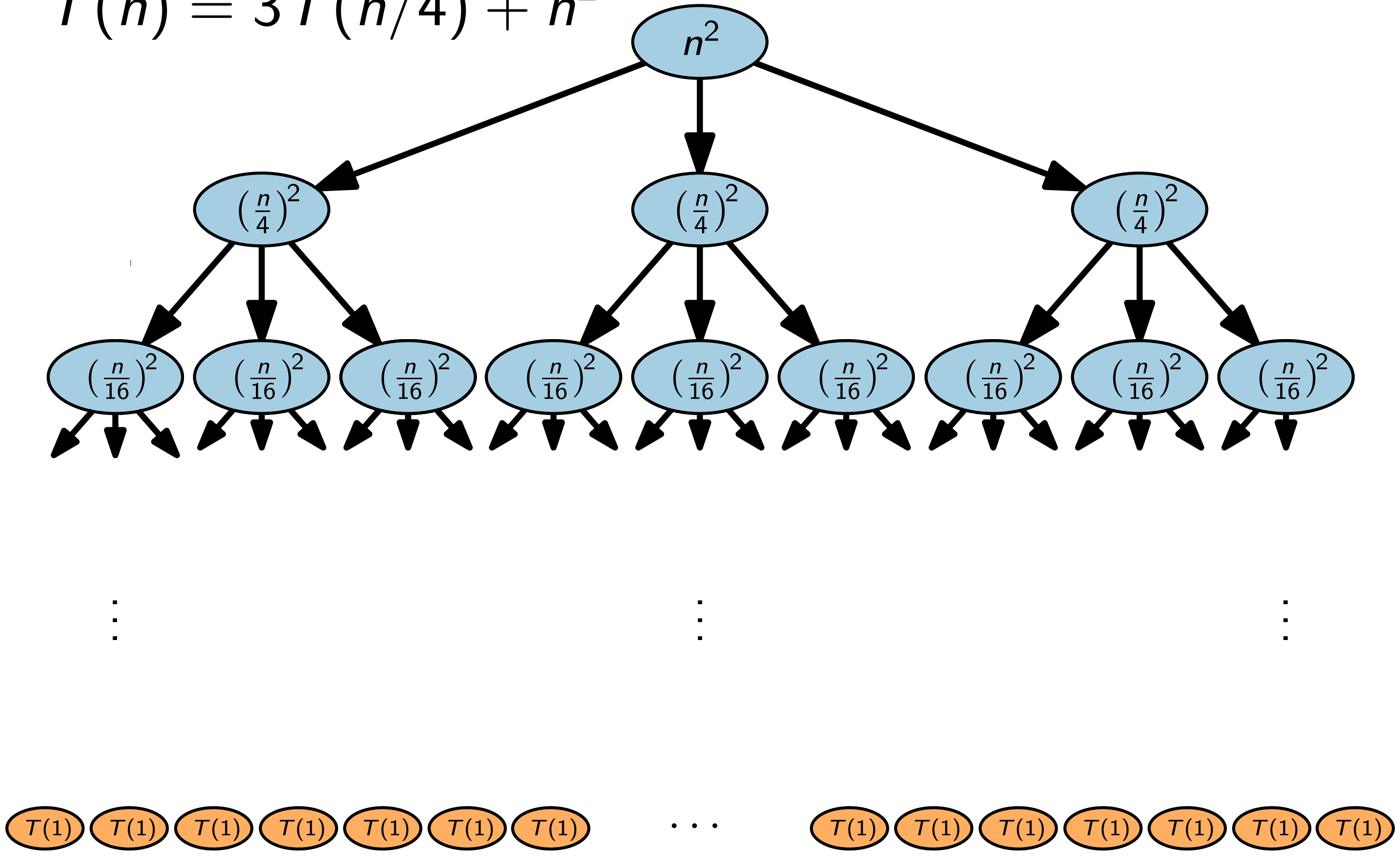
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$ $=$	

II) Rekursionsbaummethode

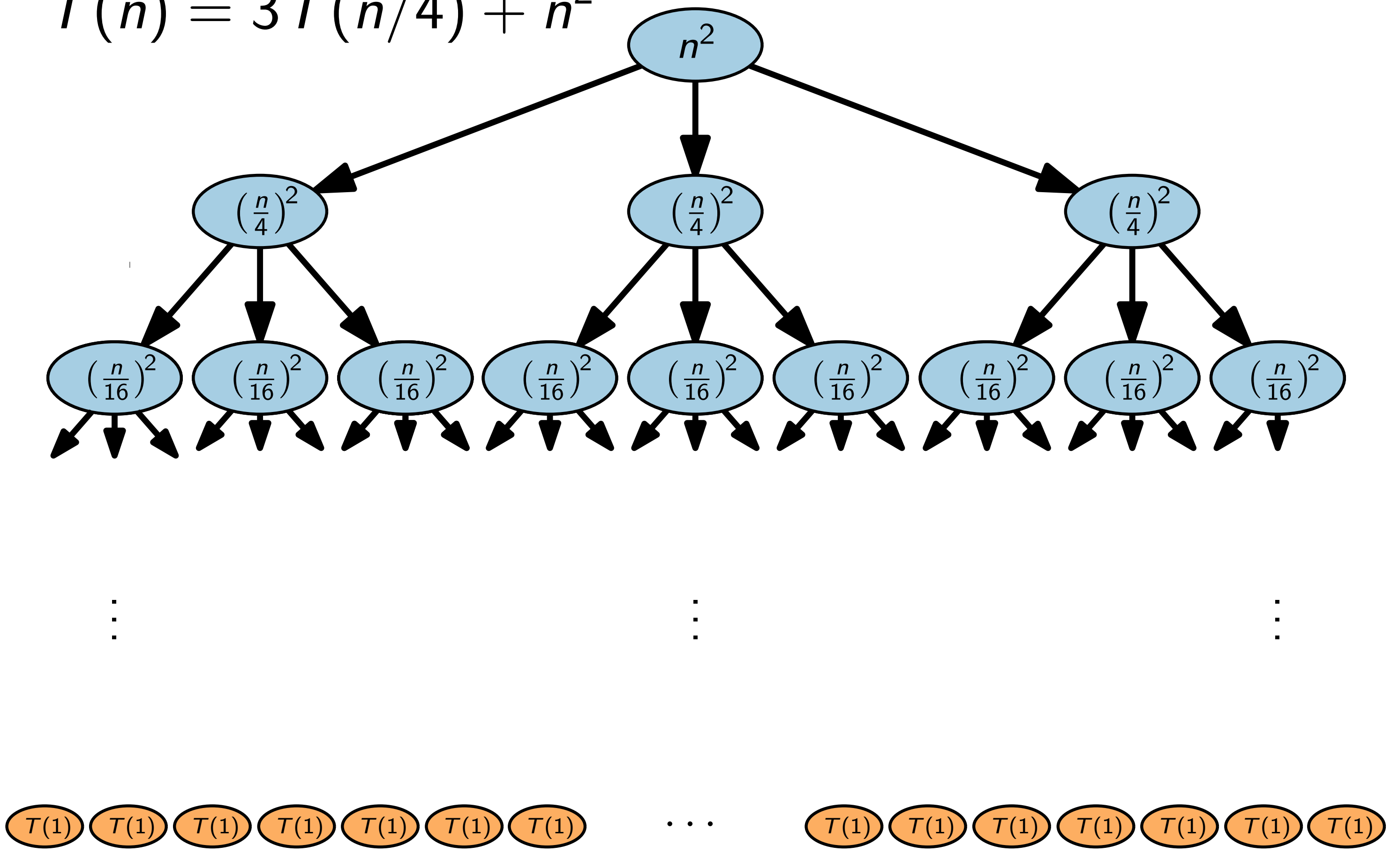
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	

II) Rekursionsbaummethode

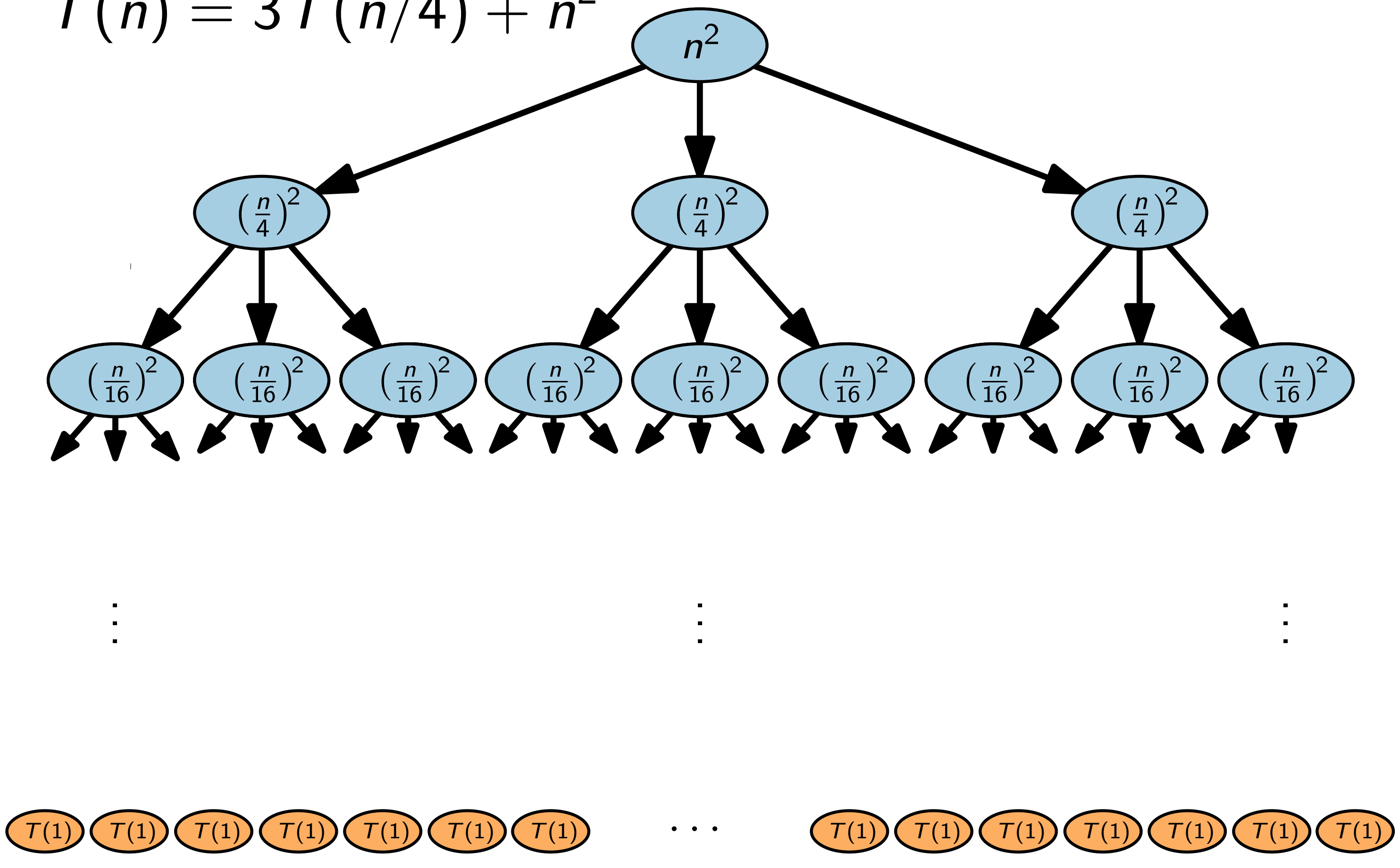
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$

II) Rekursionsbaummethode

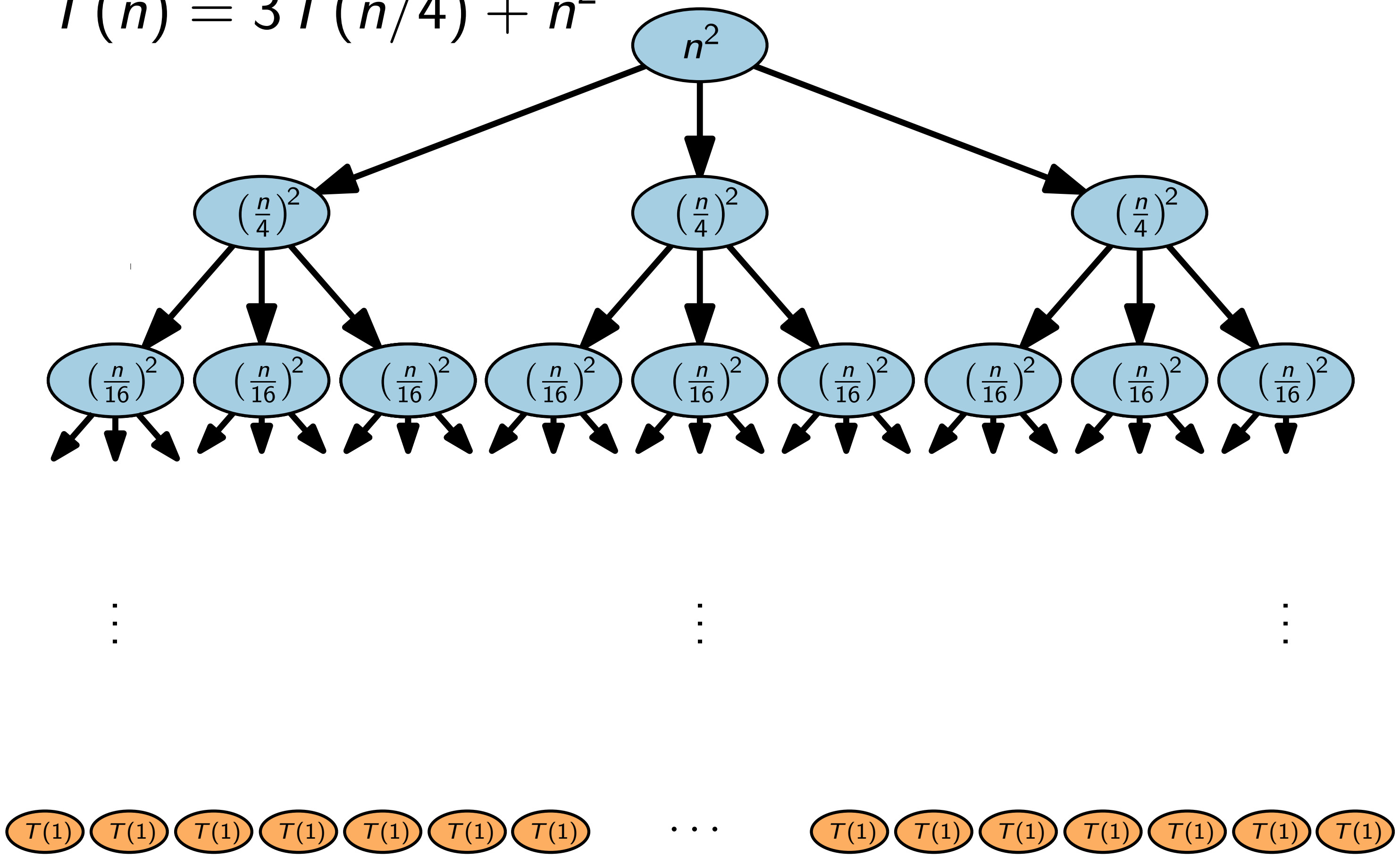
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$

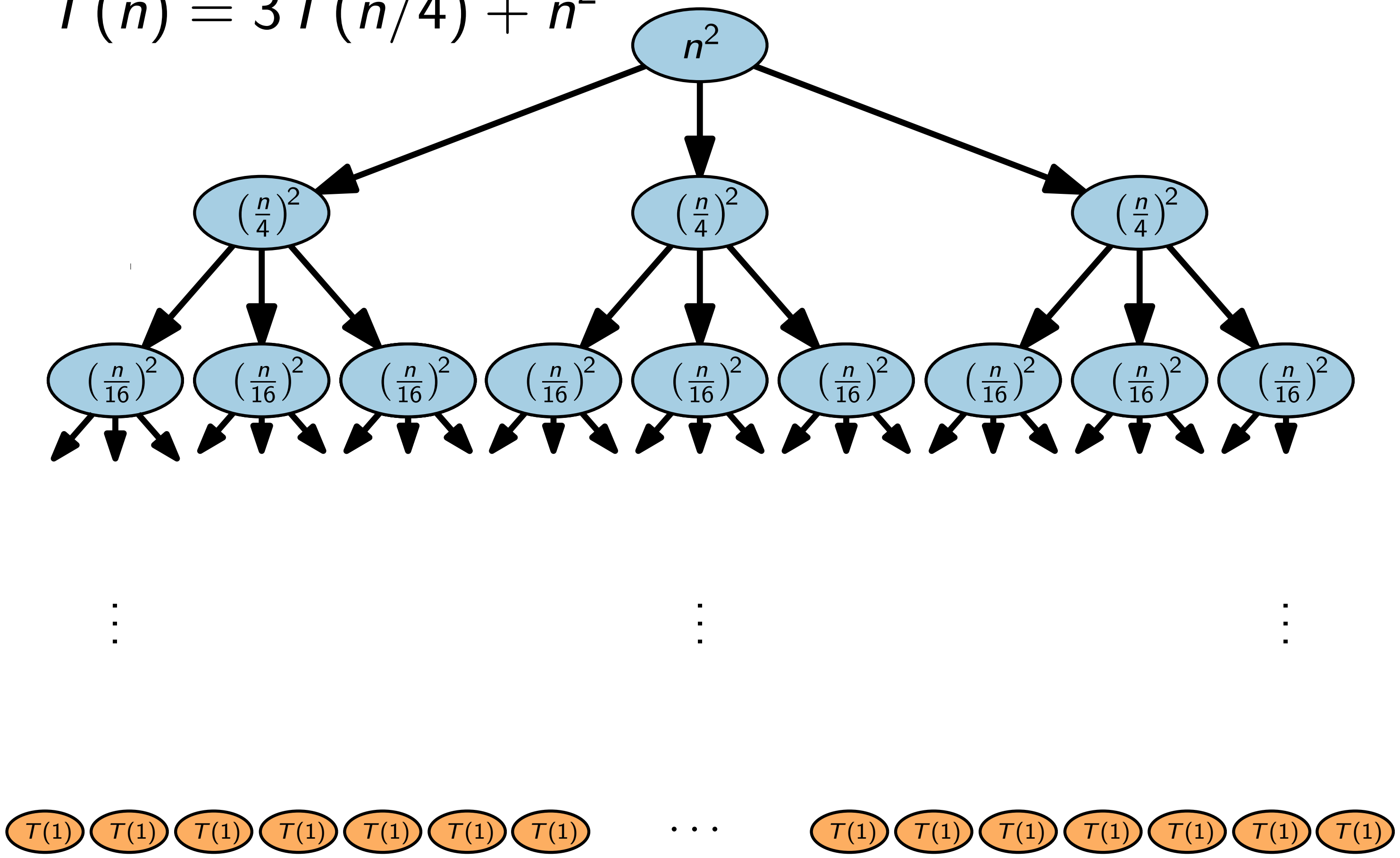


lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

$\Rightarrow T(n) =$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



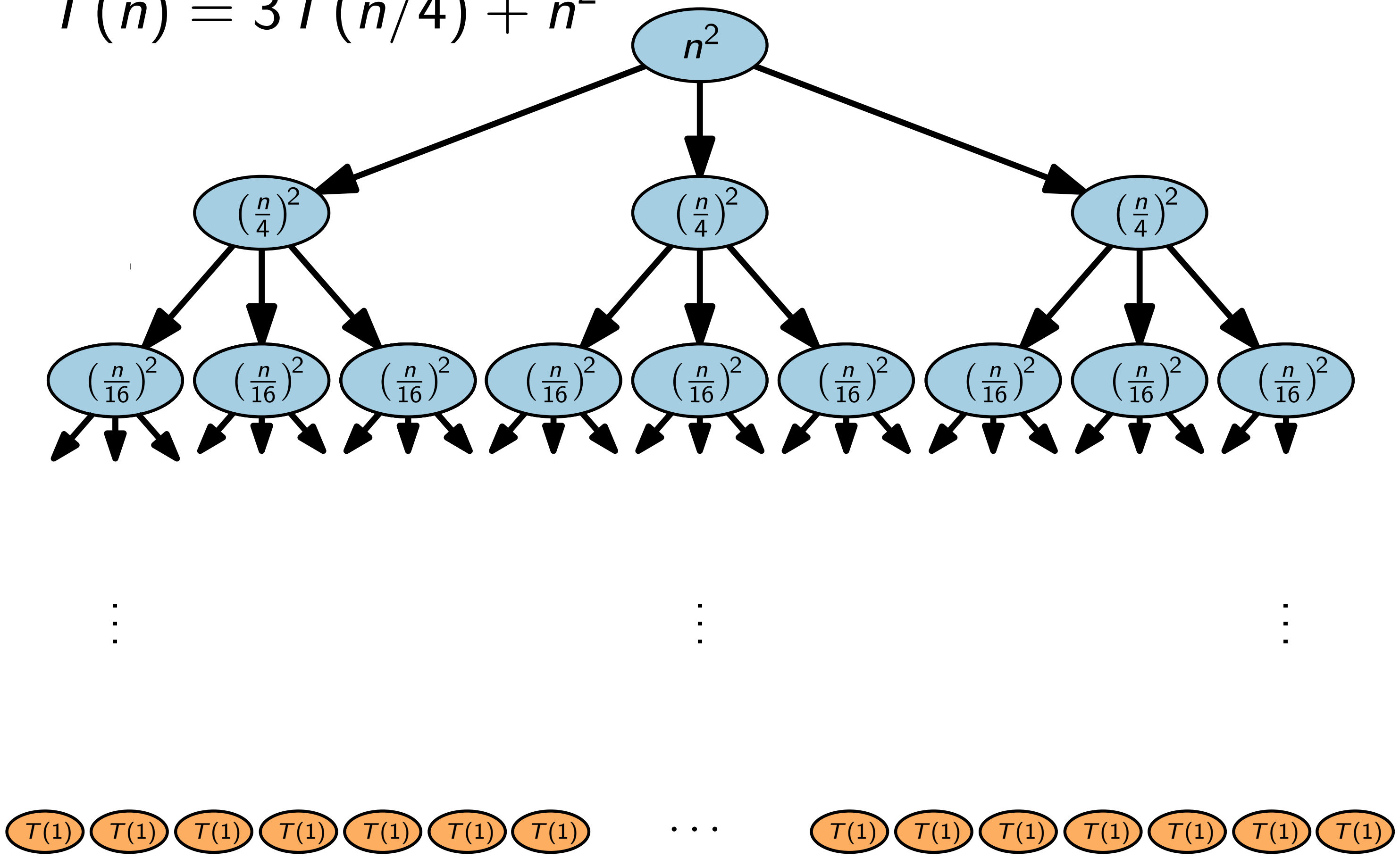
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

unterste Ebene andere Ebenen

$\Rightarrow T(n) = \boxed{} + \boxed{}$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



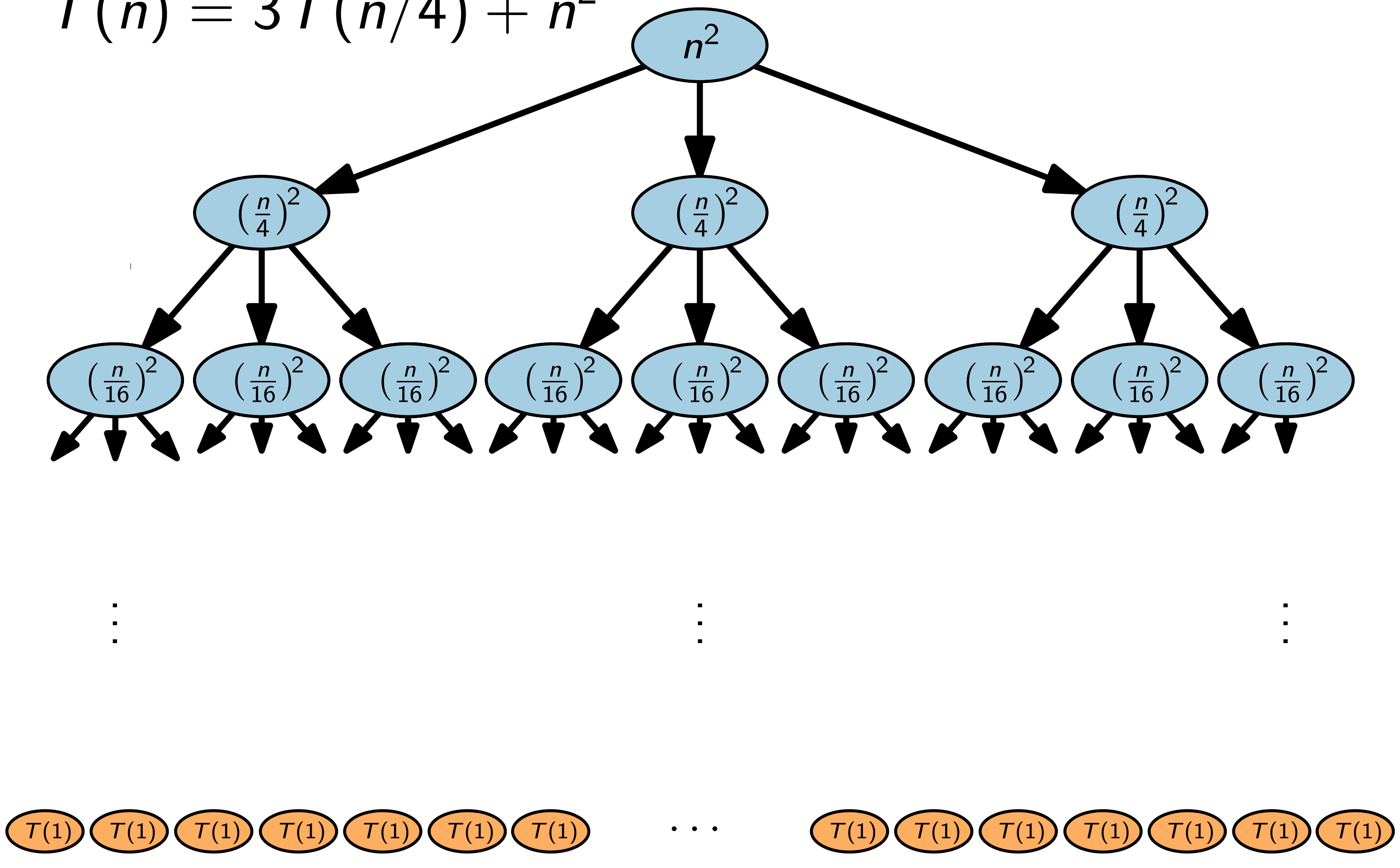
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + $$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



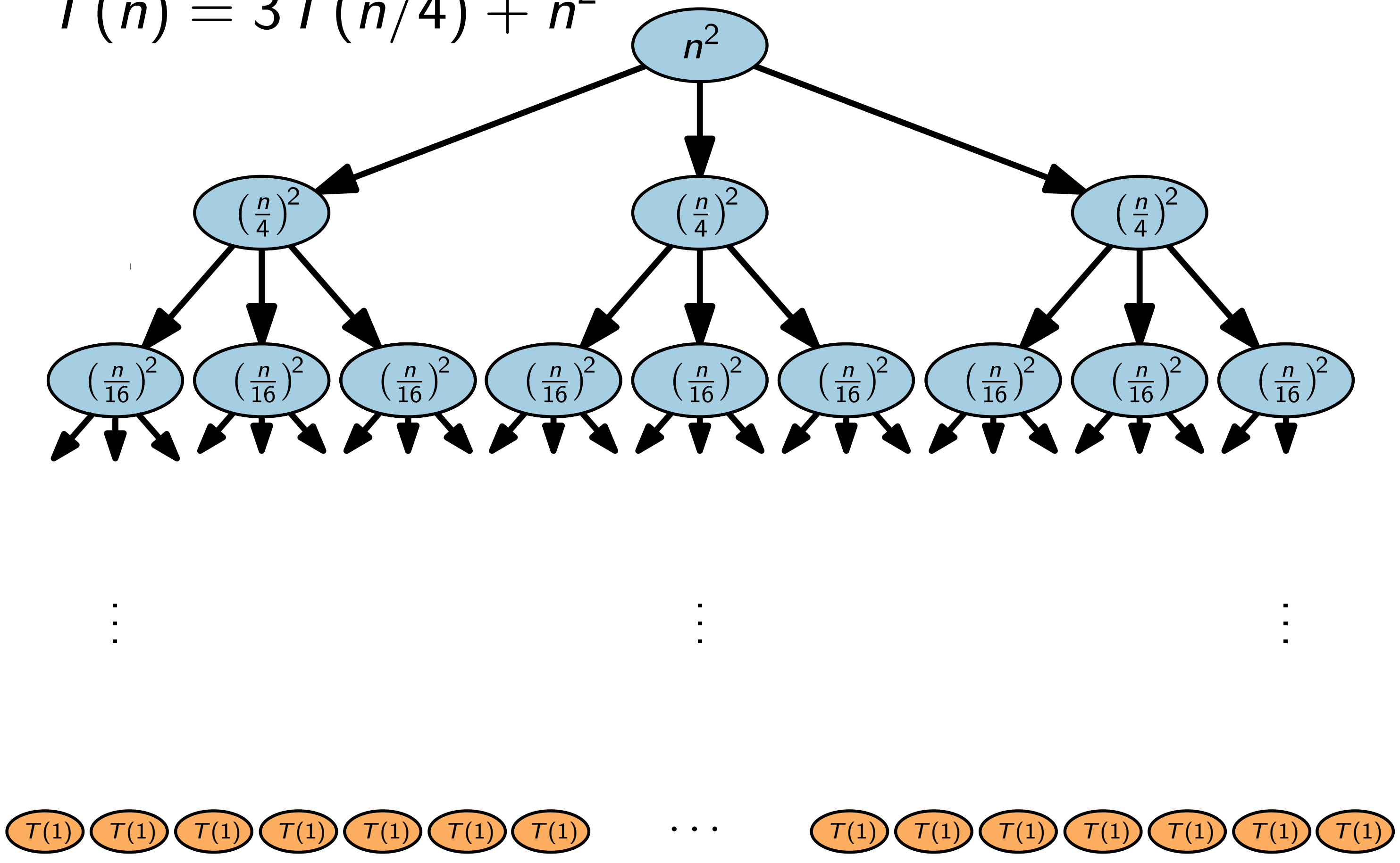
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

unterste Ebene — andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



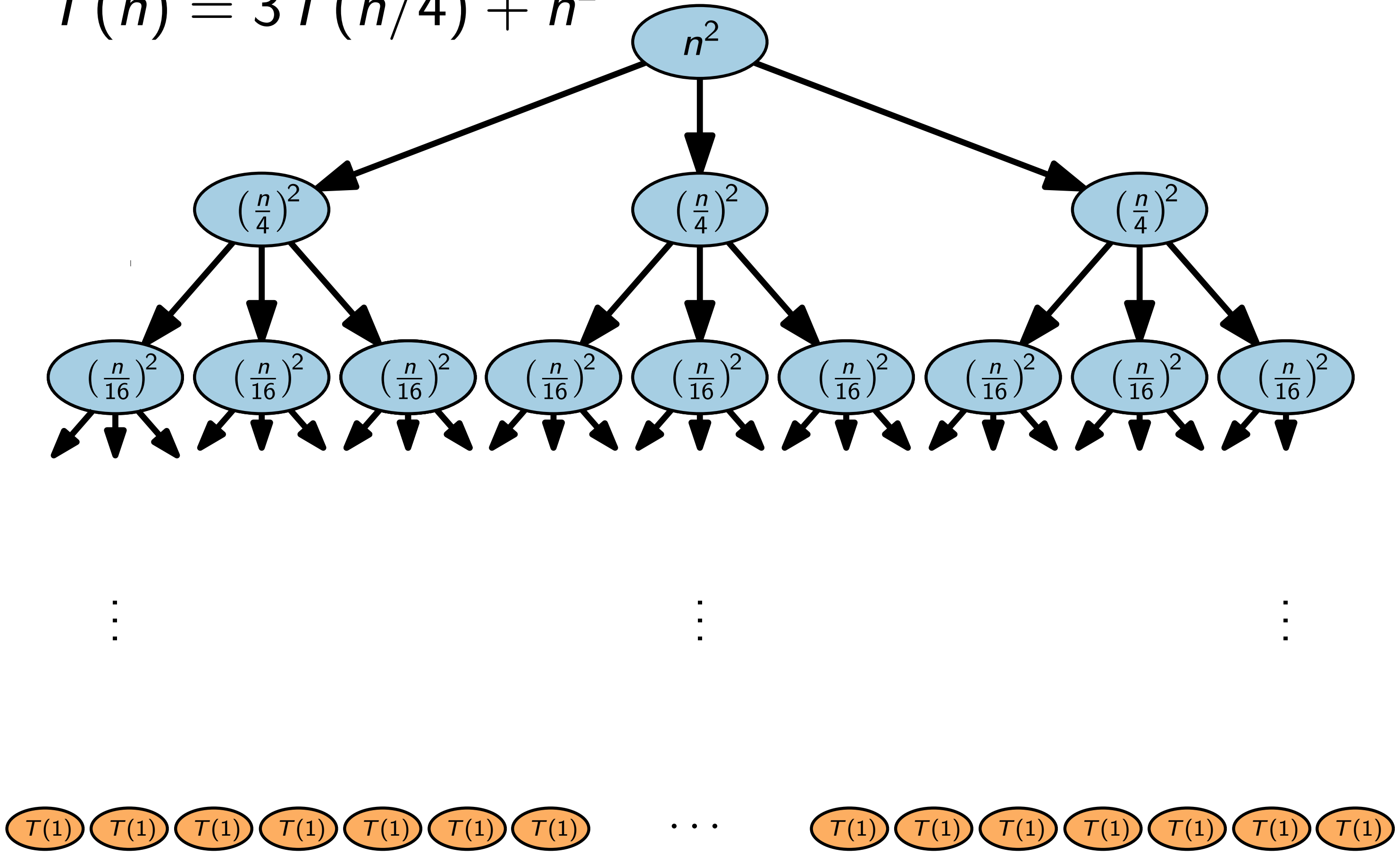
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

unterste Ebene   andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = \underbrace{n^{\log_4 3}}_{\text{unterste Ebene}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\tfrac{3}{16}\right)^i n^2}_{\text{andere Ebenen}} \leq \quad n^{0{,}793} +$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



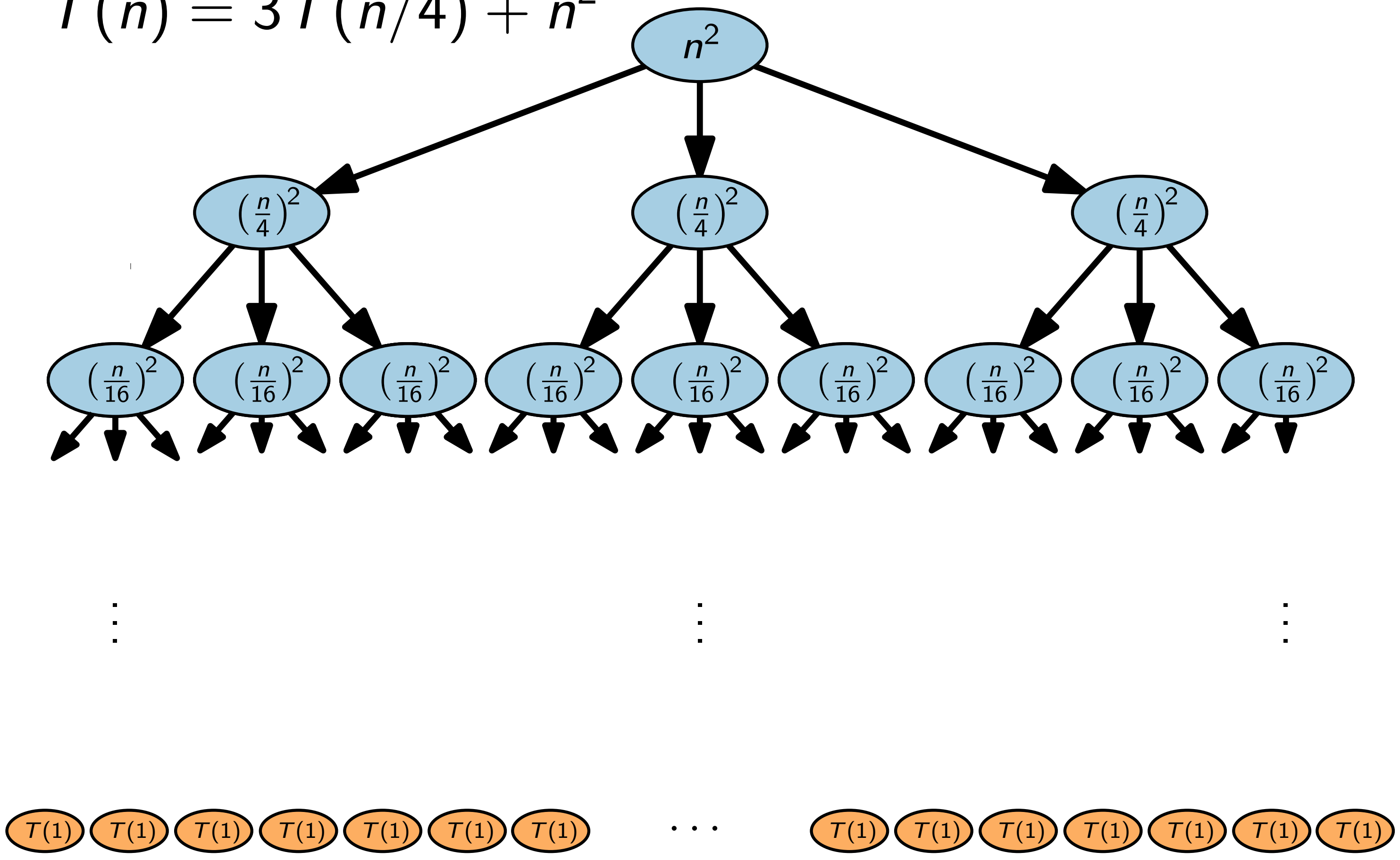
lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

unterste Ebene   andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = \underbrace{n^{\log_4 3}}_{\text{unterste Ebene}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2}_{\text{andere Ebenen}} \leq \quad n^{0{,}793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i =$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$

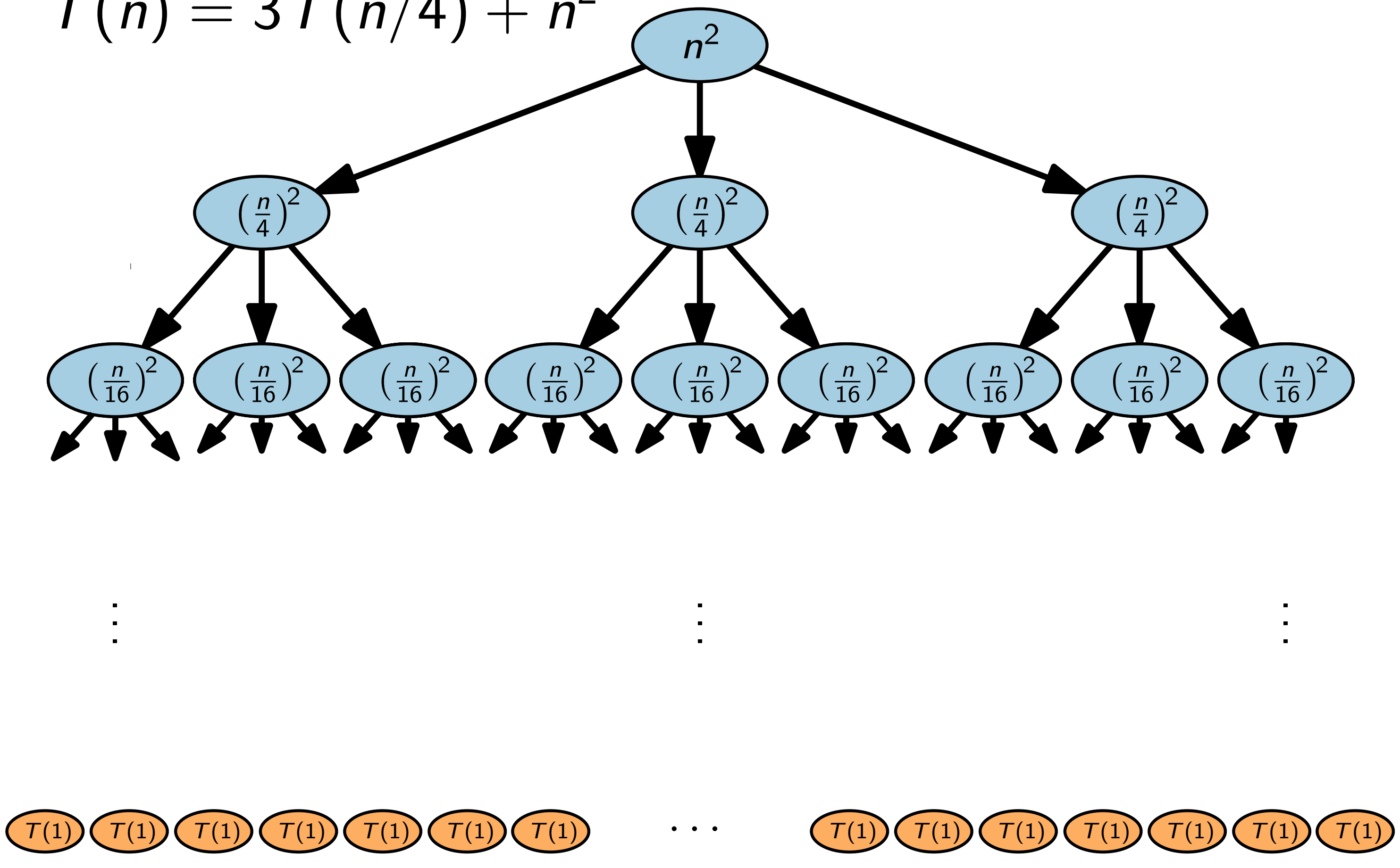


lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

$$\Rightarrow T(n) = \overbrace{n^{\log_4 3}}^{\text{unterste Ebene}} + \overbrace{\sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2}^{\text{andere Ebenen}} \leq \quad n^{0{,}793} + \; n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} =$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

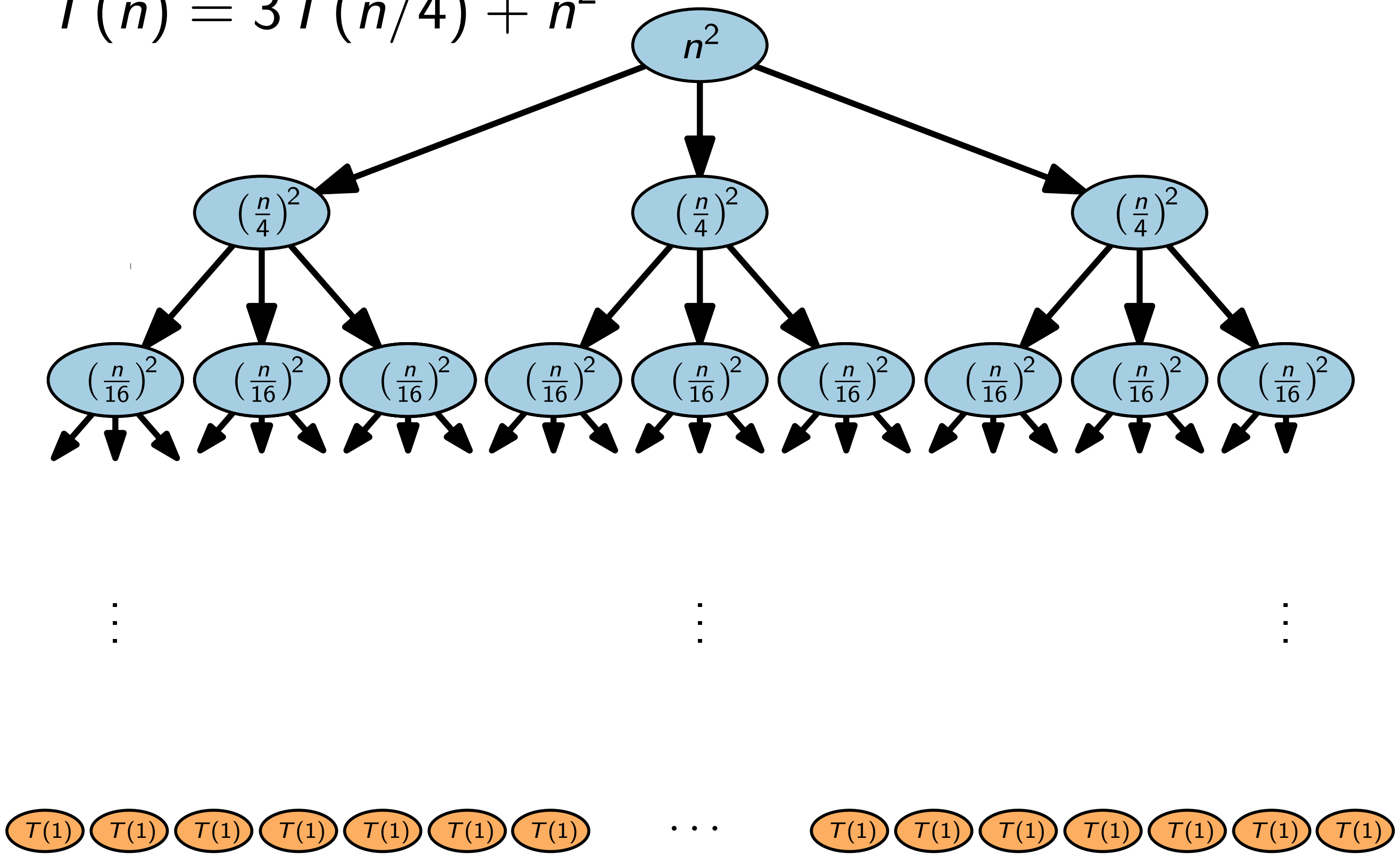
geometrische Reihe

unterste Ebene — andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} =$$

II) Rekursionsbaummethode

$$T(n) = 3T(n/4) + n^2$$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

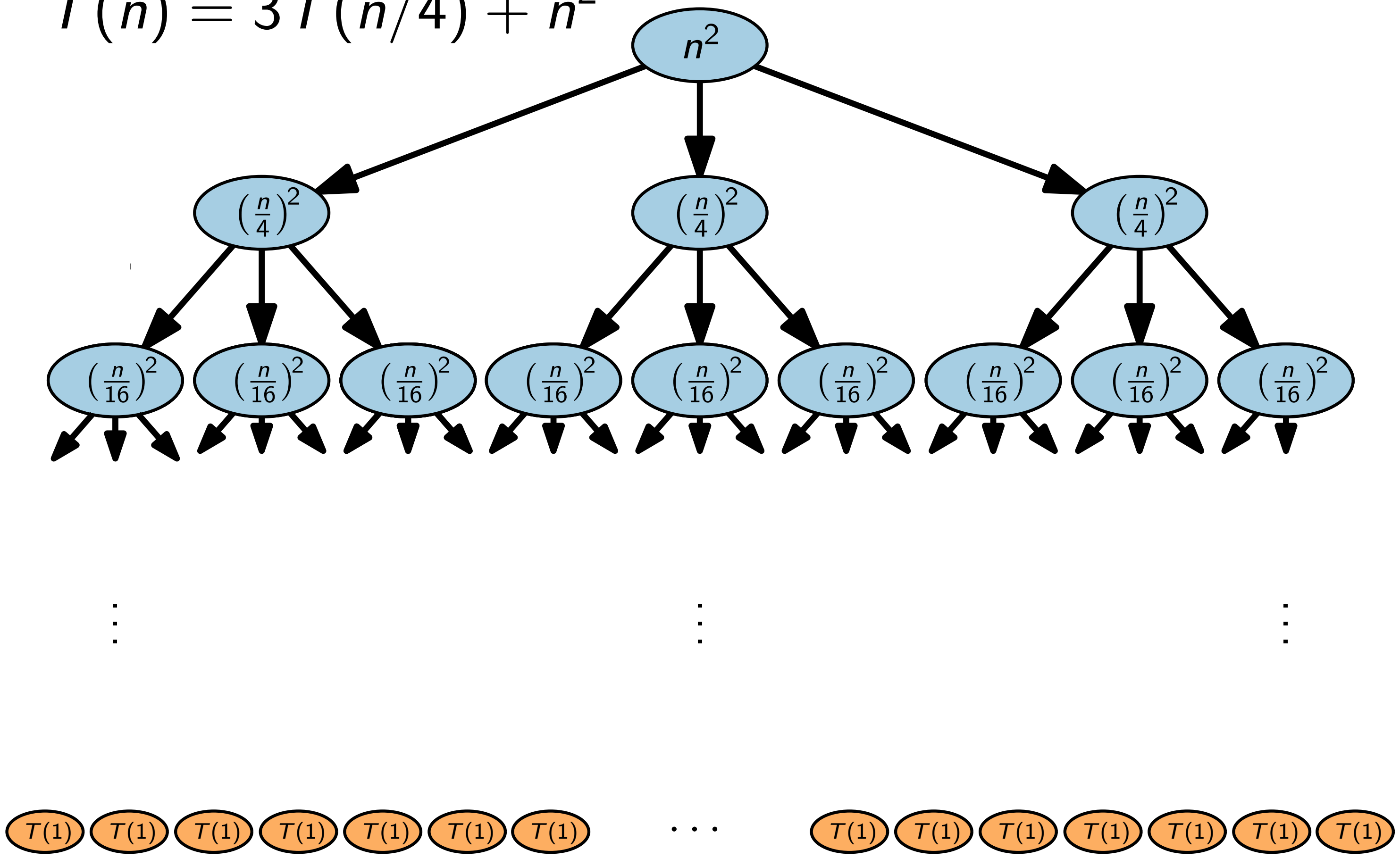
2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

$$\Rightarrow T(n) = \overbrace{n^{\log_4 3}}^{\text{unterste Ebene}} + \overbrace{\sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\tfrac{3}{16}\right)^i n^2}^{\text{andere Ebenen}} \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{16}\right)^i} =$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

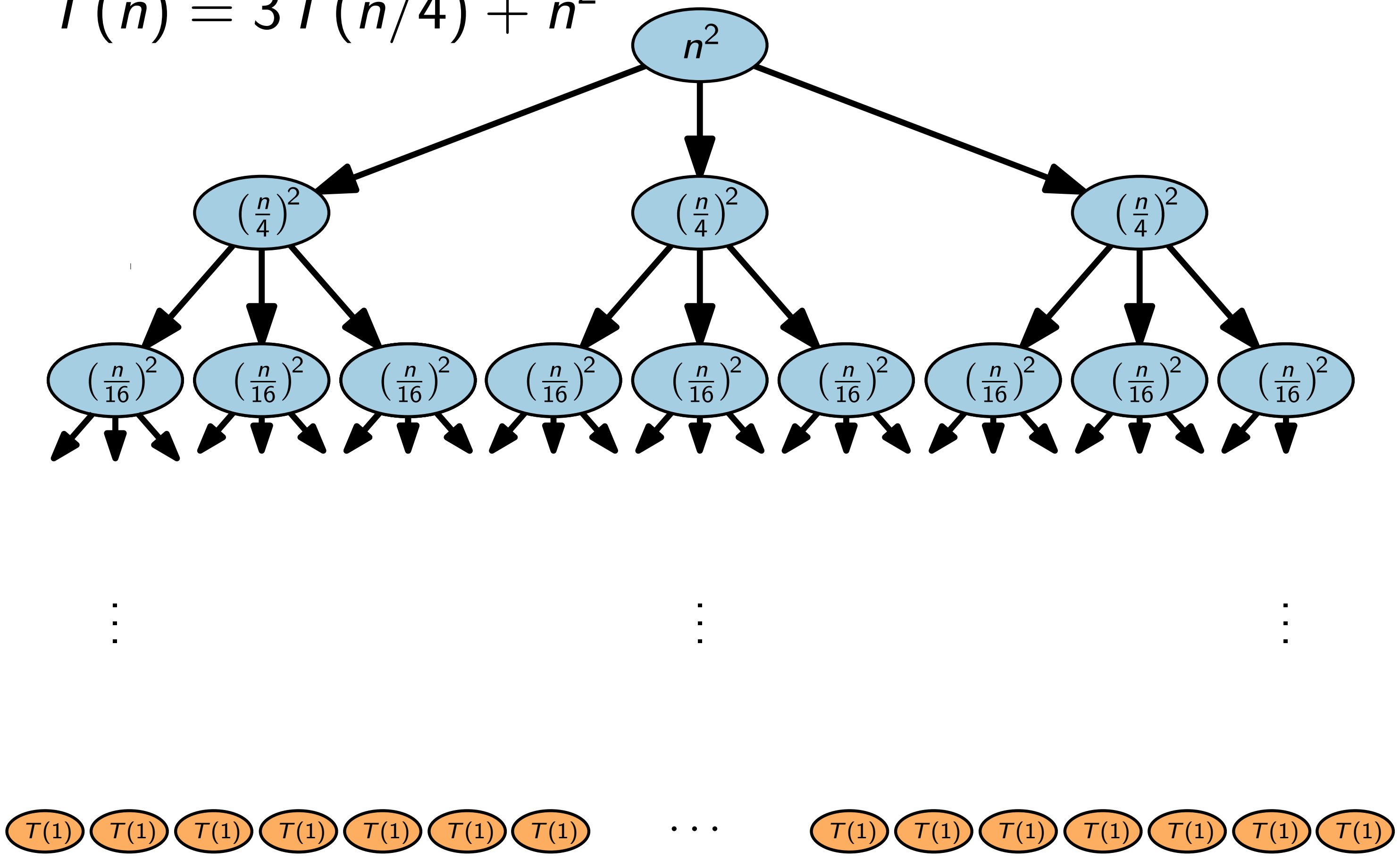
unterste Ebene — andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} =$$

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

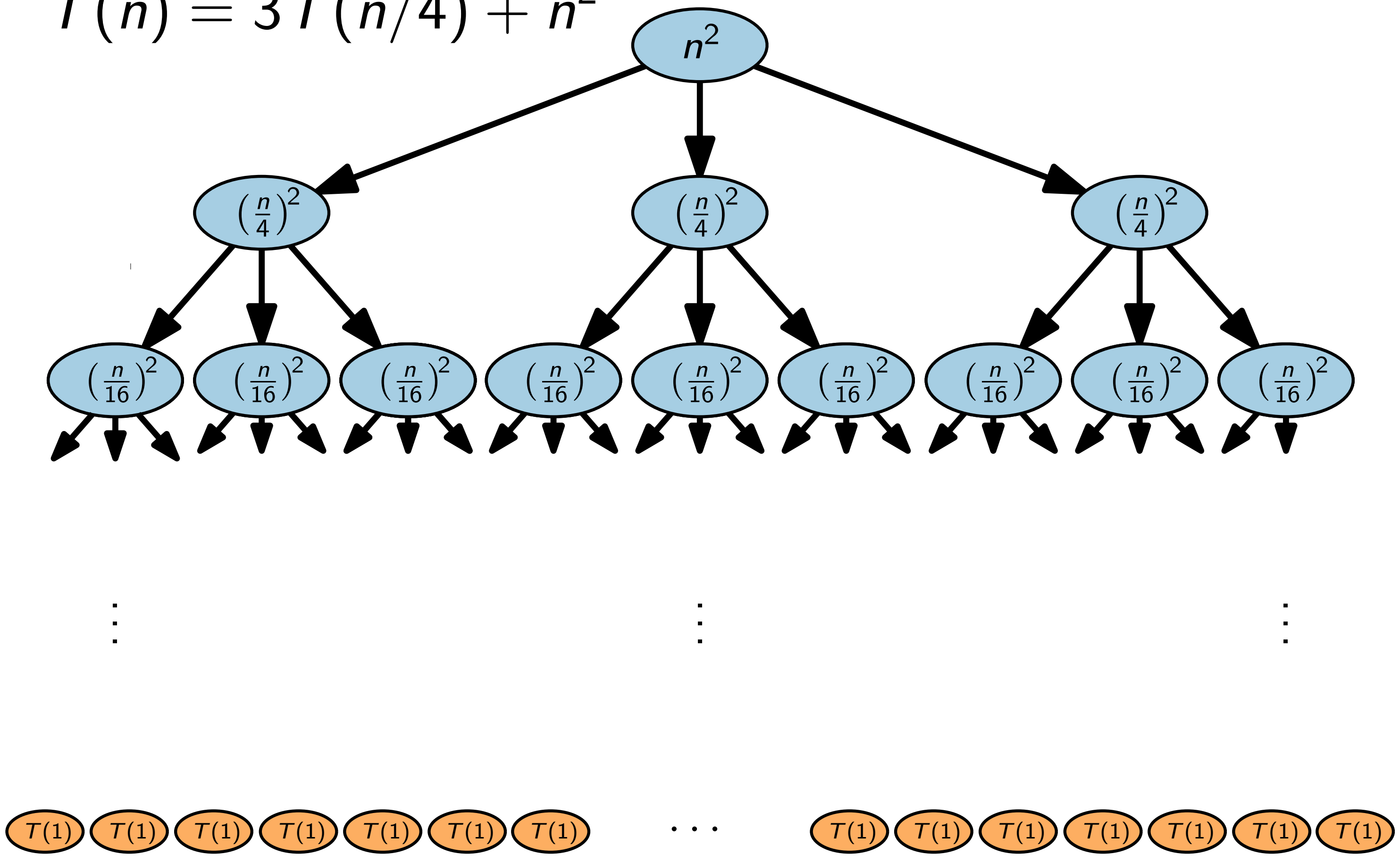
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

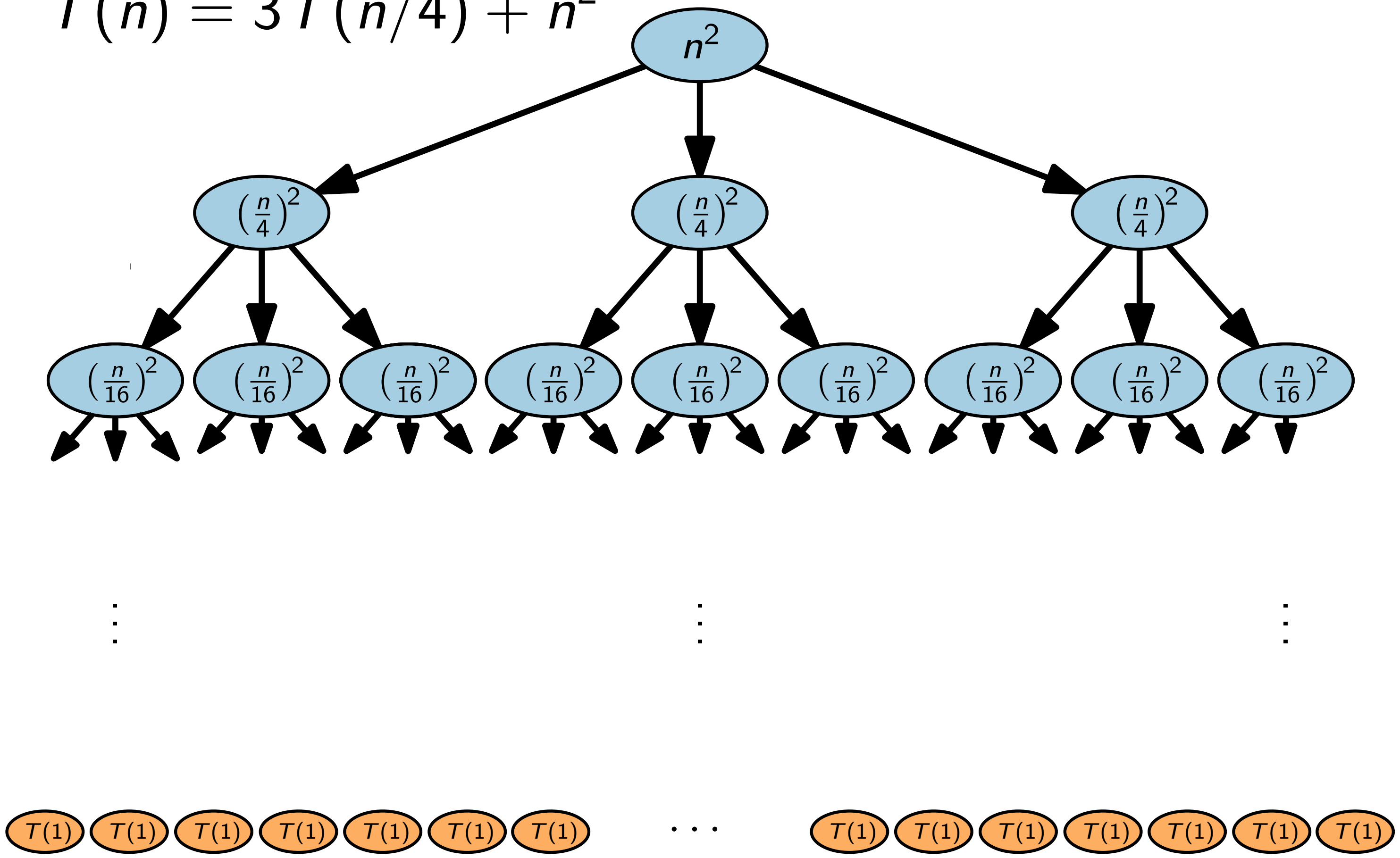
geometrische Reihe

$$\Rightarrow T(n) = \overbrace{n^{\log_4 3}}^{\text{unterste Ebene}} + \overbrace{\sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2}^{\text{andere Ebenen}} \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

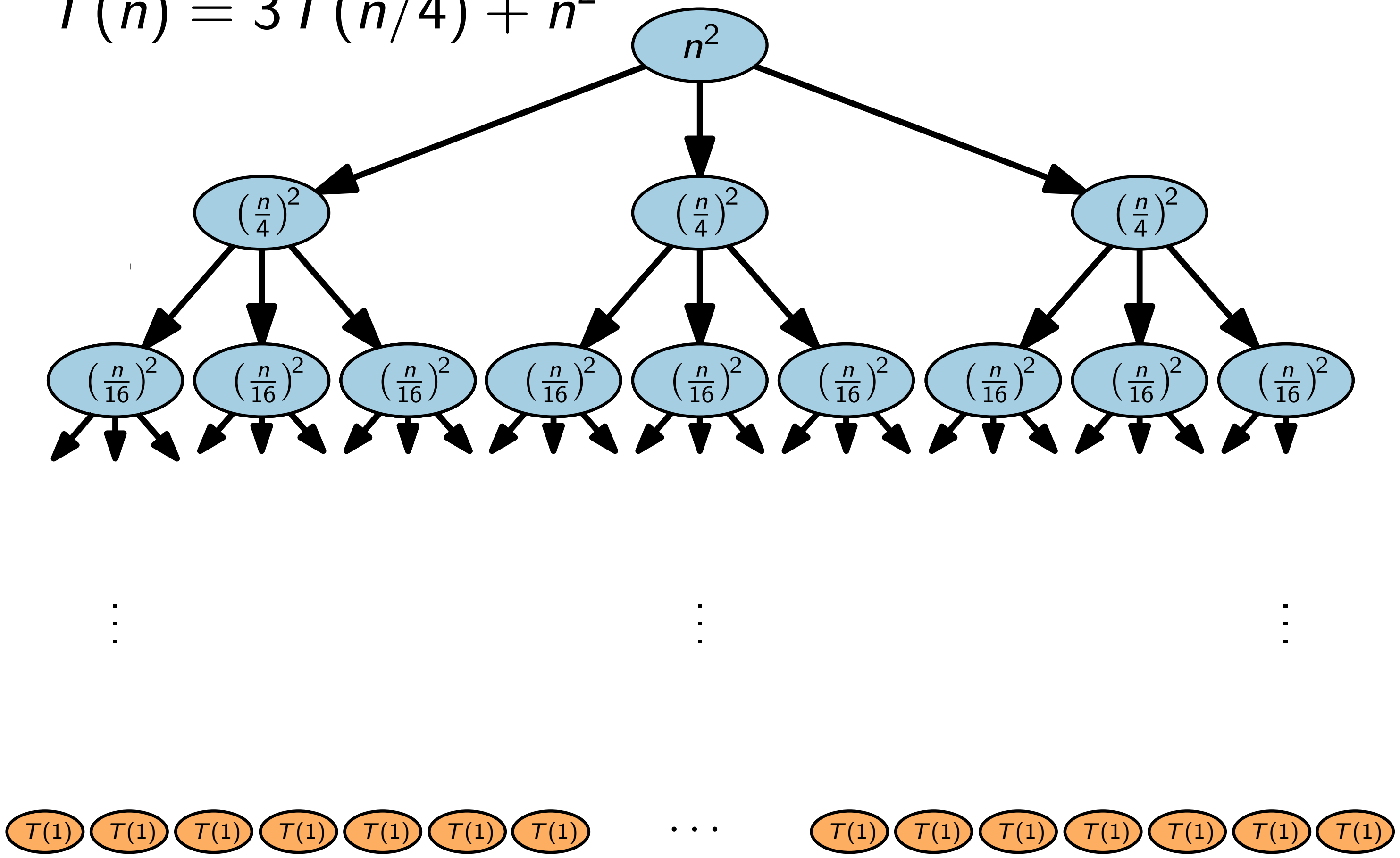
unterste Ebene — andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

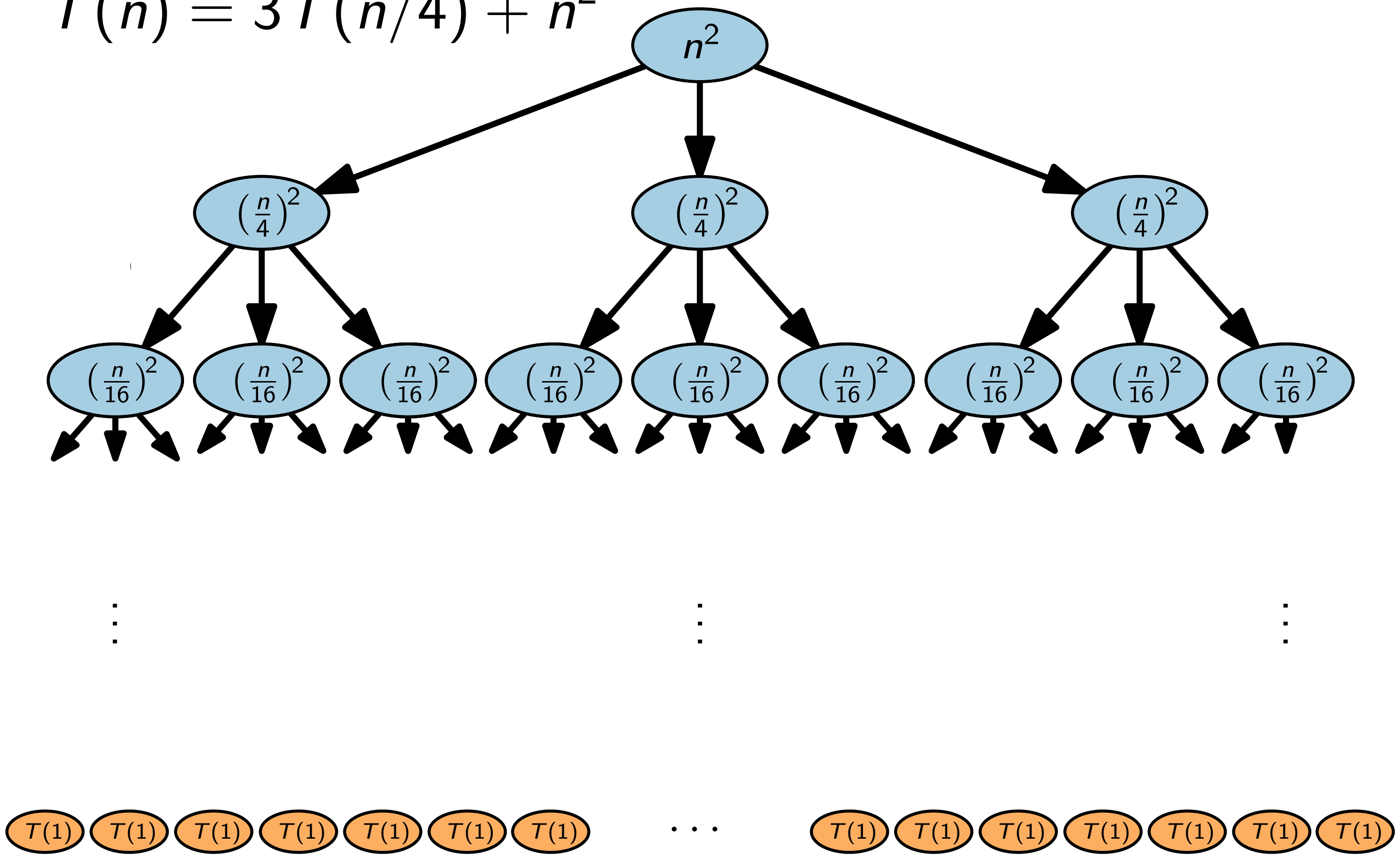
unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \le n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

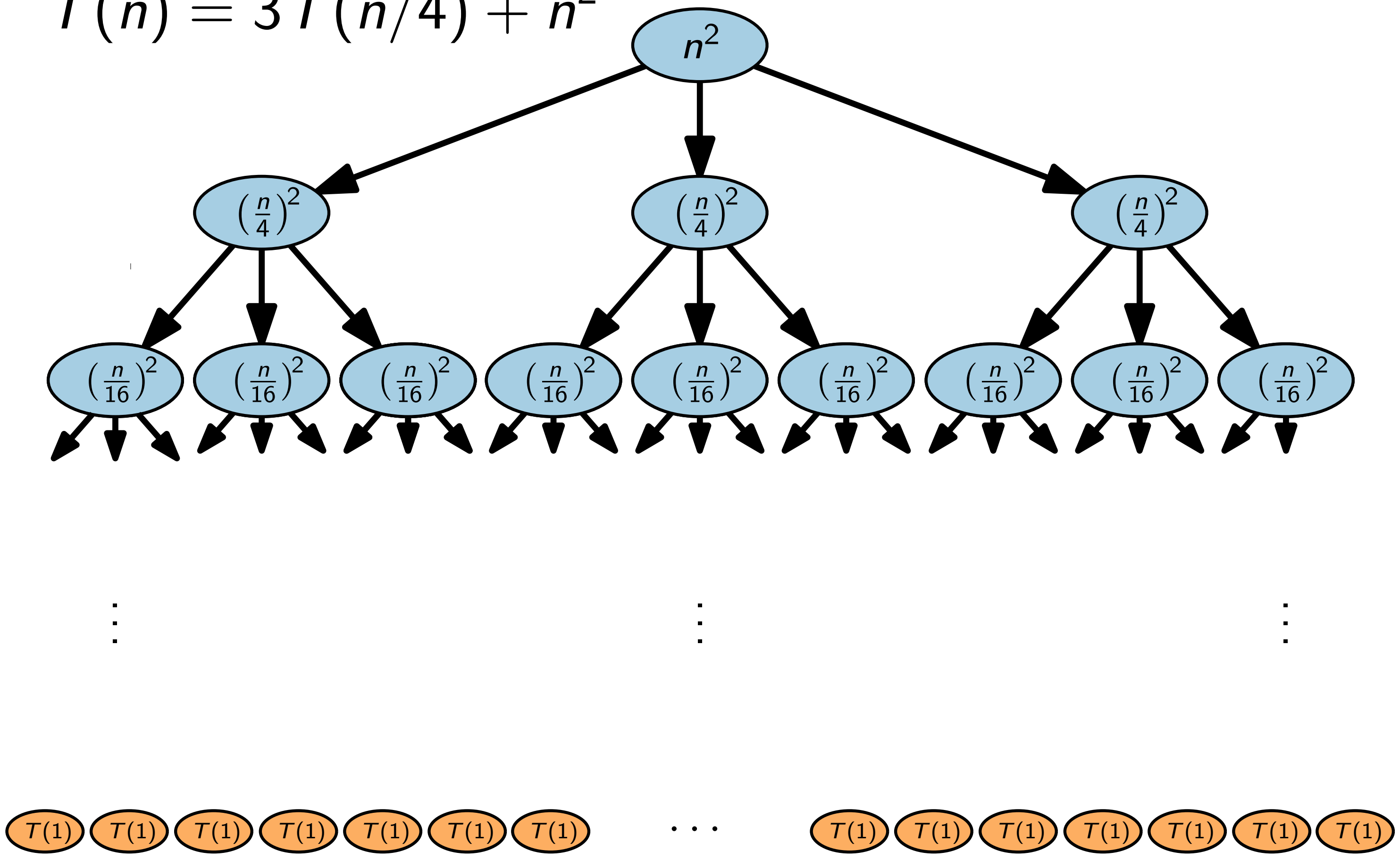
unterste Ebene | andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{O}(n^2)$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

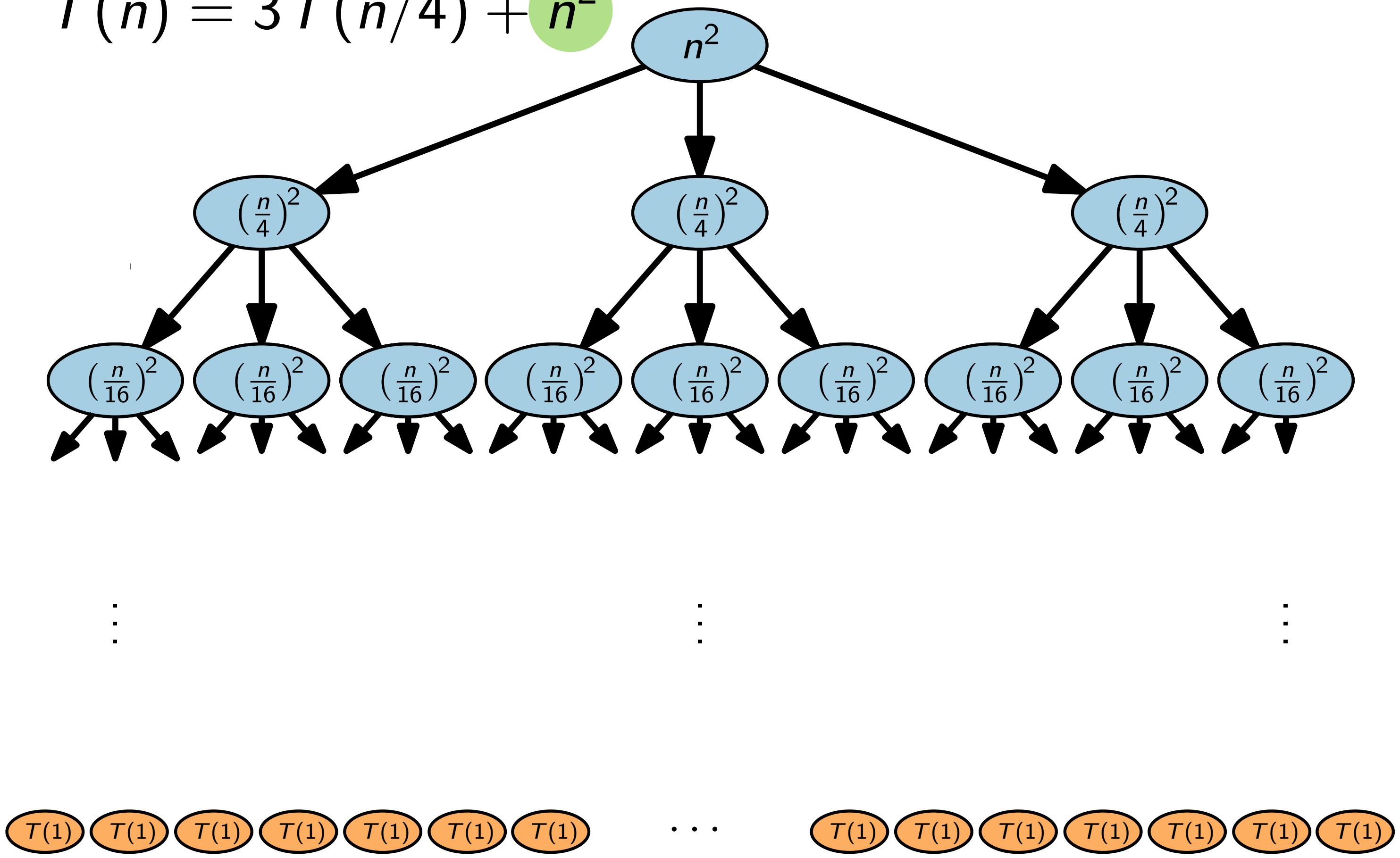
unterste Ebene   andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

unterste Ebene / andere Ebenen

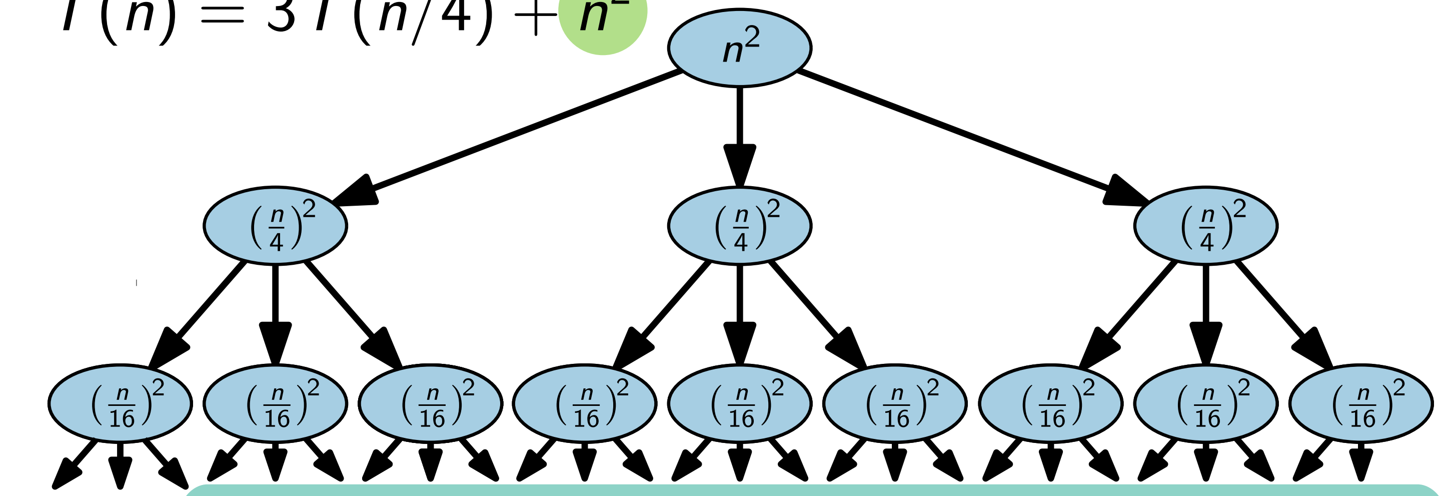
0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

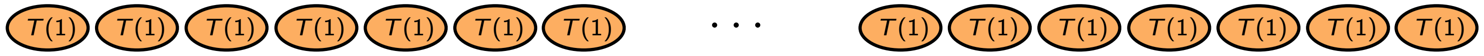
$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



Übung.
Berechnen Sie mit der Rekursionsbaummethode $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$, wobei $T(1) = 0$.



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

unterste Ebene andere Ebenen

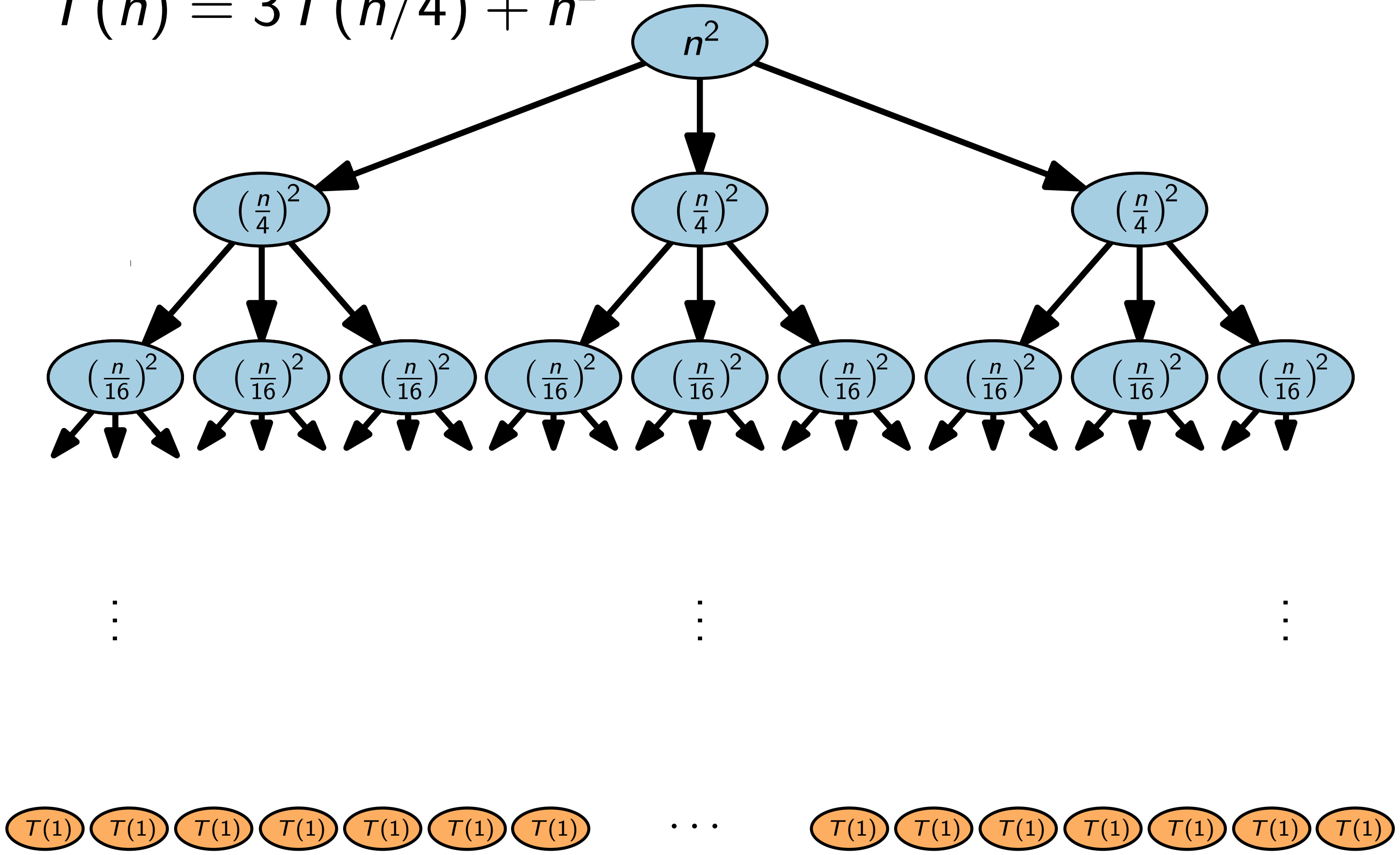
0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

0. Summand schon $1n^2$!

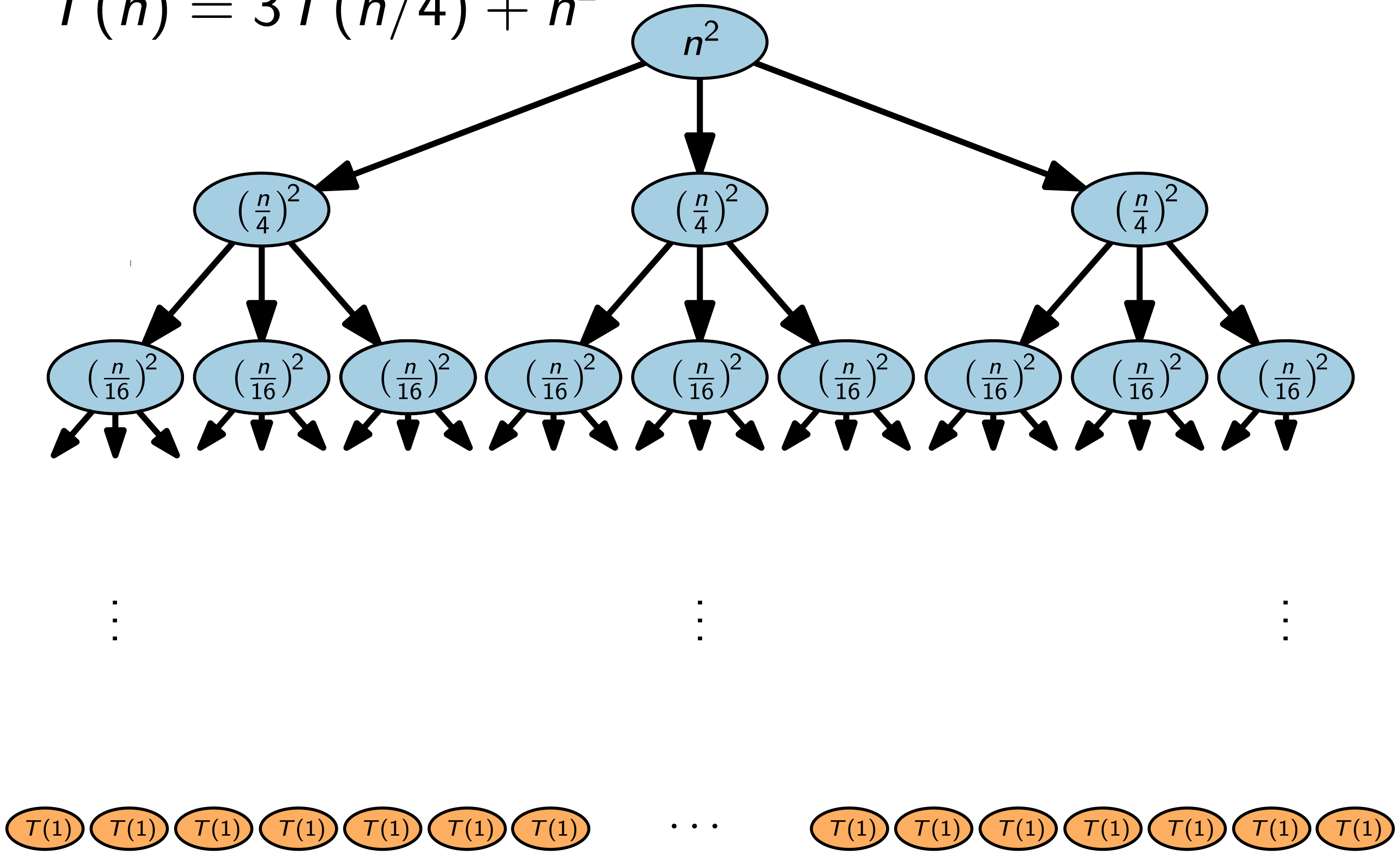
unterste Ebene — andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

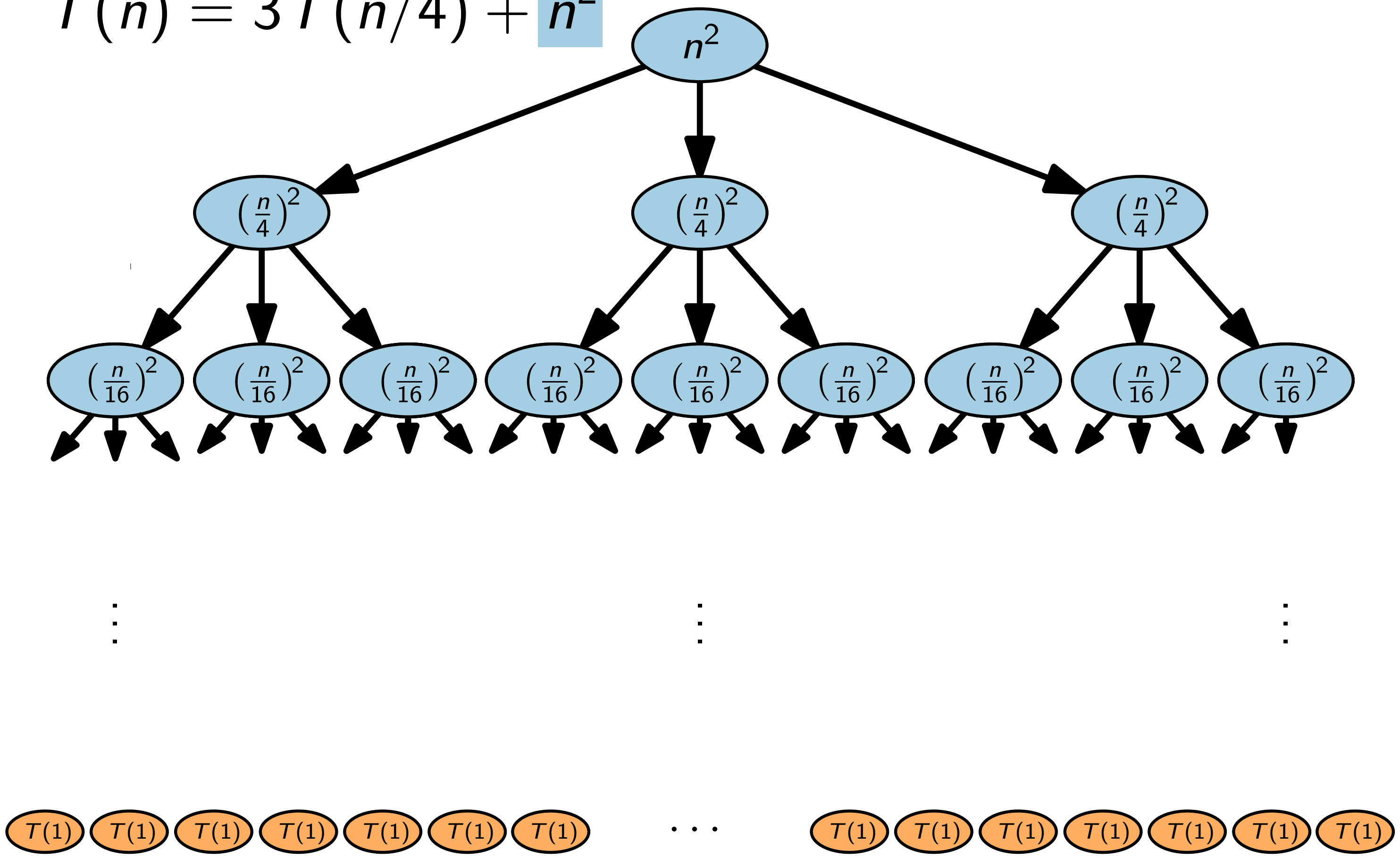
unterste Ebene　andere Ebenen　0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0,793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

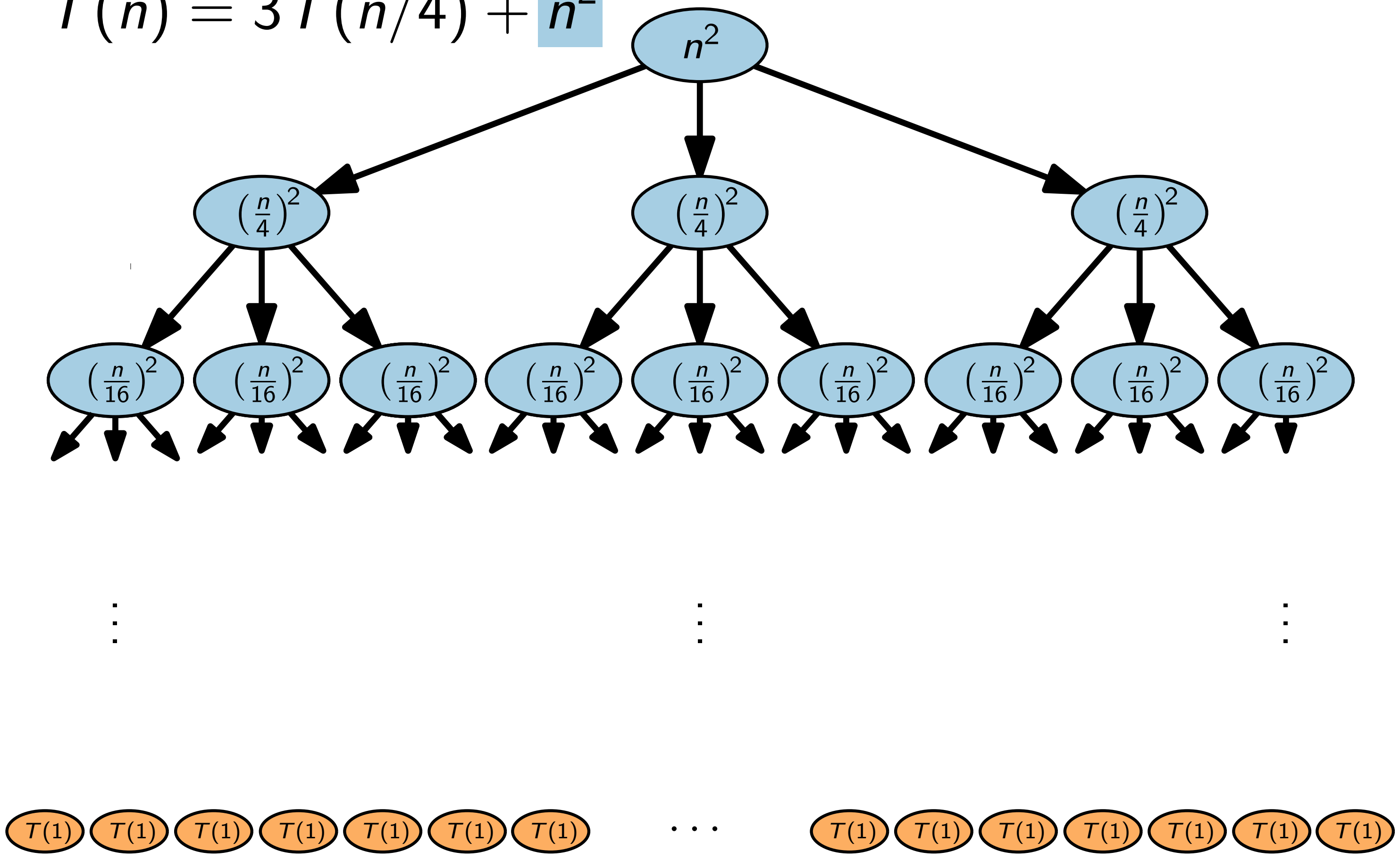
unterste Ebene — andere Ebenen — 0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + \boxed{n^2}$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	$3^0 = 1$	n^2
1	3^1	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

2) $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

geometrische Reihe

2') $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

geometrische Reihe

unterste Ebene andere Ebenen

0. Summand schon $1n^2$!

$$\Rightarrow T(n) = \underbrace{n^{\log_4 3}}_{} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \leq n^{0{,}793} + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ **asymptotisch positiv**...

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **asymptotisch positiv**...

...und auch da nicht in allen Fällen!

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und } \text{die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

III) Meistermethode

Satz. Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und f, $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und } \text{die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Definition. Die **Regularitätsbedingung** ist erfüllt, falls

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein $c < 1$ und für alle großen n.

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $\quad T(n) = 3T(n/4) + n^2$

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $\quad T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3\,(\geq 1),\; b = 4\,(> 1)$ und $f : n \mapsto n^2$.

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3\,(\geq 1),\; b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

III) Meistermethode $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow$ $a = 3\,(\geq 1)$, $b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow$ $f \in \mathbf{?}(n^{(\log_4 3)\pm\varepsilon})$

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3\,(\geq 1),\; b = 4\,(> 1)$ und $f \colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$

III) Meistermethode $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und } \text{die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow$ $a = 3\ (\geq 1)$, $b = 4\ (> 1)$ und $f : n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow$ $f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3) \overset{+}{\pm} \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\,(\geq 1)$, $b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

III) Meistermethode $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\,(\geq 1),\ b = 4\,(> 1)$ und $f \colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3 \, (\geq 1), \; b = 4 \, (> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3) \overset{+}{\pm} \varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

III) Meistermethode $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\ (\geq 1),\ b = 4\ (> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16} n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$?

III) Meistermethode $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\,(\geq 1),\ b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3 \,(\geq 1),\; b = 4 \,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

Gilt $af(n/b) \leq cf(n)$
für ein $c < 1$ und für alle großen n?

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein!

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3\,(\geq 1),\; b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3!

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! ✓

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a) - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow\ a = 3\,(\geq 1),\ b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{\textbf{?}}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3! $\quad \Rightarrow$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$. ✓

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein!

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3\,(\geq 1),\; b = 4\,(> 1)$ und $f \colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3! $\quad \Rightarrow \quad T \in \Theta(f)$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$. ✓

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein!

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in \mathcal{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textbf{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel. $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3\,(\geq 1),\; b = 4\,(> 1)$ und $f\colon n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3! $\quad \Rightarrow \quad T \in \Theta(f) \;\; = \Theta(n^2) \quad \square$

Üben! Hausaufgaben!

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

Gilt $3f(n/4) = \frac{3}{16}n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$? Ja – z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss **echt** < 1 sein! ✓

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  $$\Rightarrow n^{\log_b a} =$$

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} =$

Übersicht

Substitutionsmethode

Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

Rekursionsbaummethode

Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

Meistermethode

Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

Achtung:
Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

$$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$$

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n\log_2 n$

  $$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1, \text{ aber } f(n) = n\log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})\,!$$

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies“: Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n\log_2 n$

  $$\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1, \text{ aber } f(n) = n\log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})\,!$$

  Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^{ε}, für jedes $\varepsilon > 0$.

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies": Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$!

  Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^{ε}, für jedes $\varepsilon > 0$.

  PS: Wie könnte man das beweisen?

Übersicht

- **Substitutionsmethode**

  Für „Genies": Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- **Rekursionsbaummethode**

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- **Meistermethode**

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung:
  Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel. $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  Also können wir die Meistermethode hier **nicht** verwenden!

  $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$, aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$ **!**

  Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^{ε}, für jedes $\varepsilon > 0$.

  PS: Wie könnte man das beweisen?