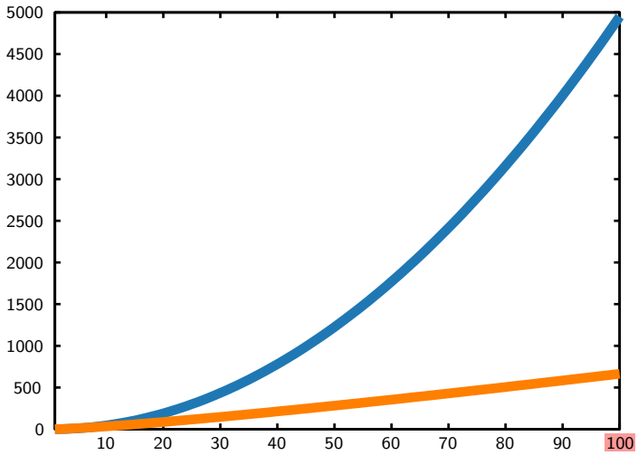
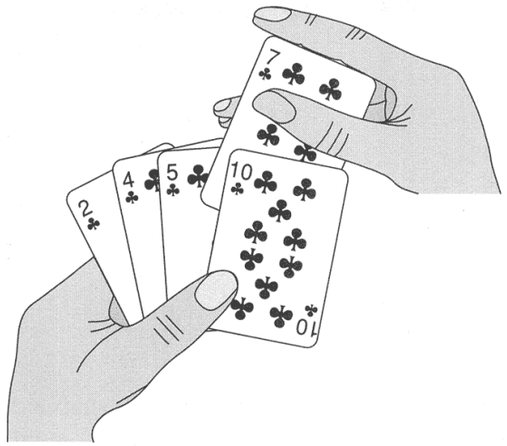
Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Algorithmen und Datenstrukturen



Vorlesung 3: Laufzeitanalyse



Alexander Wolff

Wintersemester 2024

Recap

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen,
   die wir uns über einen Algorithmus stellen?

2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?

3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?

4. Wie beweisen wir die Korrektheit

   a) einer Schleife?

   b) eines inkrementellen Algorithmus?

   c) eines rekursiven Algorithmus?

Laufzeit von InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Wie lang braucht dieser Algorithmus?

Wir zählen nur Vergleiche zwischen Schlüsseln.

Laufzeit wird bzgl. der **Eingabegröße** n gemessen.

Hier: $n = A.length$.

Antwort: kommt drauf an...

Analysieren meistens schlechtesten Fall

Bester Fall.

Array ist bereits aufsteigend sortiert.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\Rightarrow$ $A[i] > key$ **nie** erfüllt.

$\Rightarrow$ Für jedes j nur 1 Vergleich.

$\Rightarrow$ Laufzeit: $n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall.

Array ist absteigend sortiert.

9	8	7	6	5	4	3	2	1

$\Rightarrow$ $A[i] > key$ **immer** erfüllt (bis $i = 0$)

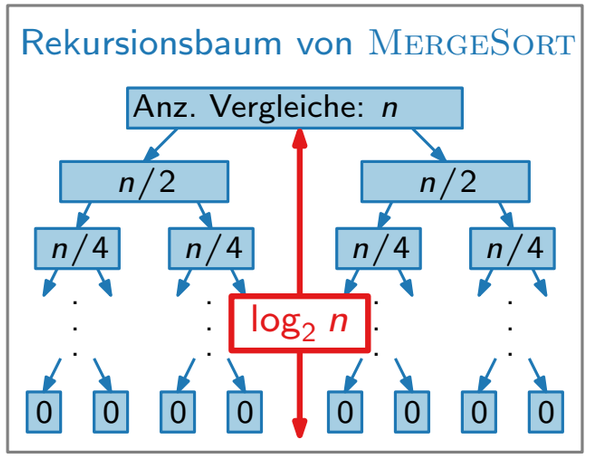
$\Rightarrow$ Für jedes j gibt es $j - 1$ Vergleiche.

$\Rightarrow$ Laufzeit $\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int ℓ = 1, int r = A.length)
 if ℓ < r then
    m = ⌊(ℓ + r)/2⌋                 } teile
    MergeSort(A, ℓ, m)              } herrsche
    MergeSort(A, m + 1, r)          }
    Merge(A, ℓ, m, r)               } kombiniere
```



Effizient? ✓ Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{MS}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases} = n \cdot \log_2 n$$

falls n Zweierpotenz

Beweis. Per Induktion über n.

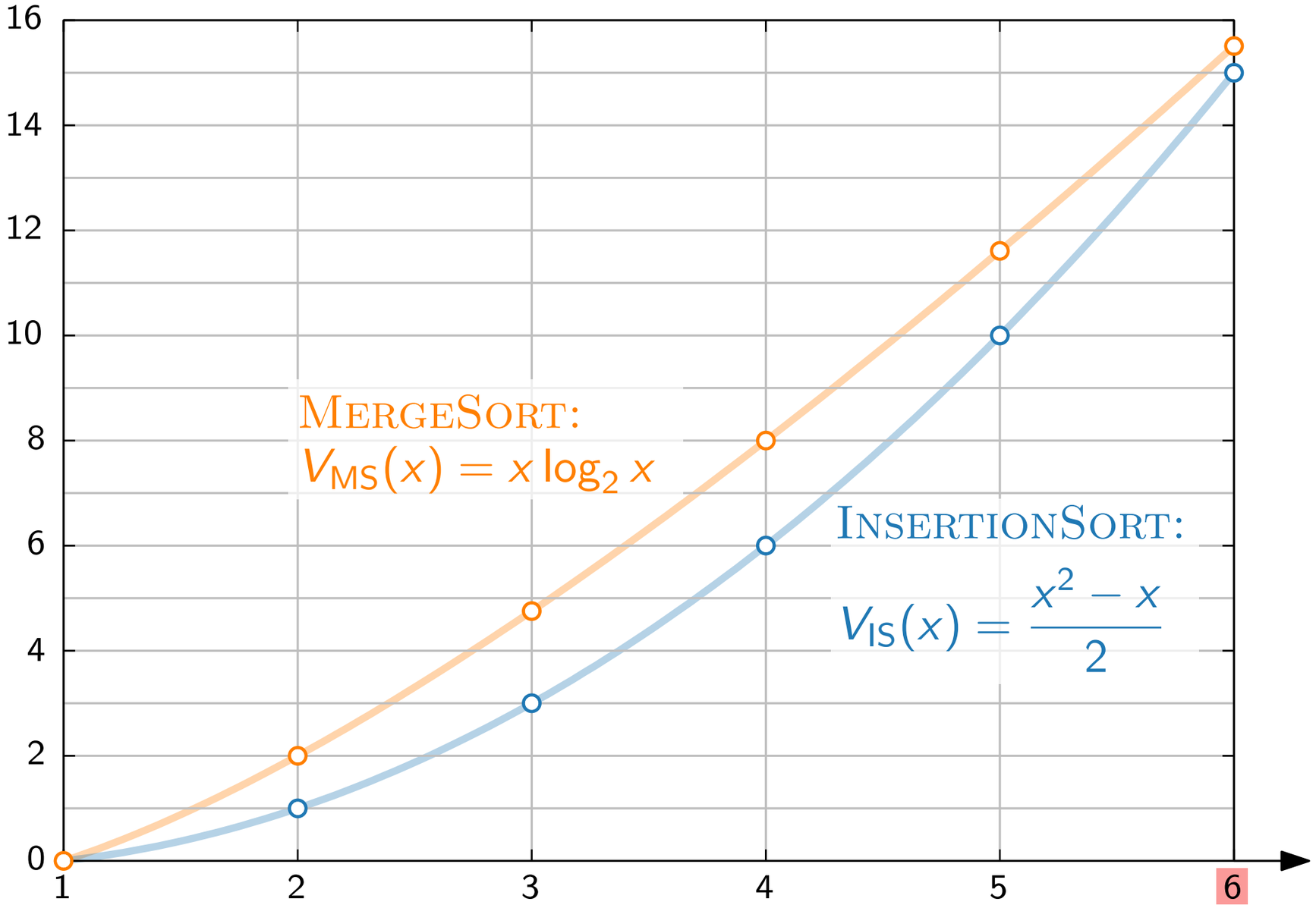
Induktionsanfang: $V_{MS}(1) = 1 \cdot \log_2 1 = 0$ ✓

Induktionsschritt: $V_{MS}(n) \underset{n>1}{=} 2V_{MS}(\frac{n}{2}) + n = 2 \cdot \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} + n = n \cdot (\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{1}) + n = n \log_2 n$ ✓

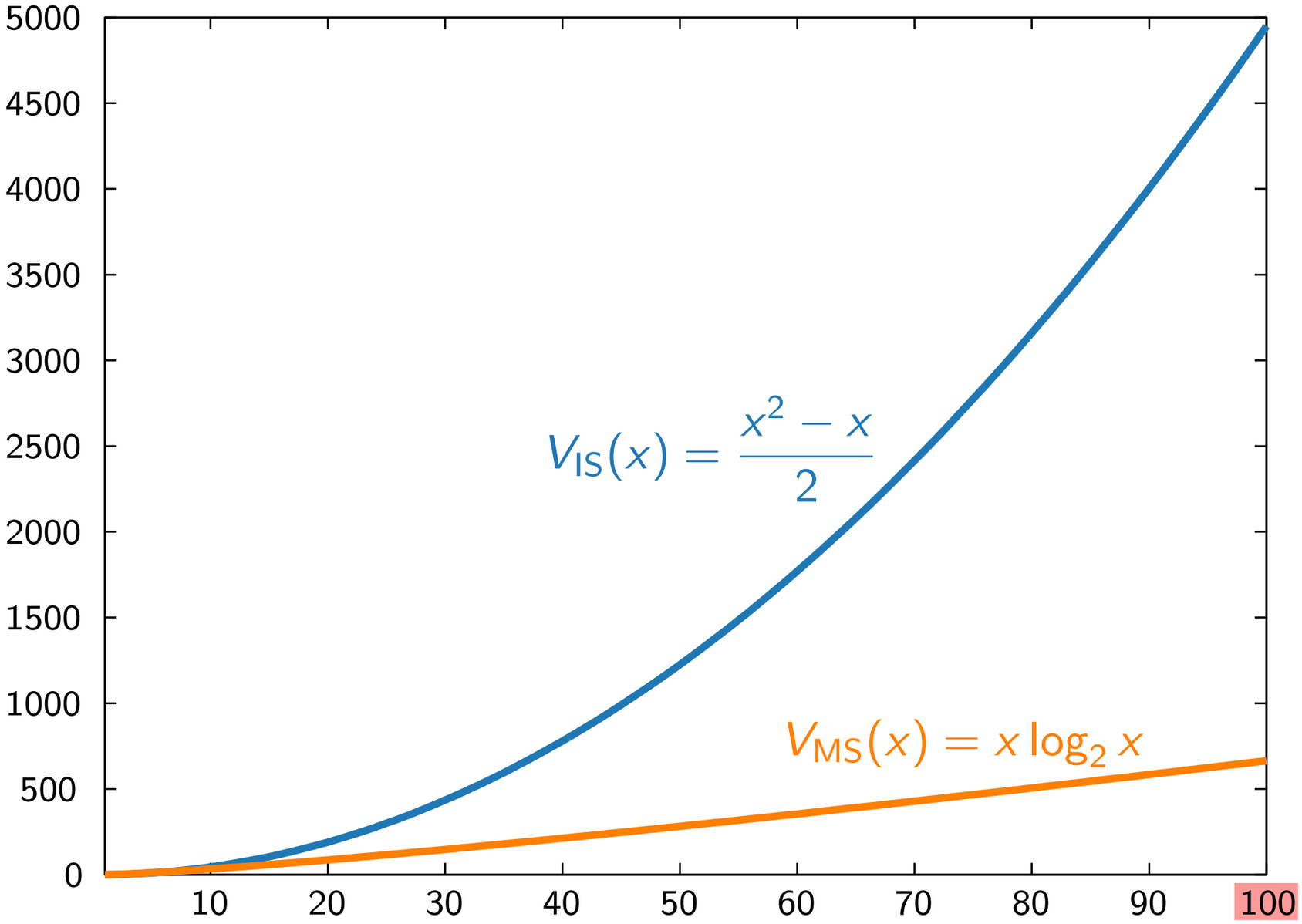
Vergleich Laufzeiten

	Bester Fall	Schlechtester Fall	
InsertionSort	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	Geht das besser?
SelectionSort	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	
BubbleSort	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	
BogoSort	$n-1$	∞	
MergeSort	$n \log_2 n$	$n \log_2 n$	Ist das besser?

Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Tatsächliche Laufzeit

Was ist schneller?

```
AlgA(n)
  n = n + 1
  n = n + 1
  n = n + 1
  n = n + 1
  n = n + 1
  return n
```

oder

```
AlgB(n)
  n = n + 5
  return n
```

$a = a + 1$	oder	$a = a - 1$
$b = b + 1$	oder	$b = b + 100$
$c = c + 10$	oder	$c = c \cdot 10$
$d = A[0]$	oder	$d = A[100]$

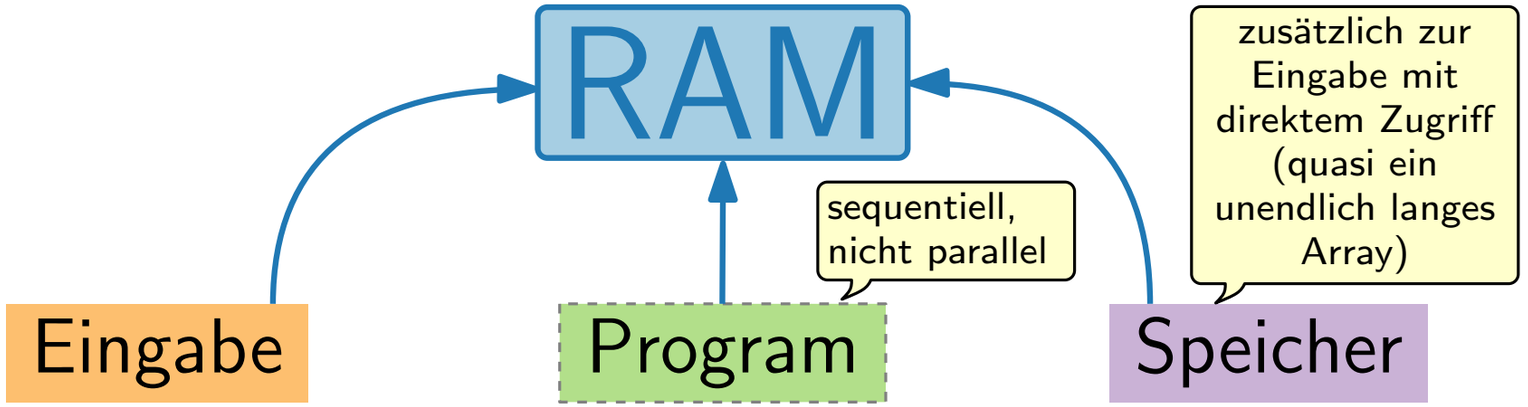
Hängt von vielen Faktoren ab!

- Realisierung der Elementaroperationen
- Größe der Variablen
- Position im Speicher
- Position des Lesekopfs

Wollen ein Maschinenmodell, das einem Rechner ähnelt, aber möglichst einfach ist!

Das RAM-Modell

Die **Random Access Machine (RAM)** besteht aus:



- Lesen
- Schreiben

- Elementaroperationen:
  - $+, -, \cdot, /, \%$
  - $\min, \max, \lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$
- Vergleiche:
  - $<, \leq, =, \neq, \geq, >$

- Lesen
- Schreiben

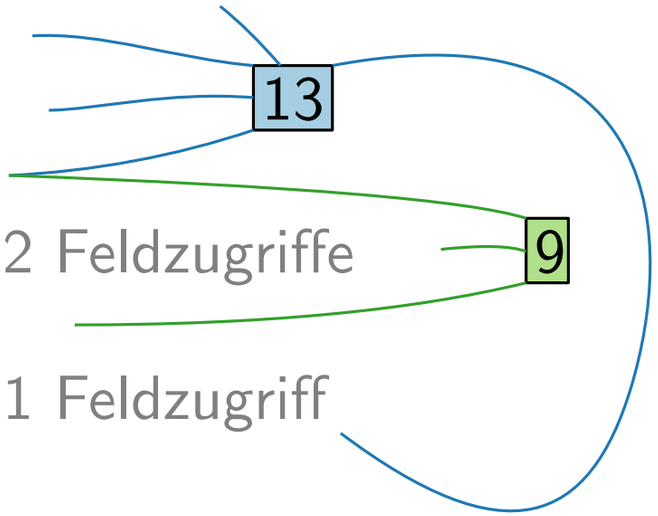
Je 1 Zeiteinheit

```
INSERTIONSORT(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

Laufzeit von InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
      key = A[j]
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key do
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```

```
// 1 Zuweisung + 1 Addition + 1 Vergleich
// 1 Zuweisung + 1 Feldzugriff
// 1 Zuweisung + 1 Subtraktion
// 2 Vergleiche + 1 Feldzugriff
// 1 Zuweisung + 1 Addition + 2 Feldzugriffe
// 1 Zuweisung + 1 Subtraktion
// 1 Zuweisung + 1 Addition + 1 Feldzugriff
```



Wie lang braucht dieser Algorithmus?
Wir zählen **alle Rechenschritte**.

Schlechtester Fall.
Array ist absteigend sortiert.

9	8	7	6	5	4	3	2	1

$\Rightarrow A[i] > key$ **immer** erfüllt

$\Rightarrow$ für jedes j gibt es $13 + 9(j-1)$ Rechenschr.

$\Rightarrow$ Laufzeit $\sum_{j=2}^{n}(13 + 9(j-1)) = \sum_{j=1}^{n-1}(13 + 9j) = 13(n-1) + 9\sum_{j=1}^{n-1} j$

$= 13(n-1) + 9 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(9n+26)(n-1)}{2}$ 

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ **arithmetische Reihe**

Ein Klassifikationsschema für Funktionen

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Menge der **reellen** Zahlen, z.B. -7, 3, $\frac{2}{9}$, $\sqrt{2}$, e, π^2.

Menge der **natürlichen Zahlen** $0, 1, 2, \ldots$

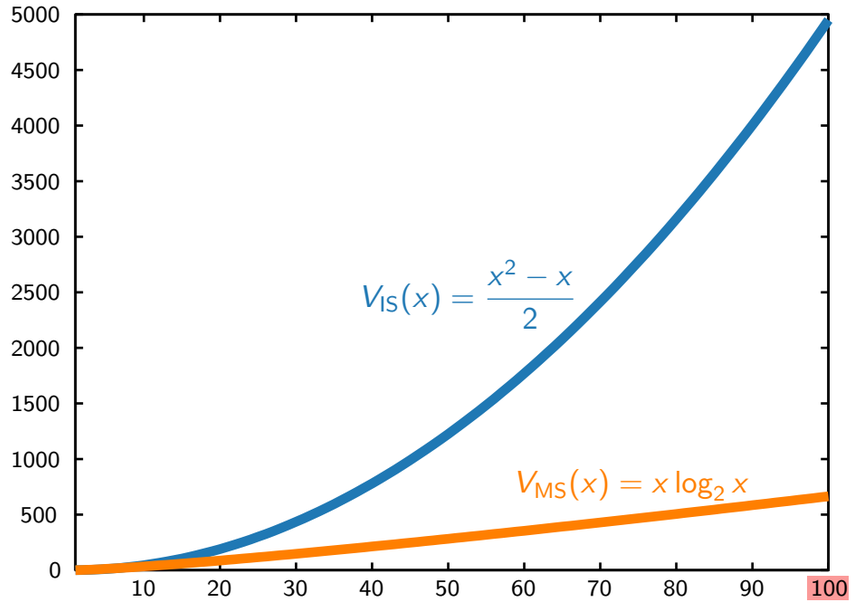
Ein Klassifikationsschema für Funktionen

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$\mathcal{O}(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **höchstens** so schnell wachsen wie g.



Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$\mathcal{O}(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **höchstens** so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! ($\neg$)

Behauptung: $f \notin \mathcal{O}(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,
so dass $f(n) > c \cdot n$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g“

$$\mathcal{O}(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **höchstens** so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behauptung: $f \notin \mathcal{O}(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$, so dass $f(n) > c \cdot n$.

Also: bestimme n in Abhängigkeit von c und n_0, so dass

$n \geq n_0$ und $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin \mathcal{O}(n)$

Bestimme n in Abhängigkeit von c und n_0, so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „-20“ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > c \cdot n$, dann $f(n) > c \cdot n$.

$\Updownarrow$

$n > c/2$

$\Uparrow$

Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen, dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max(c, 5, n_0) \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > c \cdot n$. Also gilt $f \notin \mathcal{O}(n)$. □

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g“

$$\Omega(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \geq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **mindestens** so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin \mathcal{O}(n)$, $f \in \mathcal{O}(n^2)$, $f \in \mathcal{O}(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $f \in \Theta(n^2)$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Theta von g“

$$\Theta(g) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt positive Konstanten } c_1,\ c_2 \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die **genau** so schnell wachsen wie g.

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin \mathcal{O}(n)$, $f \in \mathcal{O}(n^2)$, $f \in \mathcal{O}(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $f \in \Theta(n^2)$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2$.

Das Klassifikationsschema – intuitiv

$f \in \mathcal{O}(n^2)$	**bedeutet** f wächst **höchstens**	quadratisch.
$f \in \Omega(n^2)$	**mindestens**	
$f \in \Theta(n^2)$	**genau**	
$f \in o(n^2)$	**echt langsamer als**	
$f \in \omega(n^2)$	**echt schneller als**	

neu!

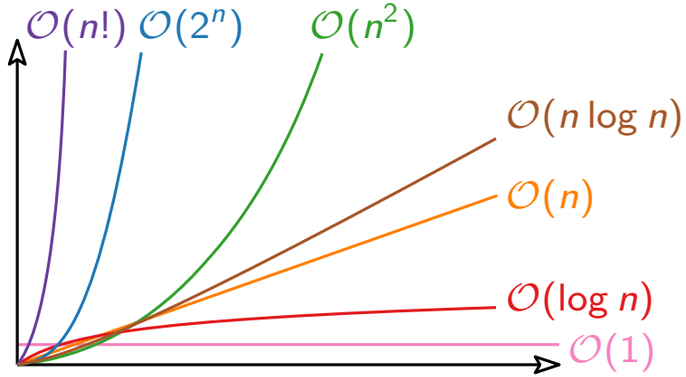
Genaue Definition für „klein-oh“ und „klein-omega“ siehe Kapitel 3 [CLRS].

Übung.

Gegeben folgende Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \ldots$:

$$n^2,\ \log_2 n,\ \sqrt{n \log_2 n},\ 1.01^n,\ n^{\log_3 4},\ \log_2(n \cdot 2^n),\ 4^{\log_3 n}.$$

Sortieren Sie nach Geschwindigkeit des **asymptotischen Wachstums**, also so, dass danach gilt: $\mathcal{O}(\ldots) \subseteq \mathcal{O}(\ldots) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{O}(\ldots)$.



Vergleich Laufzeiten

	Bester Fall	Schlechtester Fall	
InsertionSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	Geht das besser?
SelectionSort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	
BubbleSort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	
BogoSort	$\Theta(n)$	∞	
MergeSort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	Ist das besser? Ja!