

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2023/24

13. Vorlesung

Binäre Suchbäume

Zwischentest II: Do, 14.12., 8:25 – 10:00

- Zufallsexperimente, (Indikator-) Zufallsvariable, Erwartungswert
- (Randomisiertes) QuickSort
- Untere Schranke für WC-Laufzeit von vergleichsbasierten Sortierverfahren
- Linearzeit-Sortierverfahren
- Auswahlproblem (Median): randomisiert & deterministisch
- Elementare Datenstrukturen
- Hashing
- Binäre Suchbäume (Rot-Schwarz-Bäume noch nicht)

Dynamische Menge

verwaltet Elemente einer
sich ändernden Menge M



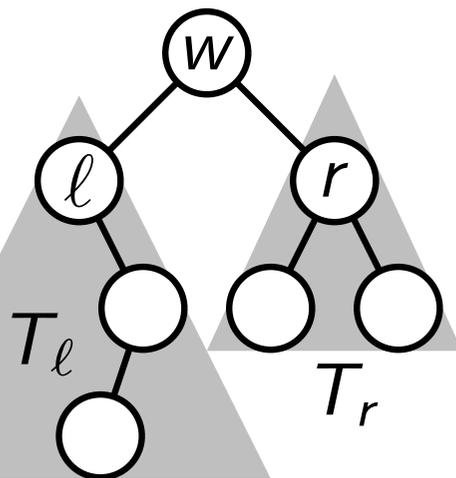
Abstrakter Datentyp	<i>Funktionalität</i>	
ptr Insert(key k , info i) Delete(ptr x) ptr Search(key k)	} Änderungen	} Wörterbuch
ptr Minimum() ptr Maximum() ptr Predecessor(ptr x) ptr Successor(ptr x)	} Anfragen	

Implementierung: je nachdem...

Implementierung

**) unter bestimmten Annahmen.*

	Search	Ins/Del	Min/Max	Pred/Succ
unsortierte Liste	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
unsortiertes Feld	$\Theta(n)$	$\Theta(1)/\Theta(n)$	$\Theta(1)^\oplus$	$\Theta(n)$
sortiertes Feld	?	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Hashtabelle	$\Theta(1)^*$	$\Theta(1)^*$	—	—
Binärer Suchbaum	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$



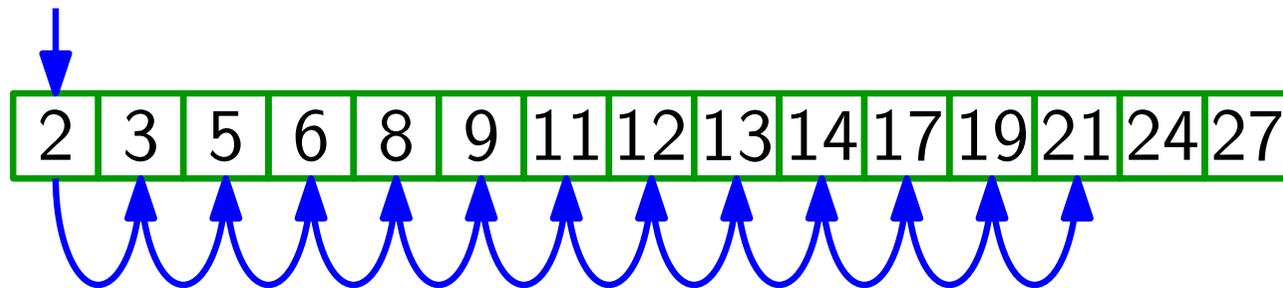
$h(T)$ = Höhe des Baums T

= Anz. Kanten auf längstem Wurzel-Blatt-Pfad

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls Baum = Blatt} \\ 1 + \max\{h(T_\ell), h(T_r)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

\oplus) Weil wir nach dem Löschen (in linearer Zeit) einfach das neue Min/Max suchen können.

Suche im sortierten Feld

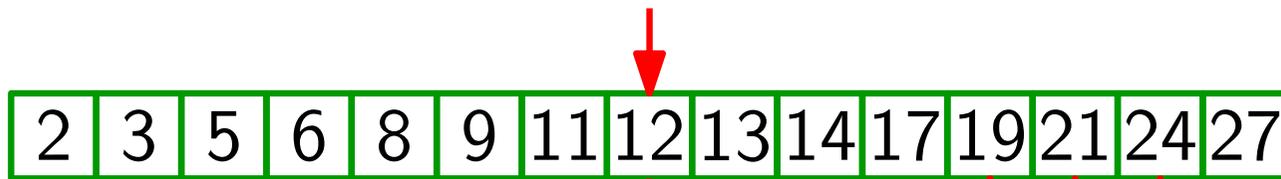


Suche 21!

hier im Worst Case

Lineare Suche: 13 n Schritte

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

hier im Worst Case

Lineare Suche: 13 n Schritte

Binäre Suche: 4 ? Schritte*

grob: Wie oft muss ich n halbieren, bis ich bei 1 bin?

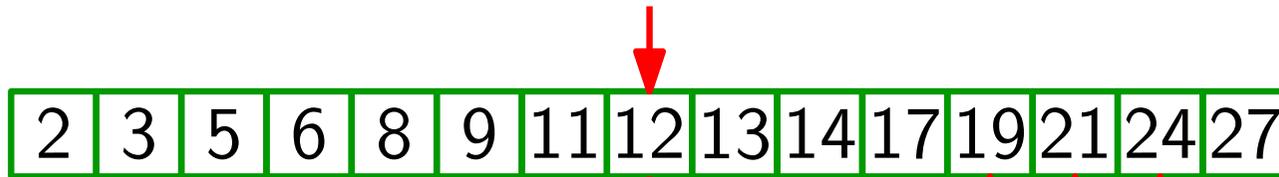
genau: $T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ und $T(1) = 1$

$$\leq T(\lfloor n/4 \rfloor) + 1 + 1 \leq \dots \leq T(1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

Übung! $= 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

Suche im sortierten Feld

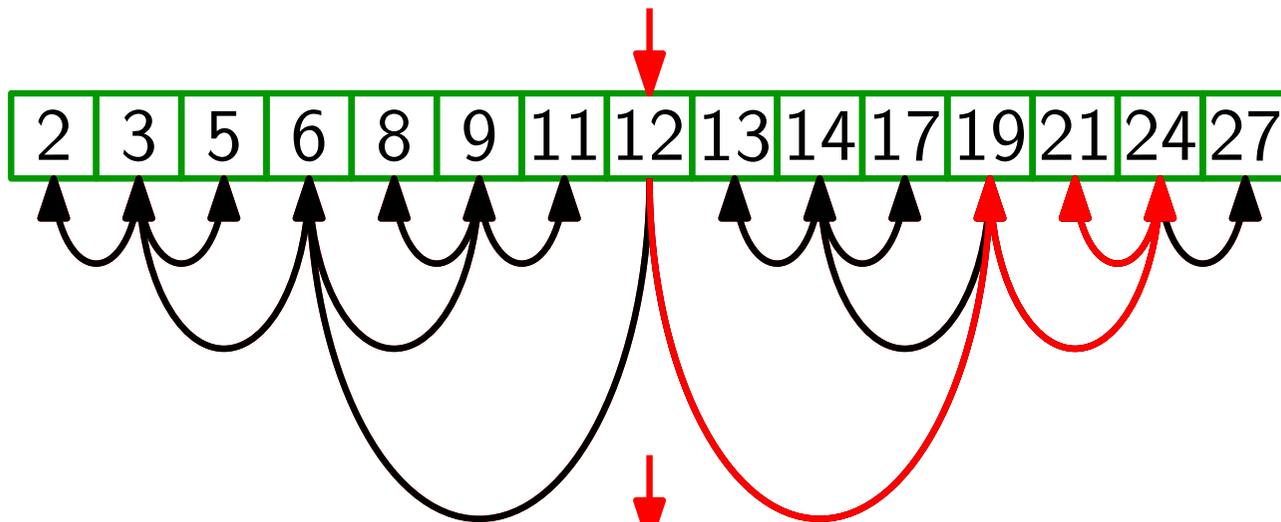


Suche 21!

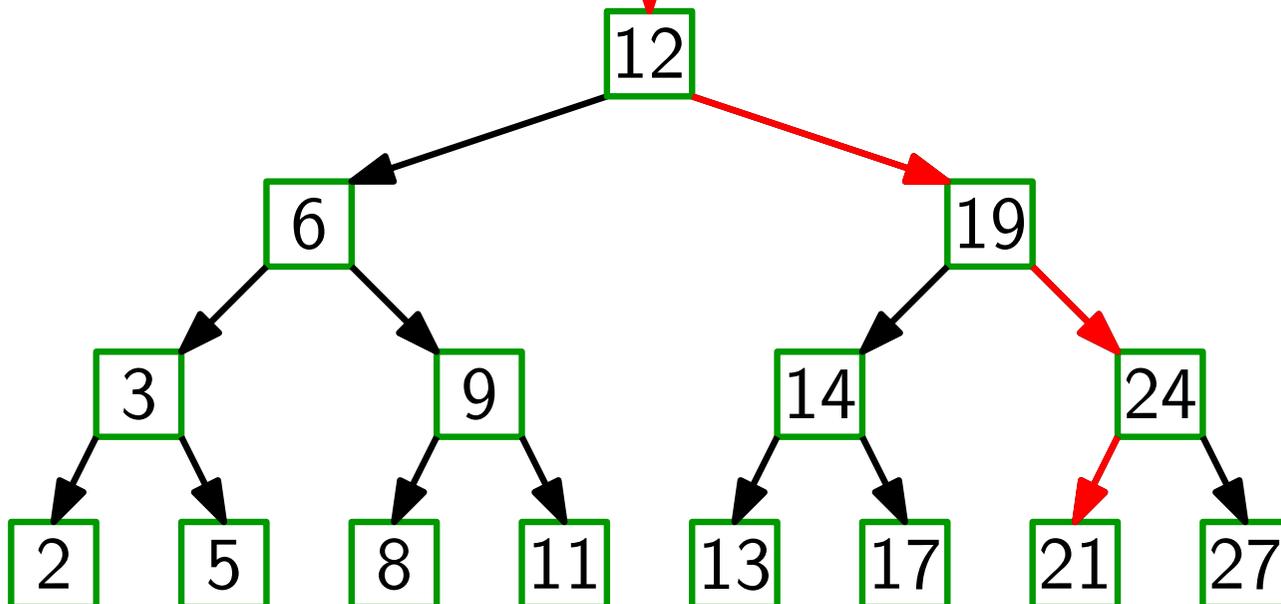
	<i>hier</i>	<i>im Worst Case</i>		≈ 1 Mio.
Lineare Suche:	13	n	Schritte	$2^{20} - 1$
Binäre Suche:	4	$\lceil \log_2(n + 1) \rceil$	Schritte*	20

*) Je nach Implementierung braucht ein Schritt ein oder zwei Vergleiche (z.B. = und <).

Suche im sortierten Feld



Suche 21!

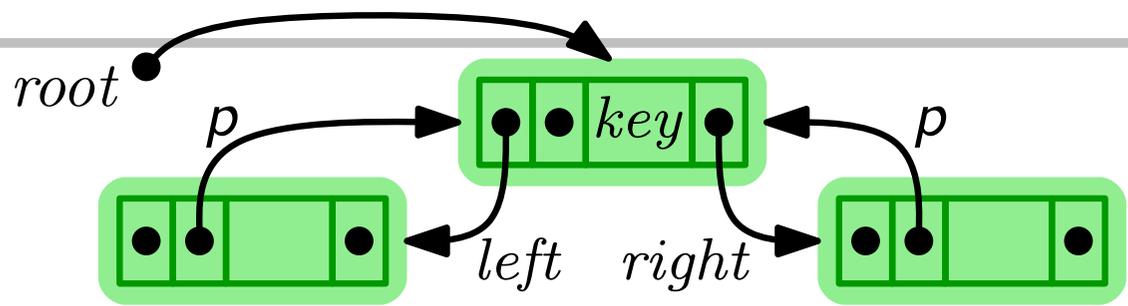


*Binärer
Suchbaum*

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

Für jeden Knoten v gilt:
 alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
 rechten \geq

Bin. Suchbaum



Abs. Datentyp

BinSearchTree()

Node Search(key k)

Node Insert(key k)

Delete(Node x)

Node Minimum()

Node Maximum()

Node Predecessor(Node x)

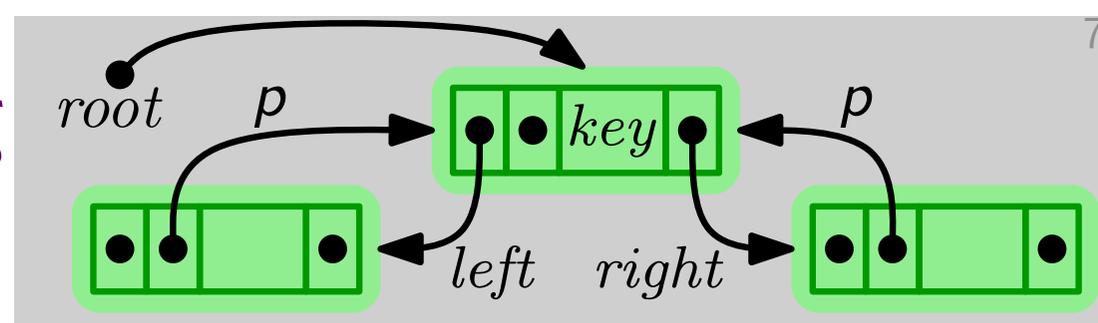
Node Successor(Node x)

Implementierung

$root = nil$	Node(key k , Node par) $key = k$ $p = par$ $right = left = nil$	Node key key Node $left$ Node $right$ Node p
	Node $root$	

TO DO!

Inorder-Traversierung



(Binäre) Bäume haben eine zur Rekursion einladende Struktur...

Beispiel: Gib Schlüssel eines binären Suchbaums *sortiert* aus!

- Lösung:**
1. Durchlaufe rekursiv linken Teilbaum der Wurzel.
 2. Gib den Schlüssel der Wurzel aus.
 3. Durchlaufe rekursiv rechten Teilbaum der Wurzel.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )  
  if  $x \neq nil$  then  
    InorderTreeWalk( $x.left$ )  
    gib  $x.key$  aus  
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

Korrektheit

zu zeigen: Schlüssel werden in sortierter Rf. ausgegeben.

Induktion über die Baumhöhe h .

$h = -1$: Baum leer, d.h. $root = nil$ ✓

$h \geq 0$: Ind.-Hyp. sei wahr für Bäume der Höhe $< h$.

Seien T_{links} und T_{rechts} li. & re. Teilbaum der Wurzel.

T_{links} und T_{rechts} haben Höhe $< h$. *[rekursive Def. der Höhe!]*

Also werden *ihre* Schlüssel sortiert ausgegeben.

Binärer-Suchbaum-Eigenschaft \Rightarrow

Ausgabe (sortierte Schlüssel von T_{links} , dann $root.key$, dann sortierte Schlüssel von T_{rechts}) ist sortiert. ✓

Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
```

```
  if  $x \neq nil$  then
```

```
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
```

```
    gib  $x.key$  aus
```

```
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

Laufzeit

Anz. der Knoten im linken / rechten Teilbaum der Wurzel

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - 1$

Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - 1$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: $\#Kanten = \#Knoten - 1 = n - 1$

Übung: zeig's
mit Induktion!

Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

Laufzeit

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ T(k) + T(n - k - 1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige (mit Substitutionsmethode) $T(n) \leq c \cdot n - 1$

oder: Für jeden Knoten und jede Kante des Baums führt InorderTreeWalk eine konstante Anz. von Schritten aus.

Für Bäume gilt: **#Kanten** = **#Knoten** - 1 = $n - 1$

$\Rightarrow T(n) = c_1 \cdot (n - 1) + c_2 \cdot n \in O(n)$.

Code:

```
InorderTreeWalk(Node  $x = root$ )
  if  $x \neq nil$  then
    InorderTreeWalk( $x.left$ )
    gib  $x.key$  aus
    InorderTreeWalk( $x.right$ )
```

Suche

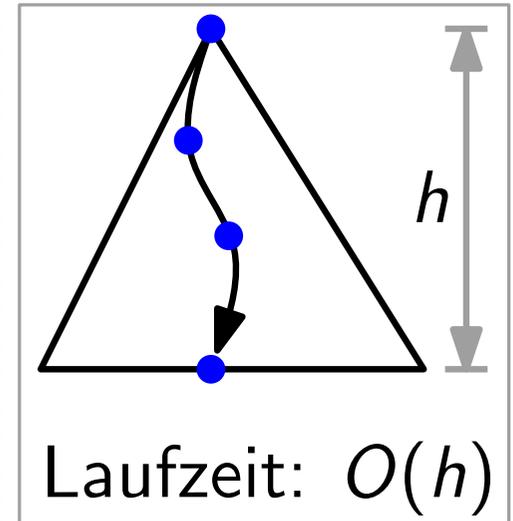
Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für die rekursive Methode

rekursiv

```
Node Search(key  $k$ , Node  $x = root$ )
```

```

if  $x == nil$  or  $x.key == k$  then
  └ return  $x$ 
if  $k < x.key$  then
  └ return Search( $k$ ,  $x.left$ )
else return Search( $k$ ,  $x.right$ )
  
```



iterativ

```

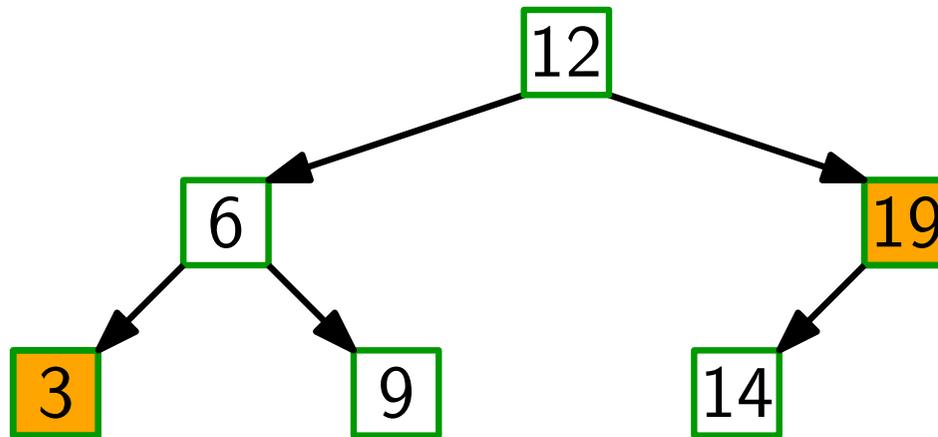
while  $x \neq nil$  and  $x.key \neq k$  do
  └ if  $k < x.key$  then
    └  $x = x.left$ 
  └ else  $x = x.right$ 
return  $x$ 
  
```

Laufzeit: $O(h)$

Trotzdem schneller,
da keine Verwaltung
der rekursiven
Methodenaufrufe.

Minimum & Maximum

Frage: Was folgt aus der Binärer-Suchbaum-Eigenschaft für die Position von Min und Max im Baum?



Antwort: Min steht ganz links, Max ganz rechts!

Aufgabe: Schreiben Sie für binäre Suchbäume die Methode

`Node` Minimum(`Node` $x = root$) — *iterativ!*

if $x == nil$ **then return** nil

while $x.left \neq nil$ **do**

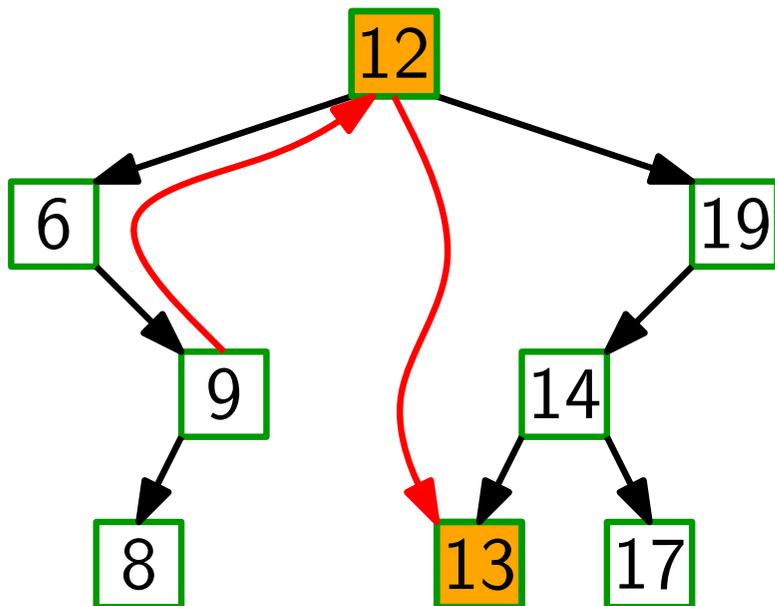
└ $x = x.left$

return x

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Nachfolger(19) := *nil*

Nachfolger(12) = ?

Nachfolger(9) = ?

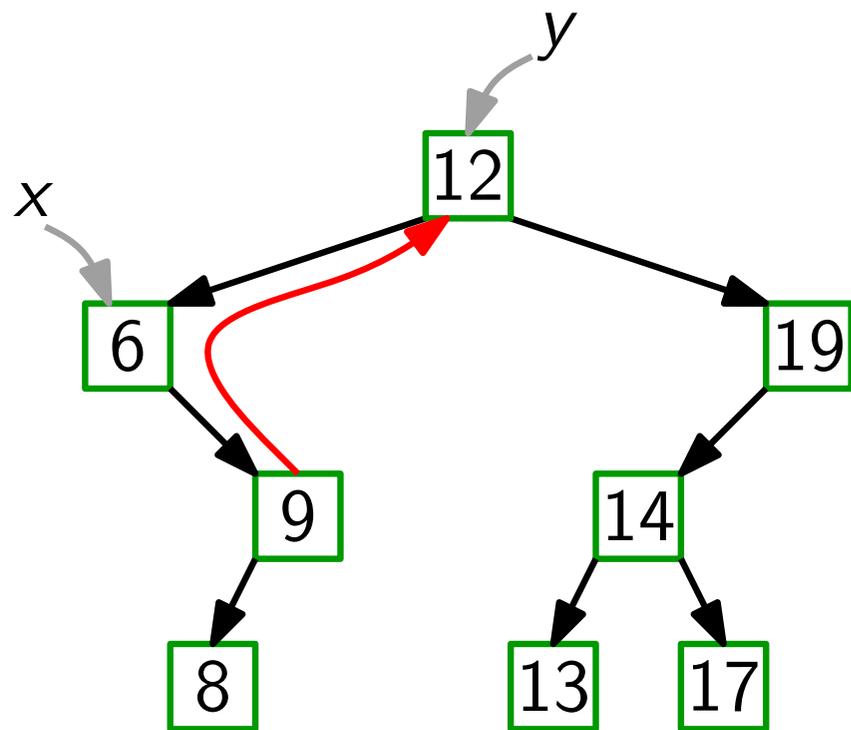
$13 == \text{Minimum}(„12.\text{right}“)$

9 hat kein rechtes Kind; $9 == \text{Maximum}(„12.\text{left}“)$

Nachfolger (und Vorgänger)

Vereinfachende Annahme: alle Schlüssel sind verschieden.

Erinnerung: $\text{Nachfolger}(x) = \text{Knoten mit kleinstem Schlüssel unter allen } y \text{ mit } y.\text{key} > x.\text{key}.$
 $= \arg \min_y \{y.\text{key} \mid y.\text{key} > x.\text{key}\}.$



Tipp: Probieren Sie auch
z.B. $\text{Successor}("19")!$

Node Successor(Node x)

if $x.\text{right} \neq \text{nil}$ **then**

└ **return** Minimum($x.\text{right}$)

$y = x.p$

while $y \neq \text{nil}$ **and** $x == y.\text{right}$ **do**

└ $x = y$

└ $y = y.p$

return y

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

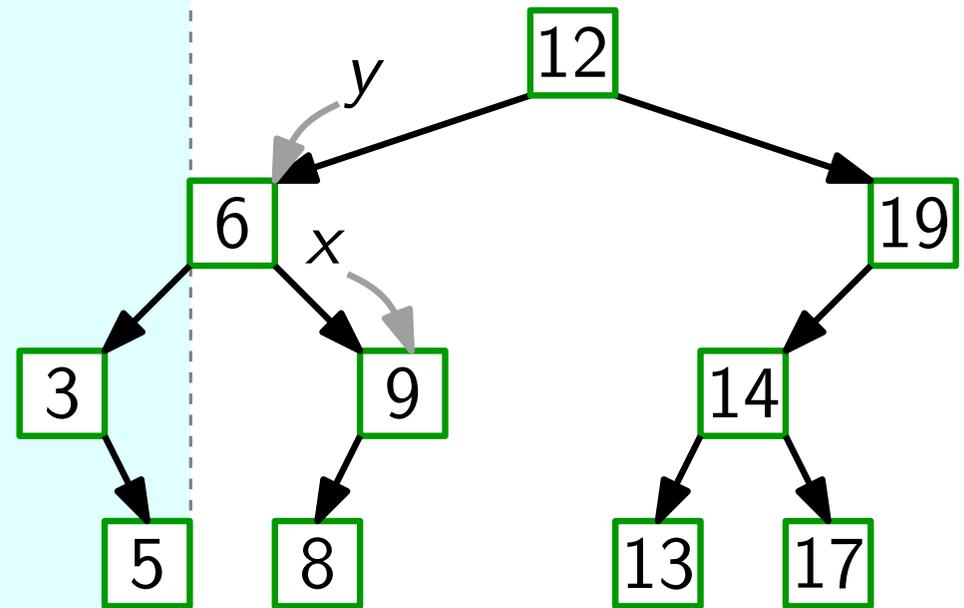
while $x \neq nil$ **do**

$y = x$

if $k < x.key$ **then**

$x = x.left$

else $x = x.right$



Insert(11)

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

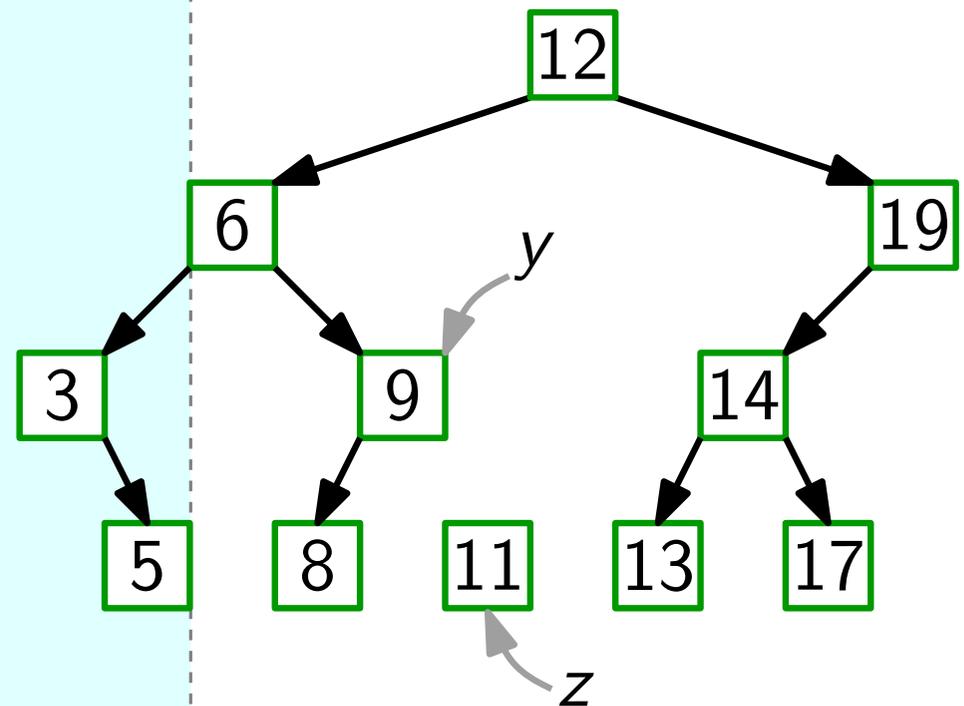
$y = x$

if $k < x.key$ **then**

$x = x.left$

else $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$



Insert(11)

$x == nil$

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

$y = x$

if $k < x.key$ **then**

$x = x.left$

else $x = x.right$

$z = \text{new Node}(k, y)$

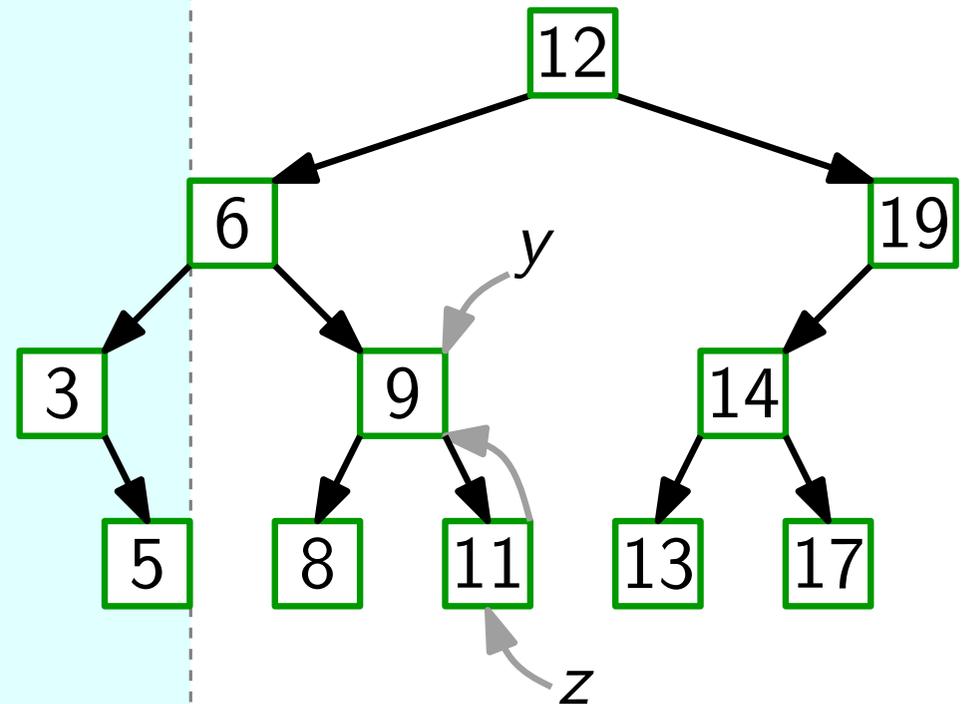
if $y == nil$ **then** $root = z$

else

if $k < y.key$ **then** $y.left = z$

else $y.right = z$

return z



Insert(11)

$x == nil$

Löschen

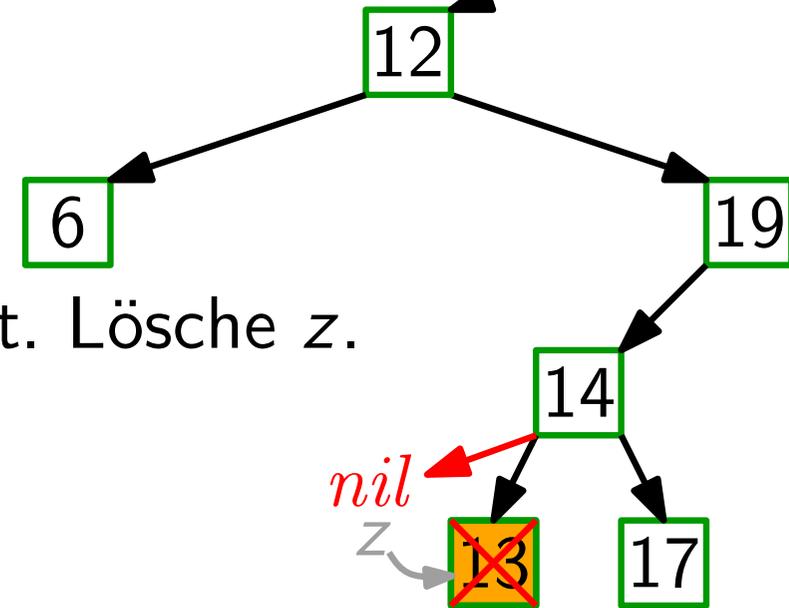
Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist, setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z .

2. z hat ein Kind x .

3. z hat zwei Kinder.



Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

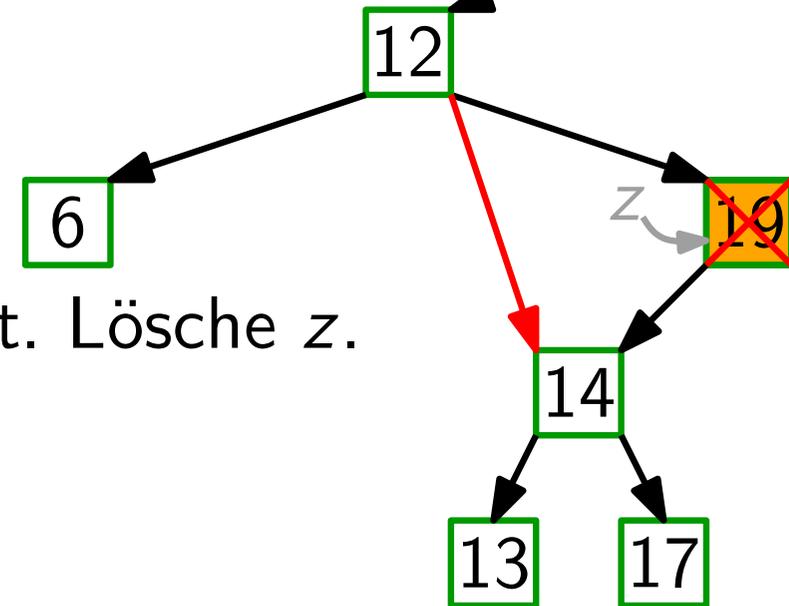
1. z hat keine Kinder.

Falls z linkes Kind von $z.p$ ist, setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z .

2. z hat ein Kind x .

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x .
Setze $x.p = z.p$. Lösche z .

3. z hat zwei Kinder.



Löschen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat keine Kinder.

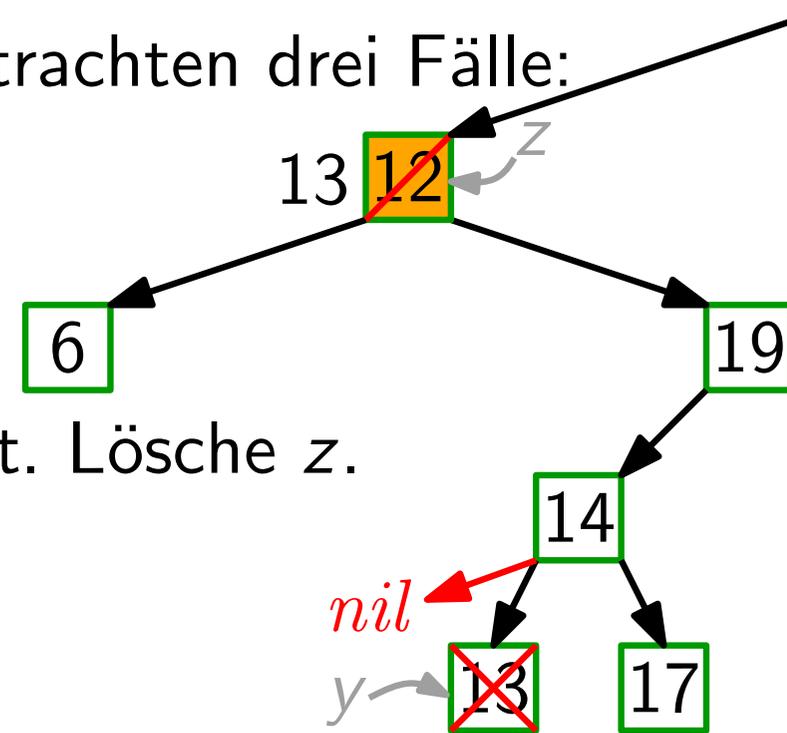
Falls z linkes Kind von $z.p$ ist, setze $z.p.left = nil$; sonst umgekehrt. Lösche z .

2. z hat ein Kind x .

Setze den Zeiger von $z.p$, der auf z zeigt, auf x .
Setze $x.p = z.p$. Lösche z .

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y = \text{Successor}(z)$ und $z.key = y.key$. Lösche y . (Fall 1 oder 2!)



Zusammenfassung

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren* $\Rightarrow h \in O(\log n)$

Achtung: Die Vorlesung am Do, 7.12., fällt aus!