Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2023/24

9. Vorlesung

Sortieren in Linearzeit

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Organisatorisches

Diesen Do (16.11.) findet um 8:30 der 1. Zwischentest statt.

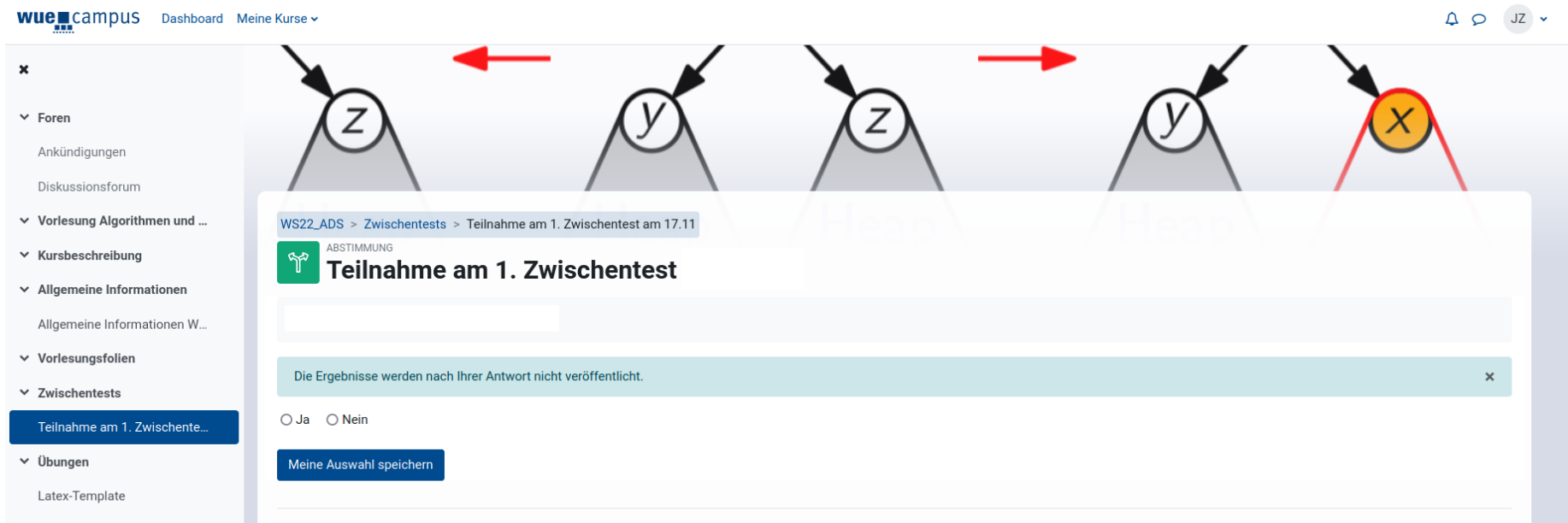
Wenn Sie mitschreiben möchten, melden Sie sich in der Abstimmung auf WueCampus bis morgen (15.11.) 15 Uhr an.
Wir drucken die Exemplare nach vorhandenen Anmeldungen!

Organisatorisches

Diesen Do (16.11.) findet um 8:30 der 1. Zwischentest statt.

Wenn Sie mitschreiben möchten, melden Sie sich in der Abstimmung auf WueCampus bis morgen (15.11.) 15 Uhr an. Wir drucken die Exemplare nach vorhandenen Anmeldungen!

https://wuecampus.uni-wuerzburg.de/moodle/mod/choice/view.php?id=2802051



Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

vergleichsbasierter Sortieralg.

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg.
charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg.
charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:

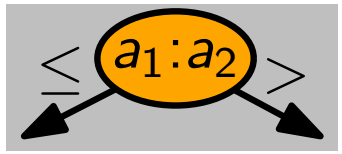
- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



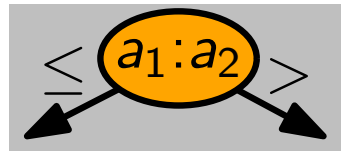
- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



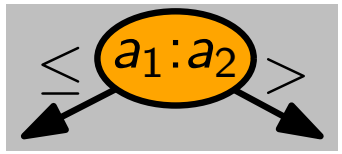
- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe

Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



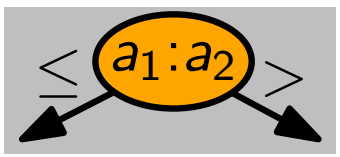
- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq / >$) eines Vergleichs

Sortieren durch Vergleichen

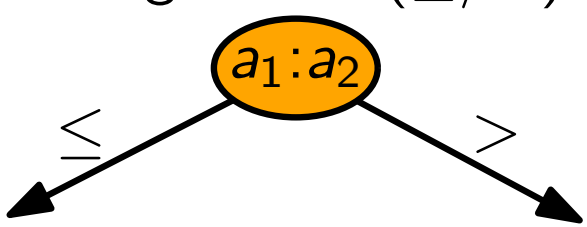
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



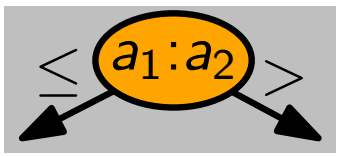
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

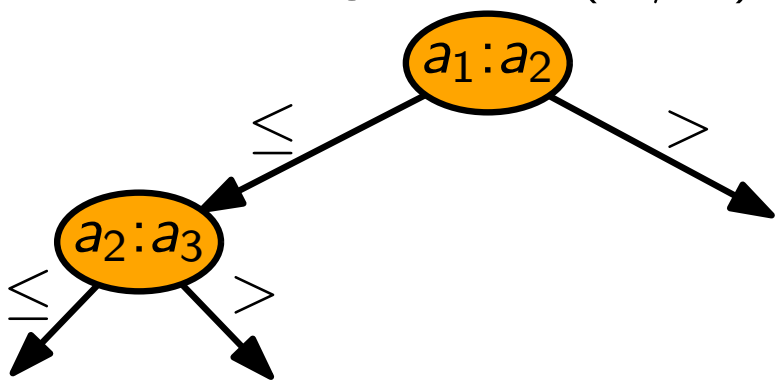
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



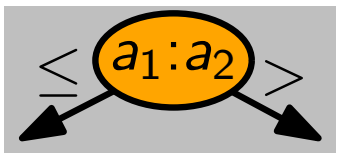
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

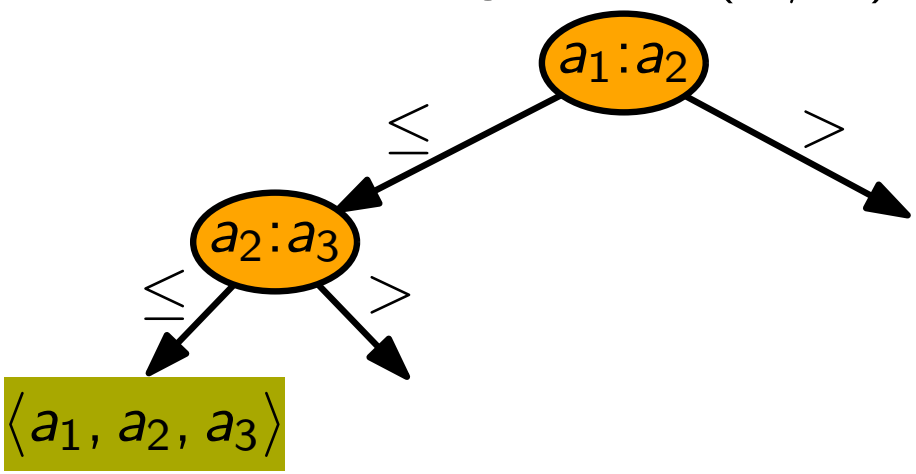
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



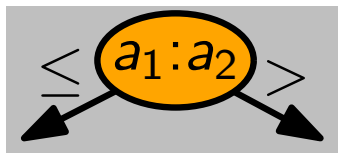
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

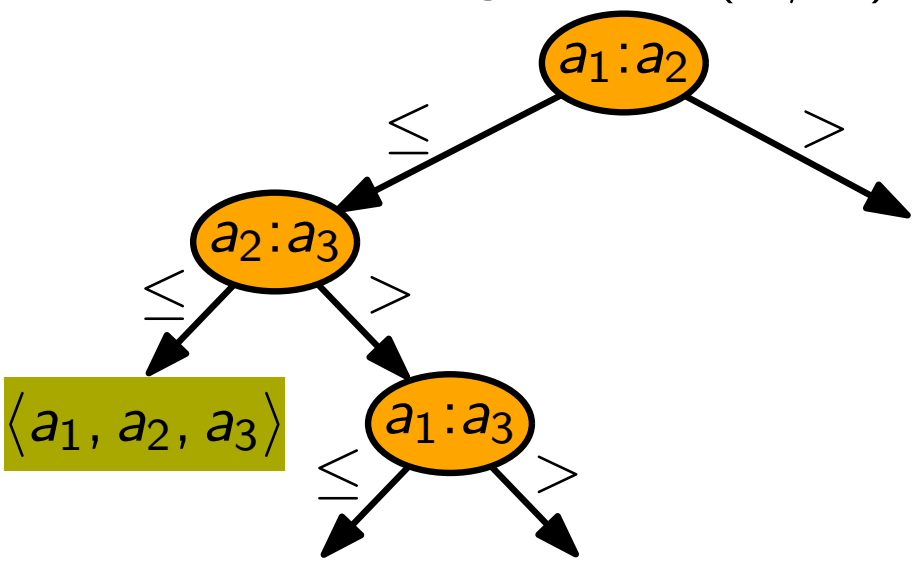
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



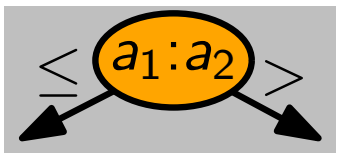
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

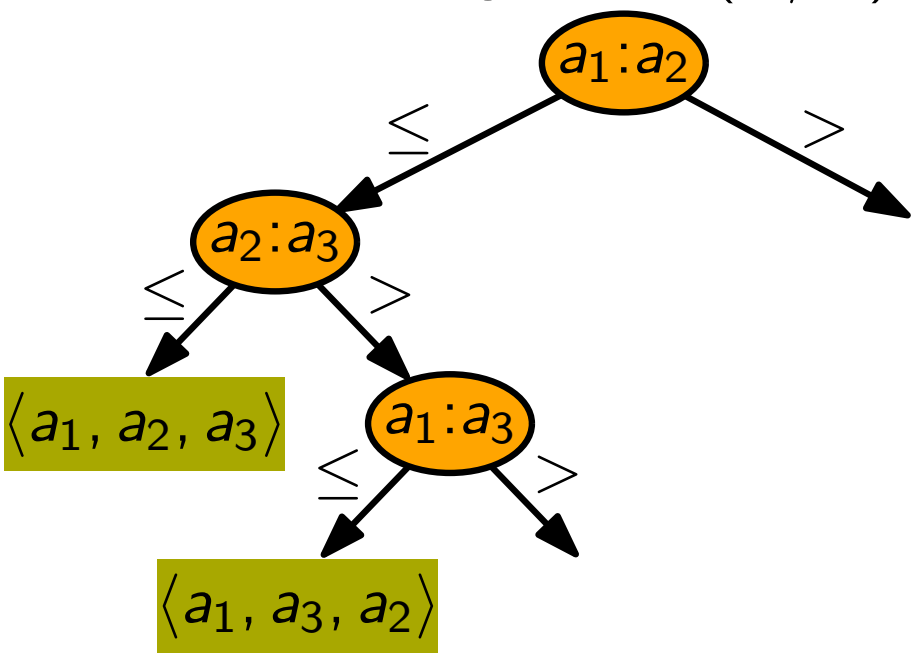
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



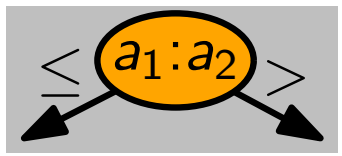
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

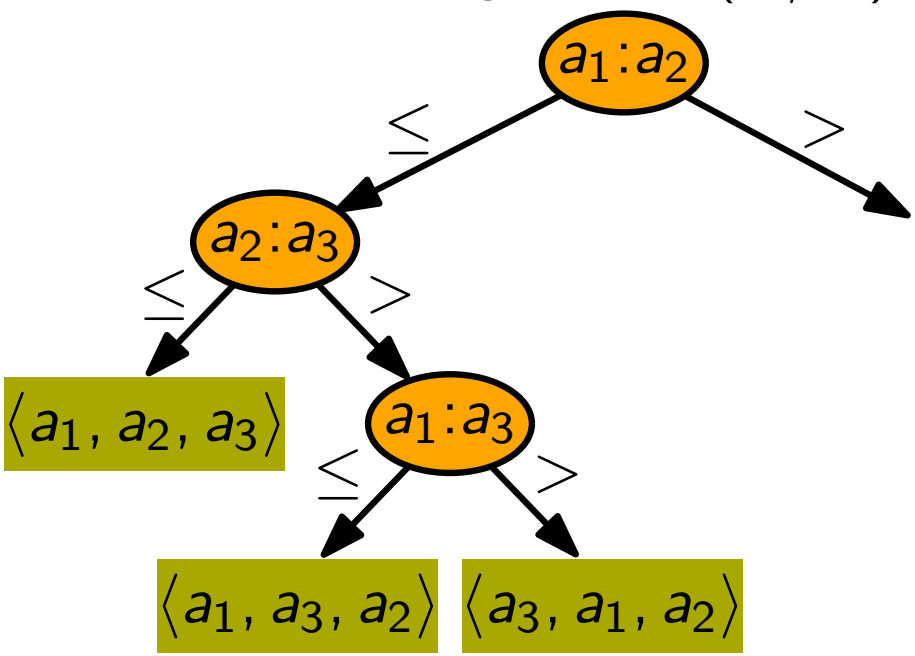
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



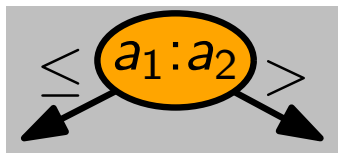
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

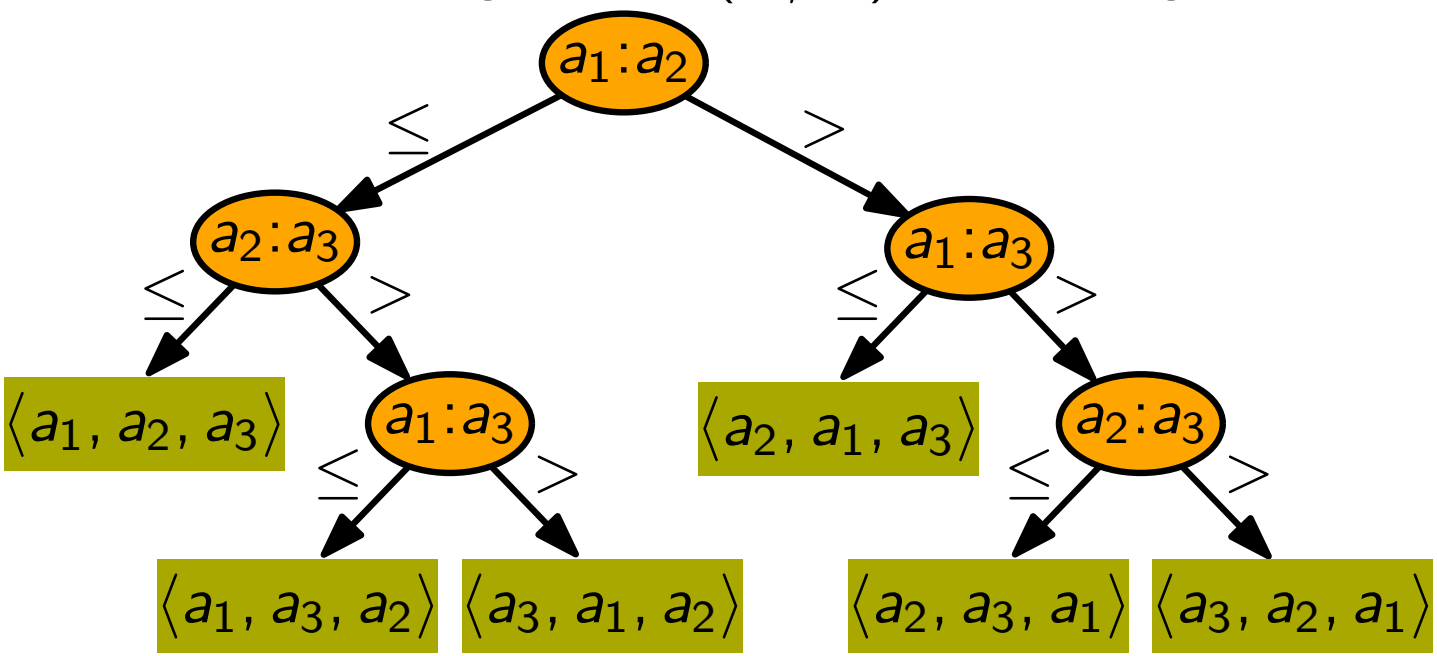
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



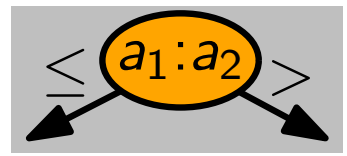
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

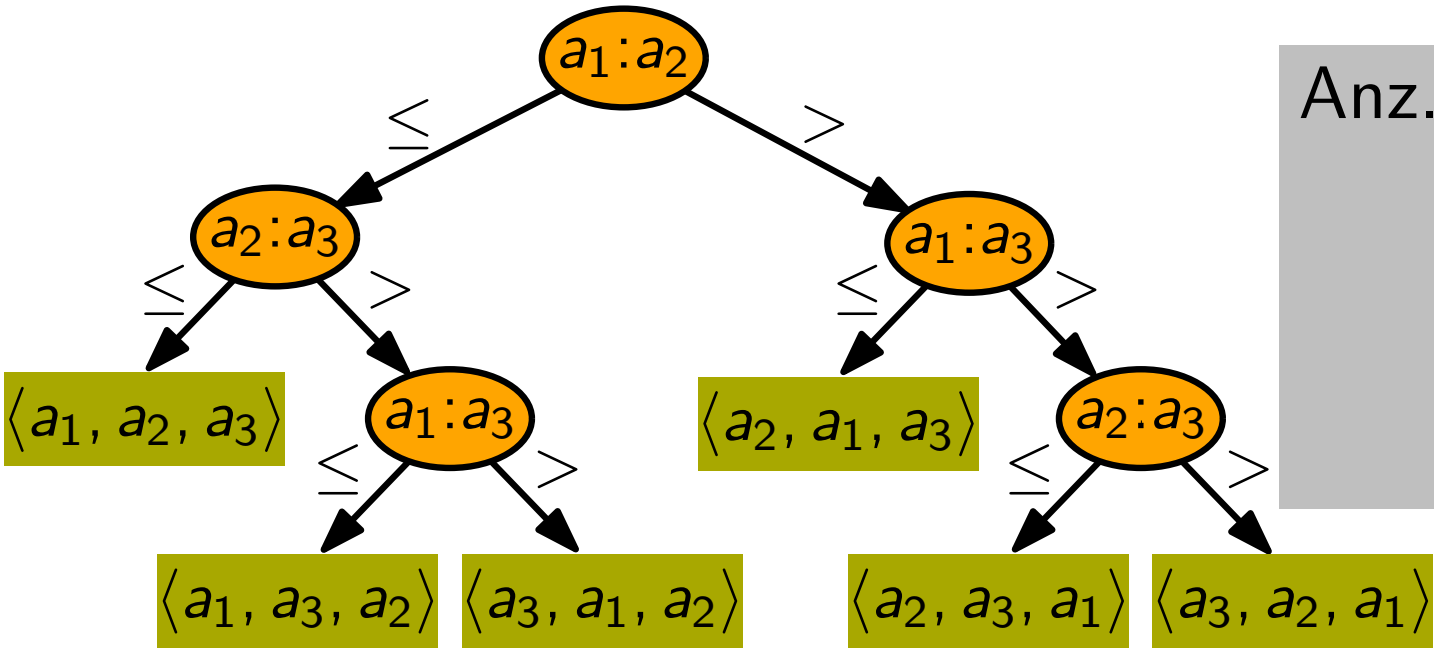
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im besten Fall

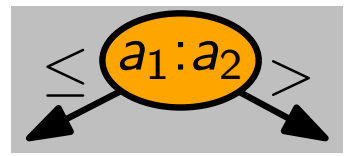
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

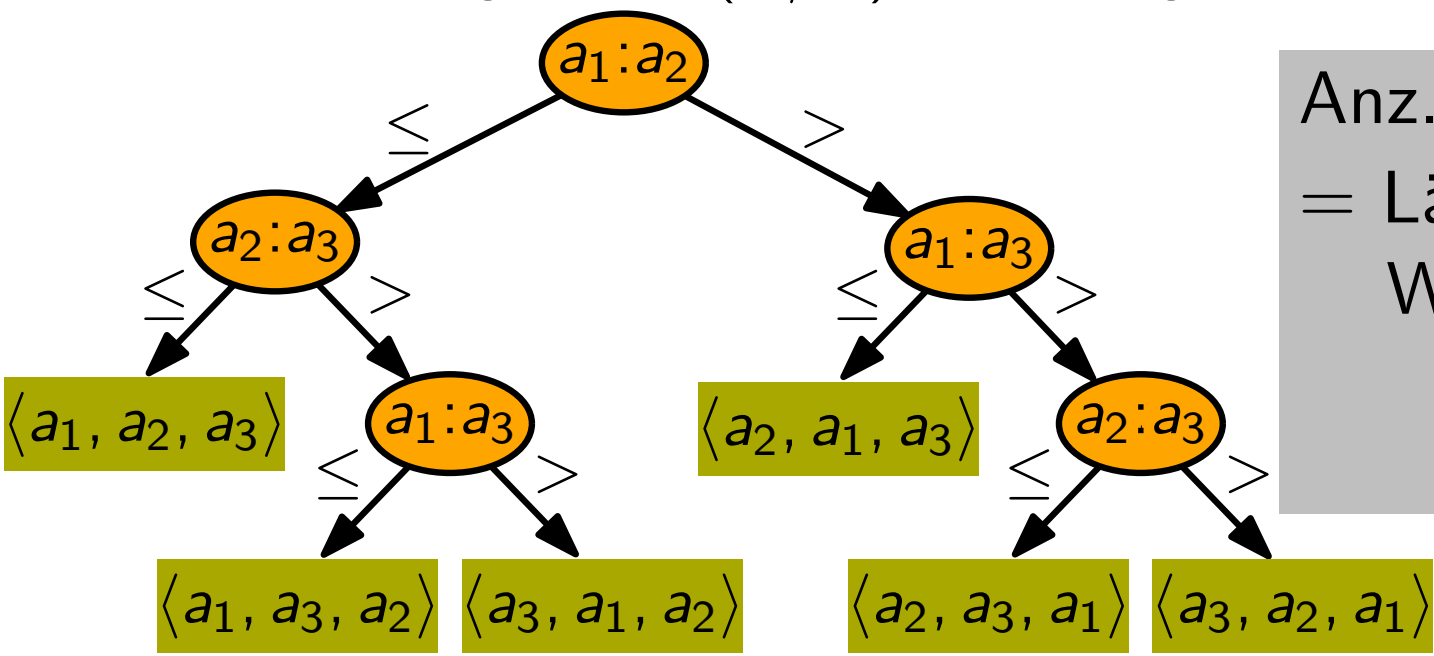
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im besten Fall = Länge eines kürzesten Wurzel-Blatt-Pfads

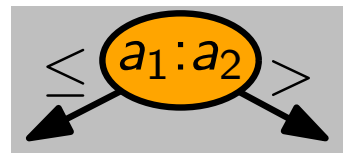
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

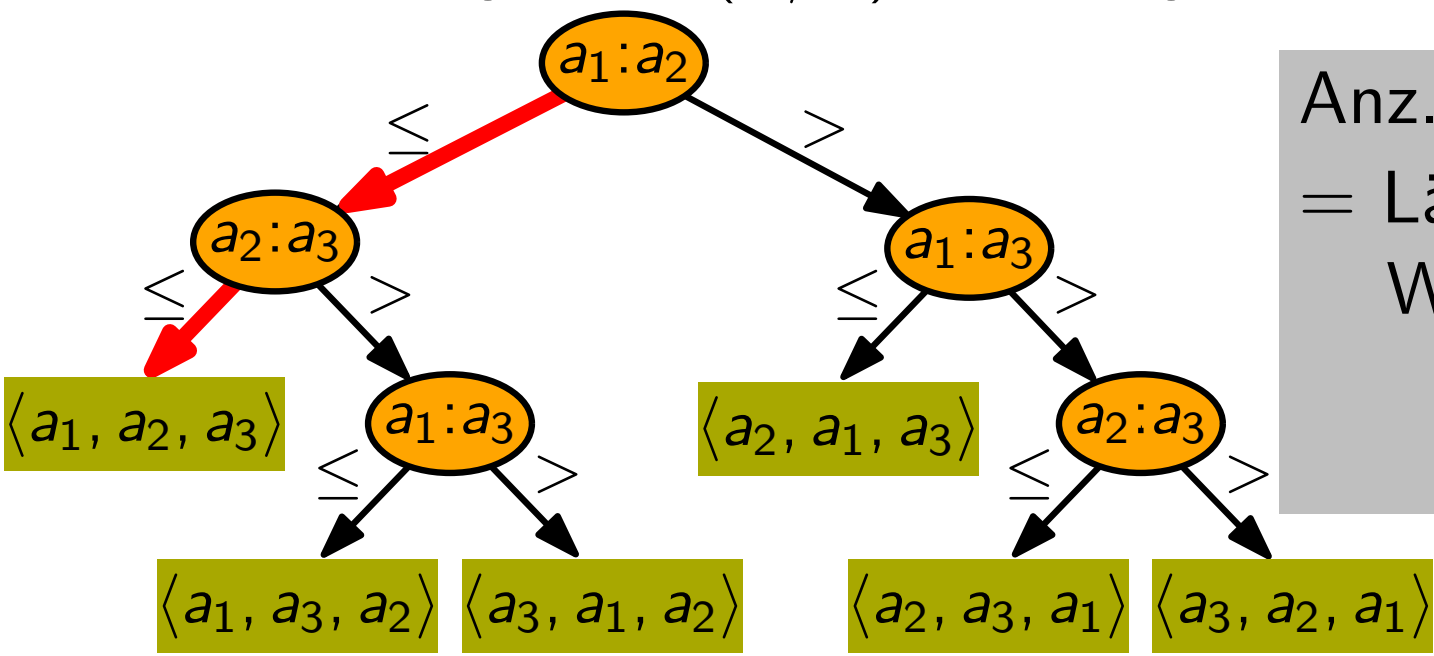
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im besten Fall = Länge eines kürzesten Wurzel-Blatt-Pfads

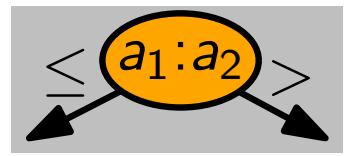
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

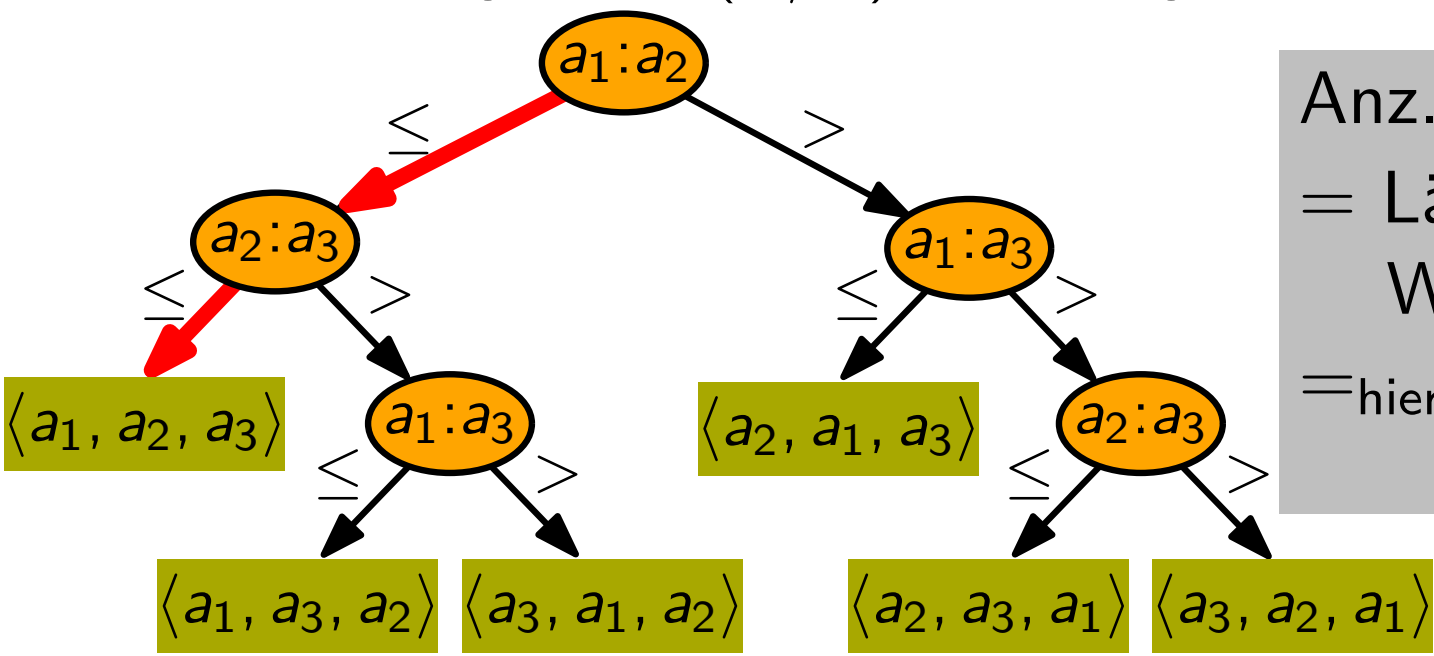
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im besten Fall
= Länge eines kürzesten Wurzel-Blatt-Pfads
$=_{\text{hier}}$ 2

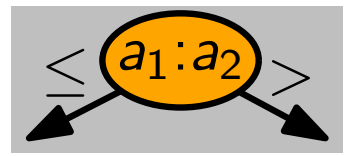
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

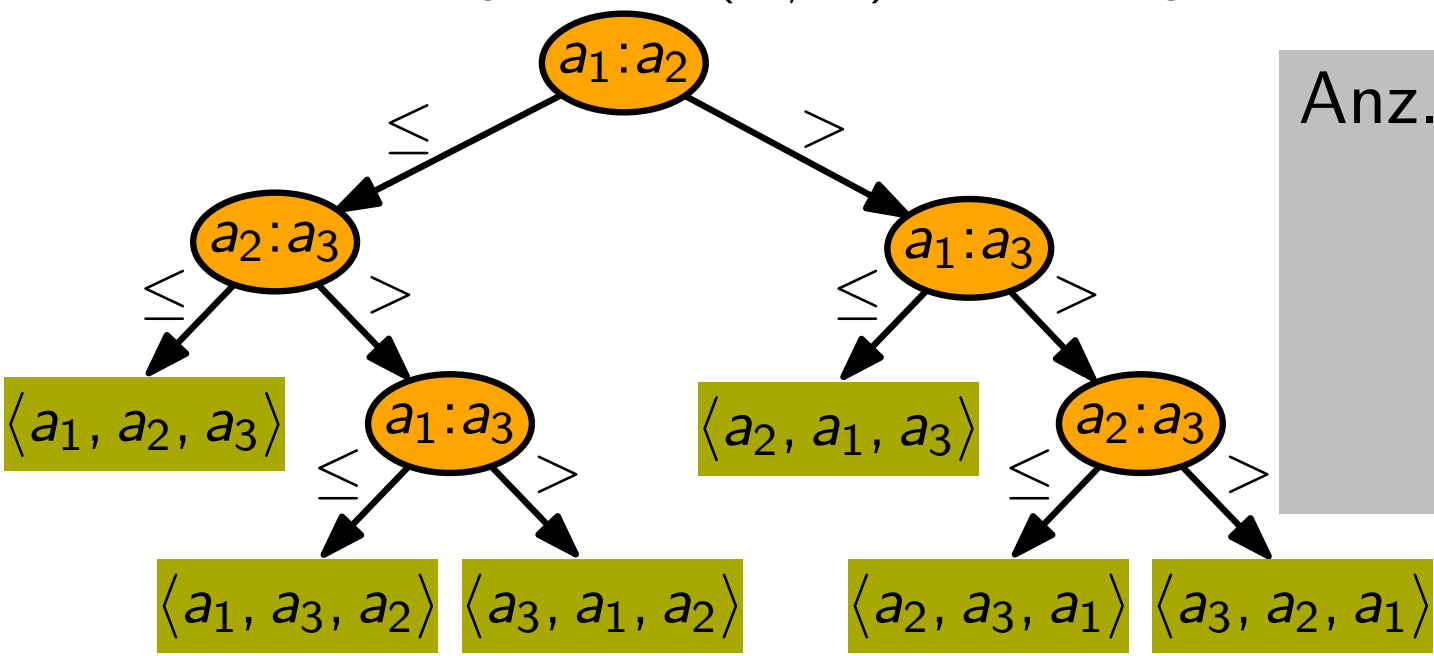
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im *worst case*

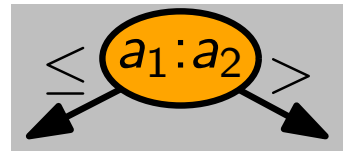
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

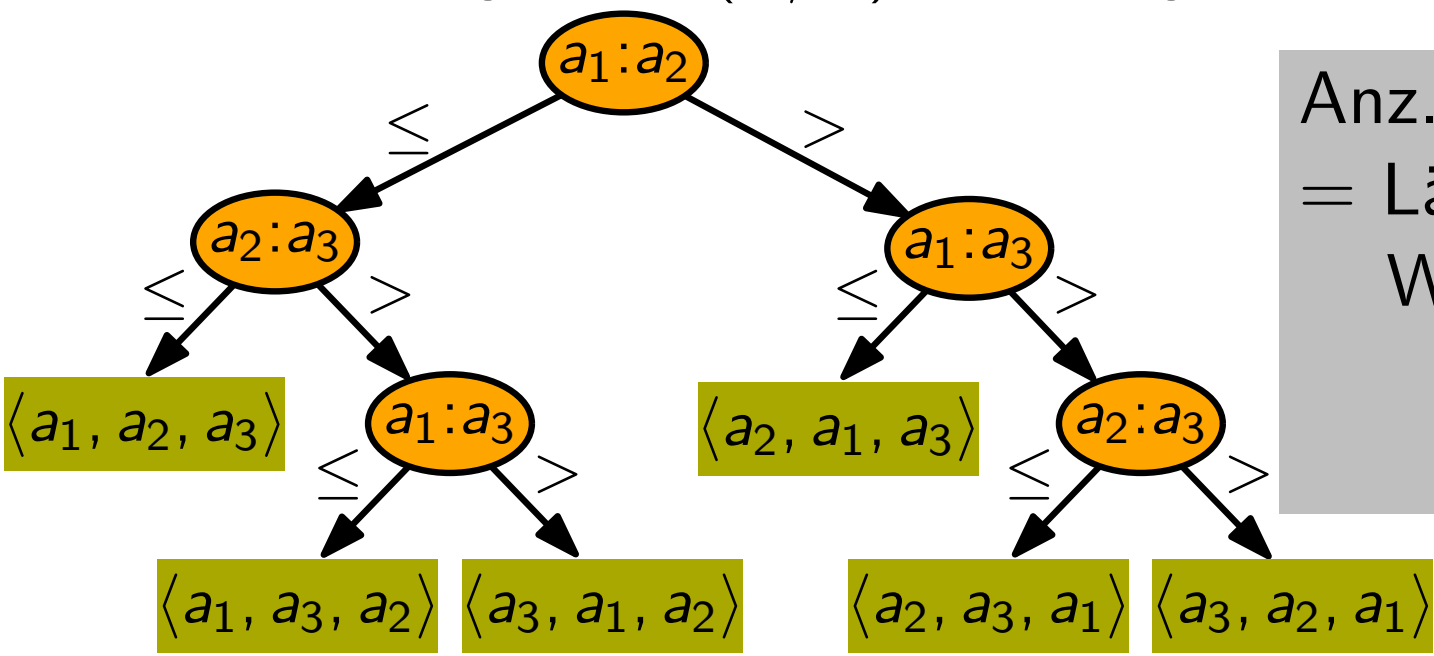
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im *worst case* = Länge eines *längsten* Wurzel-Blatt-Pfads

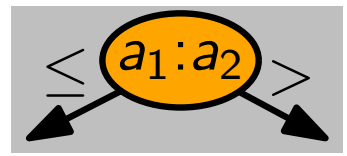
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

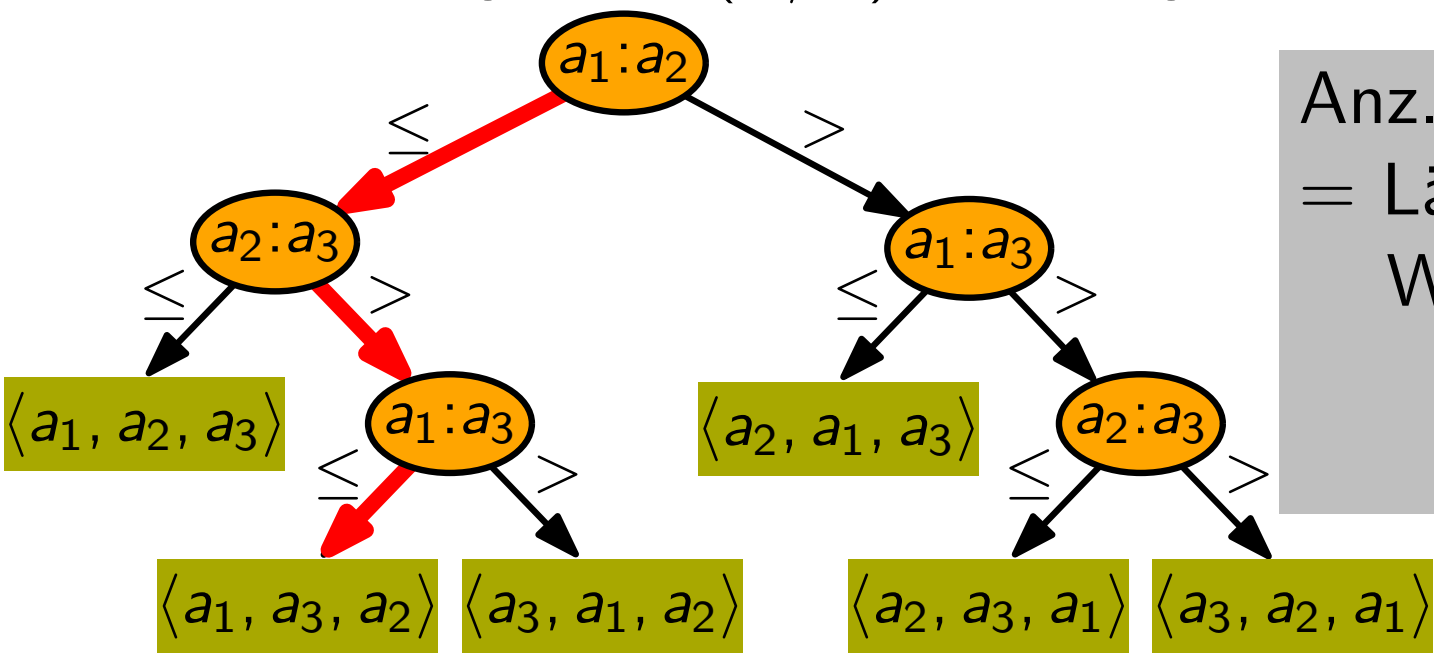
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im *worst case* = Länge eines *längsten* Wurzel-Blatt-Pfads

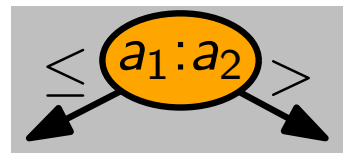
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

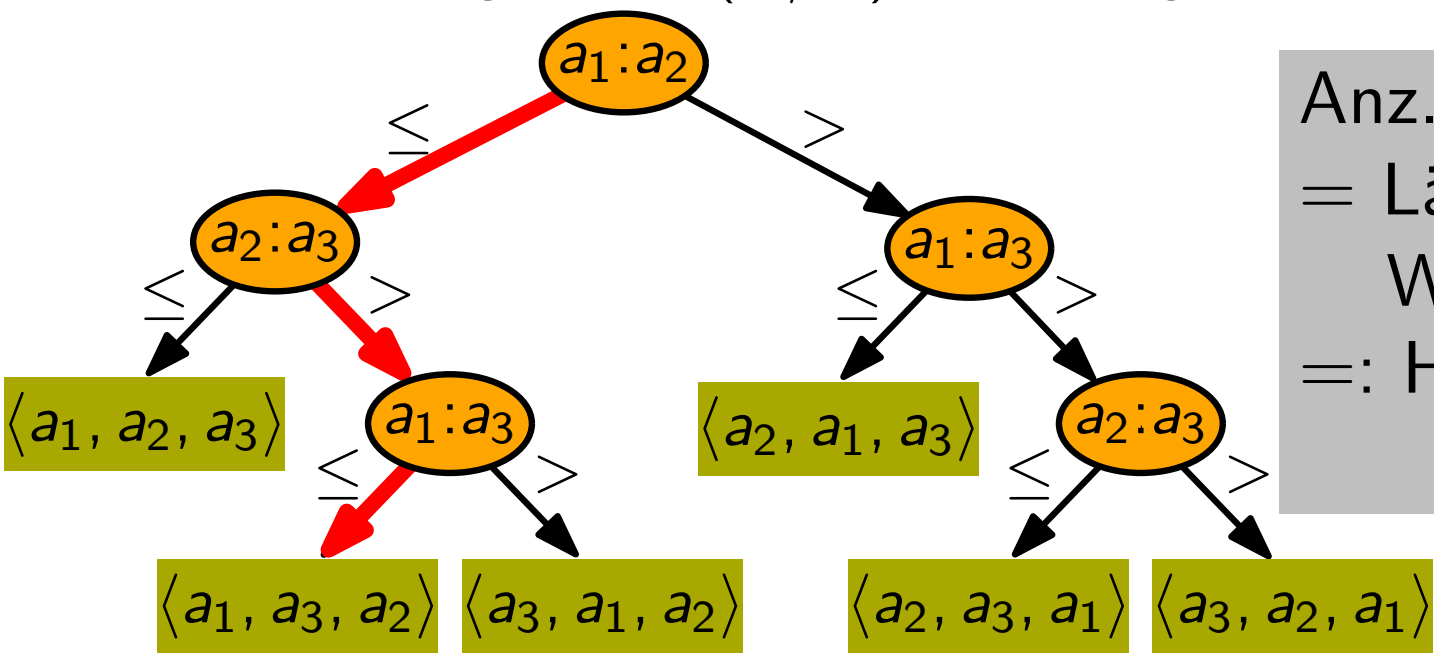
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im *worst case*
= Länge eines *längsten* Wurzel-Blatt-Pfads
=: Höhe des Baums

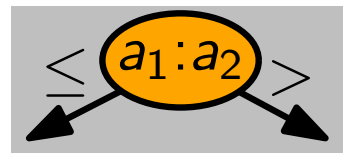
Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Sortieren durch Vergleichen

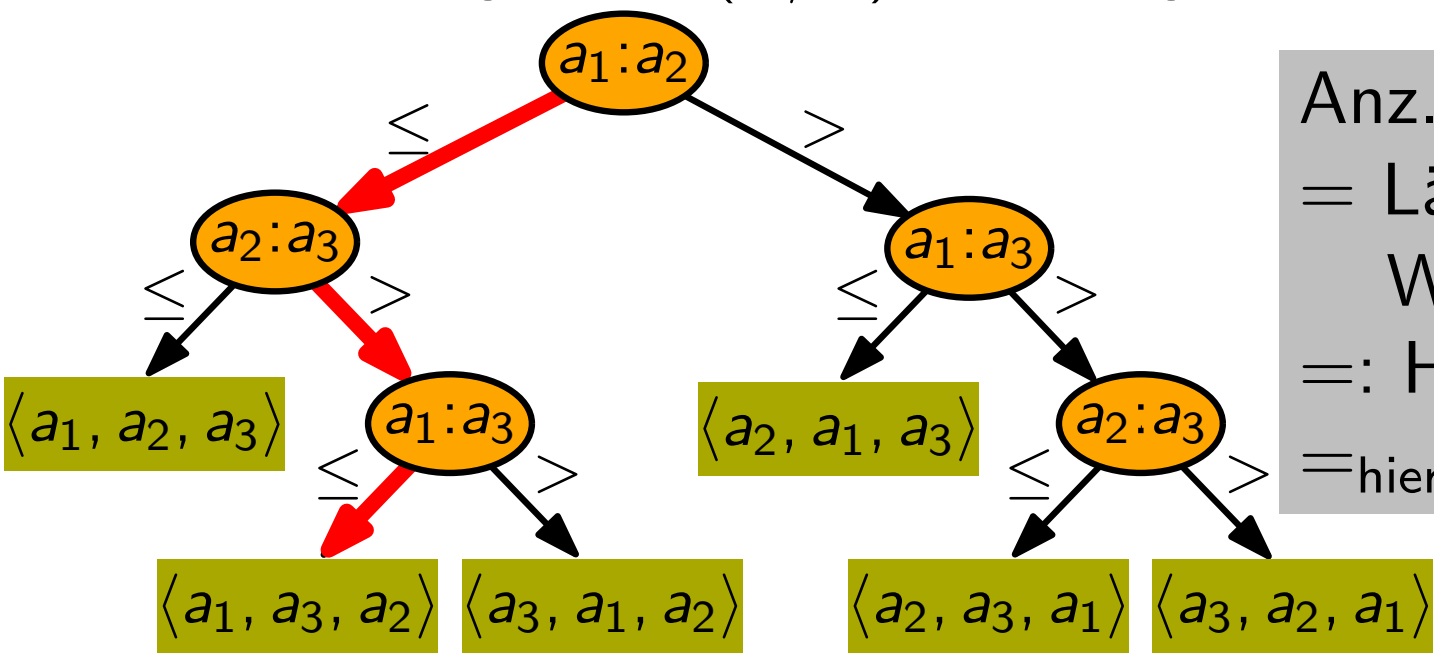
Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $\xrightarrow{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Schlüsselvergleiche

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. links immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Anz. Vgl. im *worst case*
= Länge eines *längsten* Wurzel-Blatt-Pfads
=: Höhe des Baums
$=_{\text{hier}}$ 3

Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.
Anz. Blätter = Anz. Permutationen von n Obj. =

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.
Anz. Blätter = Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.
Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$
Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n!$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

$=$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

partielle Integration

$=$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

partielle Integration

$=$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

partielle Integration

$=$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

partielle Integration

$=$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

partielle Integration

$= \frac{1}{\ln 2} \left(x \cdot \square - \int_1^n x \cdot \square \, dx \right)$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$

partielle Integration

$= \frac{1}{\ln 2} \left(x \cdot \ln x \,|_1^n - \int_1^n x \cdot \square \, dx \right)$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$$

partielle Integration

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(x \cdot \ln x \,\Big|_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right)$$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$$

partielle Integration

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(x \cdot \ln x \,|_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{(n \ln n - 0) - (n-1)}{\ln 2}$$

$\int u' v = uv - \int uv'$

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$

Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$$

partielle Integration

$\int u' v = uv - \int uv'$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(x \cdot \ln x \,|_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{(n \ln n - 0) - (n-1)}{\ln 2}$$

$$\in \Omega(n \log n)$$

Resultat

Satz. Jeder vergleichsbasierte Sortieralg. benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um n Objekte zu sortieren.

Resultat

Satz. Jeder vergleichsbasierte Sortieralg. benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um n Objekte zu sortieren.

Korollar. MergeSort und HeapSort sind *asymptotisch worst-case optimale* vergleichsbasierte Sortieralg.

Wir durchbrechen die Schallmauer

Wir durchbrechen die Schallmauer

- SpaghettiSort

aus: www.marions-kochbuch.de

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

aus: www.marions-kochbuch.de

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

• CountingSort

aus: www.marions-kochbuch.de

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

• CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$

aus: www.marions-kochbuch.de

By Eduard Marmet, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5810282

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$
- RadixSort

aus: www.marions-kochbuch.de

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

• CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$

• RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen

aus: www.marions-kochbuch.de

By Eduard Marmet, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5810282

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$
- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
- BucketSort

aus: www.marions-kochbuch.de

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$
- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen

aus: www.marions-kochbuch.de

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

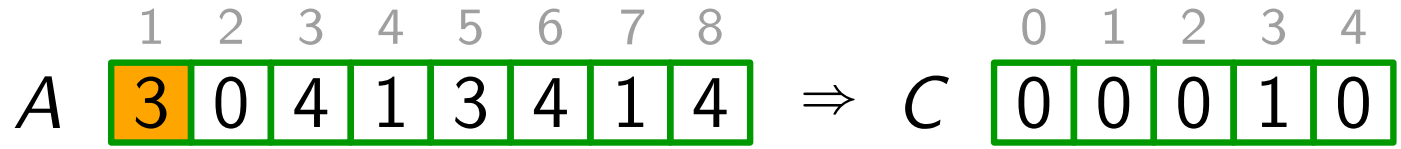
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



CountingSort

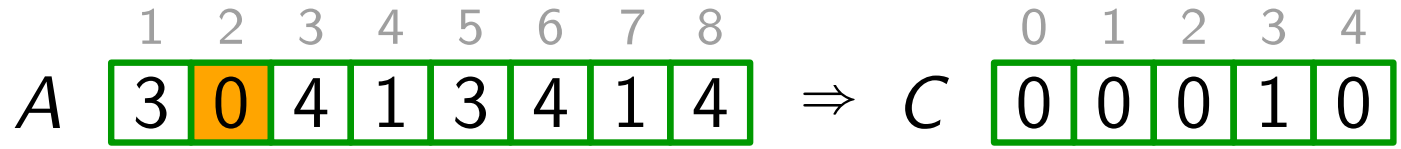
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

CountingSort

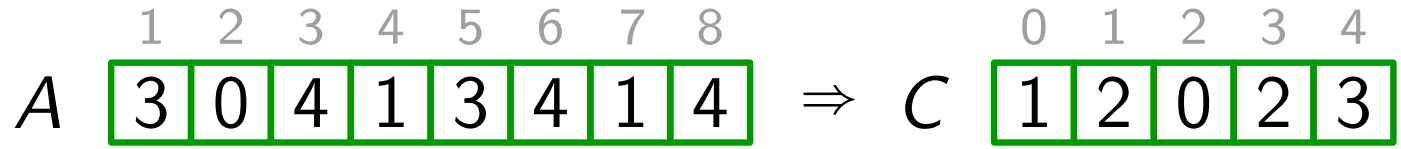
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

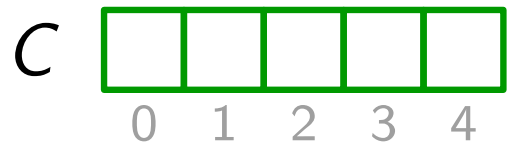
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

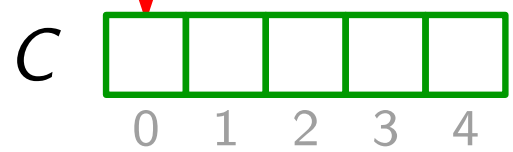
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

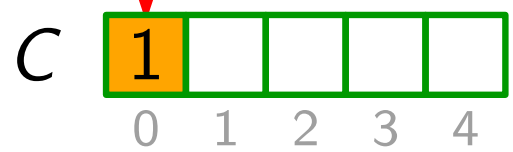
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

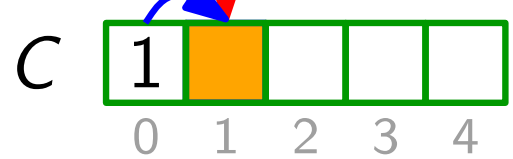
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

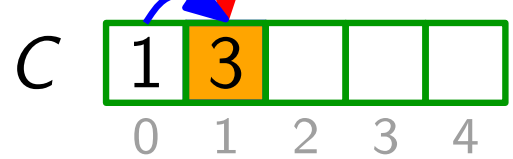
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

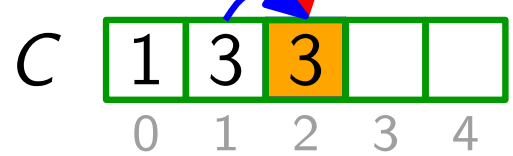
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

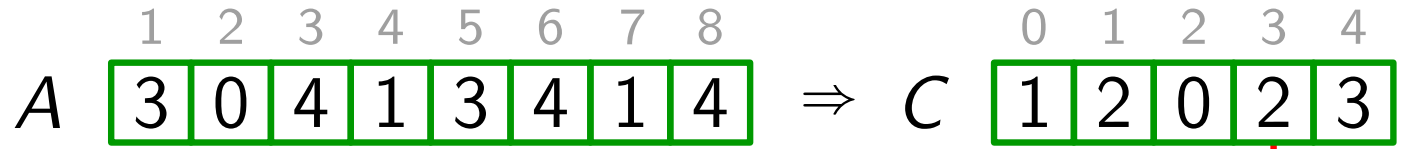
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

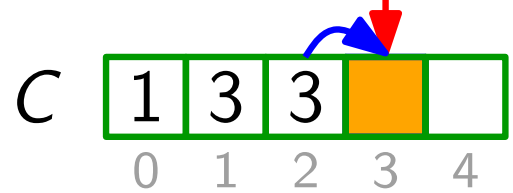
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

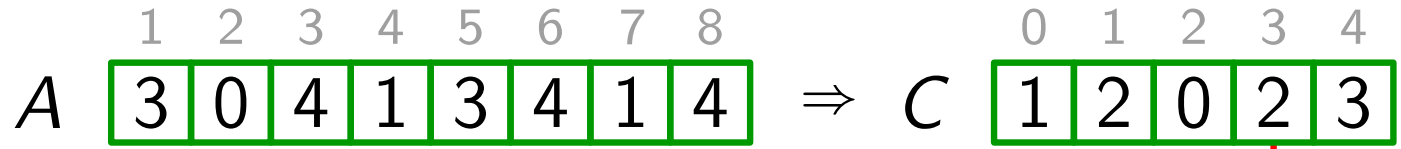
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

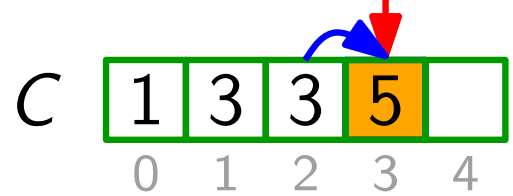
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

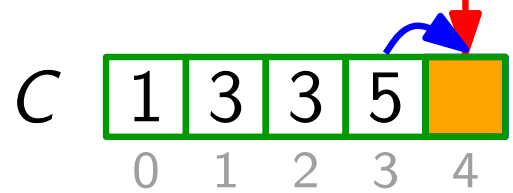
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

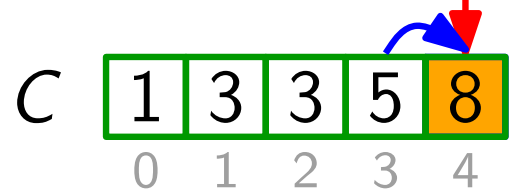
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	1	3	3	5	8

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	1	3	3	5	8

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

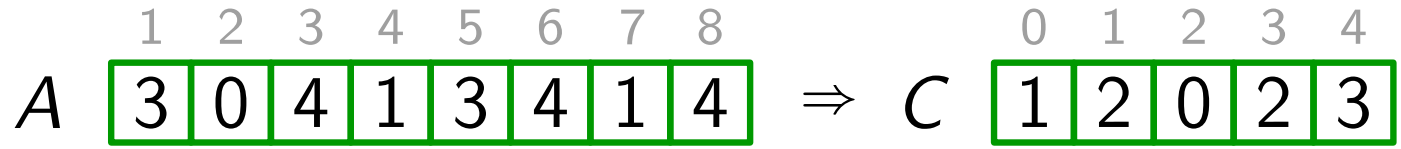
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

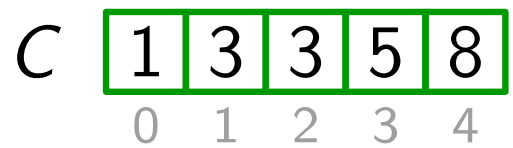
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

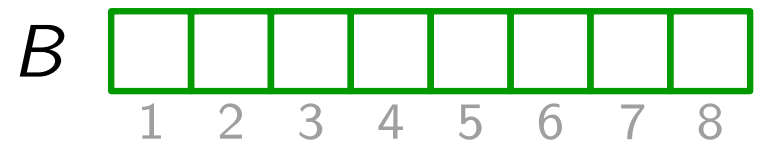
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

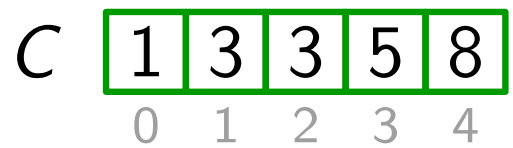
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

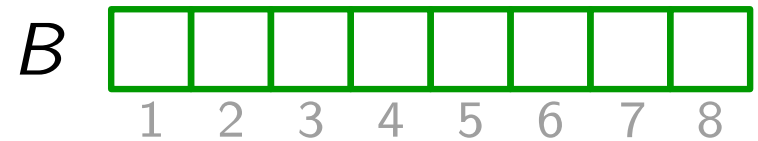
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

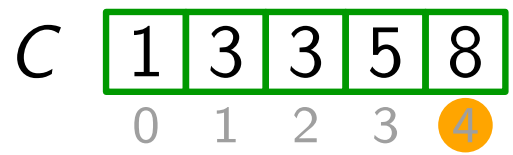
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

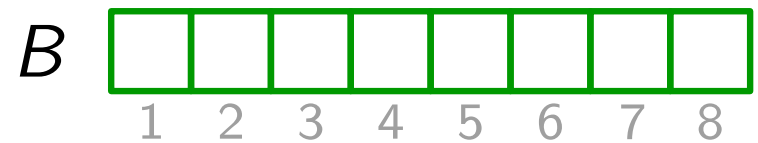
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

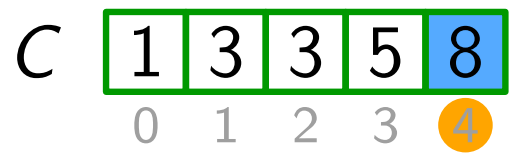
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

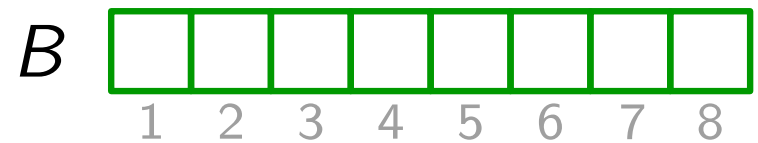
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

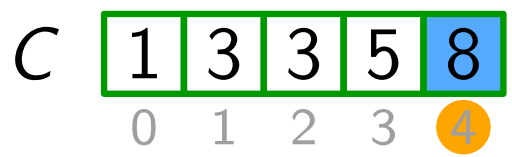
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

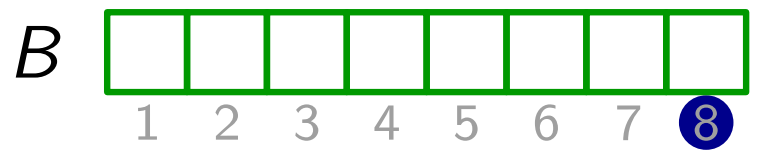
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

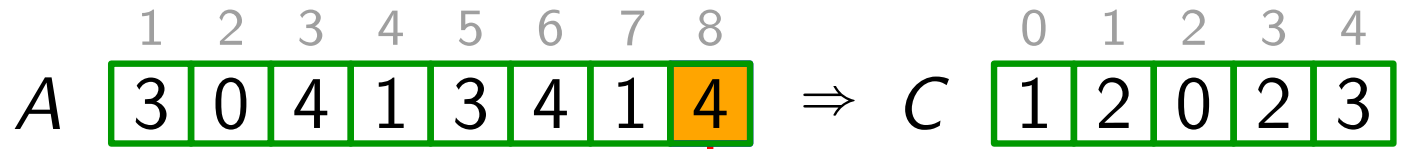
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

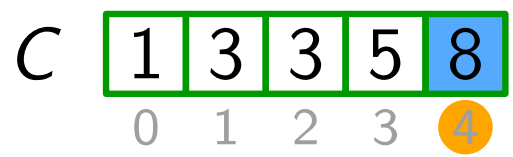
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

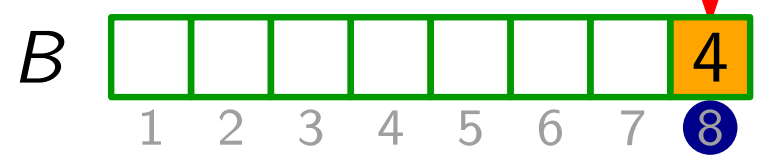
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

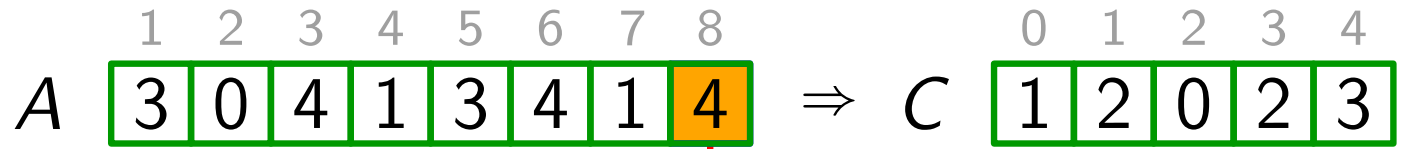
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

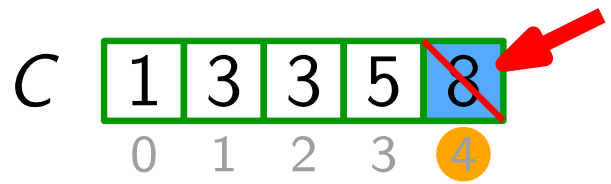
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

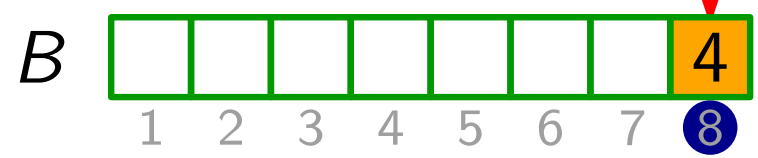
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

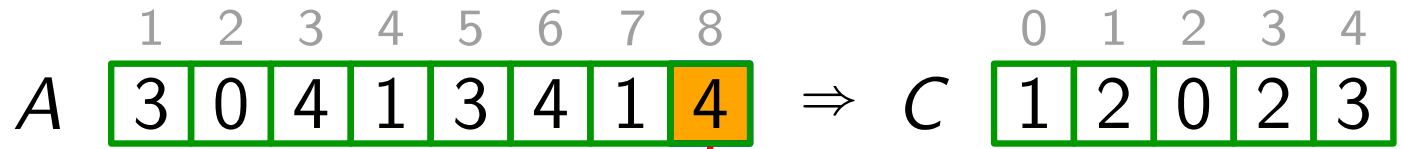
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

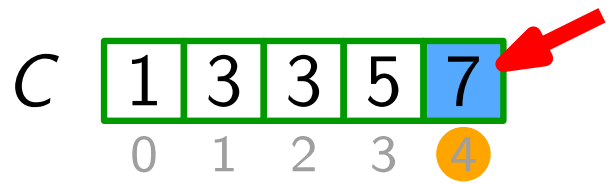
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

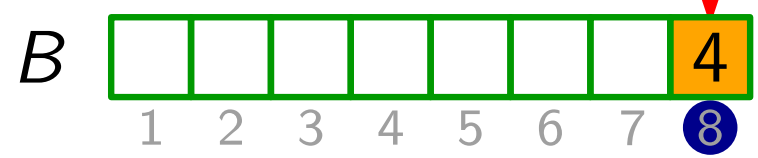
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	1	3	3	5	7

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B								4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

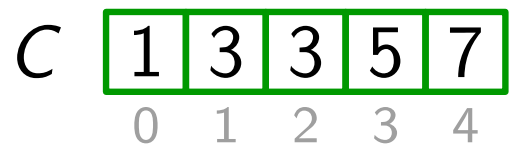
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

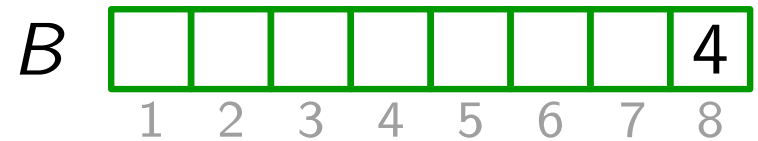
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

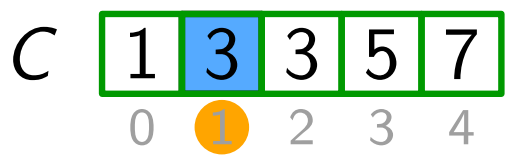
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

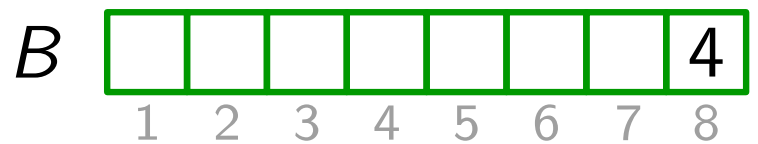
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

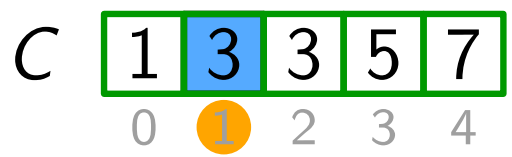
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

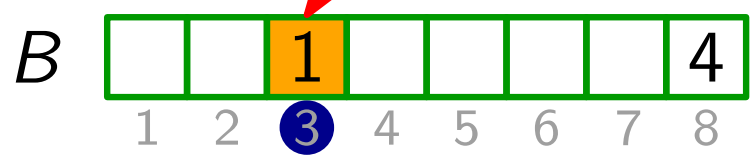
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

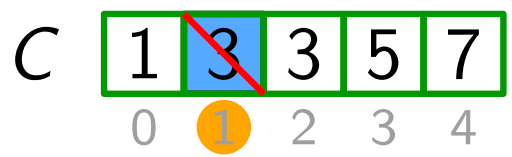
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

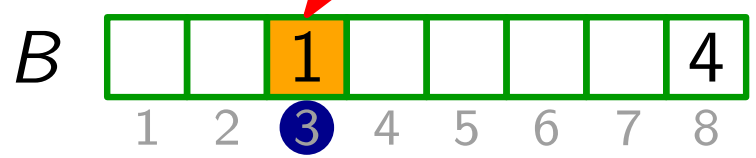
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

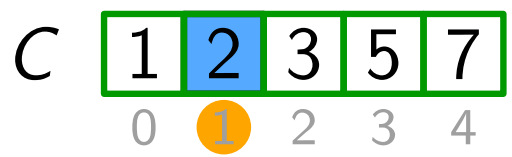
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

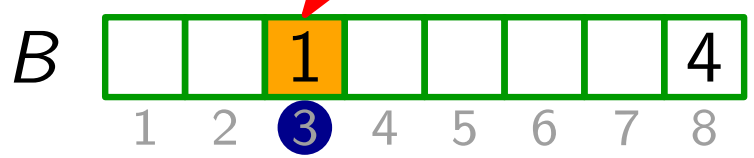
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	1	2	3	5	7

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B			1					4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

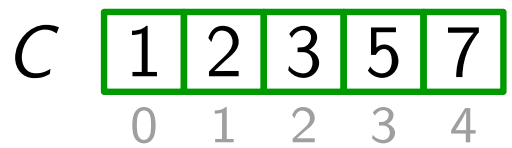
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

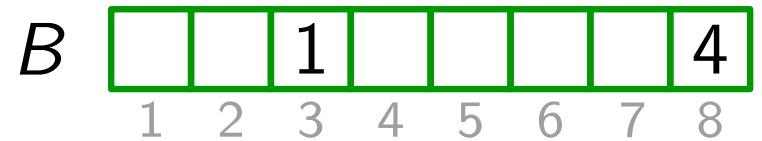
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



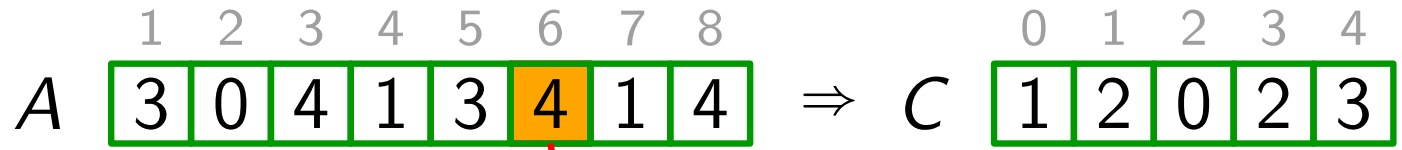
CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

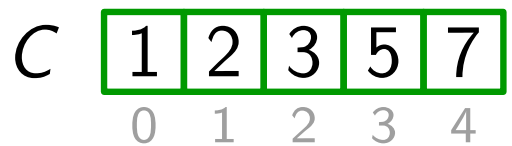
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

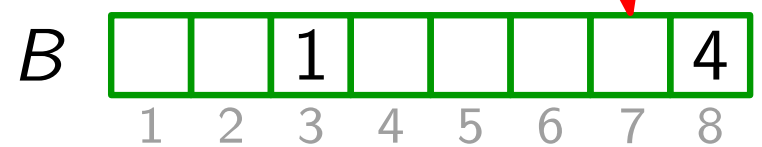
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

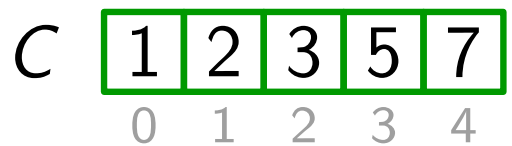
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

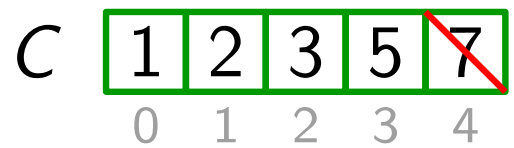
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

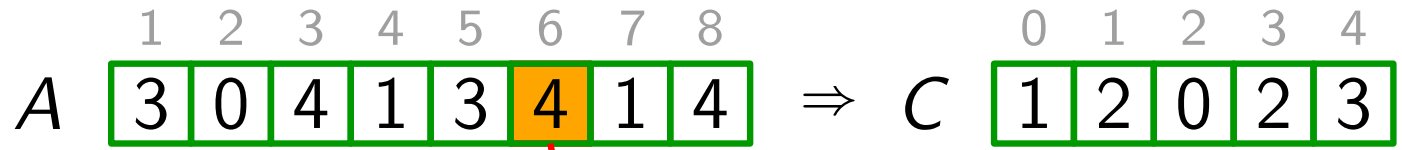
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

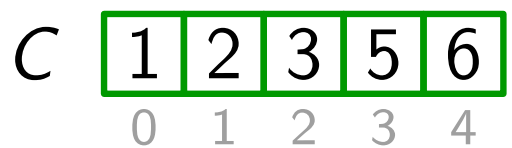
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

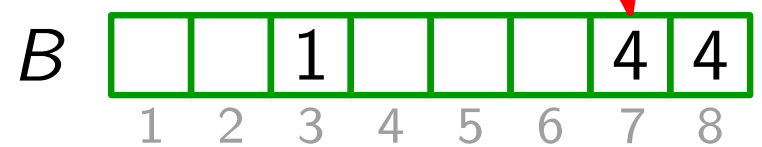
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

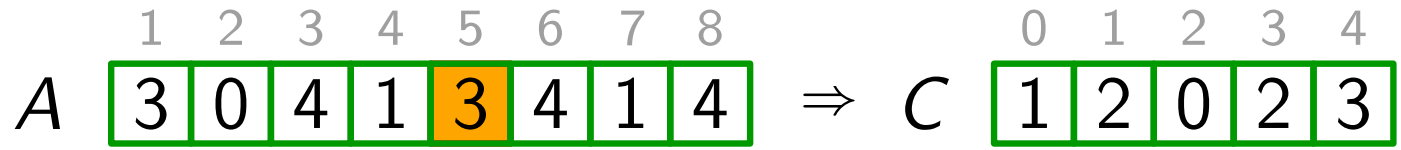
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

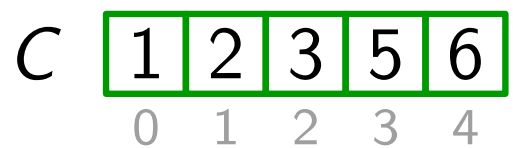
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

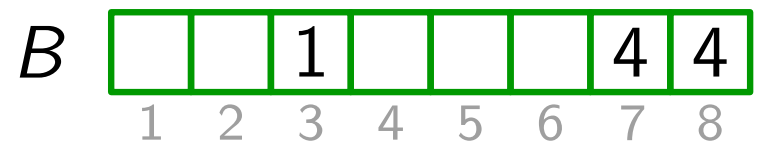
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

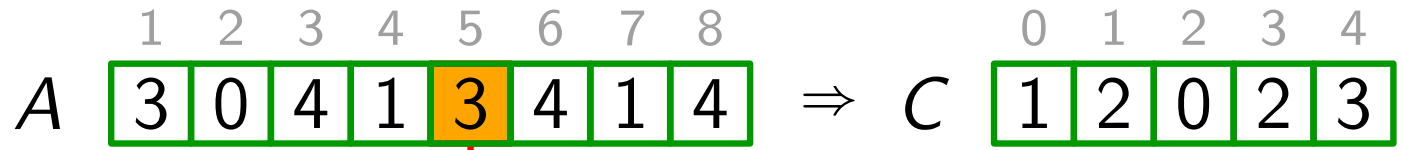
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

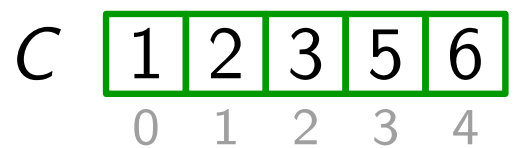
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

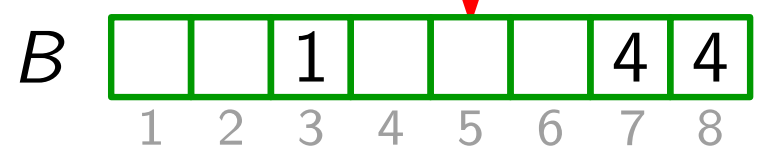
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

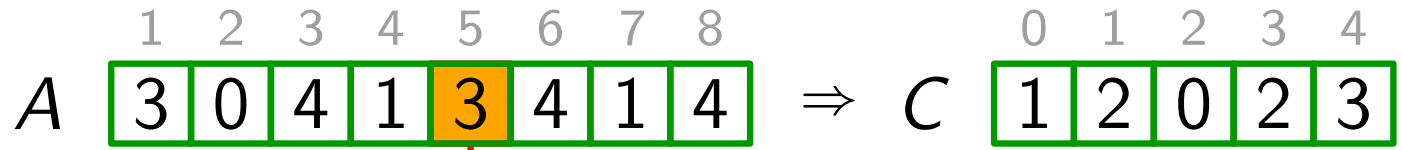
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

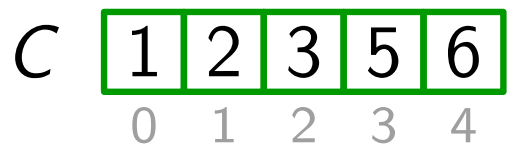
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

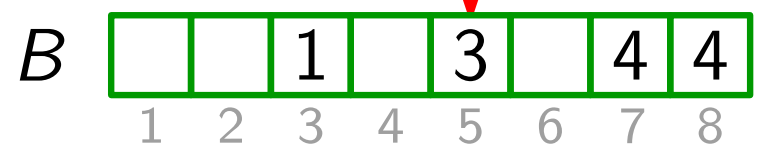
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

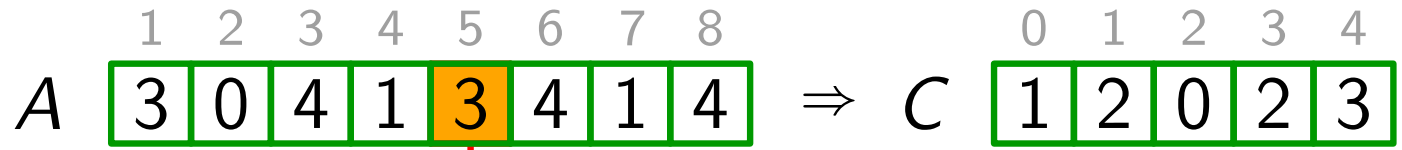
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

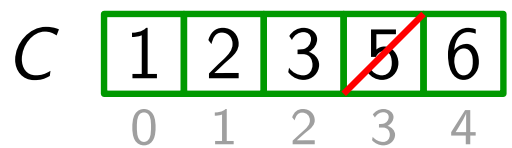
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

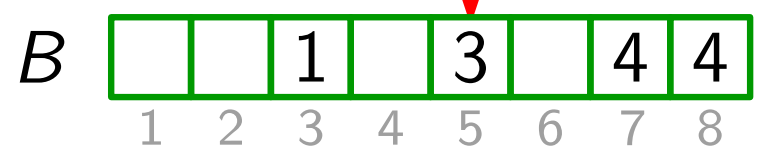
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

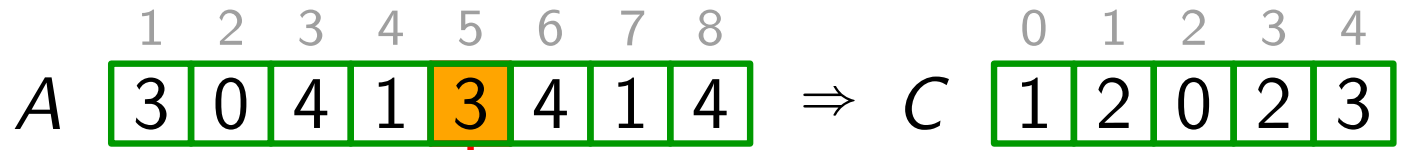
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

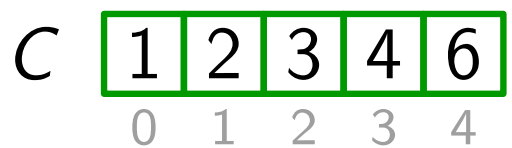
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

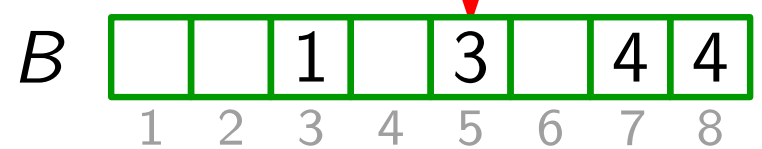
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

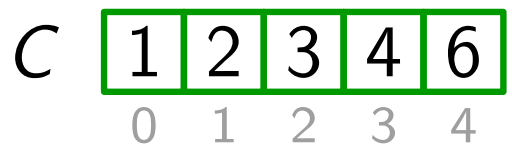
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

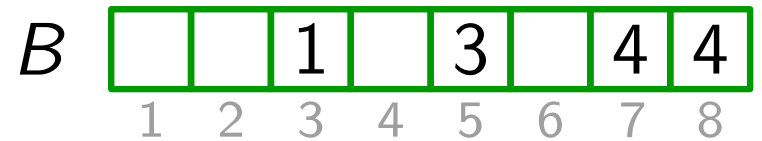
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



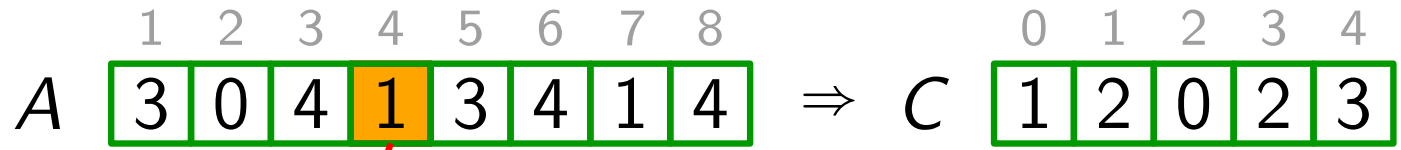
CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

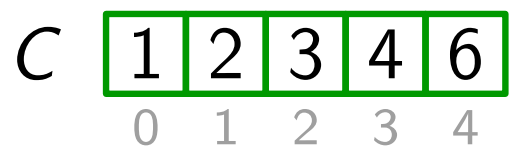
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

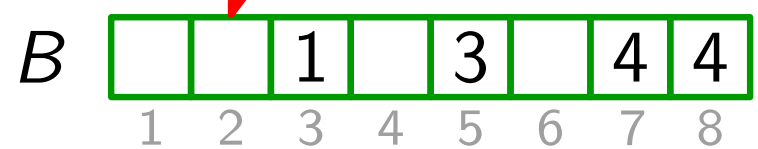
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

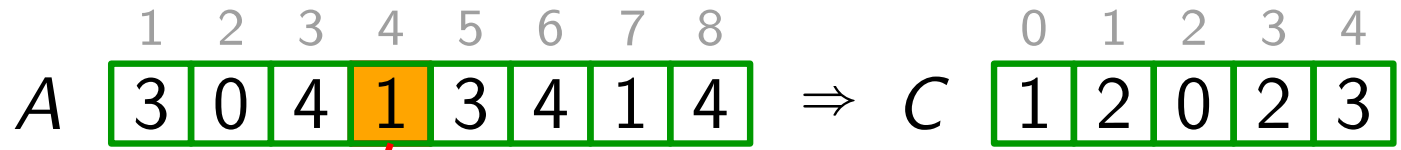
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

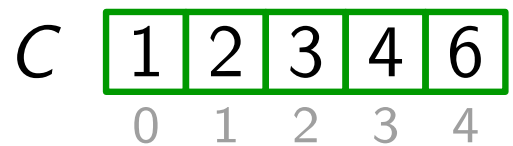
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

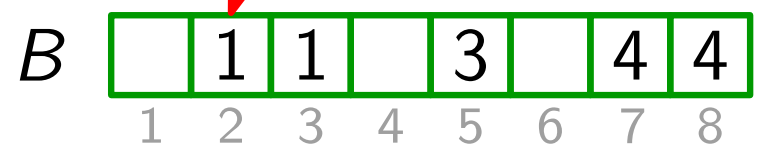
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



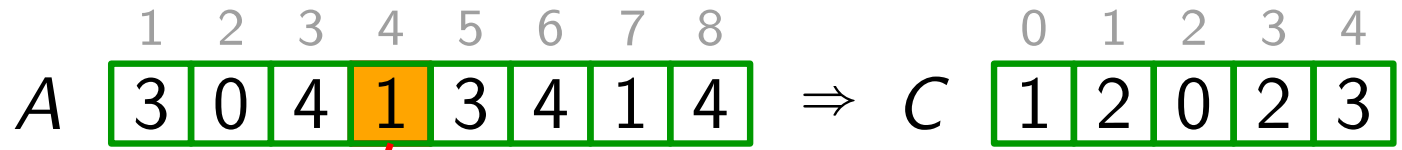
CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

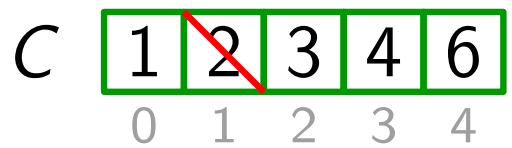
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

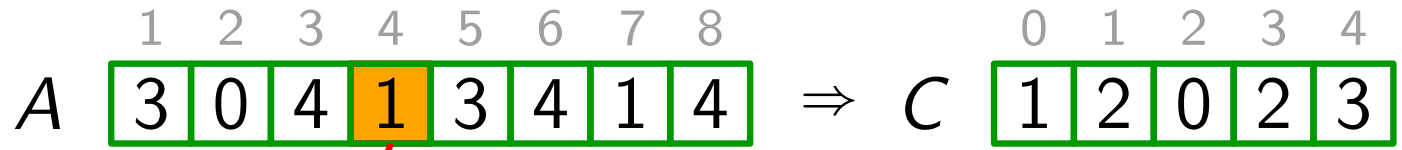
CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

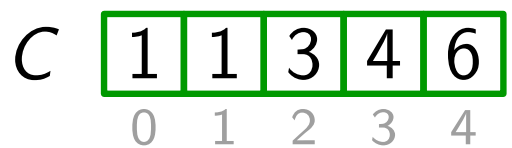
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

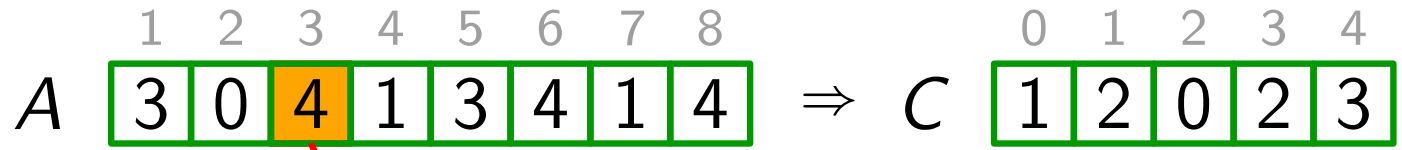
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

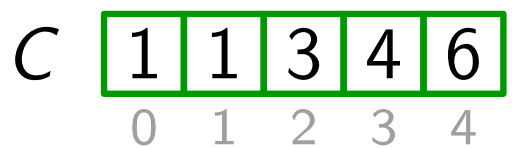
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

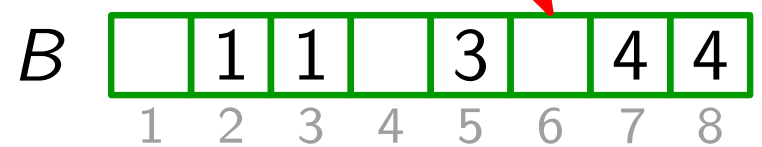
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	1	1	3	4	6

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B		1	1		3	4	4	4

CountingSort

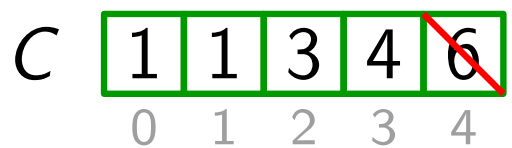
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

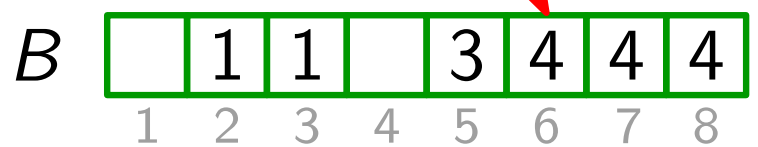
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

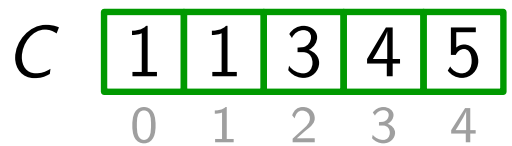
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

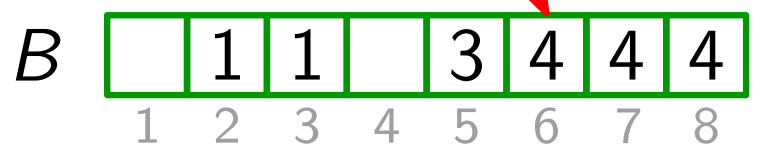
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

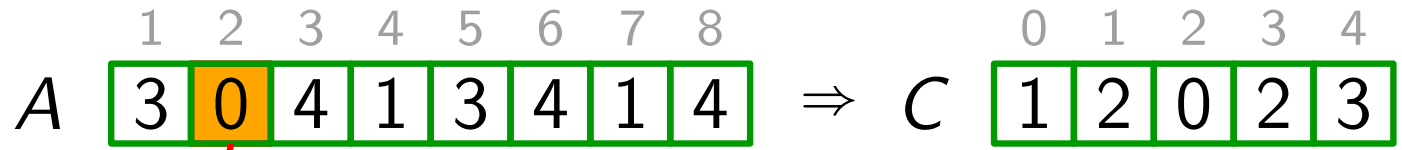
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

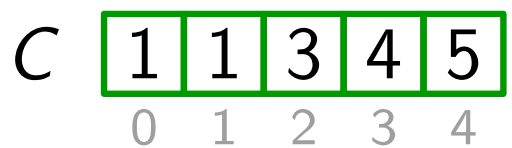
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

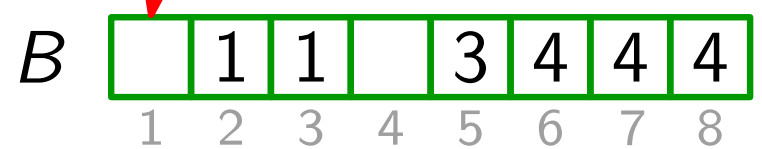
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

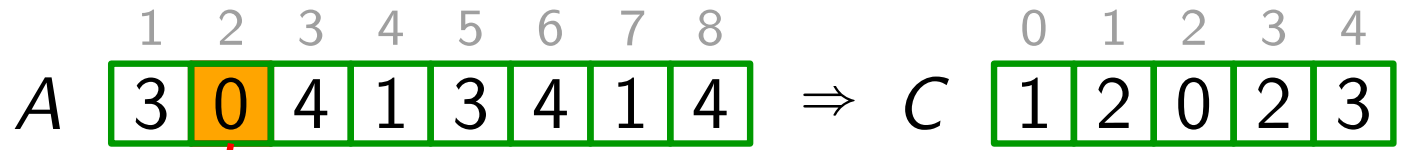
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

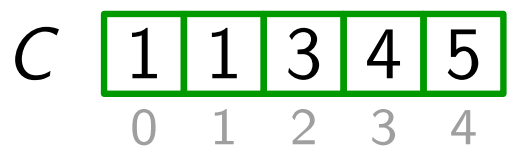
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

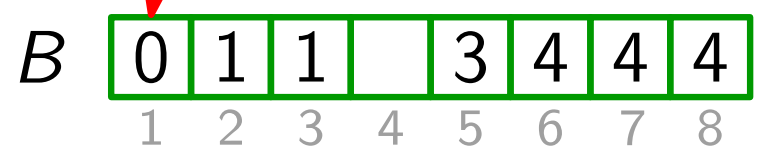
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



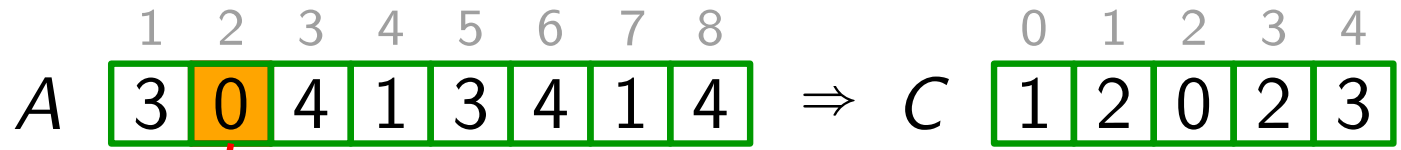
CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

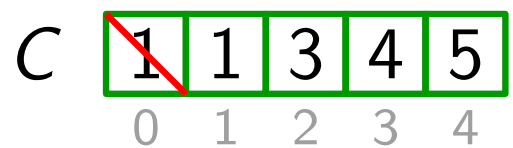
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

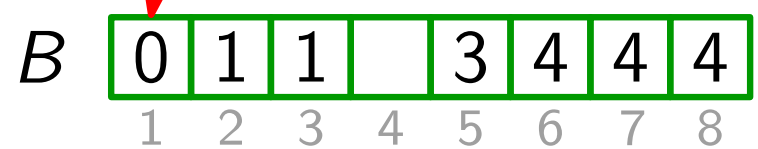
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



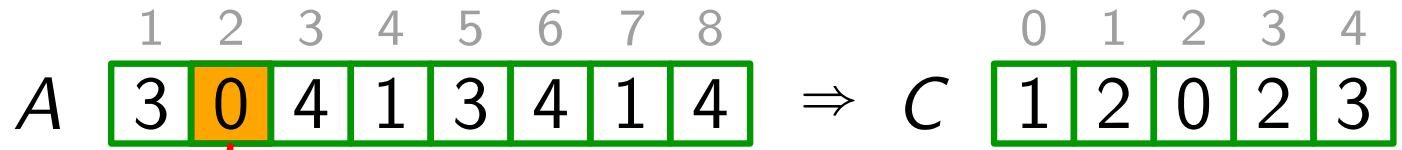
CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

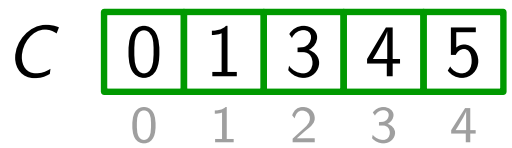
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

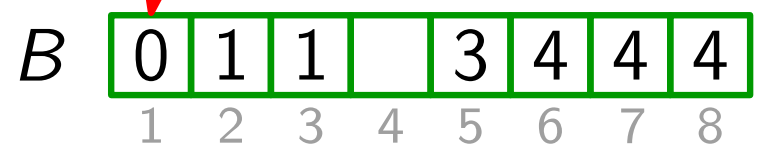
Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	0	1	3	4	5

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	1	1		3	4	4	4

CountingSort

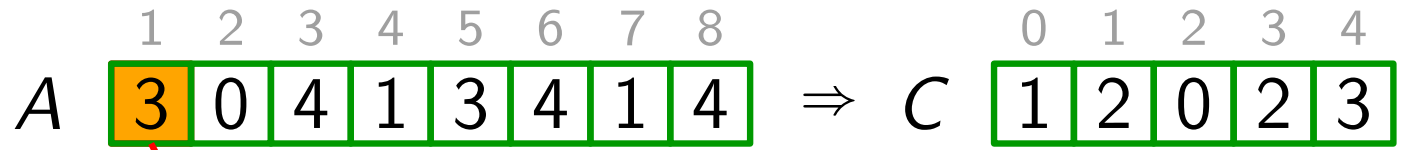
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

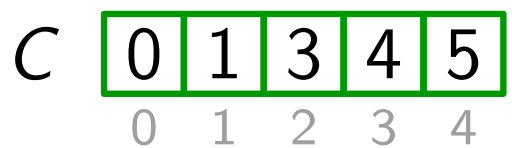
Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x



1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	0	1	3	4	5

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	1	1	3	3	4	4	4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

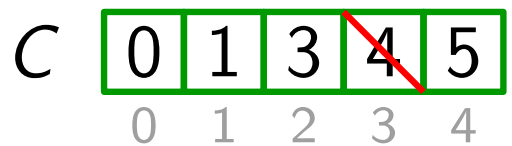
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	0	1	3	3	5

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	1	1	3	3	4	4	4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

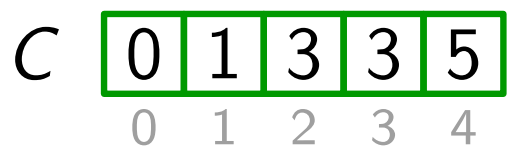
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

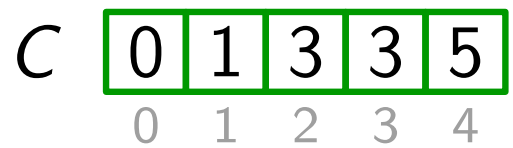
2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

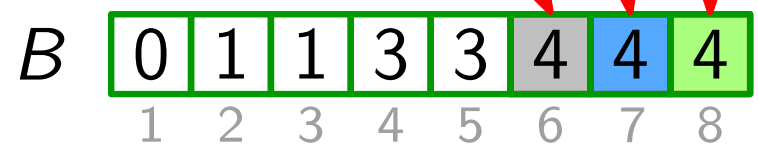
A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort

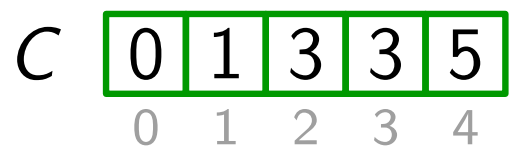
Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

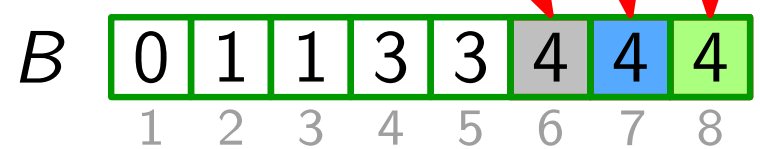
Variable: A Eingabefeld | C Rechenfeld
B Ausgabefeld | k begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$



2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort ist *stabil!*

CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

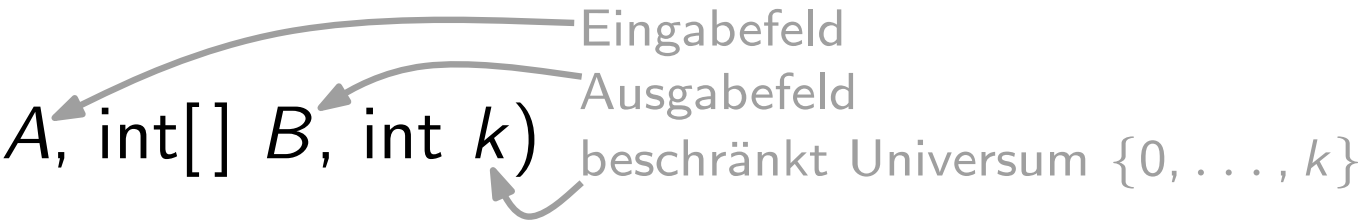
CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)



CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld
Ausgabefeld
beschränkt Universum $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)
  sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld
  for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** [redacted] // (1a)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A
  for $i = 1$ **to** k **do** [redacted] // (1b)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A
  for $j = A.length$ **downto** 1 **do**
    [redacted] // (2)

Aufgabe:

Fülle die Felder mit Code, der obige Idee umsetzt!

CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld
Ausgabefeld
beschränkt Universum $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)
  sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld
  for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A
  for $i = 1$ **to** k **do** [redacted] // (1b)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A
  for $j = A.length$ **downto** 1 **do**
    [redacted] // (2)

Aufgabe:

Fülle die Felder mit Code, der obige Idee umsetzt!

CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld
Ausgabefeld
beschränkt Universum $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)
  sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld
  for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A
  for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A
  for $j = A.length$ **downto** 1 **do**
     // (2)

Aufgabe:

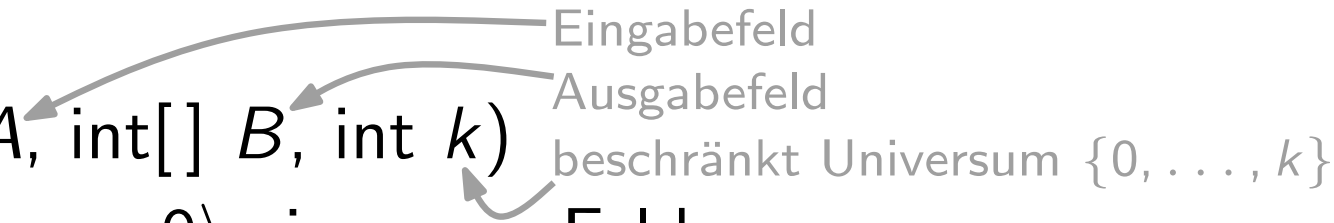
Fülle die Felder mit Code, der obige Idee umsetzt!

CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort(int[] A, int[] B, int k)

sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld

for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A

for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A

for $j = A.length$ **downto** 1 **do**

  $B[C[A[j]]] = A[j]$ // (2)

  [redacted]

Aufgabe:

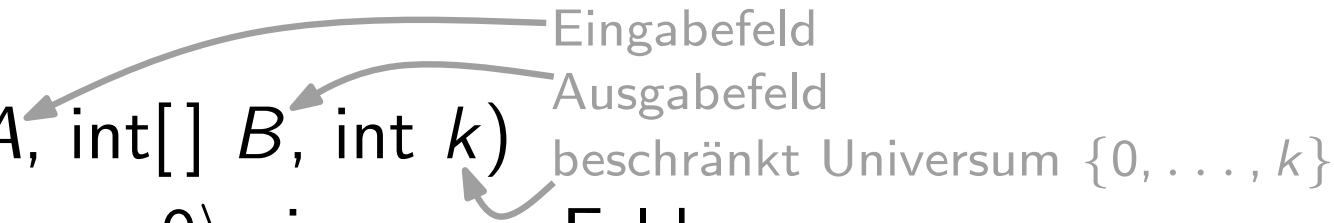
Fülle die Felder mit Code, der obige Idee umsetzt!

CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B



CountingSort(int[] A, int[] B, int k)

sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld

for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A

for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A

for $j = A.length$ **downto** 1 **do**

$B[C[A[j]]] = A[j]$

$C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ // (2)

Aufgabe:

Fülle die Felder mit Code, der obige Idee umsetzt!

CountingSort

Laufzeit:
$O(\quad)$

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)

sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld

for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A

for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A

for $j = A.length$ **downto** 1 **do**

$B[C[A[j]]] = A[j]$

$C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ // (2)

CountingSort

Laufzeit: $O(\blacksquare + \blacksquare)$

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld

Ausgabefeld

beschränkt Universum $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)

sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld

for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A

for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)

// $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A

for $j = A.length$ **downto** 1 **do**

$B[C[A[j]]] = A[j]$

$C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ // (2)

CountingSort

Laufzeit: $O(n + k)$

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld
Ausgabefeld
beschränkt Universum $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort(int[] A, int[] B, int k)
  sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld
  for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich x in A
  for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)
  // $C[x]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq x$ in A
  for $j = A.length$ **downto** 1 **do**
    $B[C[A[j]]] = A[j]$
    $C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ // (2)

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche.
- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$
- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche.
- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$
- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen

RadixSort

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s)

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s) — Anz. Stellen (hier: 3)

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s) — Anz. Stellen (hier: 3)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s) — Anz. Stellen (hier: 3)

for $i = 1$ **to** s **do** [1 = Index der *niederwertigsten (!)* Stelle]
  ⌊ sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s) — Anz. Stellen (hier: 3)

for $i = 1$ **to** s **do** [1 = Index der *niederwertigsten (!)* Stelle]
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

z.B. mit CountingSort

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s) — Anz. Stellen (hier: 3)

Laufzeit?

for $i = 1$ **to** s **do** [1 = Index der *niederwertigsten (!)* Stelle]
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

z.B. mit CountingSort

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

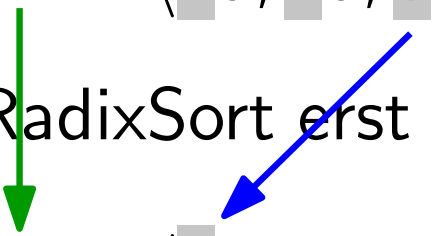
$A_1 = \langle \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:



Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  ⌊ sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, \quad | \quad | \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, \quad | \quad | \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

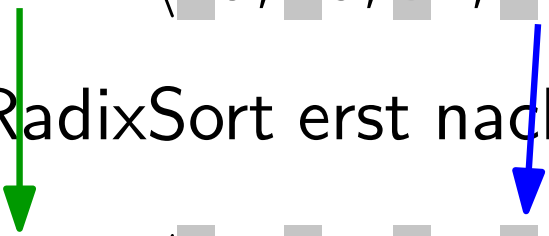
$$A_1 = \langle 31, 11, 13, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:



Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

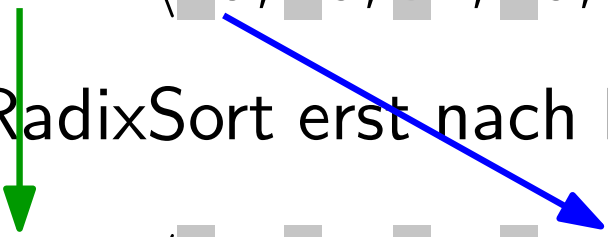
$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:



Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  ⌊ sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rangle$

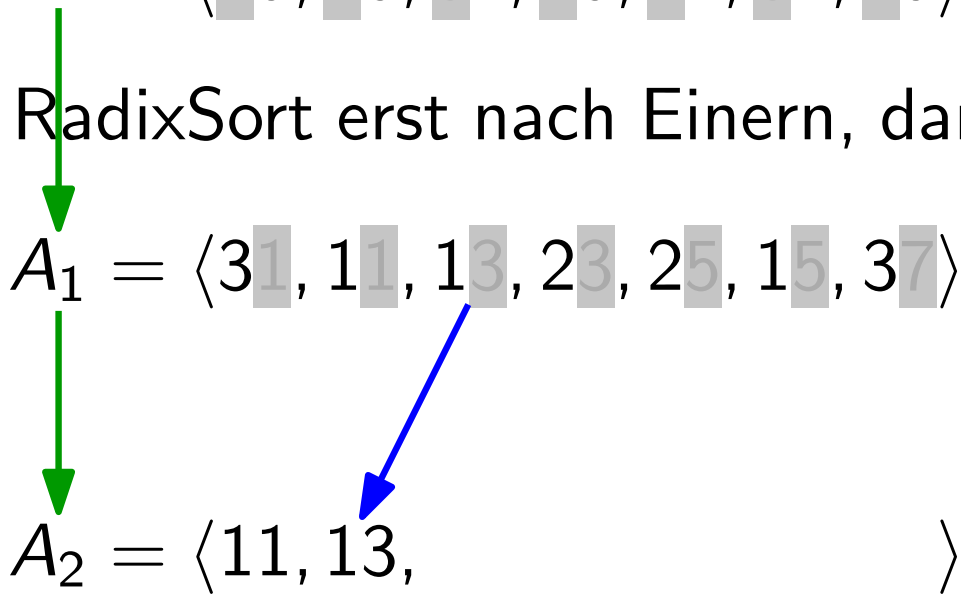
RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.



RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, \qquad\qquad\qquad\qquad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, \qquad\qquad\qquad\qquad \rangle$

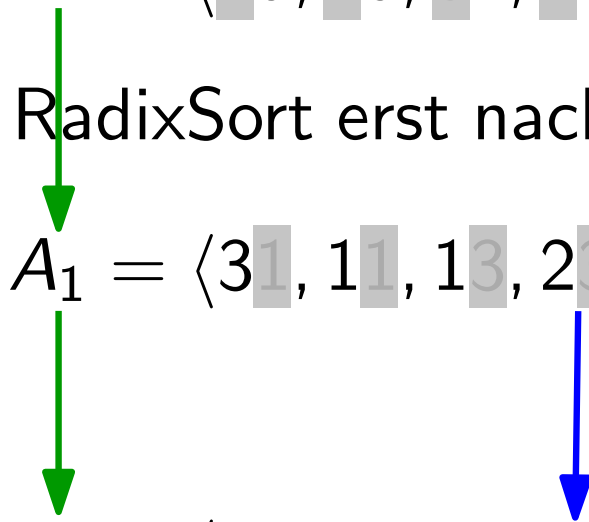
RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.



$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

$$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

$$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

$$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, 31, \quad \rangle$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, 31, \quad \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, 31, 37 \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, 31, 37 \rangle$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$

$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, 31, 37 \rangle$ ✓

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche.

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$

- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
  Laufzeit für n Zahlen: $O(s \cdot (n + b))$

- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen

Zusammenfassung

- Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche.

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$

- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
  Laufzeit für n Zahlen: $O(s \cdot (n + b))$

- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen

BucketSort

(c) www.seafish.org

BucketSort

[CLRS]

	A
1	.78
2	.17
3	.39
4	.21
5	.72
6	.94
7	.26
8	.12
9	.23
10	.68

(c) www.seafish.org

BucketSort

[CLRS]

	A
1	.78
2	.17
3	.39
4	.21
5	.72
6	.94
7	.26
8	.12
9	.23
10	.68

(c) www.seafish.org

Eingabefeld $A[1..n]$ enthält Zahlen,
zufällig und gleichverteilt aus $[0, 1)$ gezogen

BucketSort

[CLRS]

	A
1	.78
2	.17
3	.39
4	.21
5	.72
6	.94
7	.26
8	.12
9	.23
10	.68

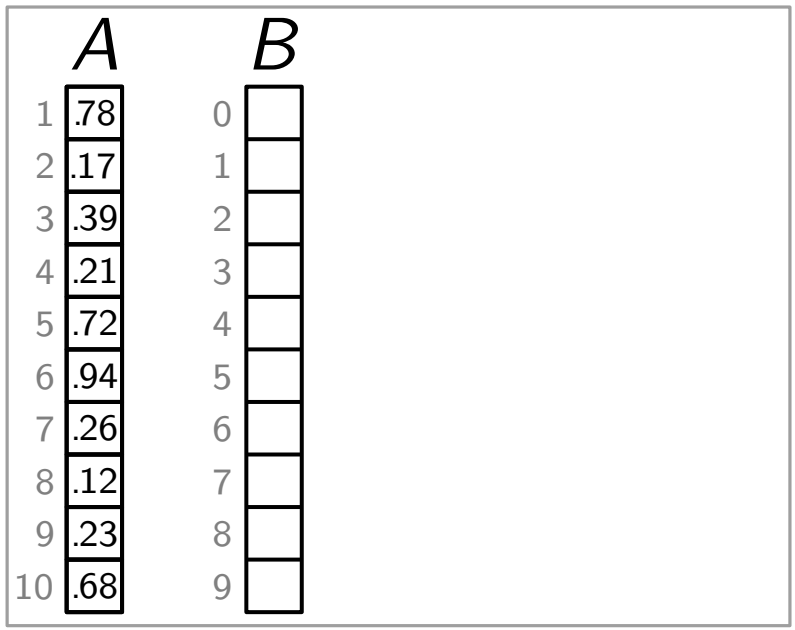
(c) www.seafish.org

Eingabefeld $A[1..n]$ enthält Zahlen, zufällig und gleichverteilt aus $[0, 1)$ gezogen

[Im Bsp. auf 2 Nachkommastellen gerundet!]

BucketSort

[CLRS]



(c) www.seafish.org

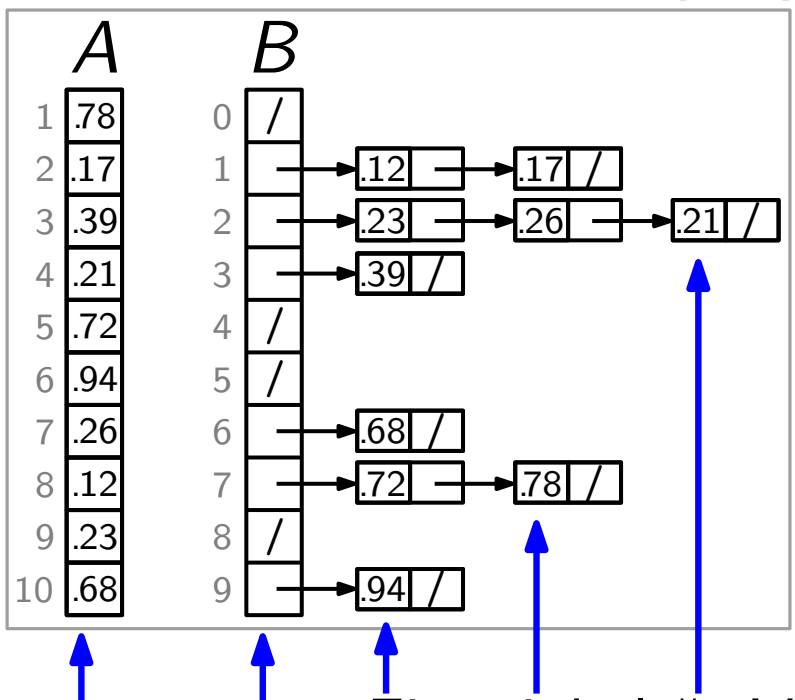
Hilfsfeld $B[0..n-1]$;
jeder Eintrag entspricht einem „Eimer“ der Weite $1/n$

Eingabefeld $A[1..n]$ enthält Zahlen,
zufällig und gleichverteilt aus $[0, 1)$ gezogen

[Im Bsp. auf 2 Nachkommastellen gerundet!]

BucketSort

[CLRS]



(c) www.seafish.org

„Eimerinhalt“: *Verkettete Liste* von Elementen aus A.

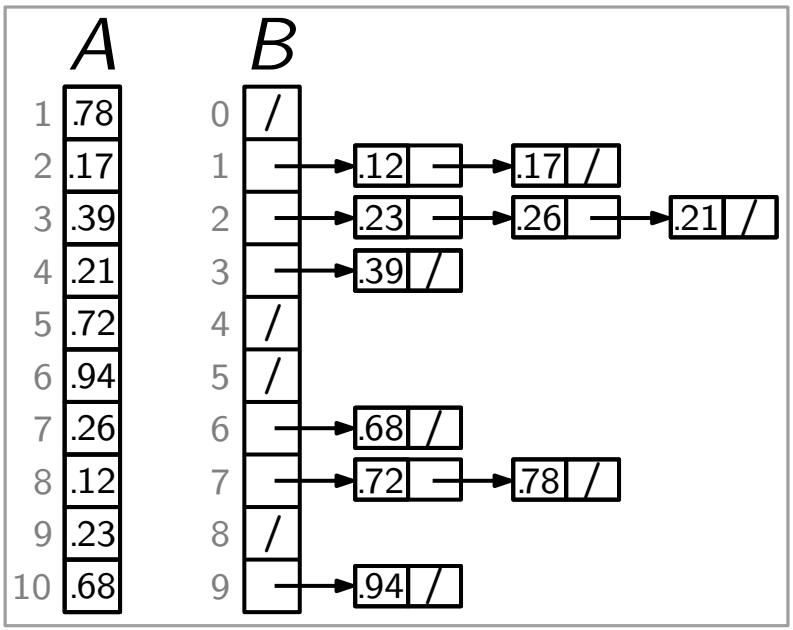
Hilfsfeld $B[0..n-1]$;
jeder Eintrag entspricht einem „Eimer“ der Weite $1/n$

Eingabefeld $A[1..n]$ enthält Zahlen,
zufällig und gleichverteilt aus $[0, 1)$ gezogen

[Im Bsp. auf 2 Nachkommastellen gerundet!]

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

$n = A.length$

lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an

for $j = 1$ **to** n **do**

  füge $A[j]$ in Liste $B[$] ein

for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**

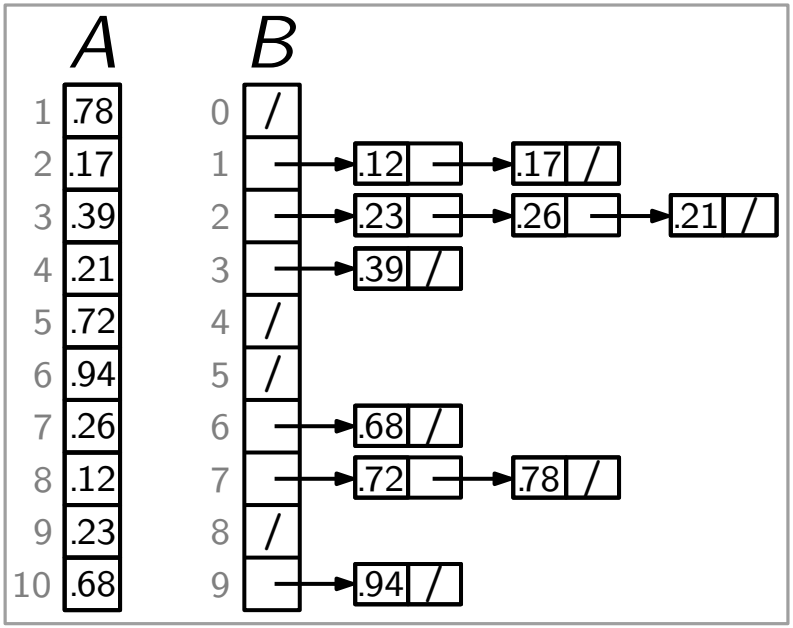
  sortiere Liste $B[i]$

Aufgabe:

Fülle die Felder mit Code, der BucketSort umsetzt!

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

$n = A.length$

lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an

for $j = 1$ **to** n **do**

  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein

for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**

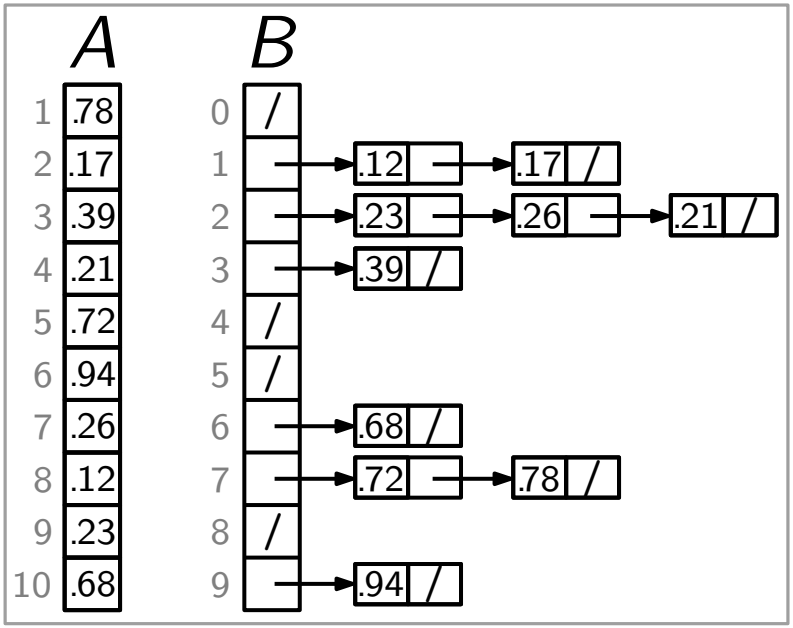
  sortiere Liste $B[i]$

Aufgabe:

Fülle die Felder mit Code, der BucketSort umsetzt!

BucketSort

[CLRS]

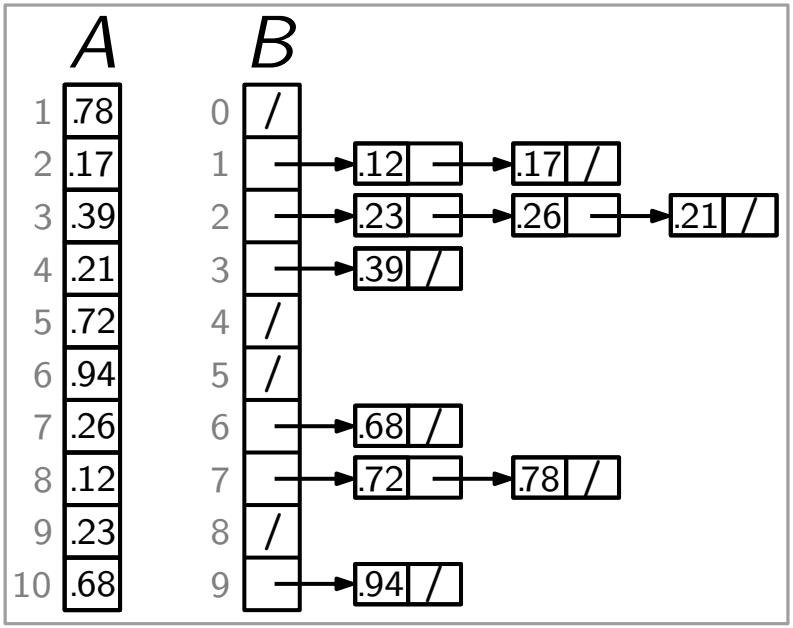


BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

BucketSort

[CLRS]

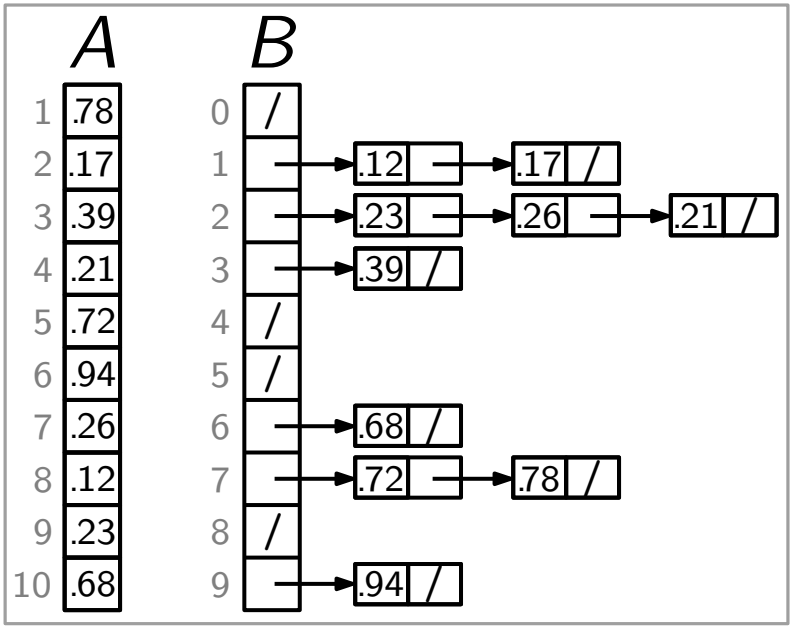


BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

$n = A.length$

lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an

for $j = 1$ **to** n **do**

  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein

for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$

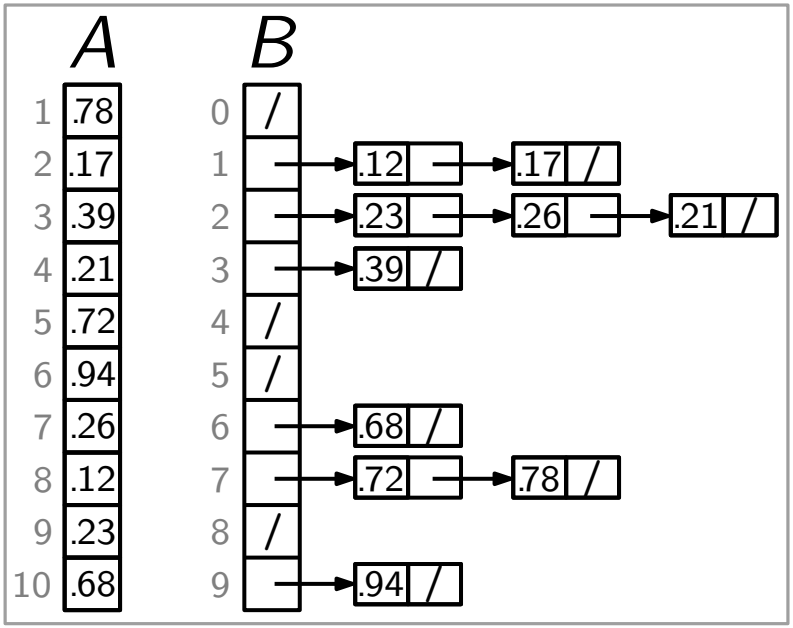
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$

hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander

kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

BucketSort

[CLRS]



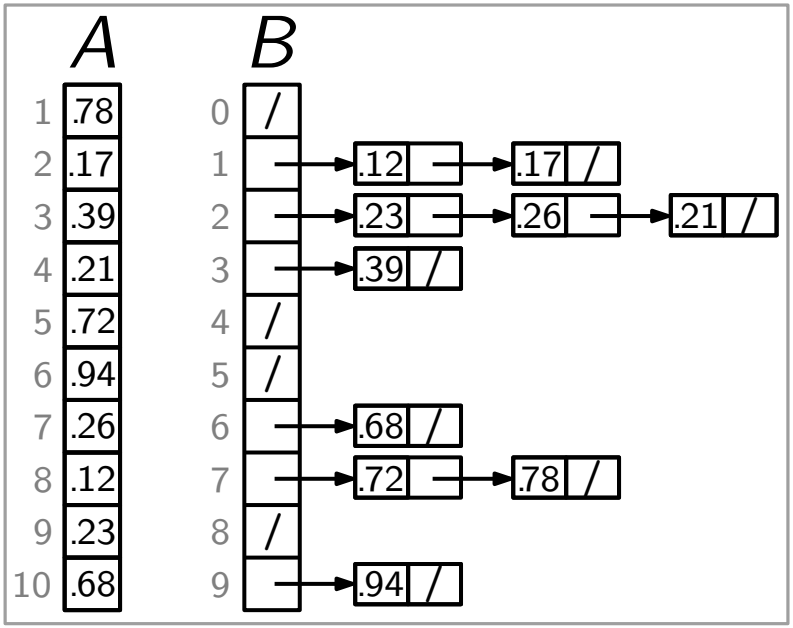
BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:

BucketSort

[CLRS]



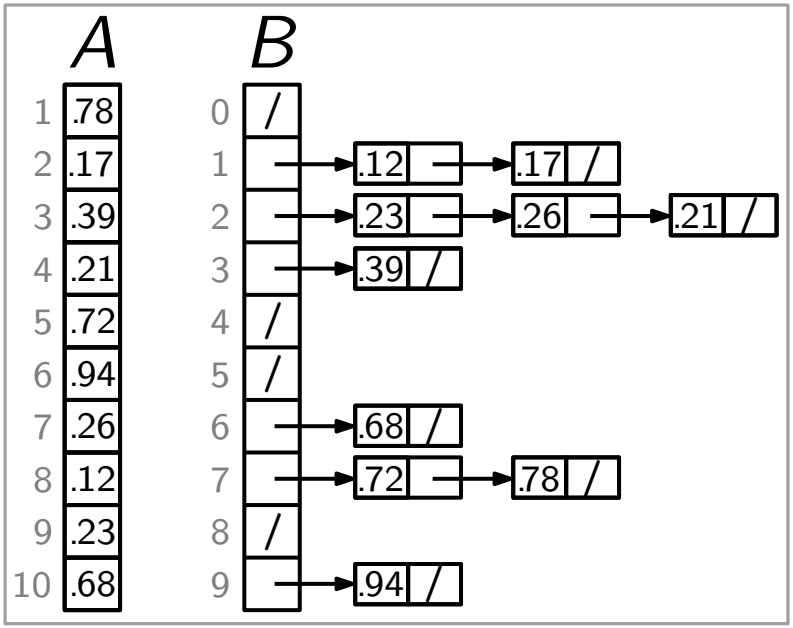
BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

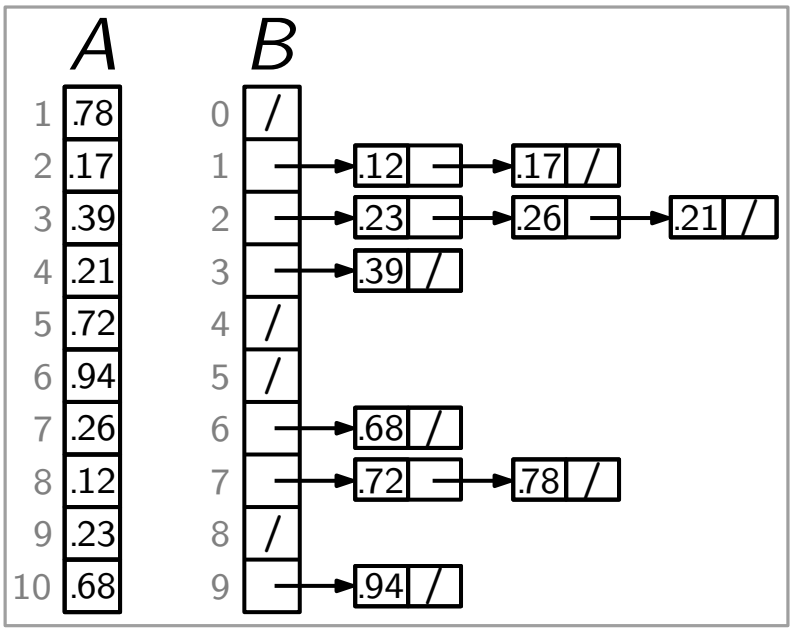
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit?

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

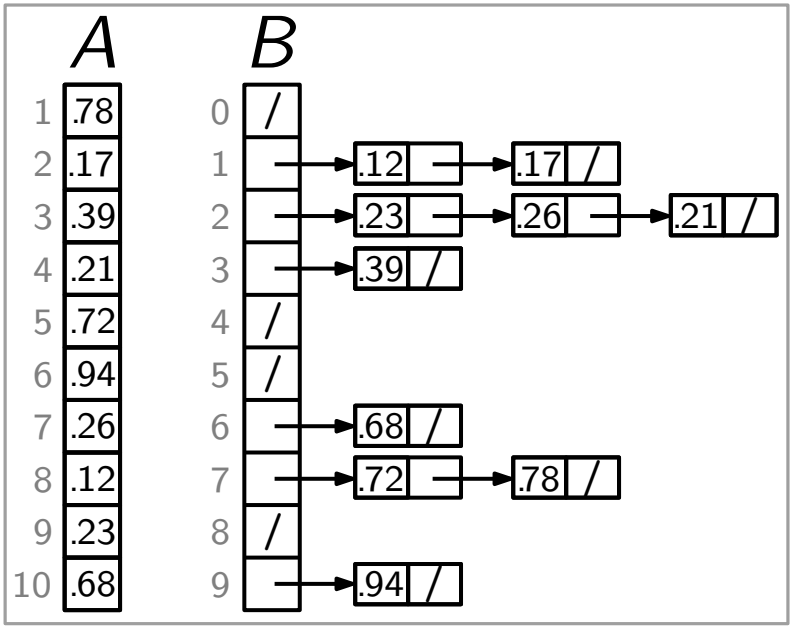
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit? – *erwartet*, hängt von den zufälligen Zahlen in A ab

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

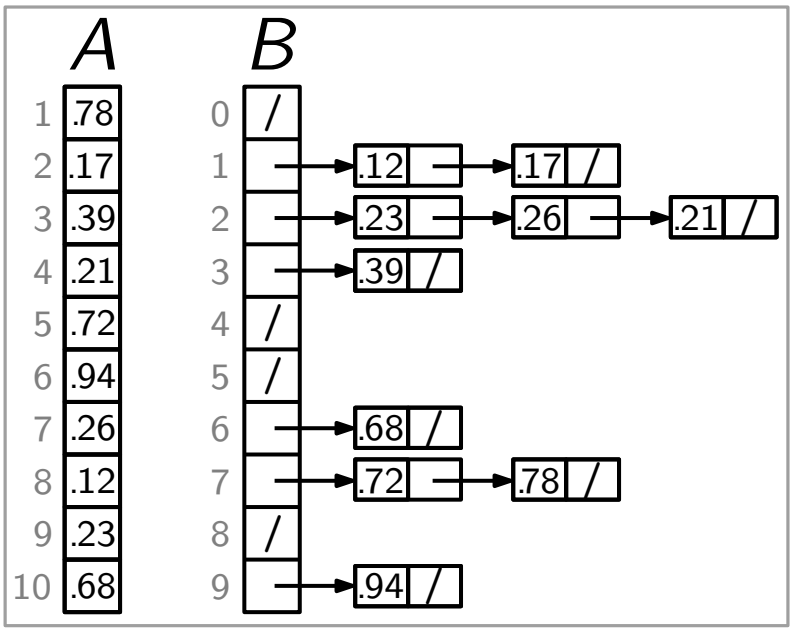
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit?
- *erwartet*, hängt von den zufälligen Zahlen in A ab
- hängt vom Sortieralgorithmus in Zeile 6 ab;

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

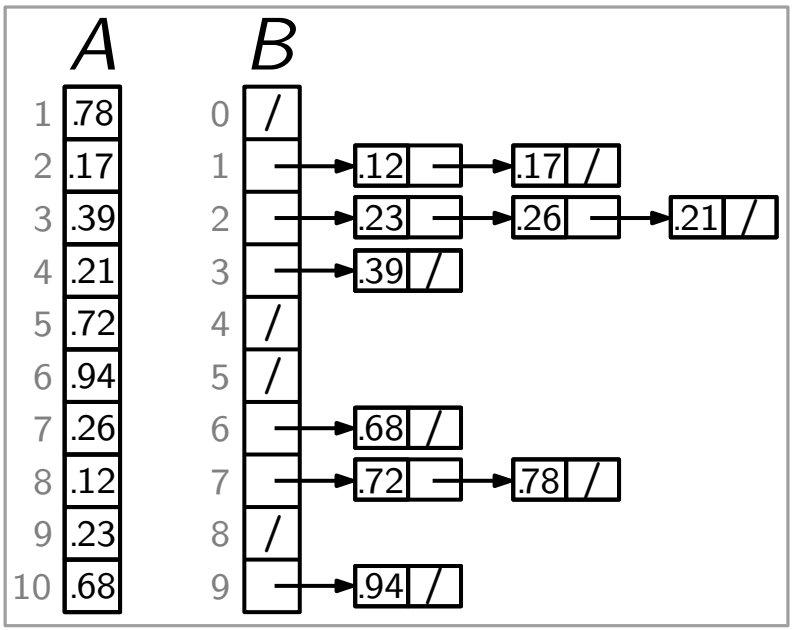
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit?
- *erwartet*, hängt von den zufälligen Zahlen in A ab
- hängt vom Sortieralgorithmus in Zeile 6 ab;
  wir nehmen InsertionSort:

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

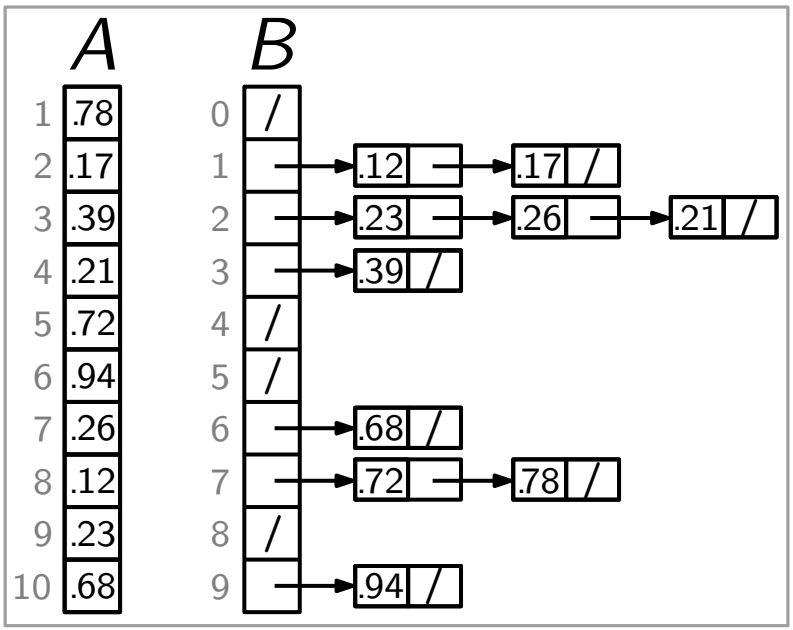
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i] = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit?
- *erwartet*, hängt von den zufälligen Zahlen in A ab
- hängt vom Sortieralgorithmus in Zeile 6 ab;
  wir nehmen InsertionSort: schnell auf kurzen Listen!

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

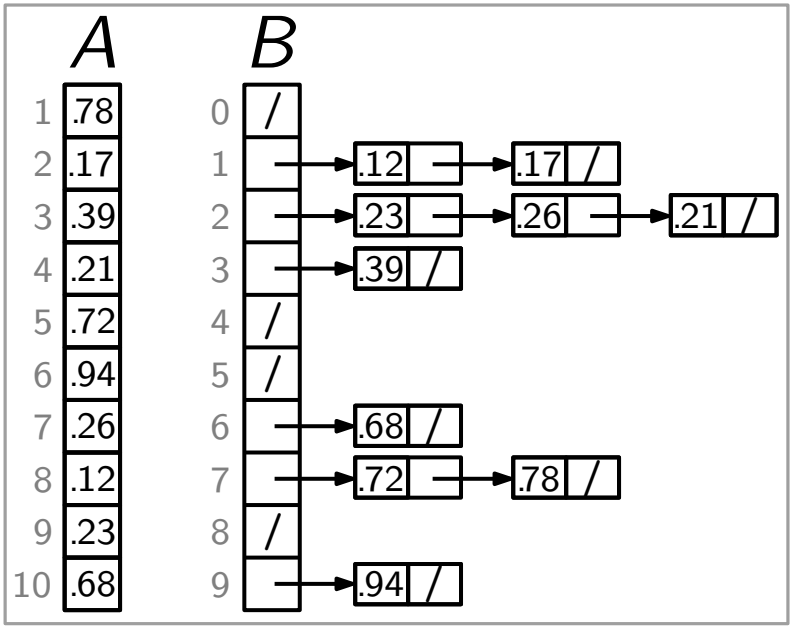
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit? $T_{\mathrm{BS}}(n) =$

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

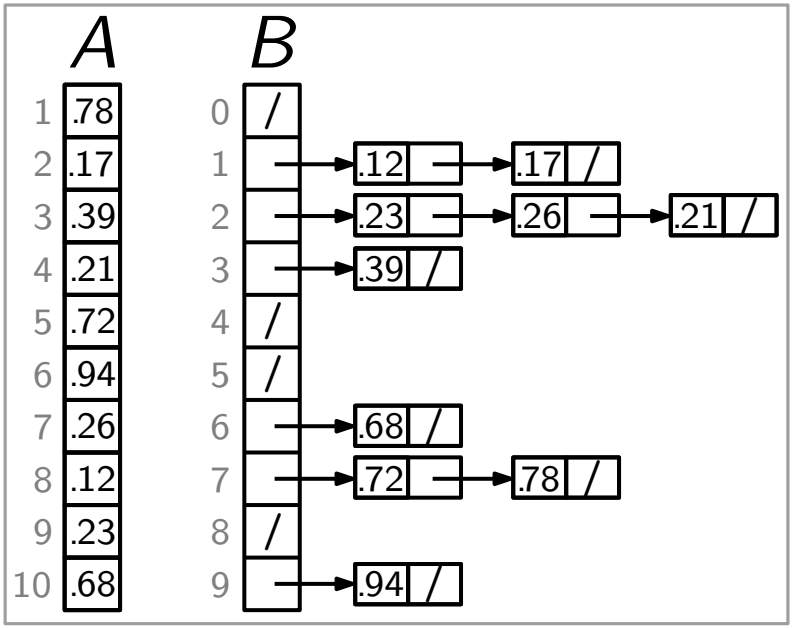
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit? $T_{\mathrm{BS}}(n) =$ 

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

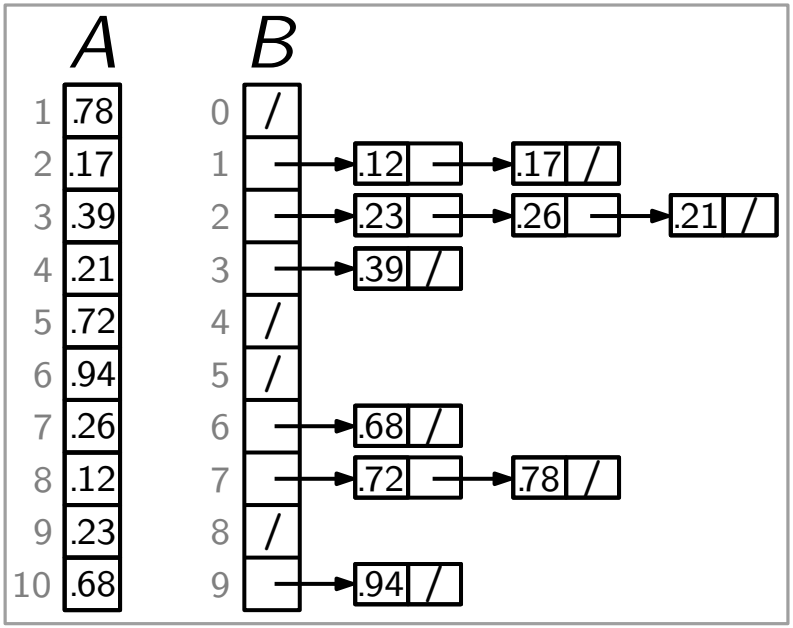
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit? $T_{BS}(n) = \Theta(n) +$ [ ]

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

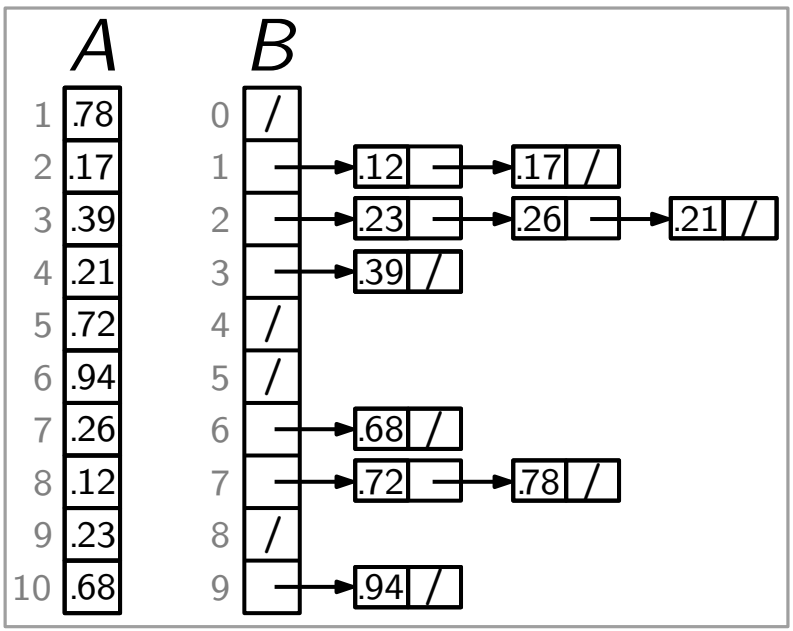
$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit? $T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i)$,

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0, 1)$)

$n = A.length$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do**
  sortiere Liste $B[i]$
hänge $B[0], \ldots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
- $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
- $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit? $T_{BS}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{IS}(n_i)$,

wobei $T_{IS}(\cdot)$ Laufzeit von InsertionSort

n_i ZV für Länge der Liste $B[i]$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i)$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$E[T_{\mathsf{BS}}(n)] =$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$E[T_{\mathsf{BS}}(n)] = E[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$E[T_{\mathsf{BS}}(n)] = E[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)]$$

$$= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$E[T_{\mathsf{BS}}(n)] = E[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)]$$

$$= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)]$$

Linearität des Erwartungswerts

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts

Für $a \in \mathbb{R}$: $E[aX] = a \cdot E[X]$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \ = \end{aligned}$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \; = \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Beweis.

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$\Rightarrow \; n_i =$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow \; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow\; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] =$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow\; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] = \Pr[X_j = 1] =$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow\; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] = \Pr[X_j = 1] = 1/n$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow\; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] = \Pr[X_j = 1] = 1/n$$

$$\Rightarrow\; n_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 =$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow\; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] = \Pr[X_j = 1] = 1/n$$

$$\Rightarrow\; n_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathsf{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathsf{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathsf{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) \;=\; \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \;\leq\; 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow\; n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] = \Pr[X_j = 1] = 1/n$$

$$\Rightarrow\; n_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$\Rightarrow E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$E[X_j^2] =$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}$$

unabhängig von j!

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$E[X_j X_k] =$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \; E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] =$$

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k]$$

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

$$=$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

$$= \quad \cdot \tfrac{1}{n} + \quad \cdot \quad \cdot \tfrac{1}{n^2}$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$
$$= n \cdot \tfrac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \tfrac{1}{n^2}$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

$$= n \cdot \tfrac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \tfrac{1}{n^2} =$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

$$= n \cdot \tfrac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \tfrac{1}{n^2} = 1 + \tfrac{n-1}{n} =$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$
$$= n \cdot \tfrac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \tfrac{1}{n^2} = 1 + \tfrac{n-1}{n} = 2 - \tfrac{1}{n}$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow \quad E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$

$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 = \tfrac{1}{n}$$

unabhängig von j!

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

$$= n \cdot \tfrac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \tfrac{1}{n^2} = 1 + \tfrac{n-1}{n} = 2 - \tfrac{1}{n}$$

□

Zusammenfassung

- Jedes *vergleichsbasierte* Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche für n Zahlen.

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$

- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
  Laufzeit für n Zahlen: $O(s \cdot (n + b))$

- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen
  erwartete Laufzeit für n Zahlen: $O(n)$

Zusammenfassung

- Jedes *vergleichsbasierte* Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche für n Zahlen.

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$

- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
  Laufzeit für n Zahlen: $O(s \cdot (n + b))$

- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen
  erwartete Laufzeit für n Zahlen: $O(n)$

Bem. Die Idee mit den (gleichgroßen) Eimern ist natürlich nicht nur auf Zufallszahlen beschränkt, aber hier lässt sie sich hübsch analysieren.