

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2023/24

7. Vorlesung

## Zufall!

# Inhaltsverzeichnis

- Ein Zufallsexperiment
- InsertionSort: erwartete bzw. Durchschnittslaufzeit
- Das Geburtstagsparadoxon

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem Mittel liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem Mittel liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

$$\sum_{i=1}^n i$$

Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*


$$\frac{\sum_{i=1}^n i}{n}$$

Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

$$\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} =$$

Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.



# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

$$\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Das Kleingedruckte:

Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

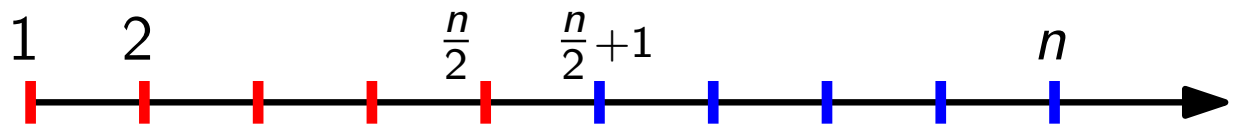
Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

$$\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Das Kleingedruckte:



Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Ein Experiment

Ein Franke und ein Münchner gehen (unabhängig voneinander)  $n$  mal in verschiedenen Restaurants essen und benoten nach jedem Besuch ihr Essen.

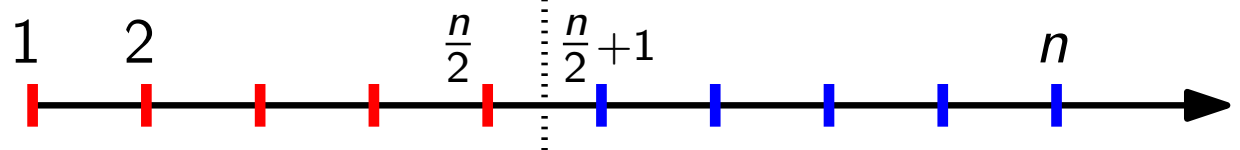
Der Franke ist zufrieden, wenn er überdurchschnittlich gut isst, d. h. wenn seine aktuelle Note über dem **Mittel** liegt.

Der Münchner ist zufrieden, wenn er besser isst als er jemals vorher gegessen hat.

*Wer is(s)t zufriedener?*

$$\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Das Kleingedruckte:



Die Reihenfolge der Restaurants ist *zufällig*. Beide Gourmets müssen ihr Essen mit einer Zahl zwischen 1 (= sehr schlecht) und  $n$  (= sehr gut) bewerten und dürfen jede Zahl nur einmal vergeben. Die Zahl  $n$  sei gerade. Der Münchner ist beim ersten Essen zufrieden.

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = ?$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.



# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*   *Beobachtungsmenge  $\Omega'$*  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*   *Beobachtungsmenge  $\Omega'$*  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*   *Beobachtungsmenge  $\Omega'$*  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*   *Beobachtungsmenge  $\Omega'$*  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge*  $\Omega$   *Beobachtungsmenge*  $\Omega'$  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„gewichtetes Mittel“ der Werte in  $\Omega'$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge*  $\Omega$   *Beobachtungsmenge*  $\Omega'$  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes** Mittel“ der Werte in  $\Omega'$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge*  $\Omega$   *Beobachtungsmenge*  $\Omega'$  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes Mittel**“ der Werte in  $\Omega'$



# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge*  $\Omega$   *Beobachtungsmenge*  $\Omega'$

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes Mittel**“ der Werte in  $\Omega'$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge*  $\Omega$   *Beobachtungsmenge*  $\Omega'$  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes Mittel**“ der Werte in  $\Omega'$

Es gilt:  $\sum_{i \in \Omega'} \mathbf{Pr}[M = i] =$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*   *Beobachtungsmenge  $\Omega'$*  

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes Mittel**“ der Werte in  $\Omega'$

Es gilt:  $\sum_{i \in \Omega'} \mathbf{Pr}[M = i] = \mathbf{1}$

# Modellierung

Ein Ergebnis unseres Experiments entspricht einer Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$ .

Sei  $S_n$  die Menge all dieser Permutationen.  $\Rightarrow |S_n| = n!$

*Ergebnismenge  $\Omega$*   $\rightarrow$  *Beobachtungsmenge  $\Omega'$*

Sei  $M: S_n \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine *Zufallsvariable*, die angibt, wie oft der Münchner zufrieden ist.

Uns interessiert der erwartete Wert von  $M$ ,  
kurz: der *Erwartungswert*  $\mathbf{E}[M]$  von  $M$ .

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$  (Def. für *diskrete ZV*)

„**gewichtetes Mittel**“ der Werte in  $\Omega'$

Es gilt:  $\sum_{i \in \Omega'} \mathbf{Pr}[M = i] = \mathbf{1}$

**Problem:** Was ist  $\mathbf{Pr}[M = 7]??$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=}$



# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge = (7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, \overset{i}{9}, 1, 4, 6, 3)$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge = (7, 2, 8, 5,  <sup>$i$</sup> 9, 1, 4, 6, 3)

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] = ?$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge = (7, 2, 8, 5,  <sup>$i$</sup> 9, 1, 4, 6, 3)

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl die bisher größte ist}$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl die bisher größte ist

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl die bisher größte ist

$$\underline{\underline{\frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}}}$$

**Voraussetzung:**  
Alle Ergebnisse sind  
gleich wahrscheinlich!



# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl die bisher größte ist

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl am größten}}{\text{Anz. aller Permutationen von } i \text{ Zahlen}}$$

**Voraussetzung:**  
Alle Ergebnisse sind  
gleich wahrscheinlich!

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl die bisher größte ist

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl am größten}}{\text{Anz. aller Permutationen von } i \text{ Zahlen}} = \frac{(i-1)!}{i!}$$

**Voraussetzung:**  
Alle Ergebnisse sind  
gleich wahrscheinlich!

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge = (7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)

$\mathbf{Pr}[M_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl die bisher größte ist

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$\underline{\underline{=}} \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl am größten}}{\text{Anz. aller Permutationen von } i \text{ Zahlen}} = \frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$$

**Voraussetzung:**  
Alle Ergebnisse sind  
gleich wahrscheinlich!

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, \overset{i}{9}, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] =$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge = (7, 2, 8, 5,  <sup>$i$</sup> 9, 1, 4, 6, 3)

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl größer als } \frac{n+1}{2} \text{ ist}$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe *Indikator-Zufallsvariable* ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl größer als } \frac{n+1}{2} \text{ ist}$

=

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl größer als } \frac{n+1}{2} \text{ ist}$

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl größer als } \frac{n+1}{2} \text{ ist}$

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

=



# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl größer als  $\frac{n+1}{2}$  ist

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl} > n/2}{\text{Anz. aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}}$$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] = \text{WK, dass } i. \text{ Zahl größer als } \frac{n+1}{2} \text{ ist}$

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl } > n/2}{\text{Anz. aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}} = \frac{(n-1)! \cdot \frac{n}{2}}{n!}$$

# Ein Trick

**Definition:**  $\mathbf{E}[M] = \sum_{i \in \Omega'} i \cdot \mathbf{Pr}[M = i]$

Führe **Indikator-Zufallsvariable** ein (für  $i = 1, \dots, n$ ):

Sei  $M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{E}[M_i] \stackrel{\text{laut Def.}}{=} 0 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 0] + 1 \cdot \mathbf{Pr}[M_i = 1] = \mathbf{Pr}[M_i = 1]$

**Beispiel:** Zahlenfolge =  $(7, 2, 8, 5, 9, 1, 4, 6, 3)$

$\mathbf{Pr}[F_i = 1] =$  WK, dass  $i$ . Zahl größer als  $\frac{n+1}{2}$  ist

$$= \frac{\text{Anz. der „guten“ Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$$

$$= \frac{\text{Anz. Perm., bei denen } i. \text{ Zahl} > n/2}{\text{Anz. aller Permutationen von } n \text{ Zahlen}} = \frac{(n-1)! \cdot \frac{n}{2}}{n!} = \frac{1}{2}$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Rightarrow M =$  (Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.)

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] =$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] =$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] =$$

*Linearität des Erwartungswerts*



# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] =$$

*Linearität des Erwartungswerts*

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

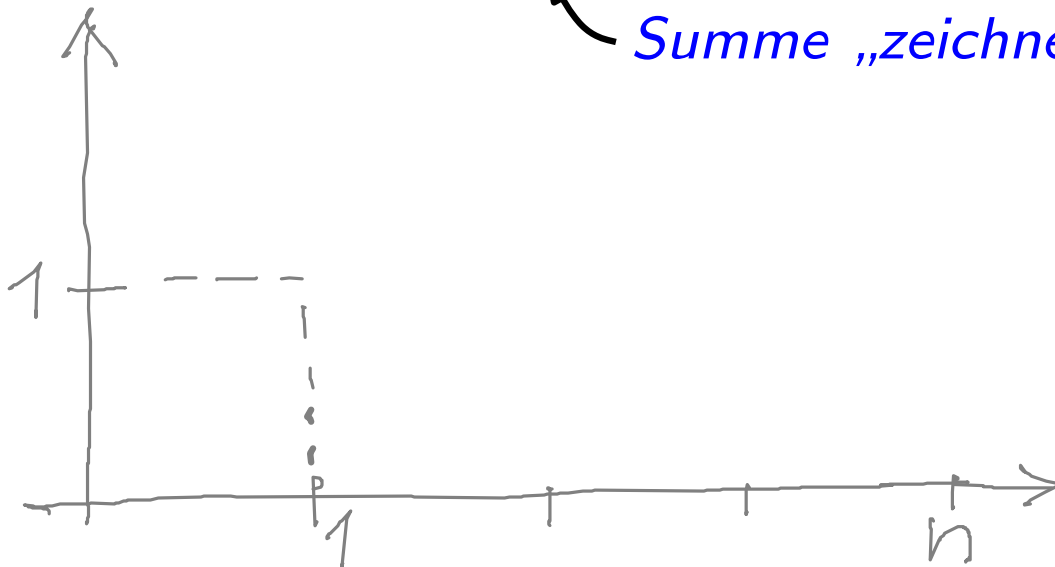
$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

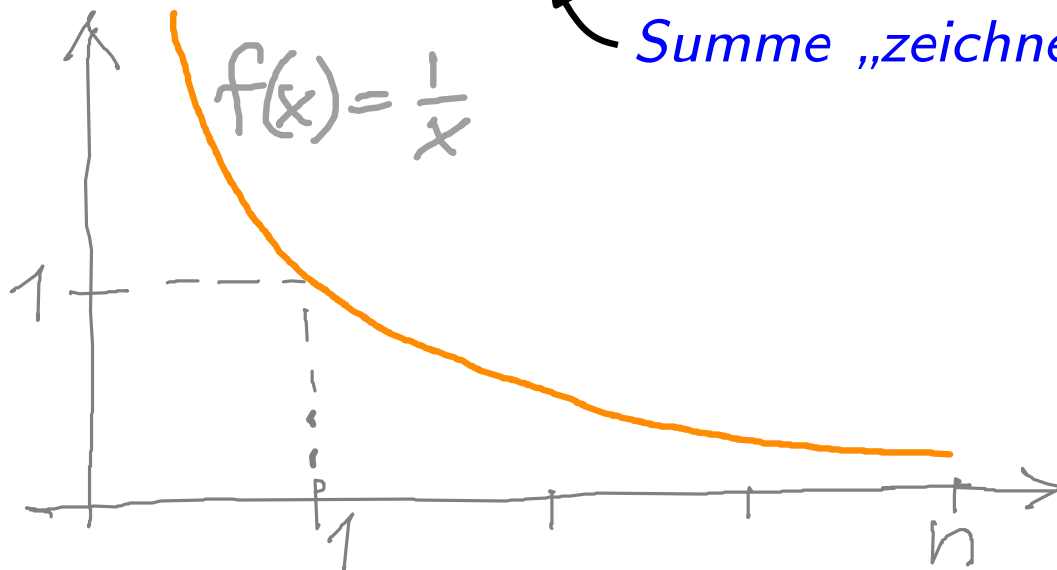
$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

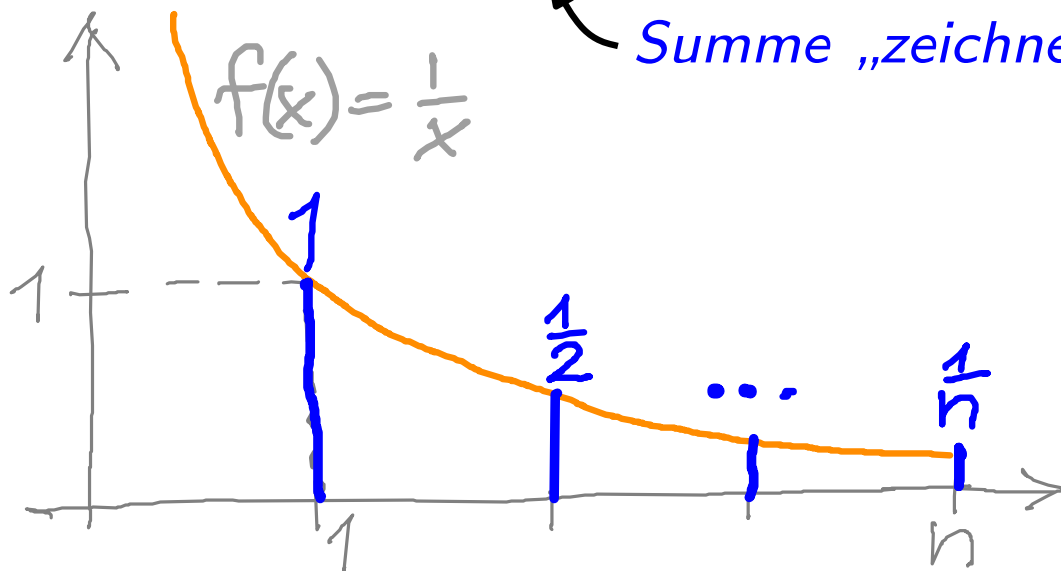
$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*

*Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < \infty$$

*Summe „zeichnen“!*





# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

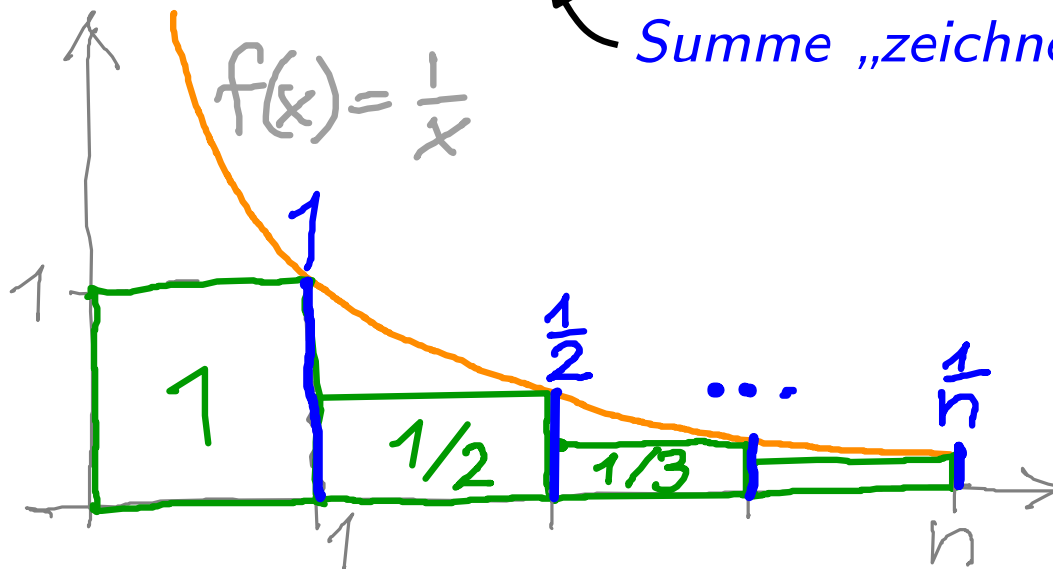
$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

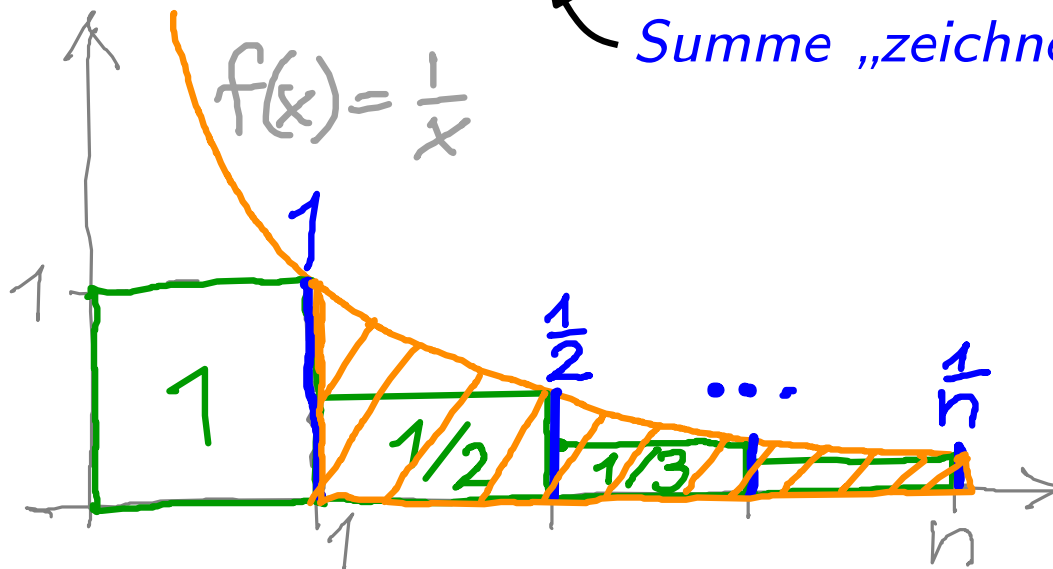
$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

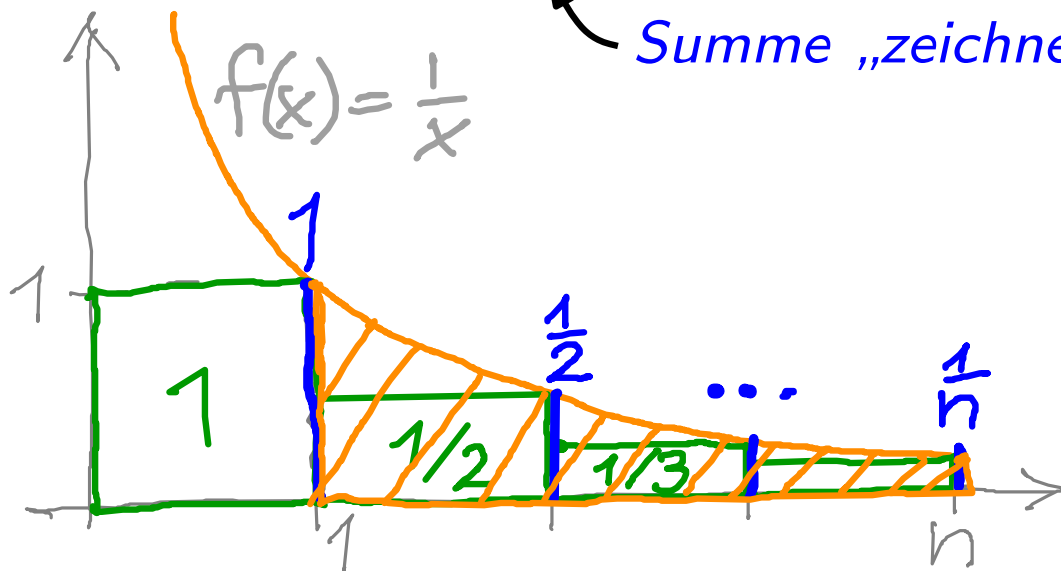
$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



$$\int_1^n \frac{1}{x} dx$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

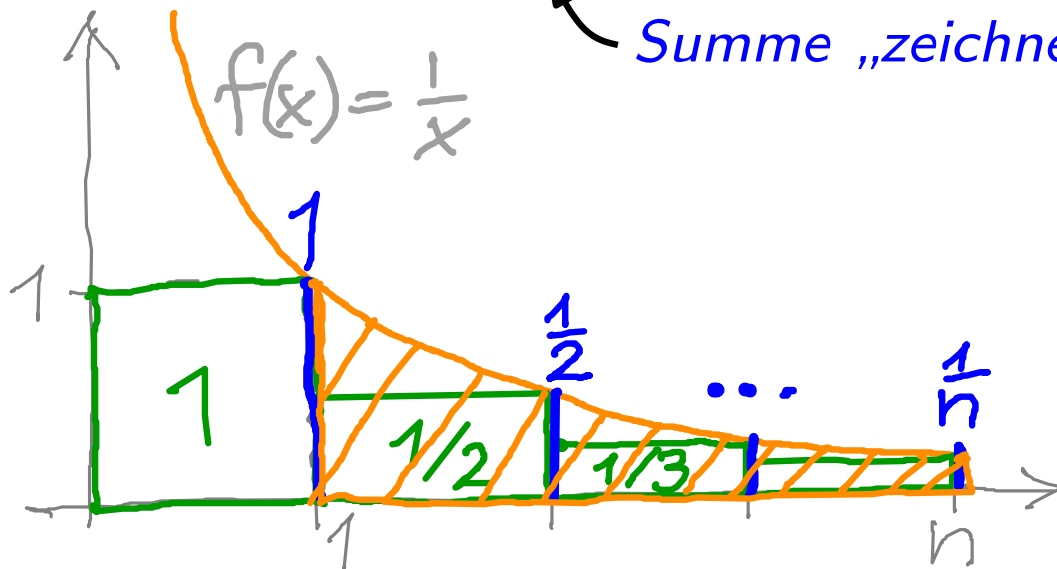
$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



$$\leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

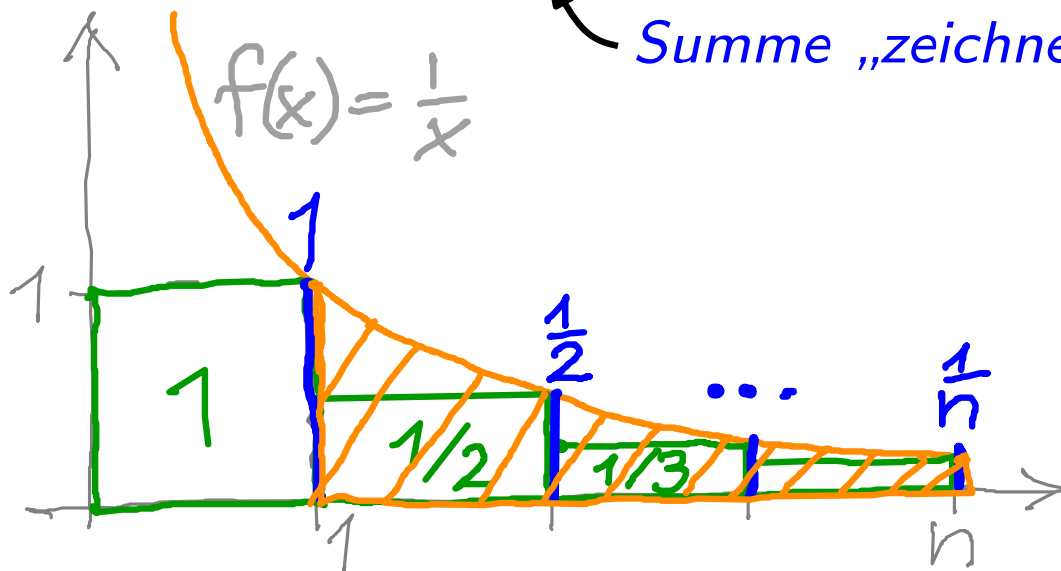
$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

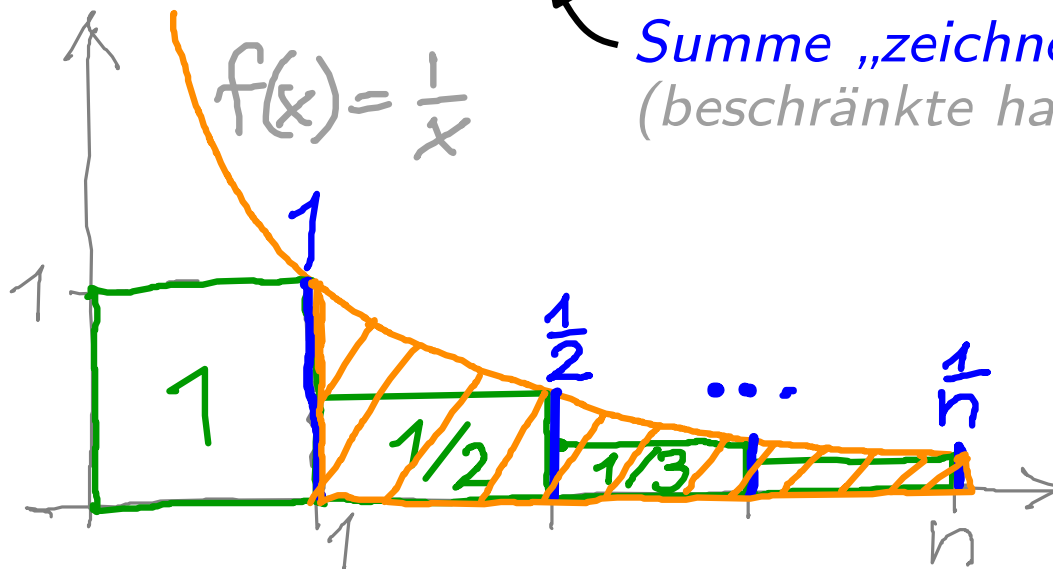
$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

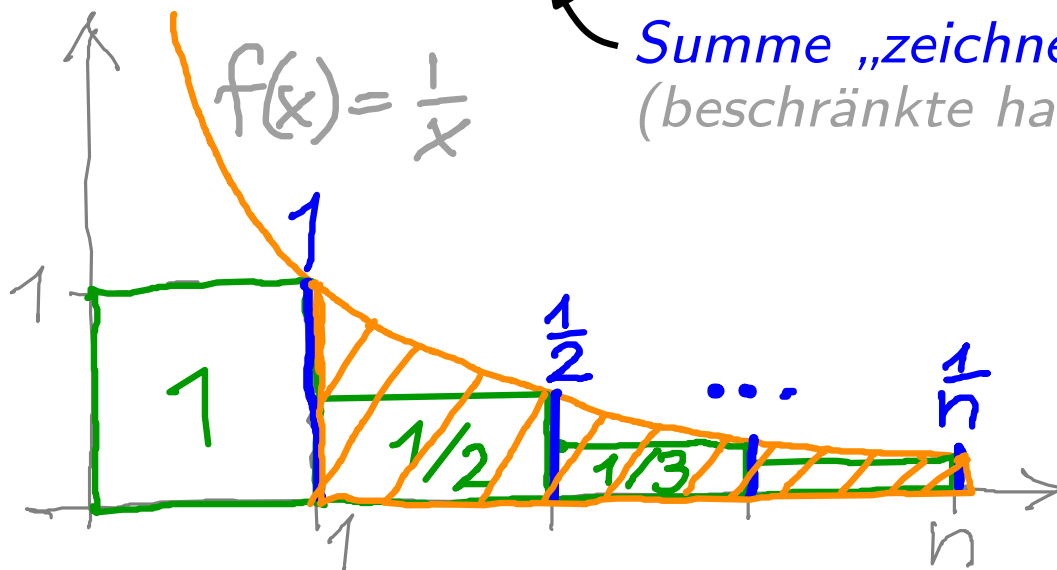
$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}\left[\sum_i M_i\right] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx =$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$



# Zurück zum Erwartungswert

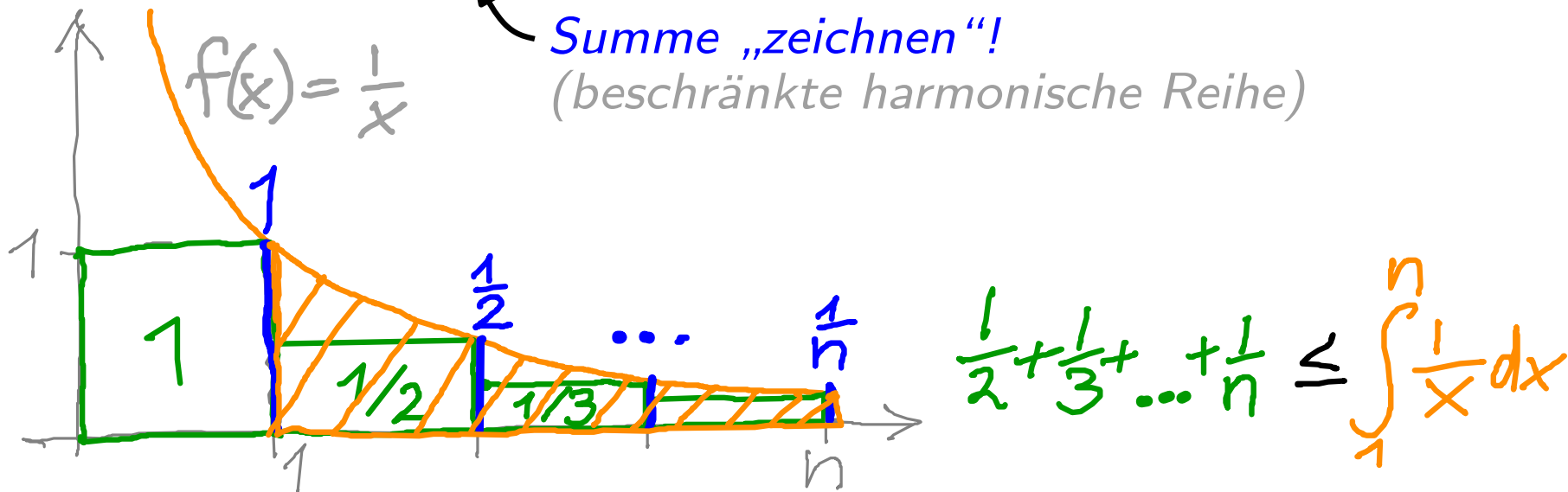
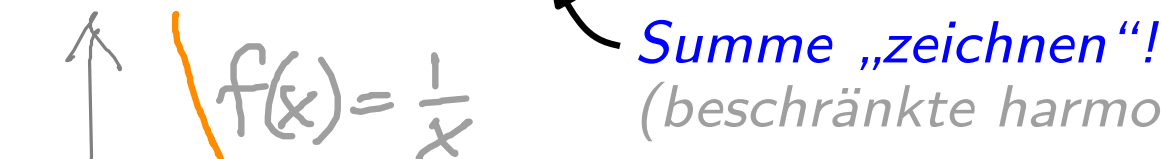
$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) =$$



# Zurück zum Erwartungswert

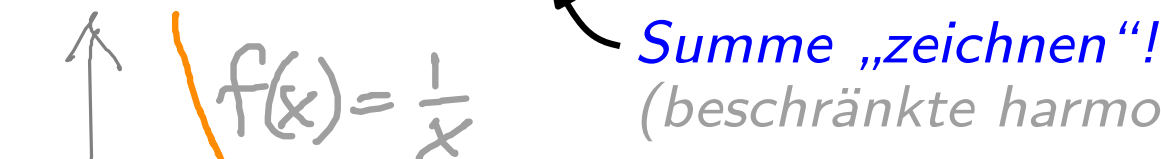
$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}\left[\sum_i M_i\right] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$



*Summe „zeichnen“!*  
(beschränkte harmonische Reihe)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*

Entsprechend...

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] =$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} =$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

M.a.W.: man kann erwarten,

# Zurück zum Erwartungswert

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Münchner nach dem } i. \text{ Essen zufrieden,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (\text{Anz. Male, die Münchener zufrieden ist.})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[M] = \mathbf{E}[\sum_i M_i] = \sum_i \mathbf{E}[M_i] = \sum_i \mathbf{Pr}[M_i = 1]$$

*Linearität des Erwartungswerts*      *Indikatorvariable*

$$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + (\ln x \Big|_1^n) = 1 + \ln n$$

*Summe „zeichnen“!*

*(beschränkte harmonische Reihe)*

Entsprechend...

$$\mathbf{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}[F_i = 1] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

M.a.W.: man kann erwarten,  
dass der Franke *exponentiell zufriedener* ist als der Münchner!

; -)



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

- Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.
- Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?
- Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

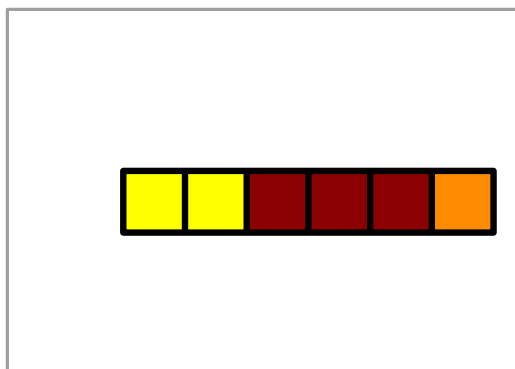
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

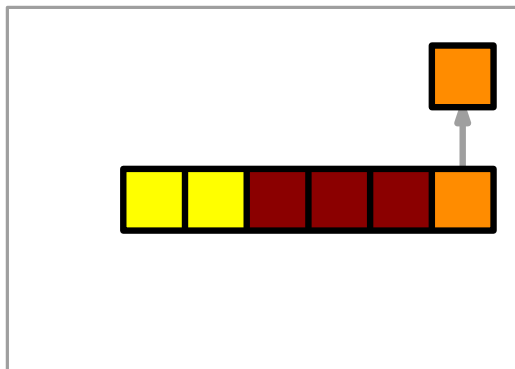
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen





# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

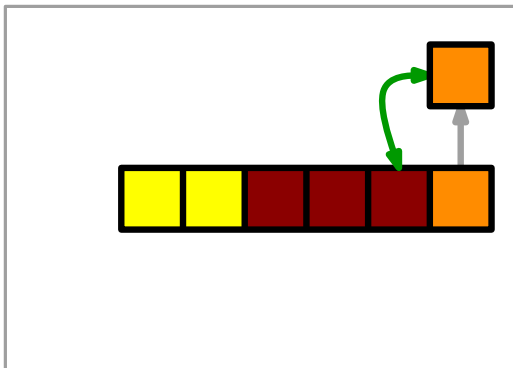
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

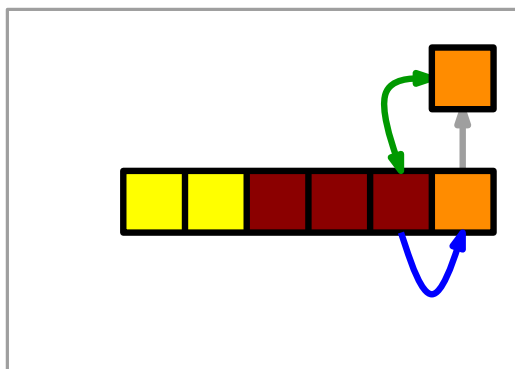
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

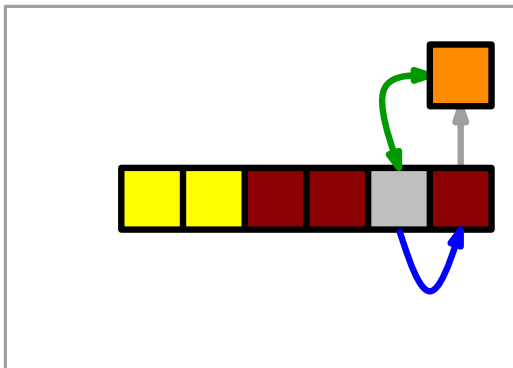
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

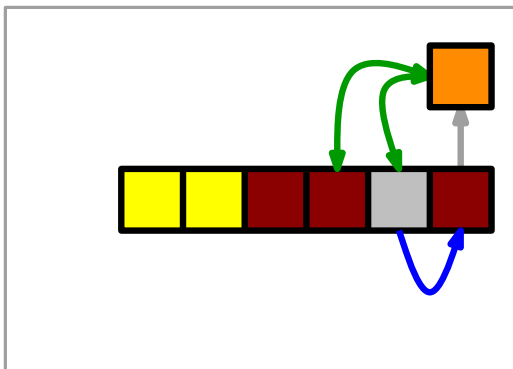
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

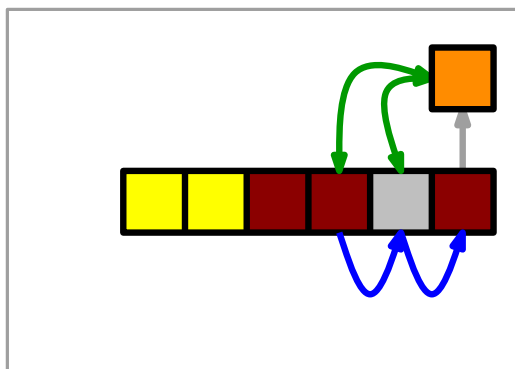
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

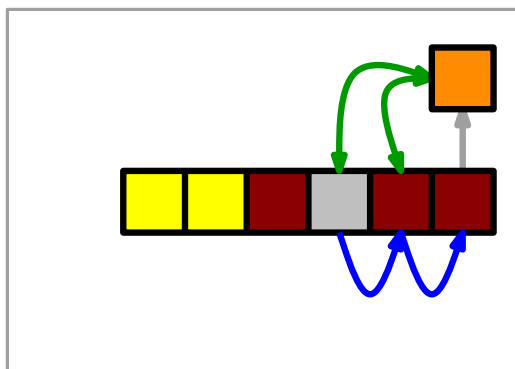
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

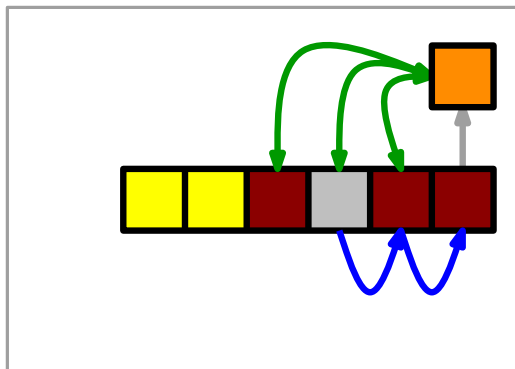
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

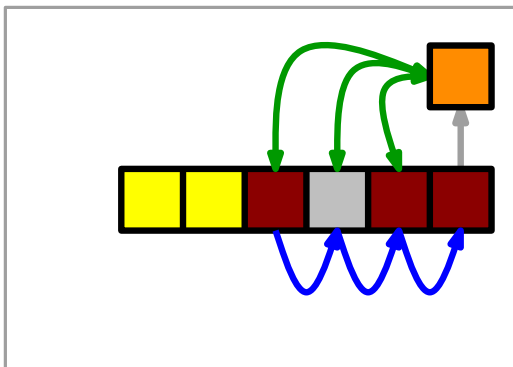
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen





# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

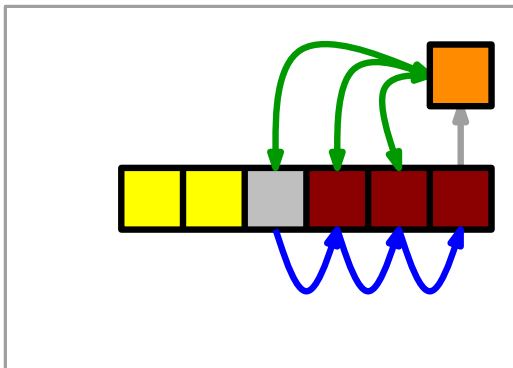
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

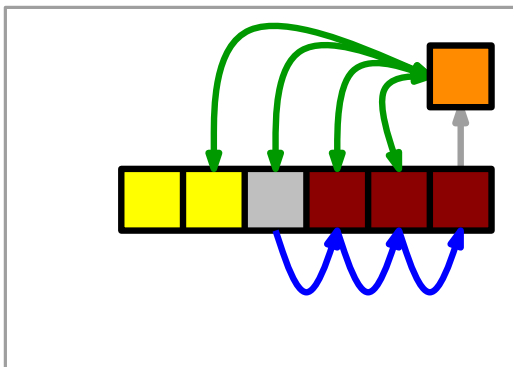
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

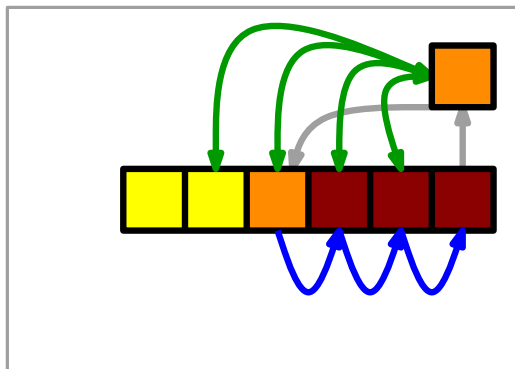
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

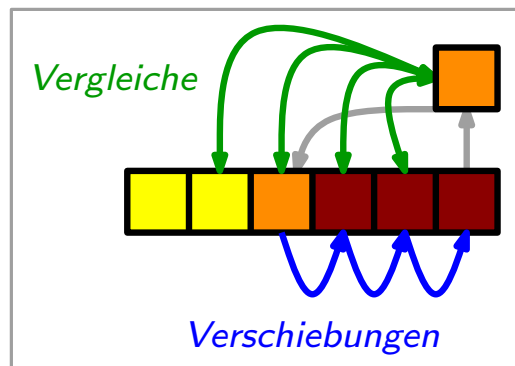
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen,



# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

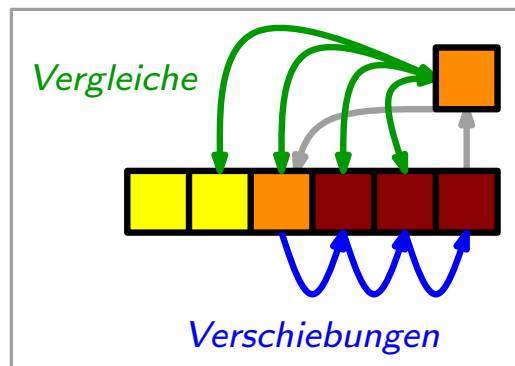
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen, denn



wenn wir **ein** Element einfügen (innere Schleife von InsertionSort), gilt:

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

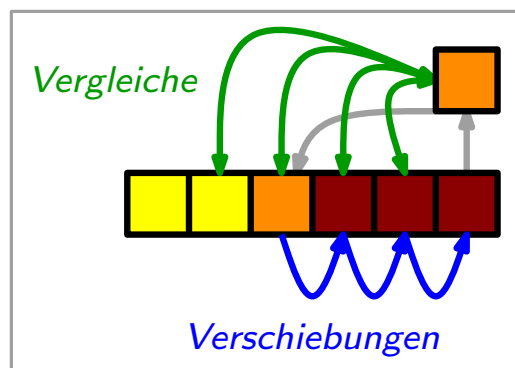
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen, denn



wenn wir **ein** Element einfügen  
(innere Schleife von InsertionSort), gilt:

$\# \text{ Verschiebungen} \leq \# \text{ Vergleiche} \leq \# \text{ Verschiebungen} + 1$

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

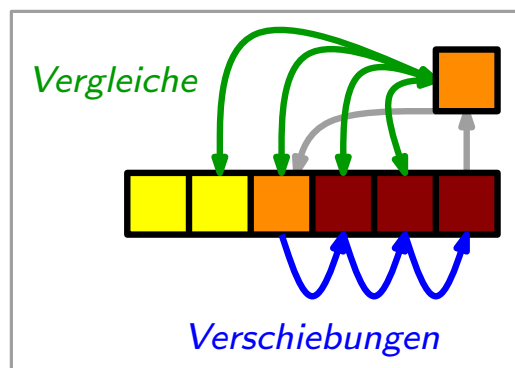
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen, denn



wenn wir **ein** Element einfügen  
(innere Schleife von InsertionSort), gilt:

$\# \text{ Verschiebungen} \leq \# \text{ Vergleiche} \leq \# \text{ Verschiebungen} + 1$

Also **insgesamt:**

# Average-Case-Laufzeit von InsertionSort

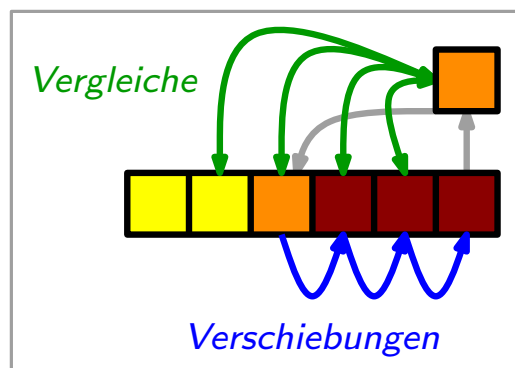
**Beob.** Der „durchschnittliche Fall“ ist i. A. schwer fassbar.

**Hier:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $A[1..n]$  (für festes  $n$ )?

**Einfacher:** Was ist die durchschnittliche Laufzeit über alle Permutationen der Eingabe  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ ?

**Wissen:**  $n - 1 \leq V_{IS}(n) \leq n(n - 1)/2$

**Beob.** Statt Vergleiche können wir auch die Anzahl der Verschiebungen  $T_{IS}$  zählen, denn



wenn wir **ein** Element einfügen (innere Schleife von InsertionSort), gilt:

$\# \text{ Verschiebungen} \leq \# \text{ Vergleiche} \leq \# \text{ Verschiebungen} + 1$

Also **insgesamt:**  $T_{IS} \leq V_{IS} \leq T_{IS} + (n - 1)$ .



# Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

**Beob.** Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

# Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

**Beob.** Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

**Warum?**

# Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

**Beob.** Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

## Warum?

Betrachte Definition:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i=0}^{n^2} i \cdot \mathbf{Pr}[T = i]$$

# Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

**Beob.** Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

## Warum?

Betrachte Definition:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i=0}^{n^2} i \cdot \mathbf{Pr}[T = i]$$

*hier:* # Verschiebungen  
(d.h. Laufzeit)

# Average-Case-Laufzeit vs. erwartete Laufzeit

**Beob.** Statt der durchschnittlichen Laufzeit über alle Permutationen können wir auch die *erwartete* Laufzeit einer zufälligen Permutation betrachten.

## Warum?

Betrachte Definition:

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i=0}^{n^2} i \cdot \mathbf{Pr}[T = i]$$

*hier:* # Verschiebungen (d.h. Laufzeit) Anteil der Permutationen, die  $i$  Verschiebungen verursachen.

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } \square \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$



# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} =$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T =$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij}$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ?



# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = ?$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$



# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}]$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}] = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{2}$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}] = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j$$

# Erwartete Laufzeit von InsertionSort

$T$  := Zufallsvariable für die Anzahl von Verschiebungen, die IS benötigt, um eine zufällige Permutation  $A[1..n]$  von  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  zu sortieren

Was wäre eine gute Indikatorvariable um  $T$  auszudrücken?

$$T_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } A[i] > A[j] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n.$$

$$\Rightarrow T_j = \sum_{i=1}^{j-1} T_{ij} = \text{Anz. Pos., um die } A[j] \text{ n. li. verschoben wird.}$$

$$\Rightarrow T = \sum_{j=2}^n T_j = \sum \sum T_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[T] = \sum \sum \mathbf{E}[T_{ij}]$$

Aber was ist  $\mathbf{E}[T_{ij}]$ ? Laut Def.  $\mathbf{E}[T_{ij}] = \mathbf{Pr}[T_{ij} = 1] = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[T] = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{E}[T_{ij}] = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{4} \quad \square$$

# Zusammenfassung InsertionSort

**Satz.** [alt]

Im *besten Fall* benötigt InsertionSort  $n - 1 \in \Theta(n)$  Vergleiche und 0 Verschiebungen.

Im *schlechtesten Fall* benötigt InsertionSort  $n(n - 1)/2 \in \Theta(n^2)$  Vergleiche/Verschiebungen.



# Zusammenfassung InsertionSort

## Satz. [alt]

Im *besten Fall* benötigt InsertionSort  $n - 1 \in \Theta(n)$  Vergleiche und 0 Verschiebungen.

Im *schlechtesten Fall* benötigt InsertionSort  $n(n - 1)/2 \in \Theta(n^2)$  Vergleiche/Verschiebungen.

## Satz. [neu]

Im *Durchschnitt* benötigt InsertionSort  $n(n - 1)/4 \in \Theta(n^2)$  Verschiebungen und zwischen  $n(n - 1)/4$  und  $n(n - 1)/4 + (n - 1)$ , d.h.  $\Theta(n^2)$ , Vergleiche.

# Zusammenfassung InsertionSort

## Satz. [alt]

Im *besten Fall* benötigt InsertionSort  $n - 1 \in \Theta(n)$  Vergleiche und 0 Verschiebungen.

Im *schlechtesten Fall* benötigt InsertionSort  $n(n - 1)/2 \in \Theta(n^2)$  Vergleiche/Verschiebungen.

## Satz. [neu]

Im *Durchschnitt* benötigt InsertionSort  $n(n - 1)/4 \in \Theta(n^2)$  Verschiebungen und zwischen  $n(n - 1)/4$  und  $n(n - 1)/4 + (n - 1)$ , d.h.  $\Theta(n^2)$ , Vergleiche.

*Kurz:* Bei InsertionSort gilt

**Average Case =<sub>asymptotisch</sub> Worst Case!**

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben?

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

**Frage':** Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl  $X$  von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

**Frage':** Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl  $X$  von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um  $X$  auszudrücken?

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

**Frage':** Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl  $X$  von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um  $X$  auszudrücken?

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für} \\ 0 & \text{für } 1 \leq i < j \leq k; \\ & k = \text{Anz. Leute} \end{cases}$$

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

**Frage':** Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl  $X$  von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um  $X$  auszudrücken?

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ gleichen Geburtstag haben} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für} \\ 1 \leq i < j \leq k; \\ k = \text{Anz. Leute} \end{array} \right\}$$



# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

**Frage':** Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl  $X$  von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um  $X$  auszudrücken?

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ gleichen Geburtstag haben} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für} \\ 1 \leq i < j \leq k; \\ k = \text{Anz. Leute} \end{array} \right\}$$

Dann gilt  $X =$

# Geburtstagswahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass mindestens zwei Leute hier im Hörsaal am gleichen Tag Geburtstag haben? [siehe Abschnitt 5.4, CLRS]

**Frage':** Wie groß ist der *Erwartungswert* für die Anzahl  $X$  von Paaren von Leuten hier im Hörsaal, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

Was wäre eine gute Indikatorvariable, um  $X$  auszudrücken?

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ gleichen Geburtstag haben} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für} \\ 1 \leq i < j \leq k; \\ k = \text{Anz. Leute} \end{array} \right\}$$

$$\text{Dann gilt } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k X_{ij}.$$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$


Geburtstag von Person  $j$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \text{ und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$




**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$



**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.


$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$



**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.


$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] =$$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$



**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.


$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] =$$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$



**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] =$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!





# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} =$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**  $\mathbf{E}[X] =$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] =$$

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] =$$

Linearität des Erwartungswerts!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

Linearität des Erwartungswerts!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

Linearität des Erwartungswerts!



# Geburtstagserwartungen

Es gilt:  $X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$  und  $X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}$ .

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}$$

Linearität des Erwartungswerts!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \geq 1 \Leftrightarrow$$

Linearität des Erwartungswerts!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:  $X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$  und  $X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}$ .

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \geq 1 \Leftrightarrow k(k-1) \geq 2n.$$

Linearität des Erwartungswerts!

# Geburtstagserwartungen

Es gilt:

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } G_i = G_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{und } X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}.$$

Geburtstag von Person  $j$

**Annahme:** Alle  $n$  Tage sind gleich wahrscheinlich Geburtstage.

$$\Rightarrow \mathbf{E}[X_{ij}] = \mathbf{Pr}[X_{ij} = 1] = \sum_{t=1}^n \mathbf{Pr}[G_i = G_j = t] = \frac{n}{n^2} = 1/n.$$

Ereignisse schließen sich gegenseitig aus!

(Geht auch einfacher!)

**Gesucht:**

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E} \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij} \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbf{E}[X_{ij}] =$$

$$= \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \geq 1 \Leftrightarrow k(k-1) \geq 2n.$$

Linearität des Erwartungswerts!

Für ein Jahr mit  $n = 365$  Tagen braucht man also nur  $k \geq 28$  Personen um ein Pärchen mit gleichem Geburtstag erwarten zu können.  $\square$

# Bonustrack

# Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ .

## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen

$x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)



## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?

## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?

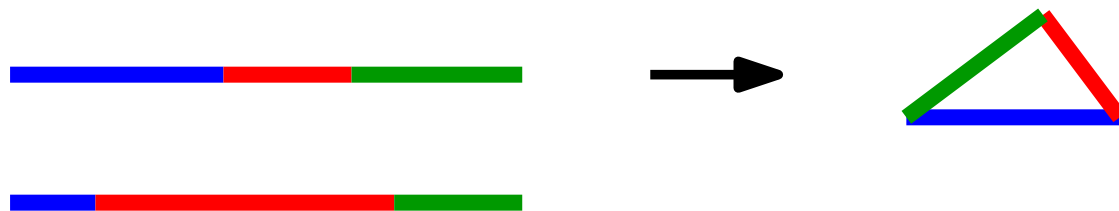


## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen

$x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?

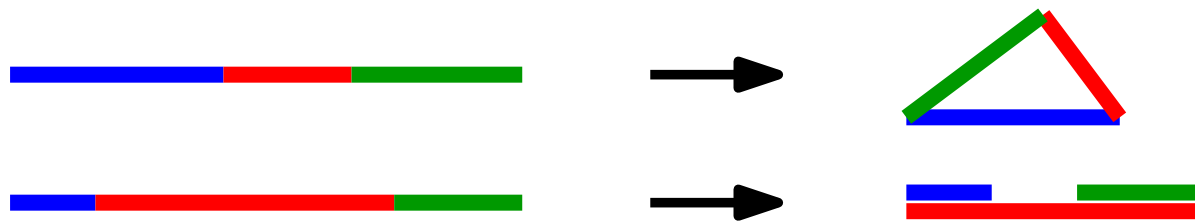


# Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen

$x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

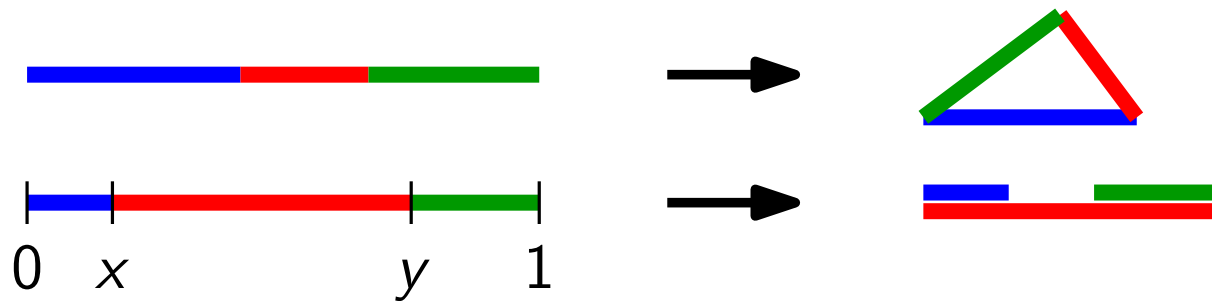
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?

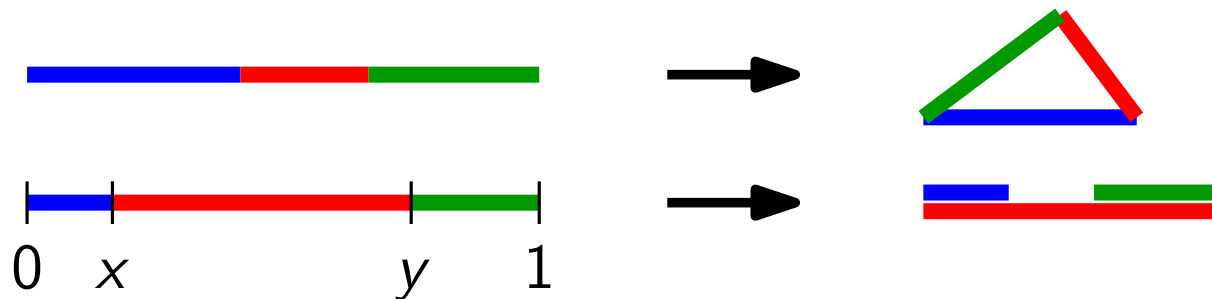


Mit anderen Worten – was ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $\max\{x, y - x, 1 - y\} < 1/2$ ?

# Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



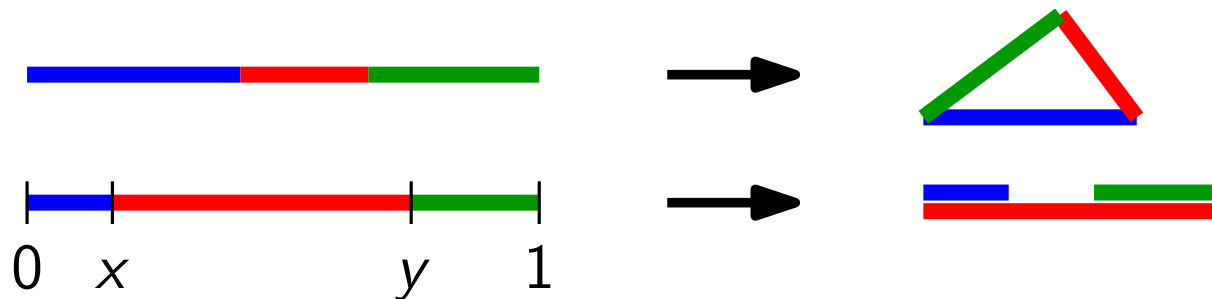
Mit anderen Worten – was ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $\max\{x, y - x, 1 - y\} < 1/2$ ?

*Tipp:*

## Bonustrack (Nur eine Frage, keine Antwort!)

Angenommen, Sie haben einen Stock der Länge 1 und zerbrechen ihn an zwei zufällig gewählten Stellen  $x \in [0, 1]$  und  $y \in [0, 1]$ . (Die ZV  $x$  &  $y$  sind also *nicht* diskret!)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus den drei Teilen ein Dreieck legen können?



Mit anderen Worten – was ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $\max\{x, y - x, 1 - y\} < 1/2$ ?

**Tipp:** Betrachten Sie das Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ .