Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

7. Vorlesung

## Wurzelspannbäume

*Prof. Dr. Alexander Wolff*

*Lehrstuhl für Informatik I*

# Wurzelbäume

**Def.** Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt $s$-**Wurzelbaum**, wenn

- $T$ azyklisch,
- $\mathrm{indeg}(s) = 0$ und
- $\mathrm{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

# Wurzelbäume

**Def.** Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt $s$-**Wurzelbaum**, wenn

- $T$ azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

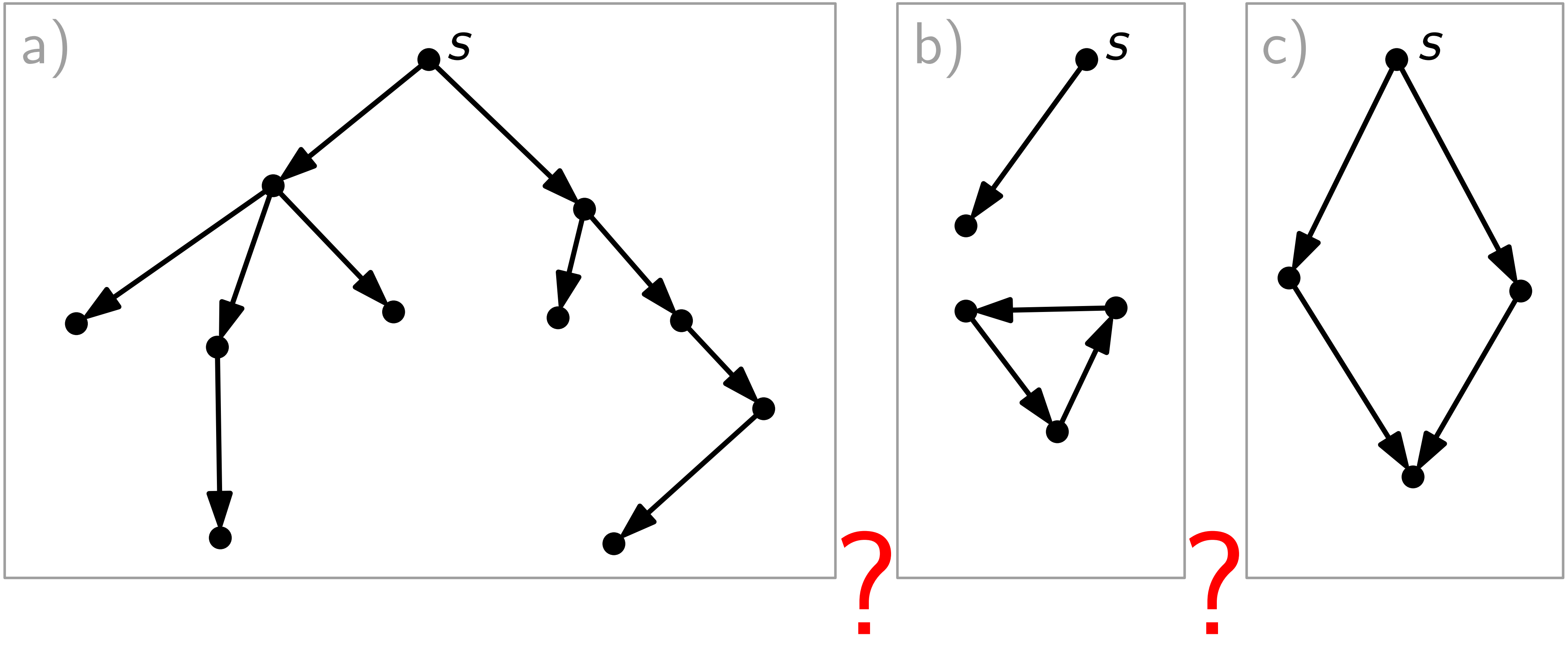
$T$ enthält keinen (gerichteten) Kreis.

# Wurzelbäume

**Def.** Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt $s$-**Wurzelbaum**, wenn

- $T$ azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

$T$ enthält keinen (gerichteten) Kreis.

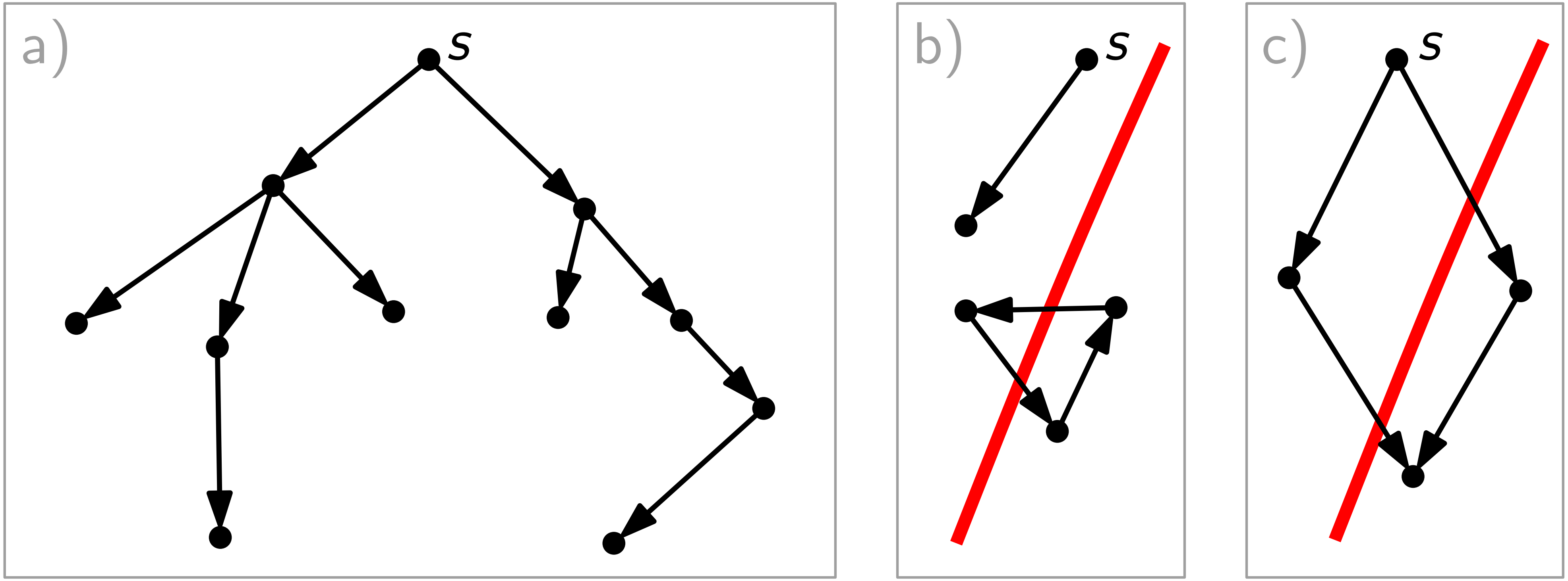


# Wurzelbäume

**Def.** Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt $s$-**Wurzelbaum**, wenn

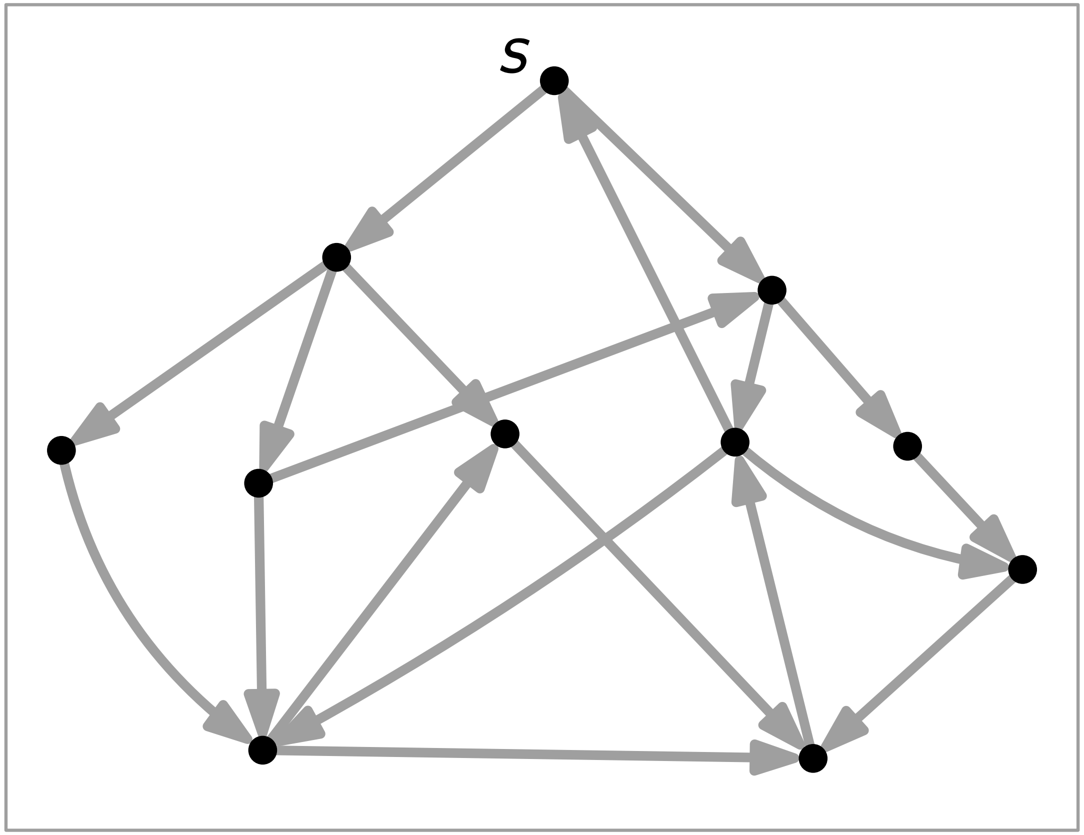
- $T$ azyklisch,
- $\mathrm{indeg}(s) = 0$ und
- $\mathrm{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

$T$ enthält keinen (gerichteten) Kreis.



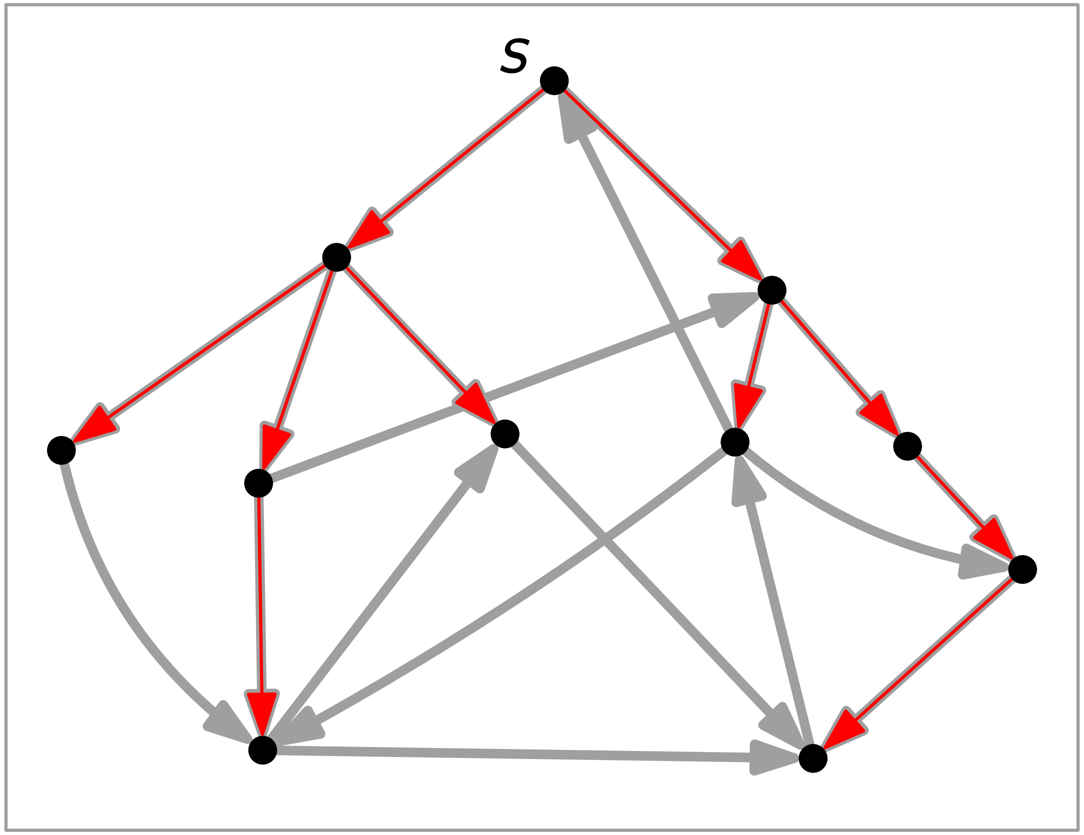
# Wurzelspannbäume

**Def.** Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph $T$ von $G$ mit Knotenmenge $V$ heißt $s$-**Wurzelspannbaum** von $G$, wenn $T$ ein $s$-Wurzelbaum ist.



# Wurzelspannbäume

**Def.** Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph $T$ von $G$ mit Knotenmenge $V$ heißt $s$-**Wurzelspannbaum** von $G$, wenn $T$ ein $s$-Wurzelbaum ist.



# Existenz von Wurzelspannbäumen

**Beob.** Sei $G$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s$.
$G$ besitzt einen $s$-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von $s$ in $G$ erreichbar.

# Existenz von Wurzelspannbäumen

**Beob.** Sei $G$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s$.
$G$ besitzt einen $s$-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von $s$ in $G$ erreichbar.

Es existiert ein $s$-$v$-Pfad in $G$.

# Existenz von Wurzelspannbäumen

**Beob.** Sei $G$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s$.
$G$ besitzt einen $s$-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von $s$ in $G$ erreichbar.

Es existiert ein $s$-$v$-Pfad in $G$.

*Beweis.* Siehe Übungsblatt. $\square$

# Existenz von Wurzelspannbäumen

**Beob.** Sei $G$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s$.
$G$ besitzt einen $s$-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von $s$ in $G$ erreichbar.

Es existiert ein $s$-$v$-Pfad in $G$.

*Beweis.* Siehe Übungsblatt. $\square$

**Bem.** DFS($s$) liefert $s$-Wurzelspannbaum
(sofern es einen gibt).

# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

# Minimale Wurzelspannbäume

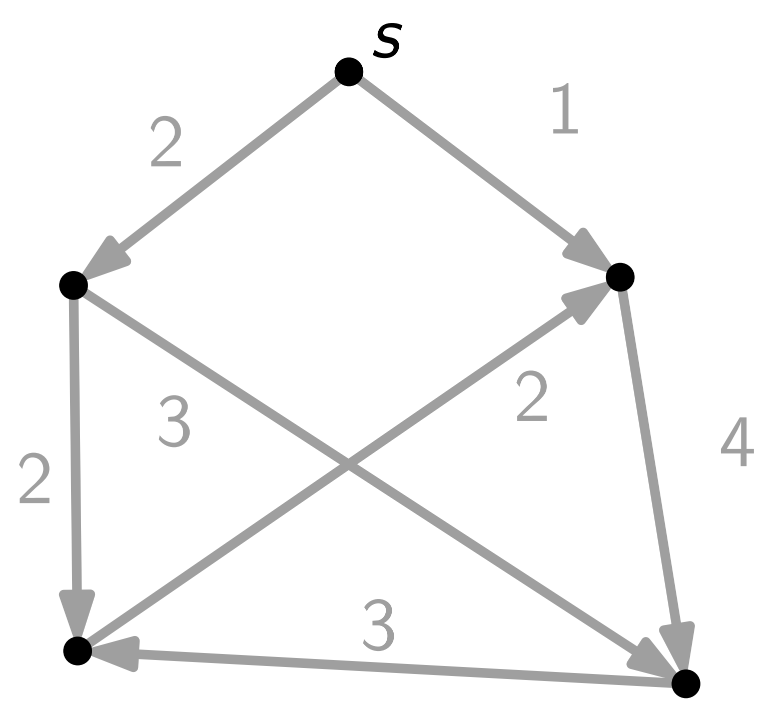
**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von $G$ (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.

# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

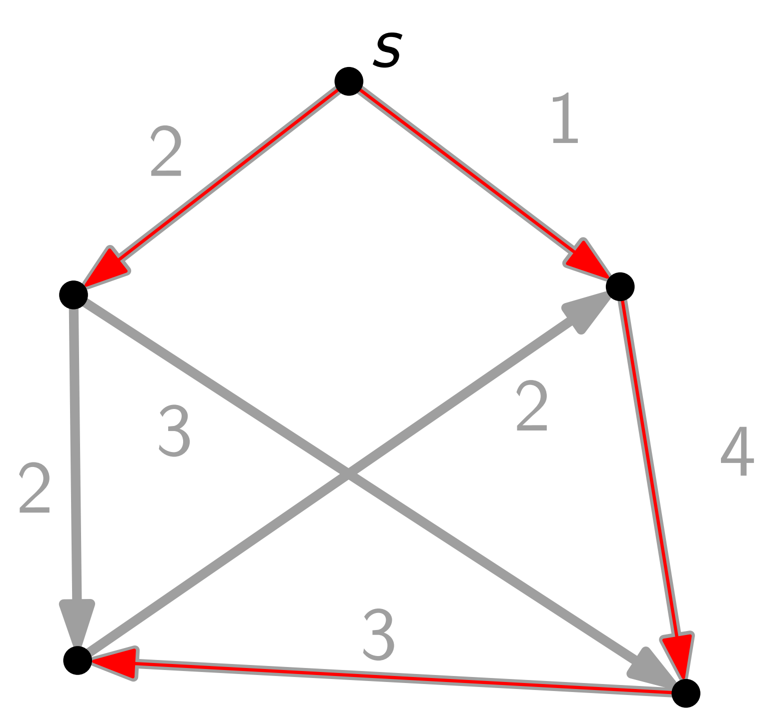
Gesucht: $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von $G$ (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

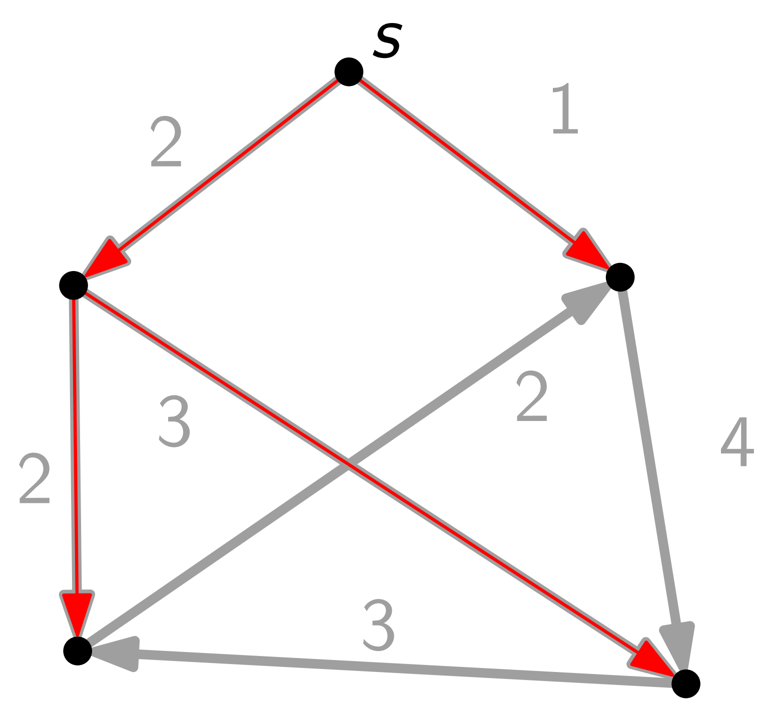
Gesucht: $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von $G$ (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

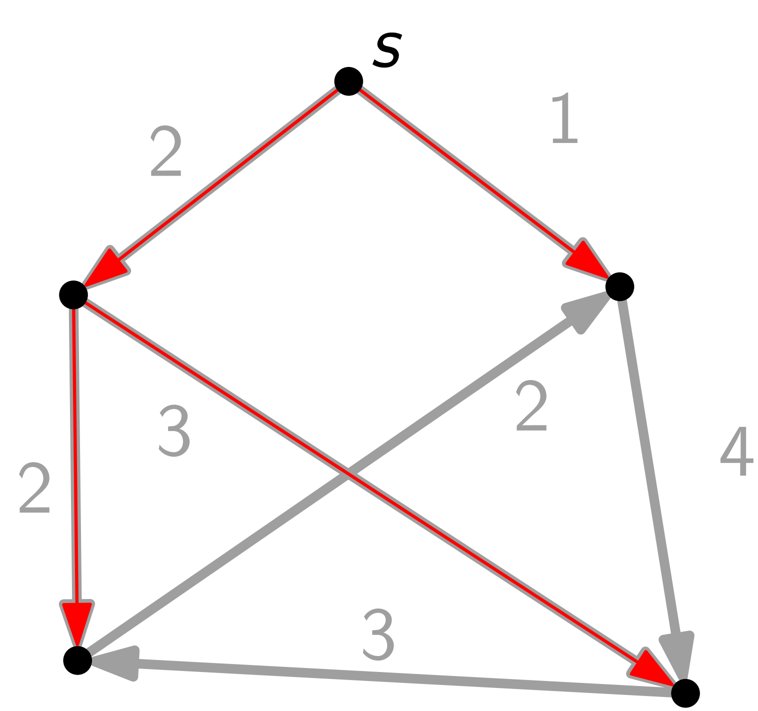
Gesucht: $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von $G$ (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von $G$ (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



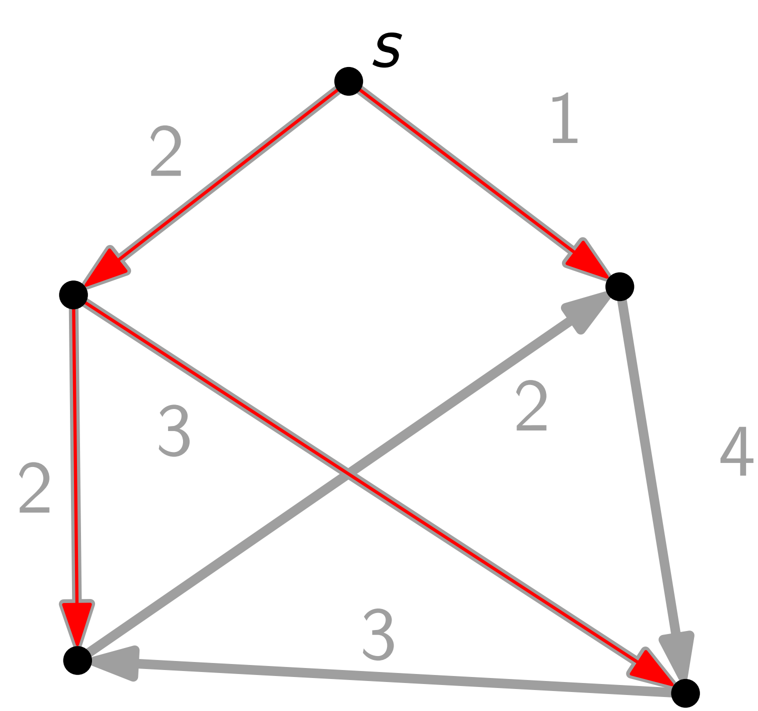

*Motivation:*

Broadcast (Versenden von Information von $s$ an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von $G$ (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.




*Motivation:*

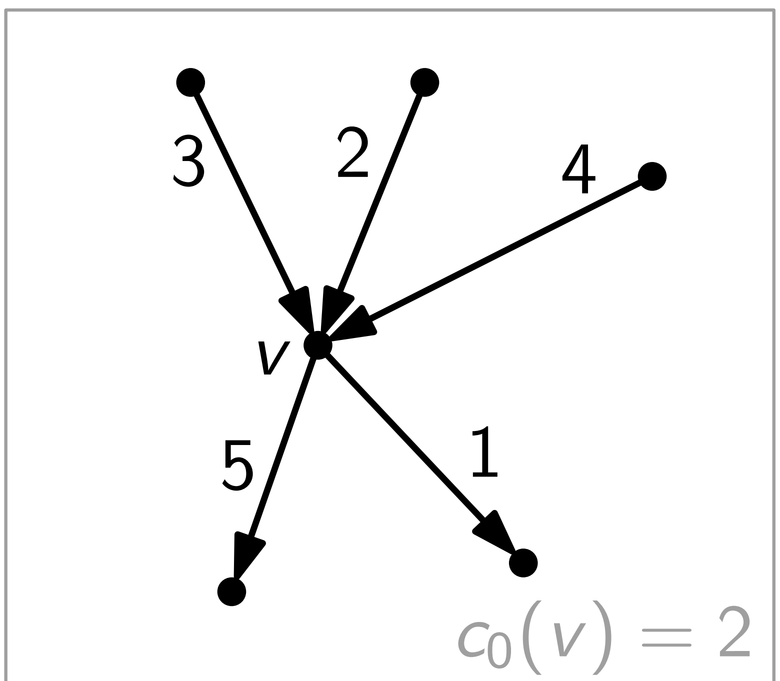
Broadcast (Versenden von Information von $s$ an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

*Übungsaufgabe:*

Kruskal und Jarník-Prim schlagen i.A. fehl!

# Kostenmodifikation

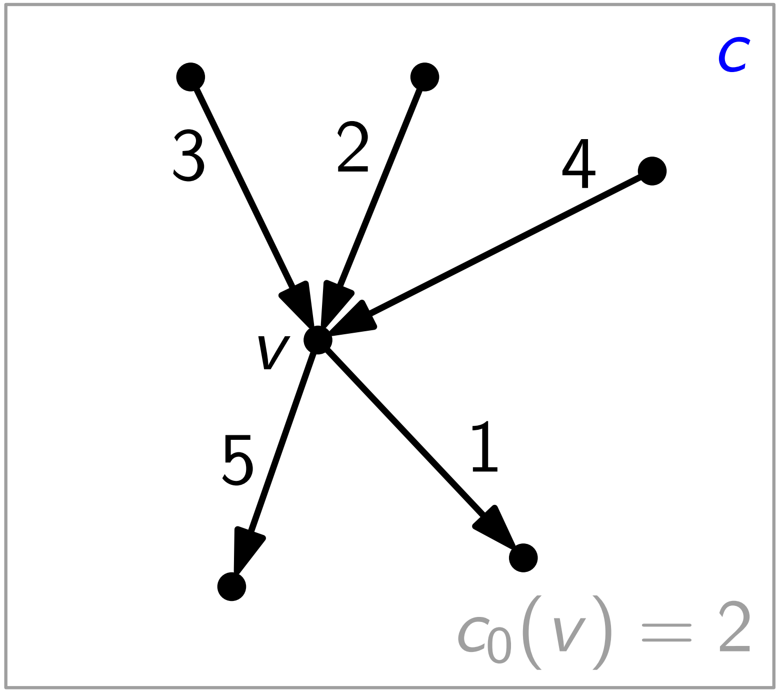
Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.



# Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\mathrm{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

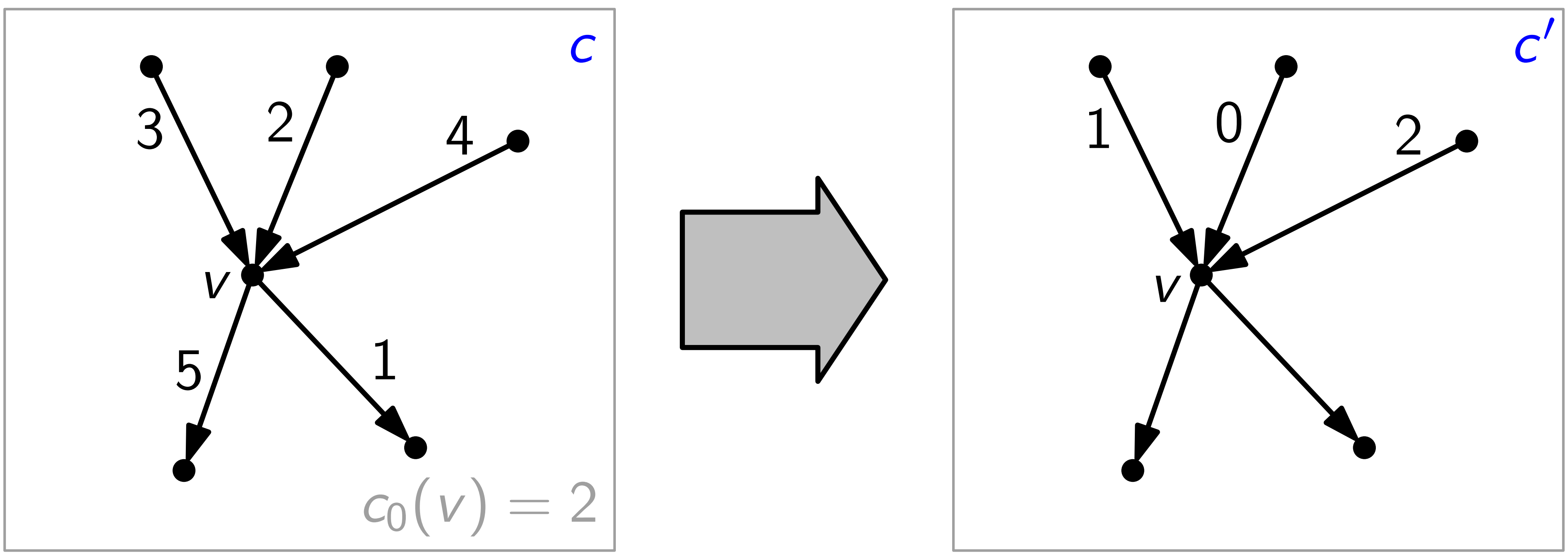


# Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\operatorname{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante $(u,v)$ setze $c'(u,v) := c(u,v) - c_0(v)$.



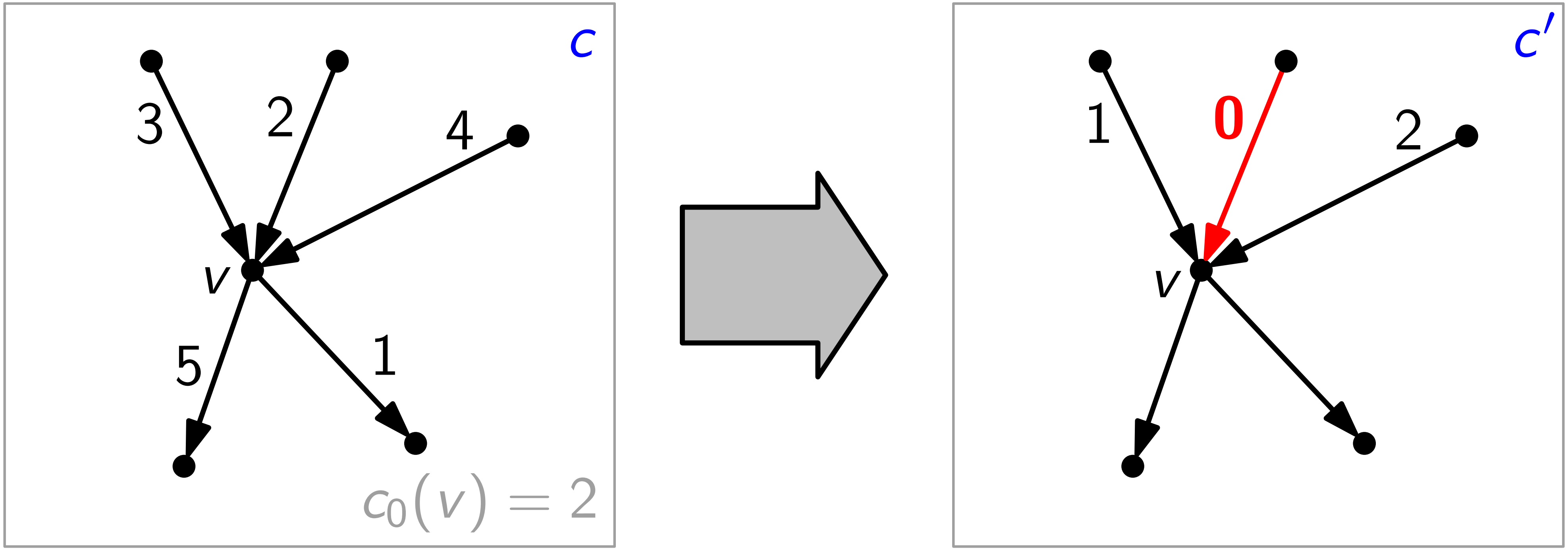
# Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\mathrm{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante $(u,v)$ setze $c'(u,v) := c(u,v) - c_0(v)$.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten $v \neq s$ hat eingehende 0-Kante.



# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) =$$

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v) \in E_T} (c(u, v) - c_0(v))$$

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$\begin{aligned} c'(E_T) &= \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v)) \\ &= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V\setminus s} c_0(v) \end{aligned}$$

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v) \in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

indeg$_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
indeg$_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v) \in E_T} c(u,v) - \sum_{v \in V \setminus s} c_0(v)$$

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

$\mathrm{indeg}_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
$\mathrm{indeg}_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)$$

$$= c(E_T) - \boxed{\sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)}$$

# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein $s$-Wurzelspannbaum von $G$ ist genau dann optimal bezüglich $c$, wenn er optimal bezüglich $c'$ ist.

*Beweis.* Für *jeden* $s$-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

$\mathrm{indeg}_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
$\mathrm{indeg}_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)$$

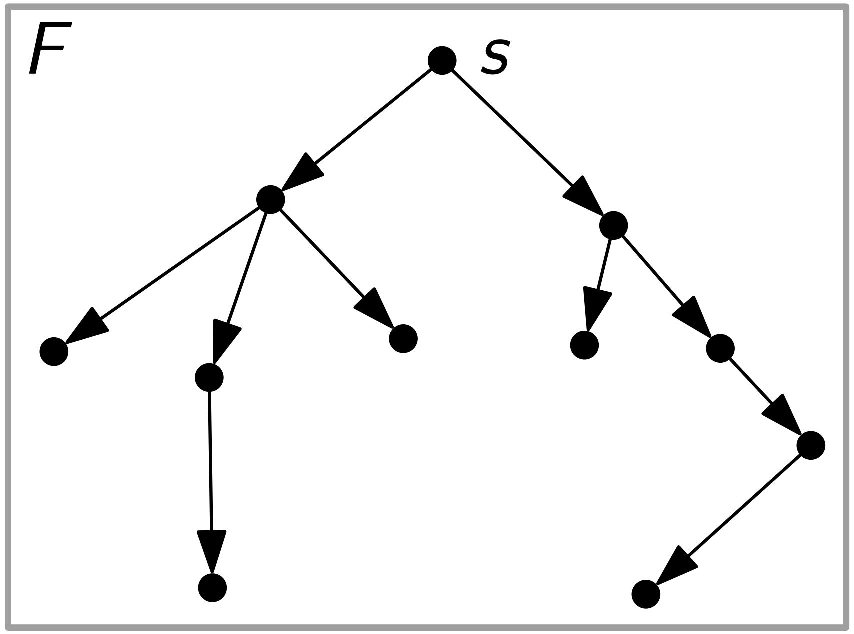
$$= c(E_T) - \boxed{\sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)}$$

unabhängig von $T$!

□

# Ein Versuch

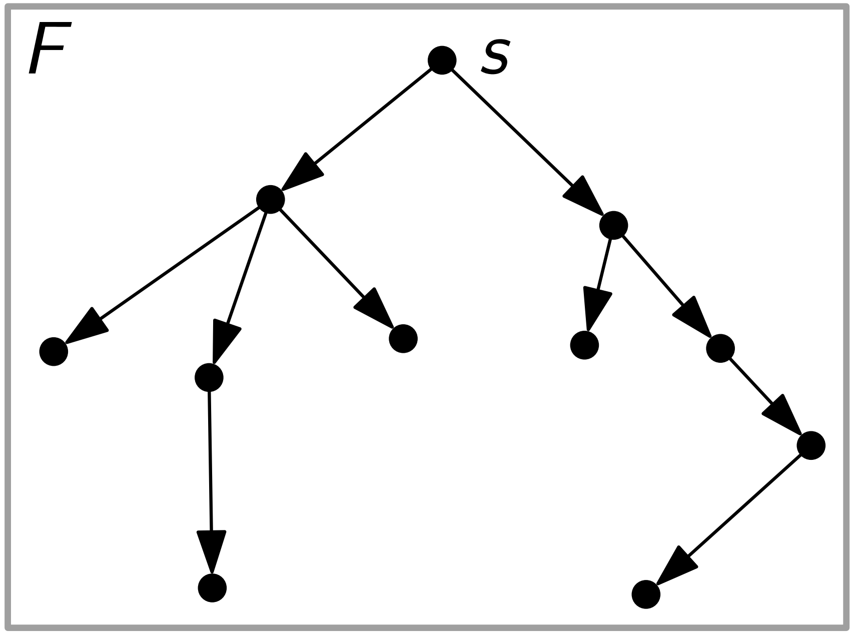
Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von $G$



# Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von $G$

Falls $F$ azyklisch $\;\Rightarrow\;$ $F$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$!

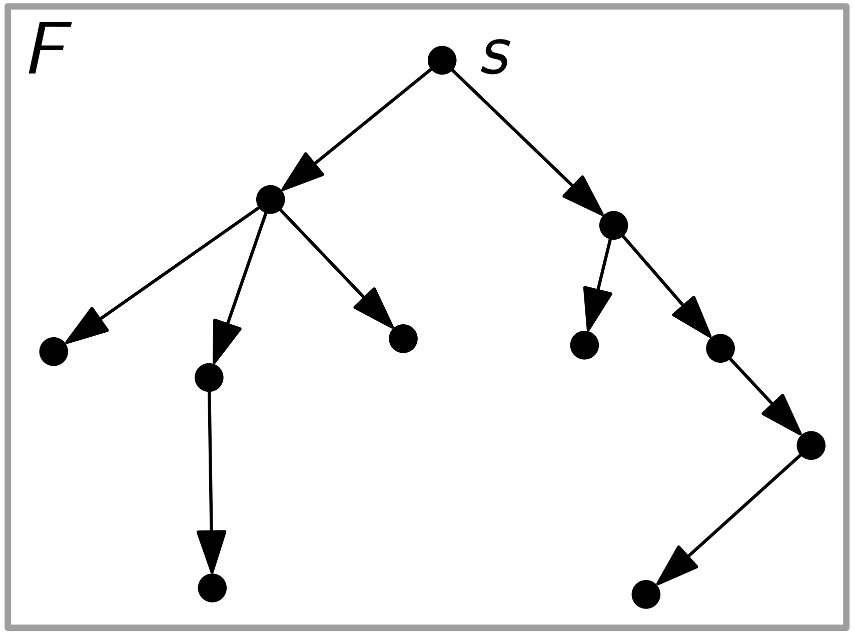


# Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von $G$

Falls $F$ azyklisch $\Rightarrow$ $F$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$!

Beachte: $F$ ist *optimal* bzgl. $c'$ (und somit auch bzgl. $c$)

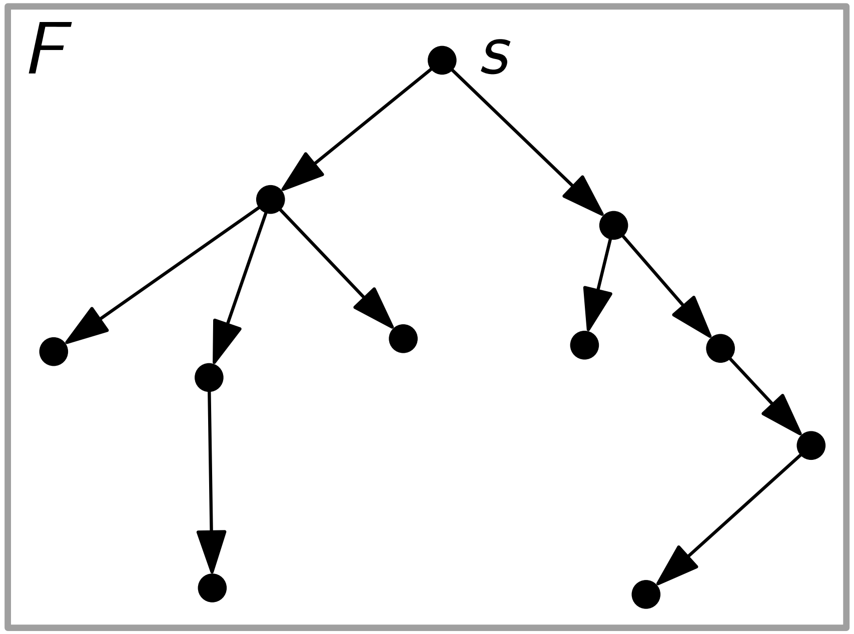


# Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von $G$

Falls $F$ azyklisch $\Rightarrow$ $F$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$!

Beachte: $F$ ist *optimal* bzgl. $c'$ (und somit auch bzgl. $c$), da $c'(F) = 0$.



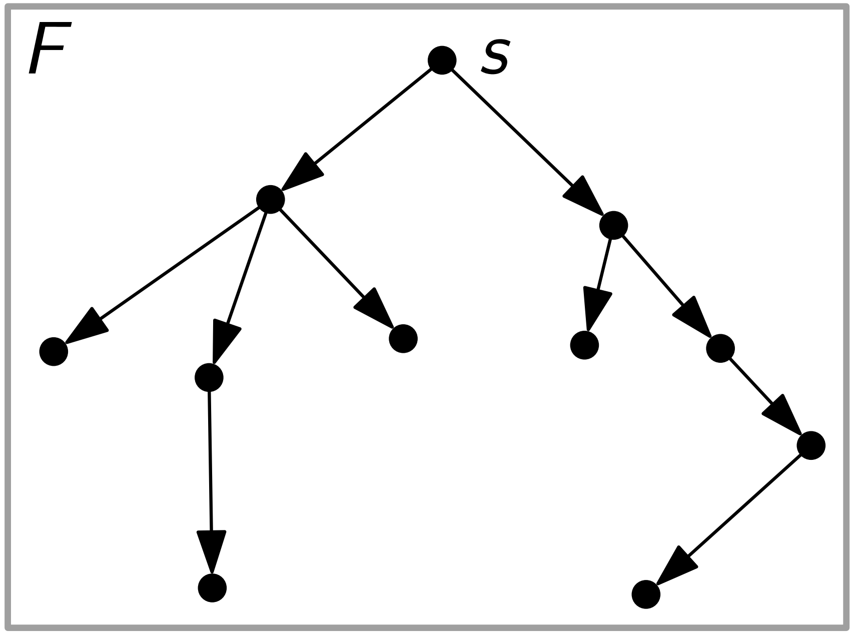
# Ein Versuch

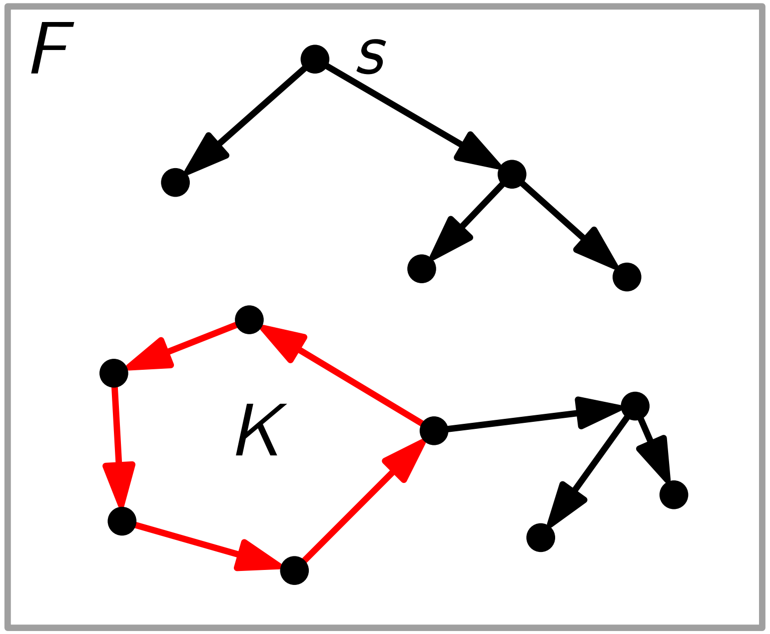
Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von $G$

Falls $F$ azyklisch $\Rightarrow$ $F$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$!

Beachte: $F$ ist *optimal* bzgl. $c'$ (und somit auch bzgl. $c$), da $c'(F) = 0$.

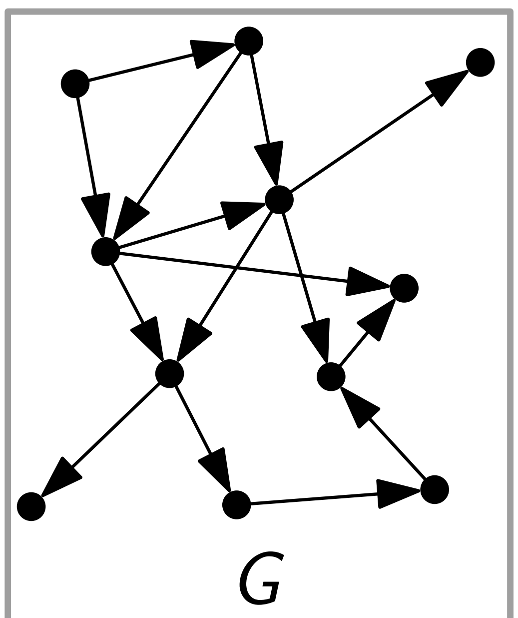
Problem: Was tun, wenn $F$ einen Kreis $K$ enthält?



# Kontraktion

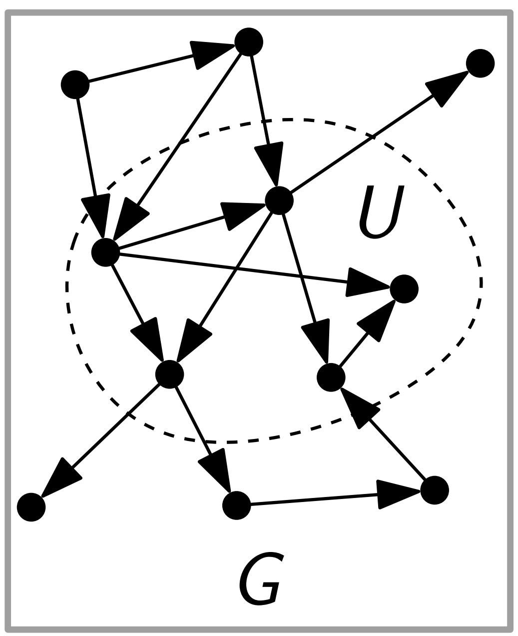
Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.



# Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

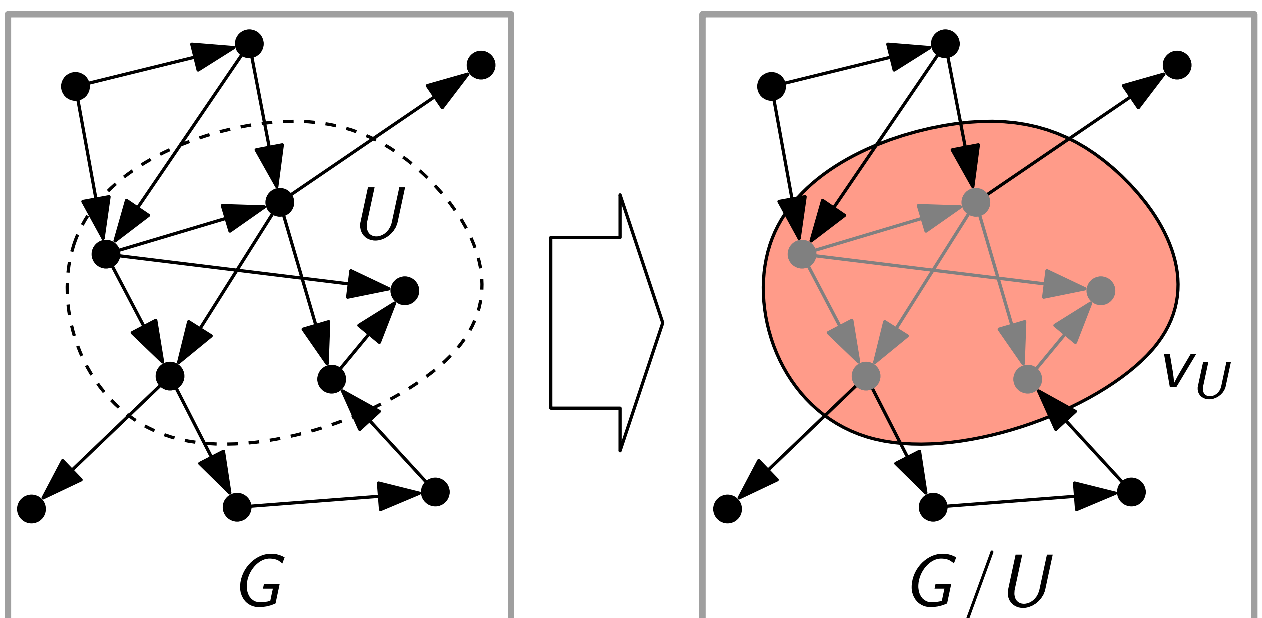
*Kontraktion* von $U$: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten $v_U$.



# Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

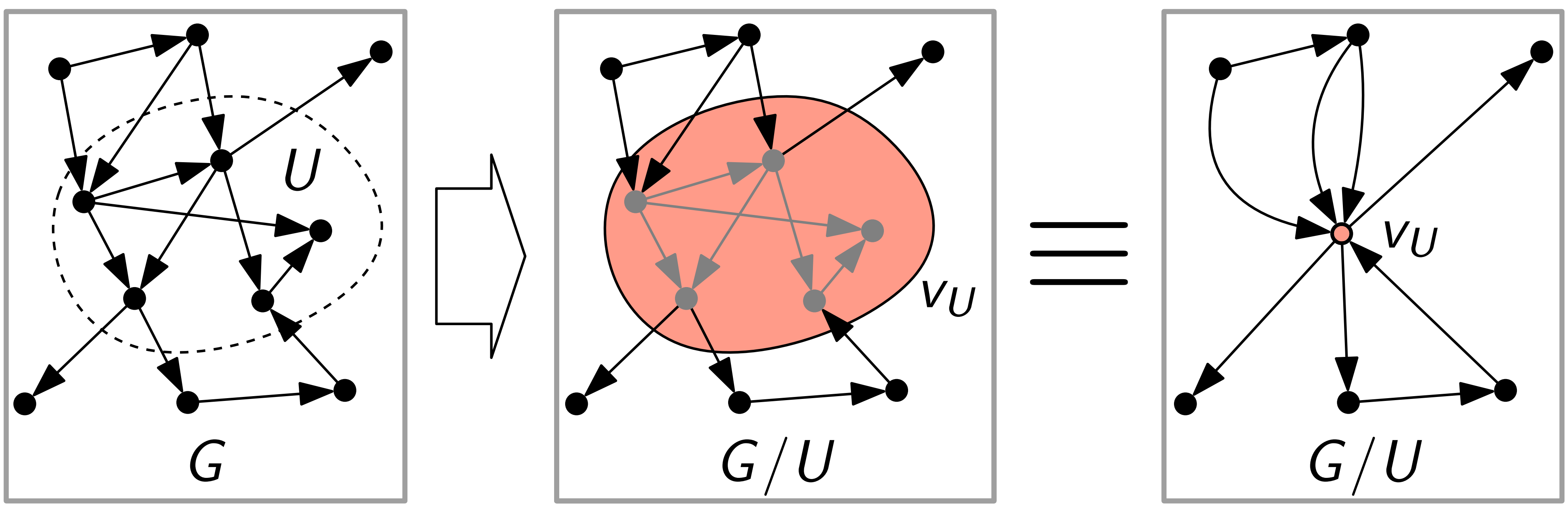
*Kontraktion* von $U$: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten $v_U$.



# Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

*Kontraktion* von $U$: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten $v_U$.

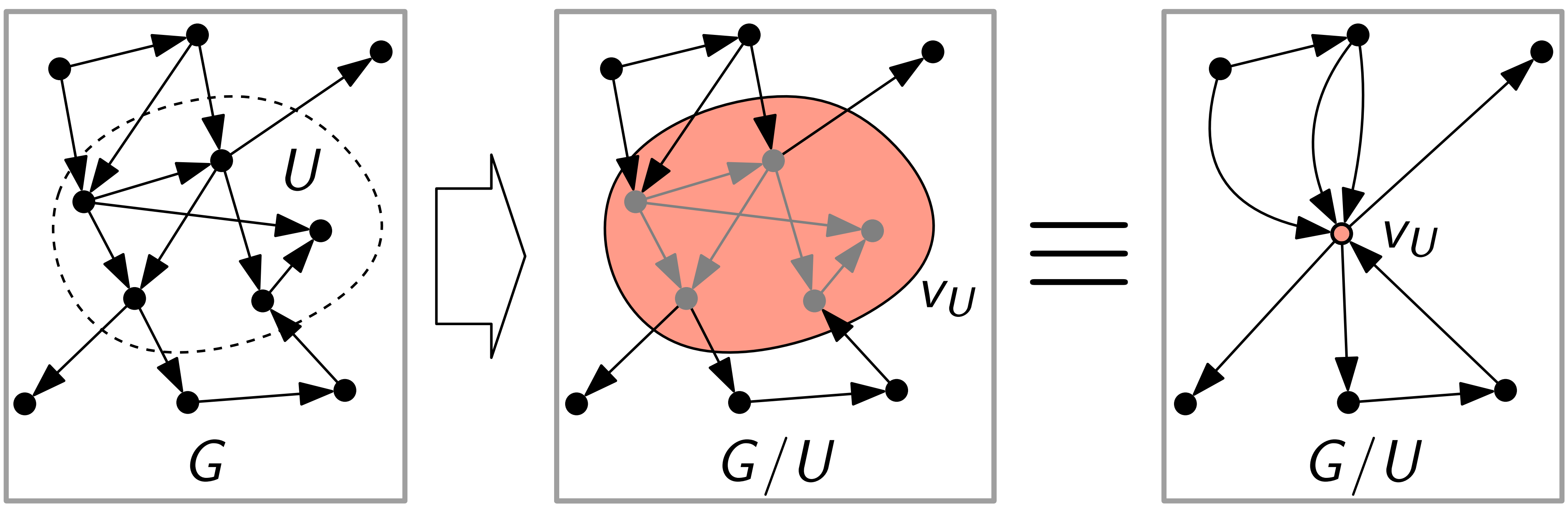


# Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

*Kontraktion* von $U$: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten $v_U$.

Kantenkosten werden auf $G/U$ vererbt.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

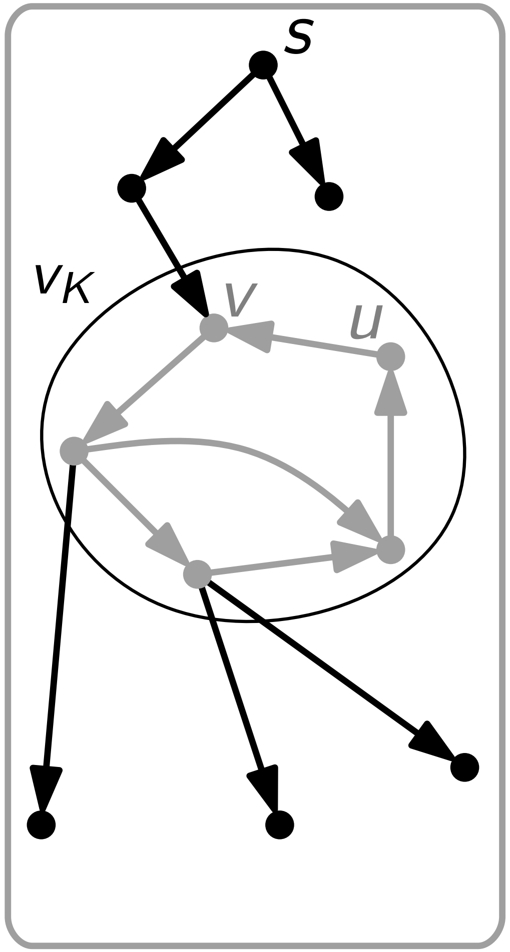
# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.



# Expansion

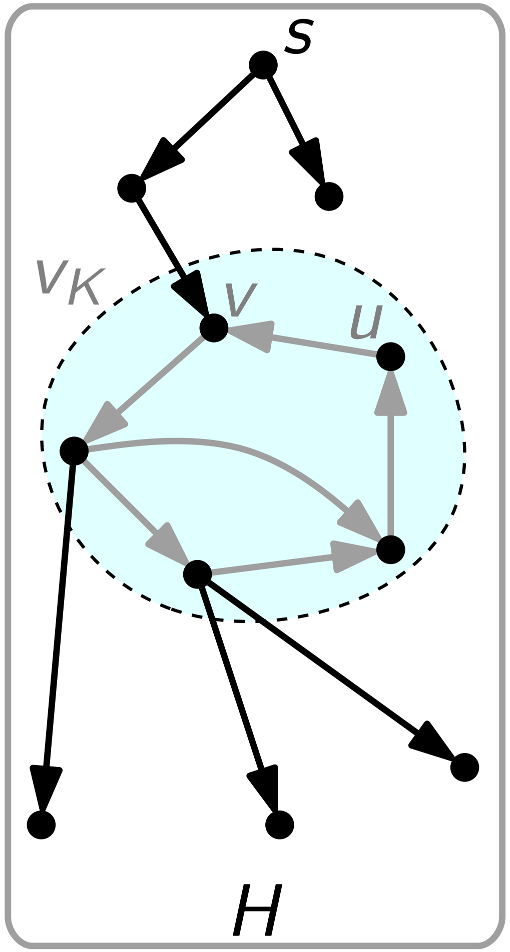
**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$.
Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

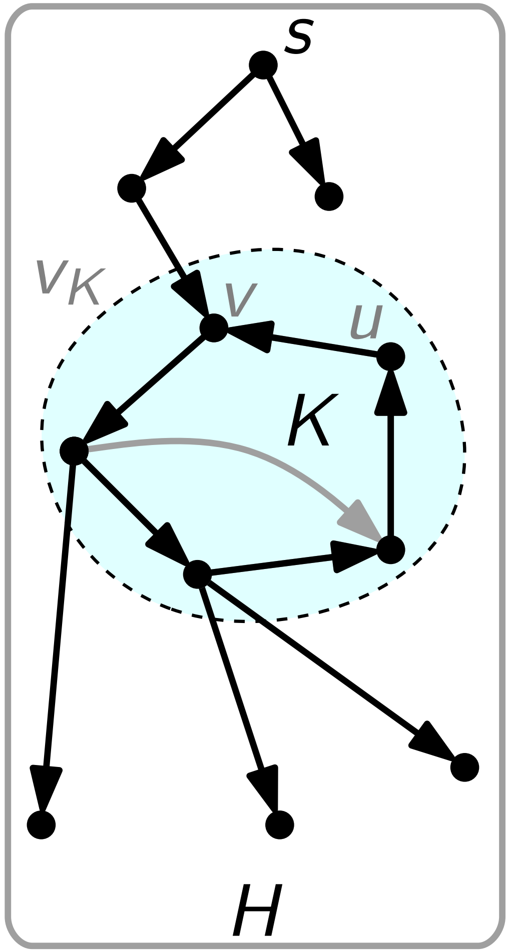
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

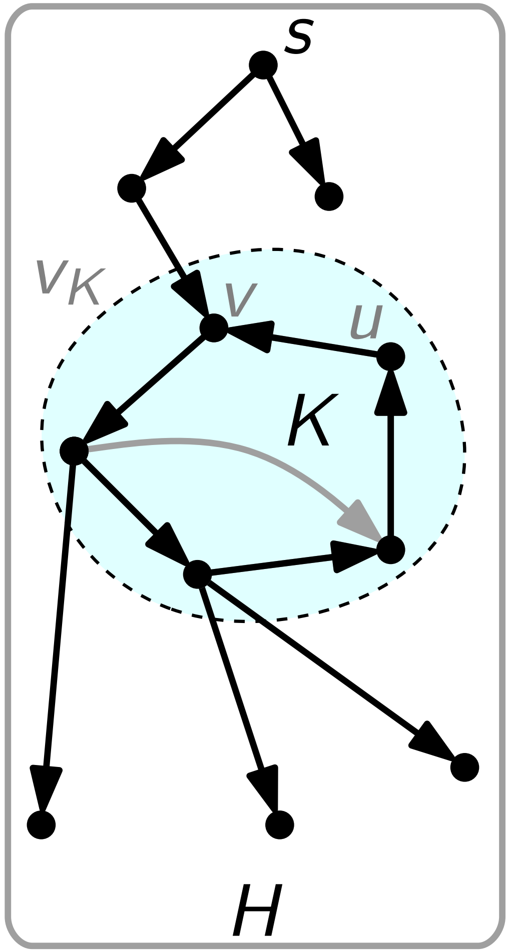
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) =$



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

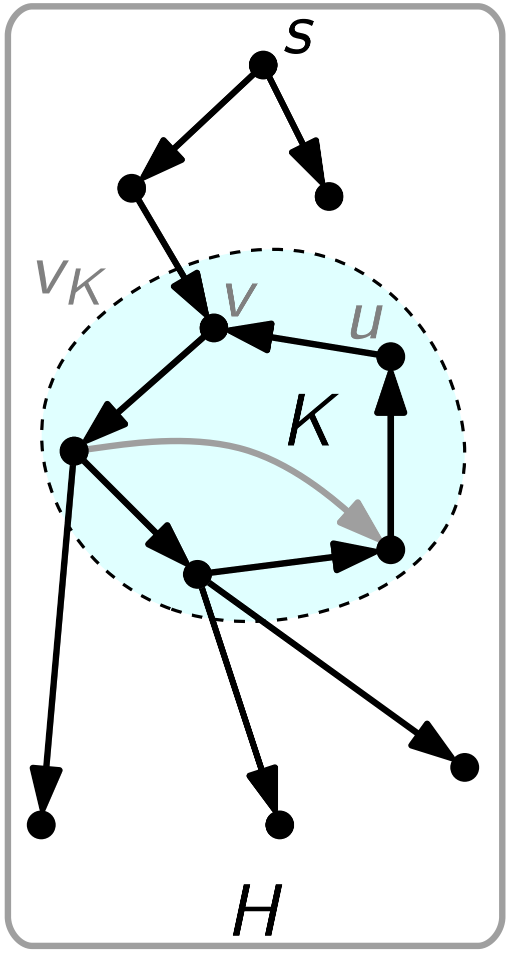
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\leadsto$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

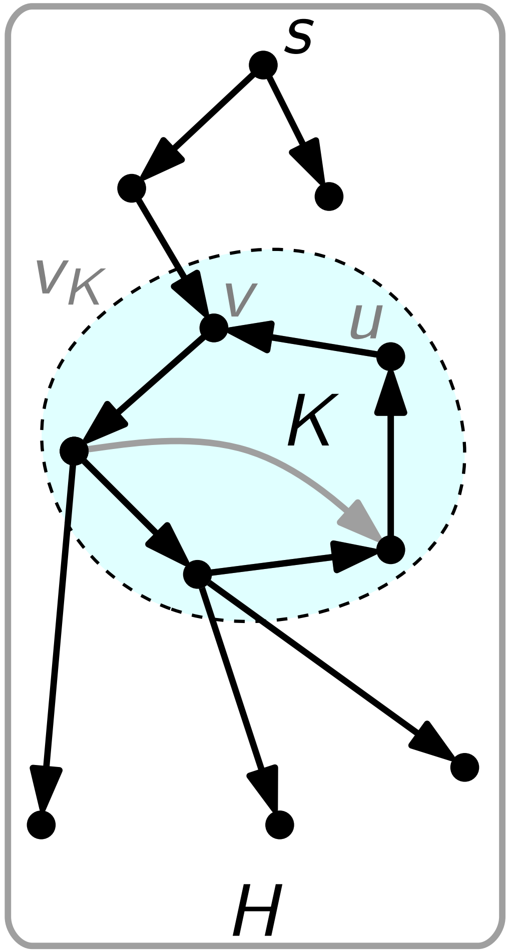
*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in $V$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

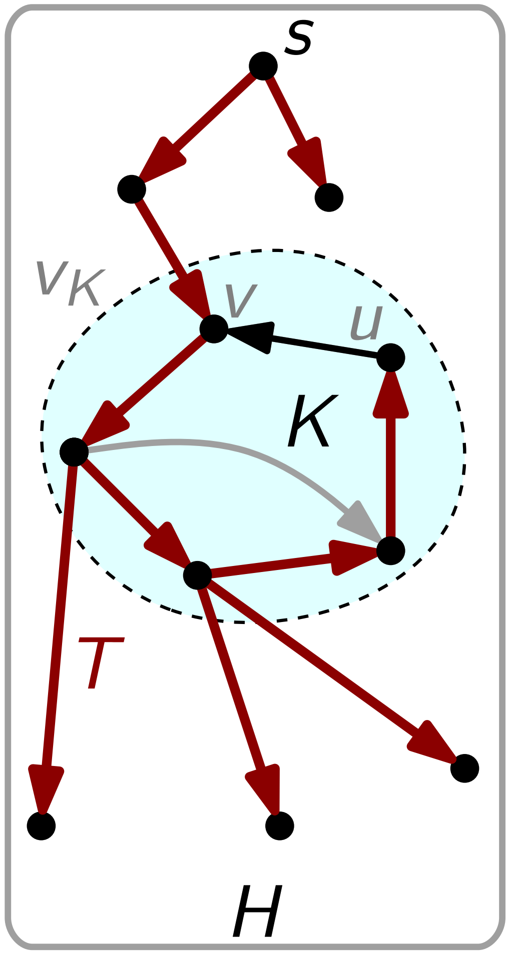
Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in $V$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Ermittle $s$-Wurzelspannbaum $T$ $(= H - uv)$ von $H$.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

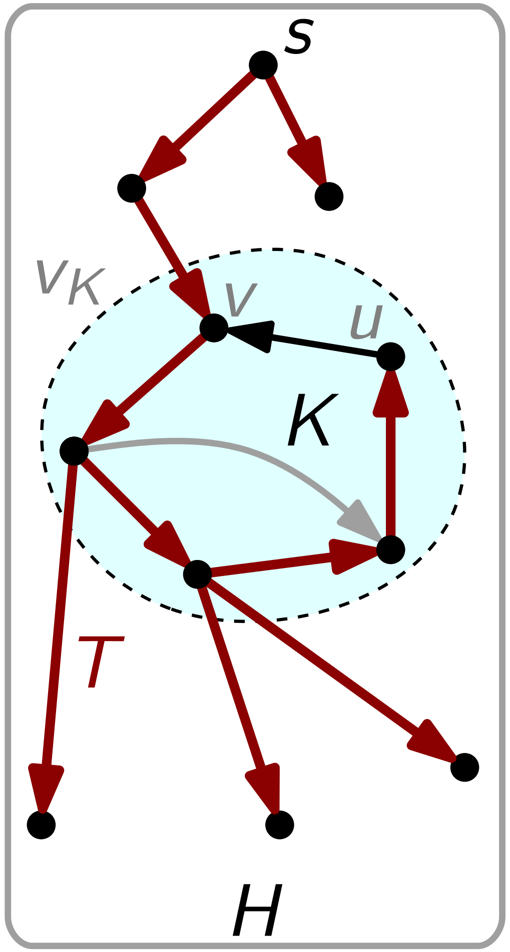
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in $V$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Ermittle $s$-Wurzelspannbaum $T$ $(= H - uv)$ von $H$.

$T$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

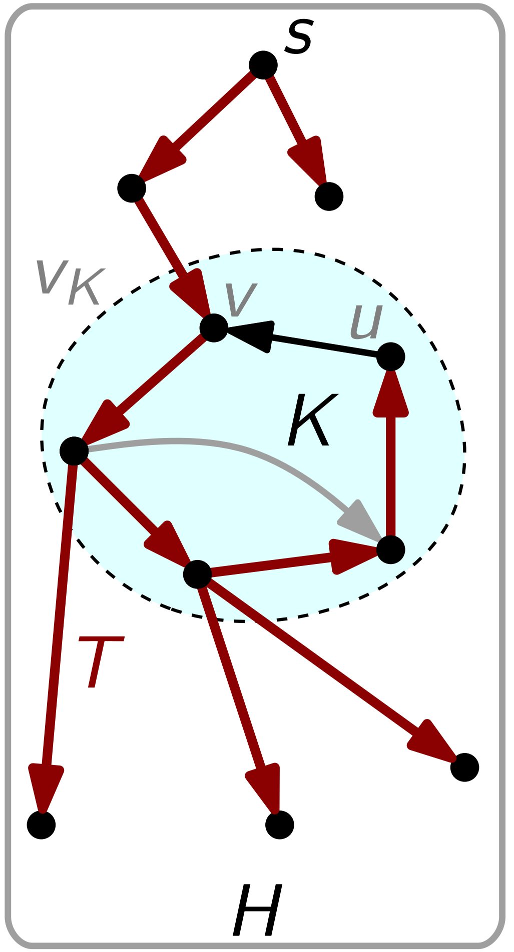
Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in $V$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Ermittle $s$-Wurzelspannbaum $T$ $(= H - uv)$ von $H$.

$T$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$.

$c'(T) \leq$



# Expansion

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in $G$.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph $H$ von $G$ mit Knotenmenge $V$.

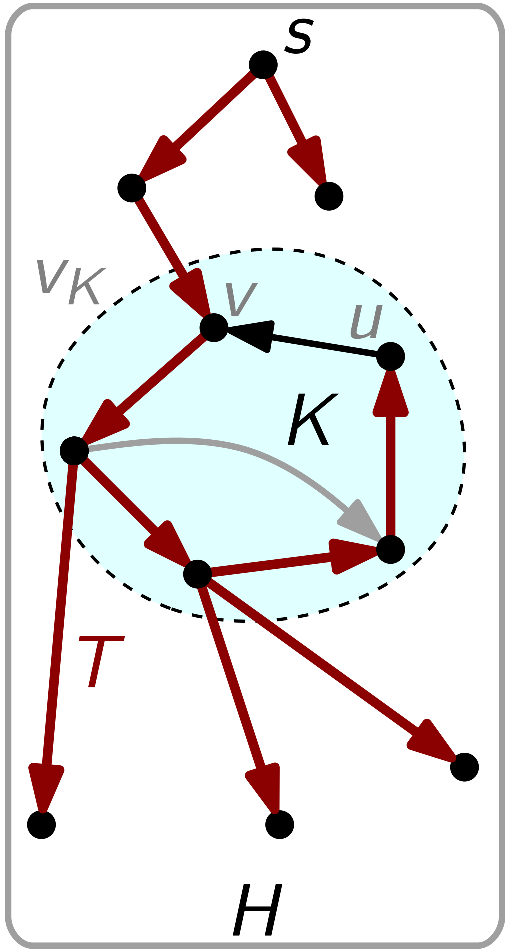
Füge Kreis $K$ zu $H$ hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in $V$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Ermittle $s$-Wurzelspannbaum $T$ $(= H - uv)$ von $H$.

$T$ ist $s$-Wurzelspannbaum von $G$.

$c'(T) \leq c'(H) = c'(\tilde{T})$ $\square$



# Algorithmus

[Edmonds 1967]

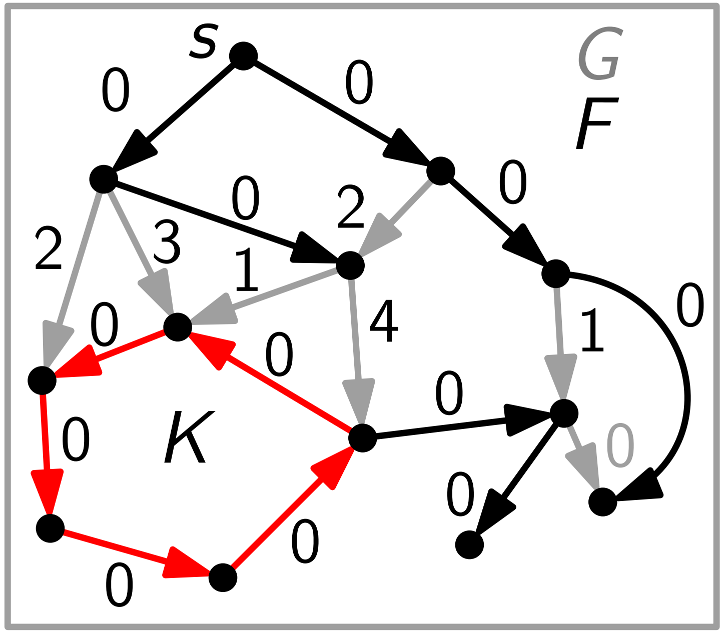
- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.

Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.

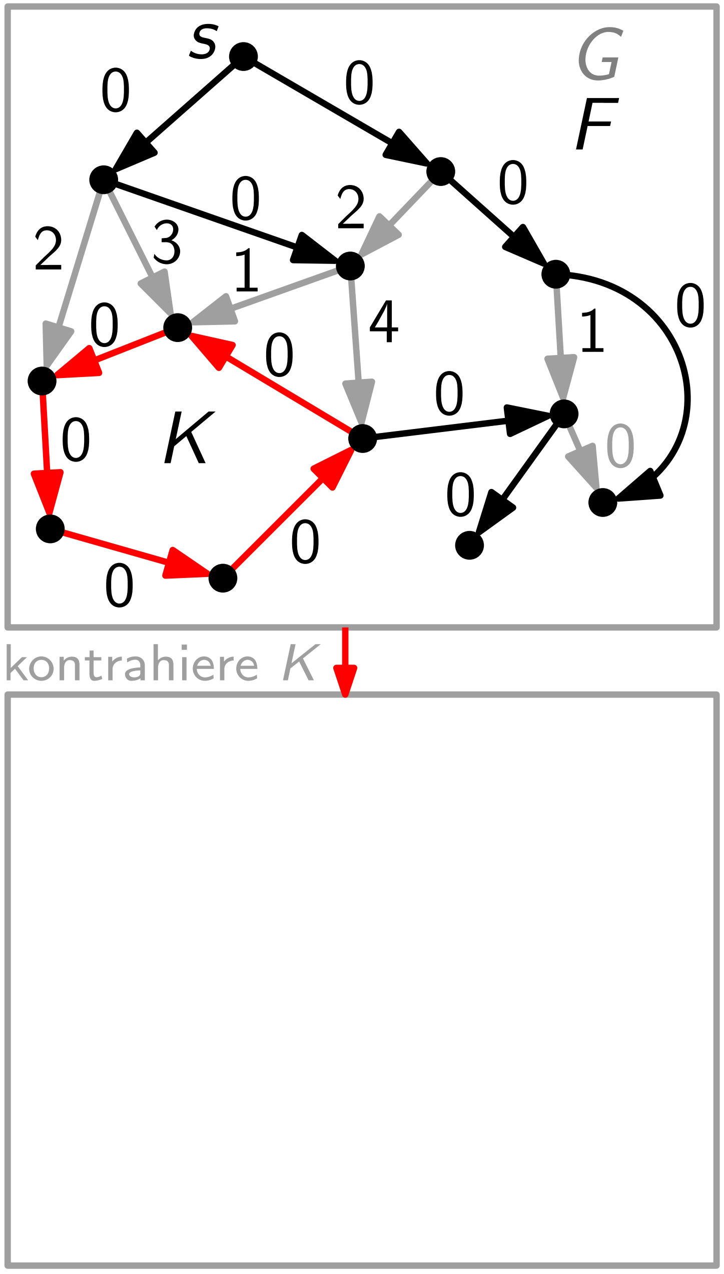



Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.

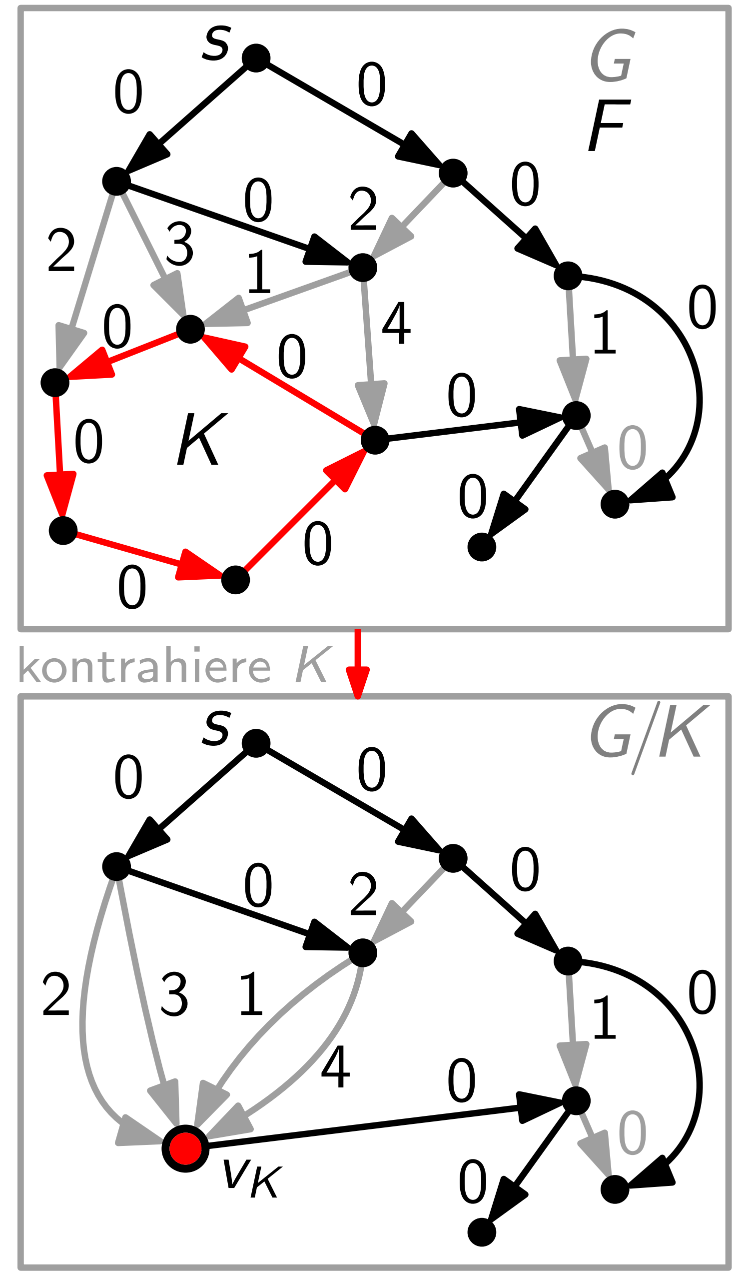



Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.



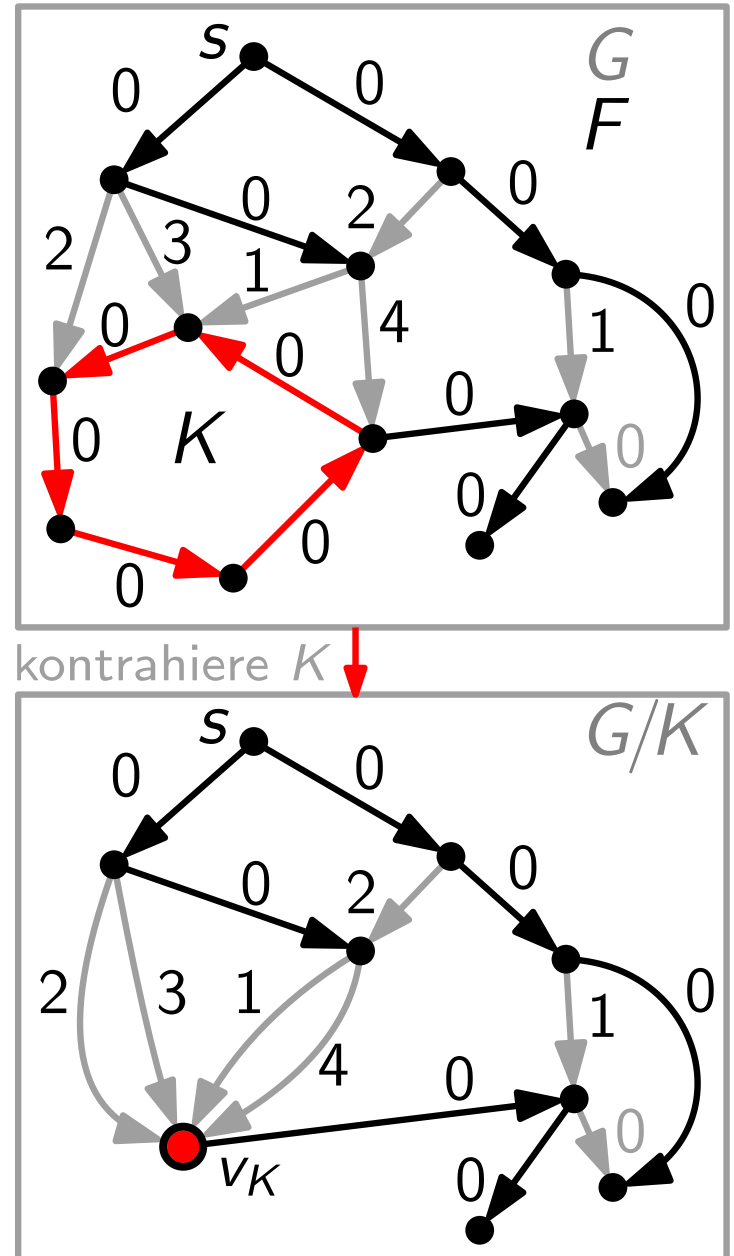

Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.

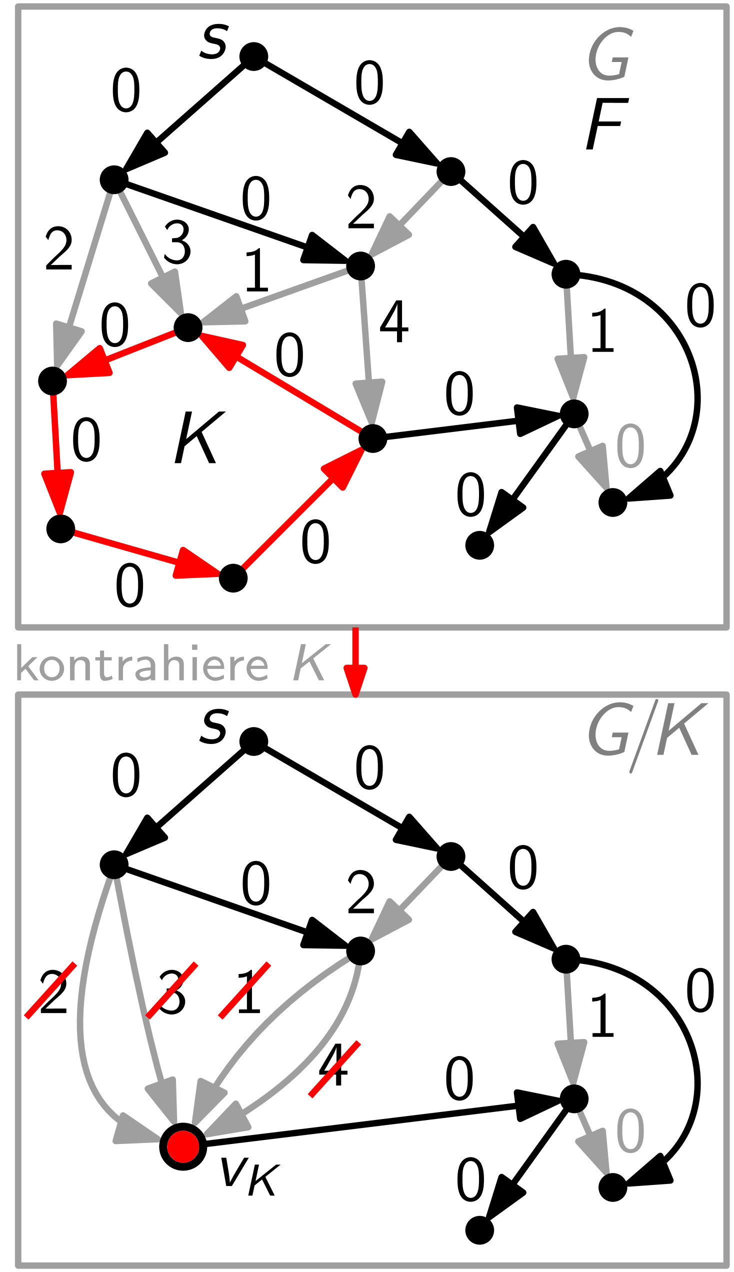
Jack R. Edmonds
*1934



# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.

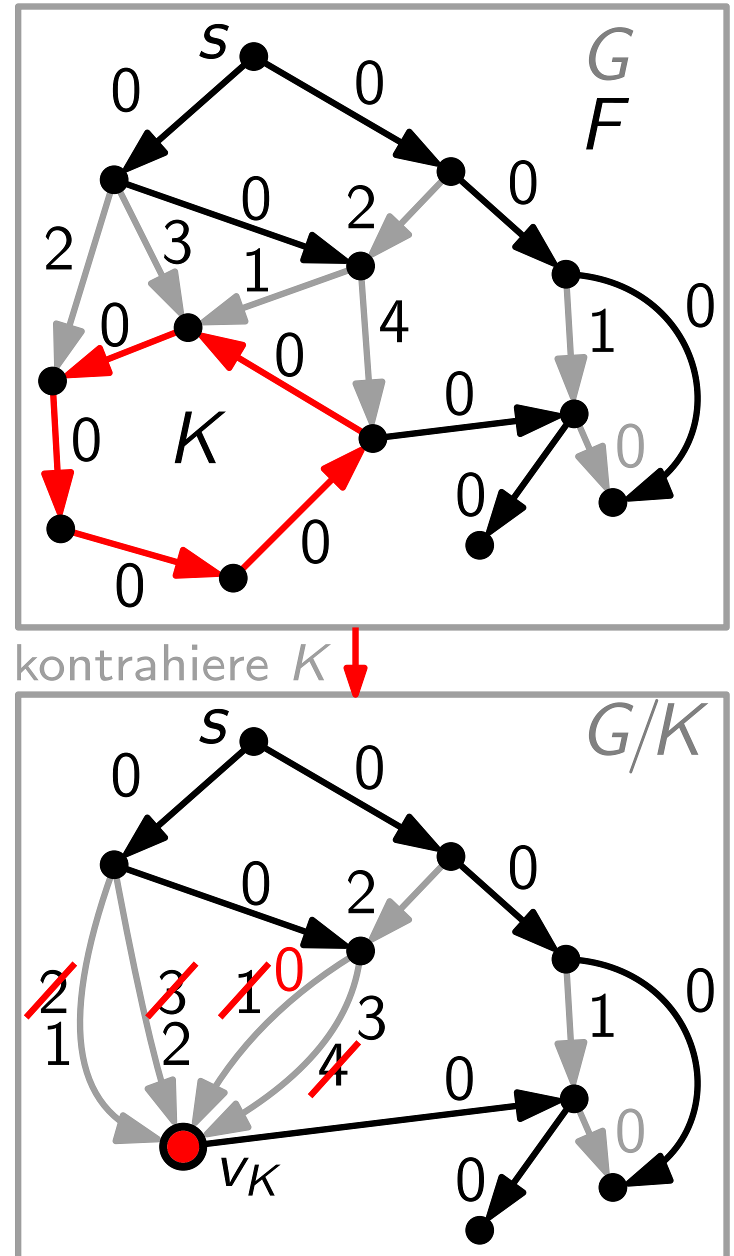



Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.

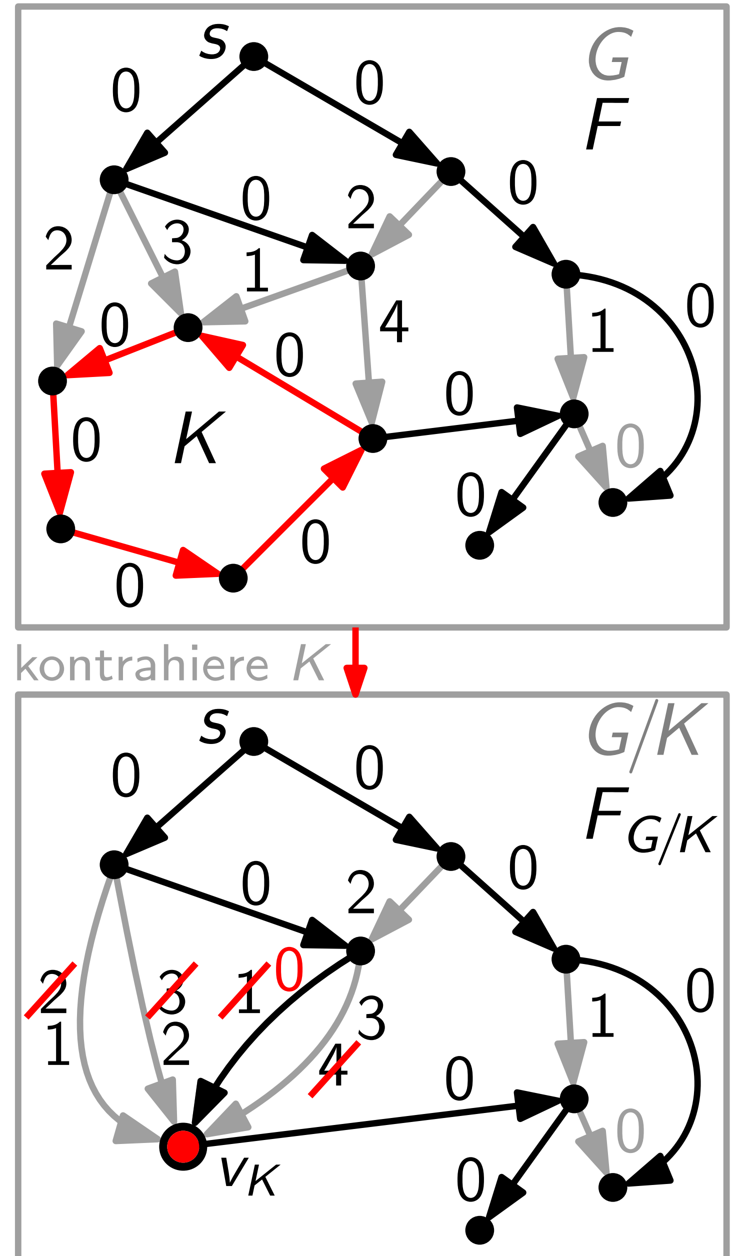



Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.



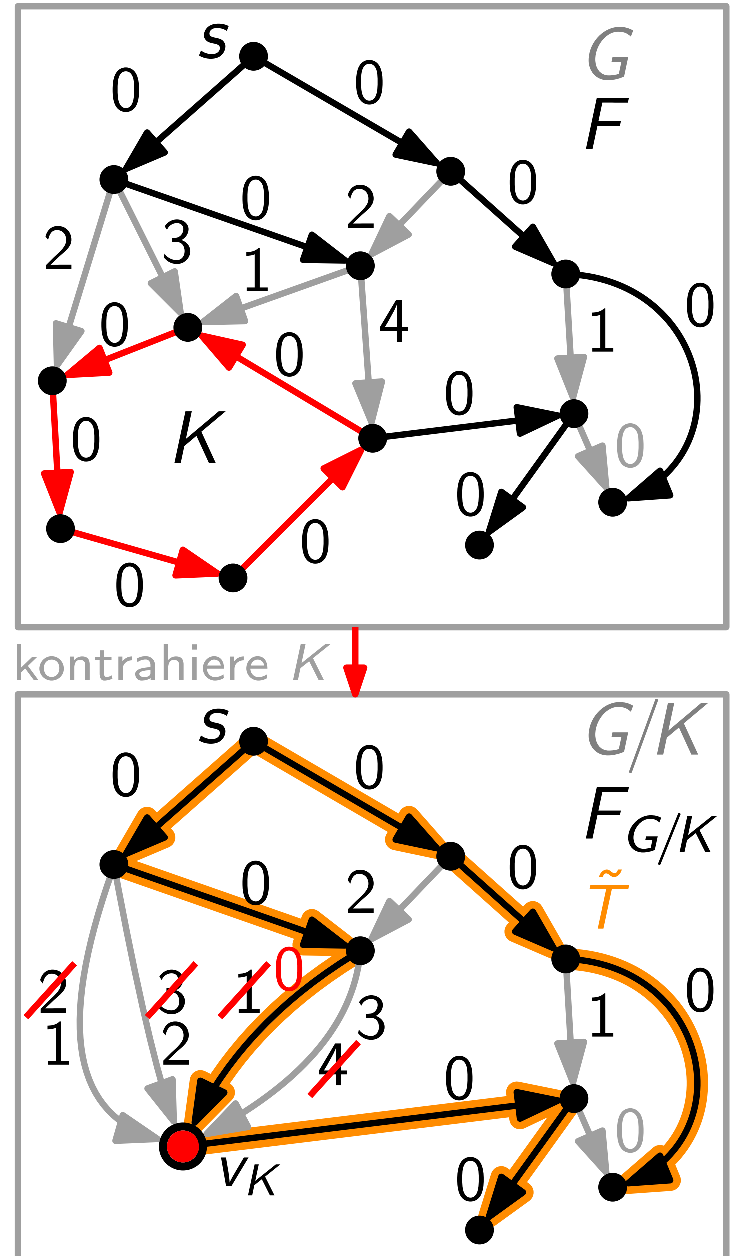

Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.

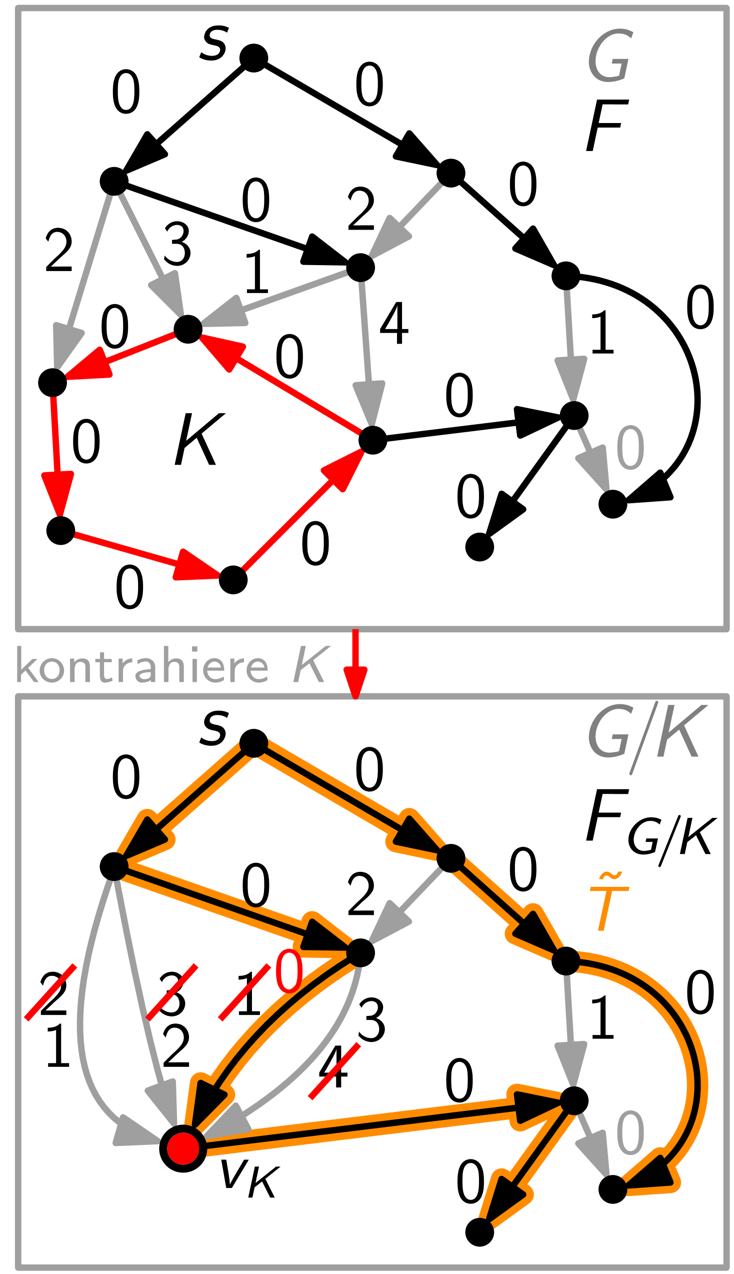
Jack R. Edmonds
*1934



# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$. (nach Lemma 2!)



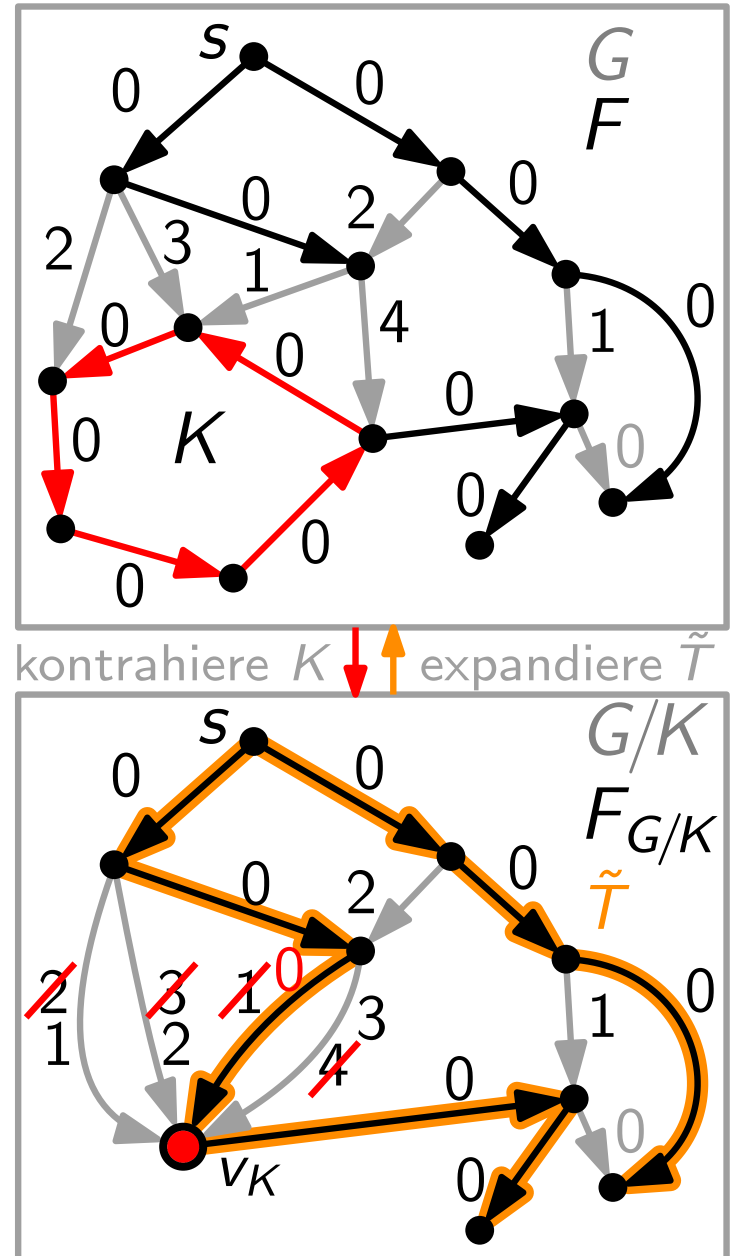

Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$. (nach Lemma 2!)

Jack R. Edmonds
*1934

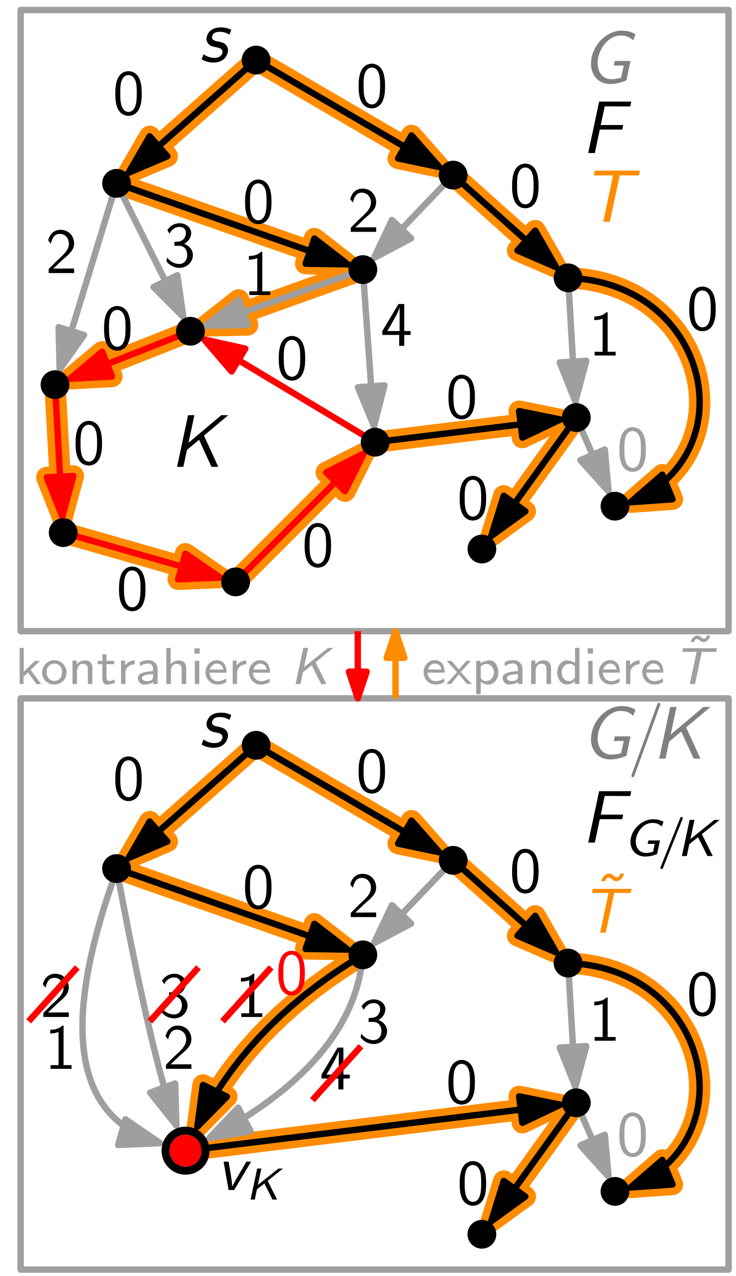


# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$. (nach Lemma 2!)

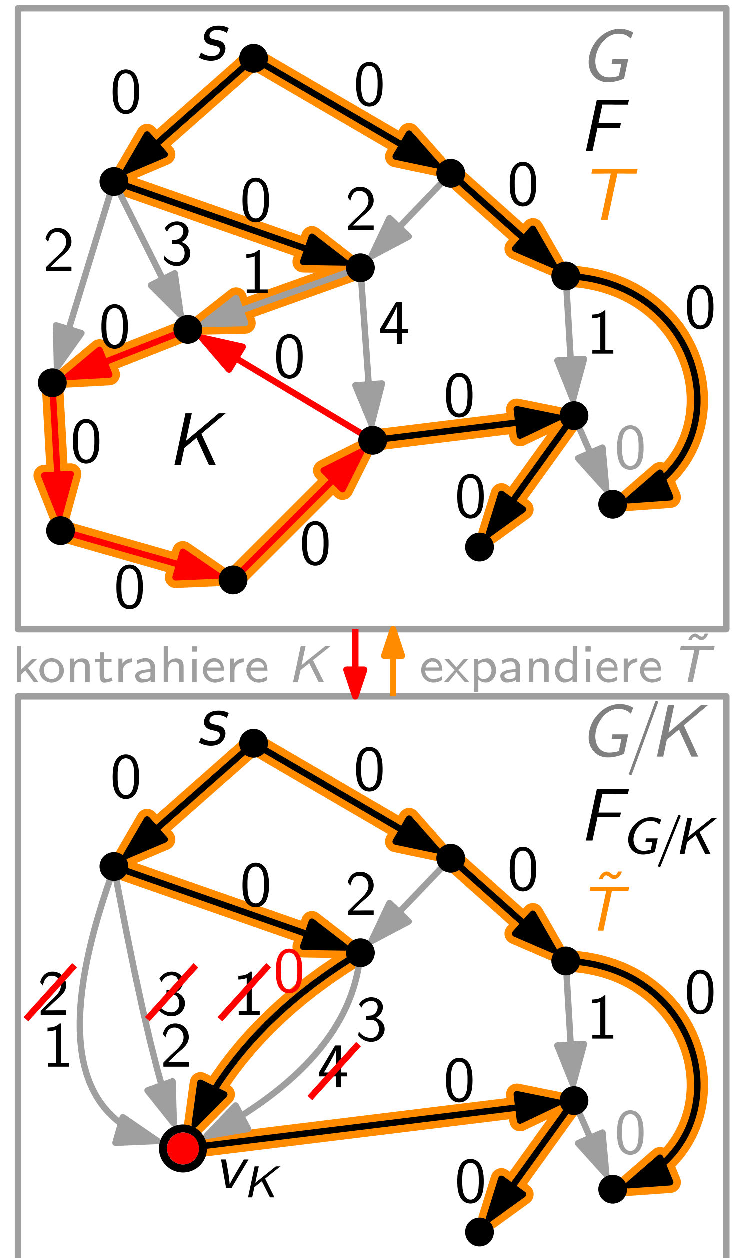
Jack R. Edmonds
*1934



# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$. (nach Lemma 2!)
- Gib $T$ zurück.



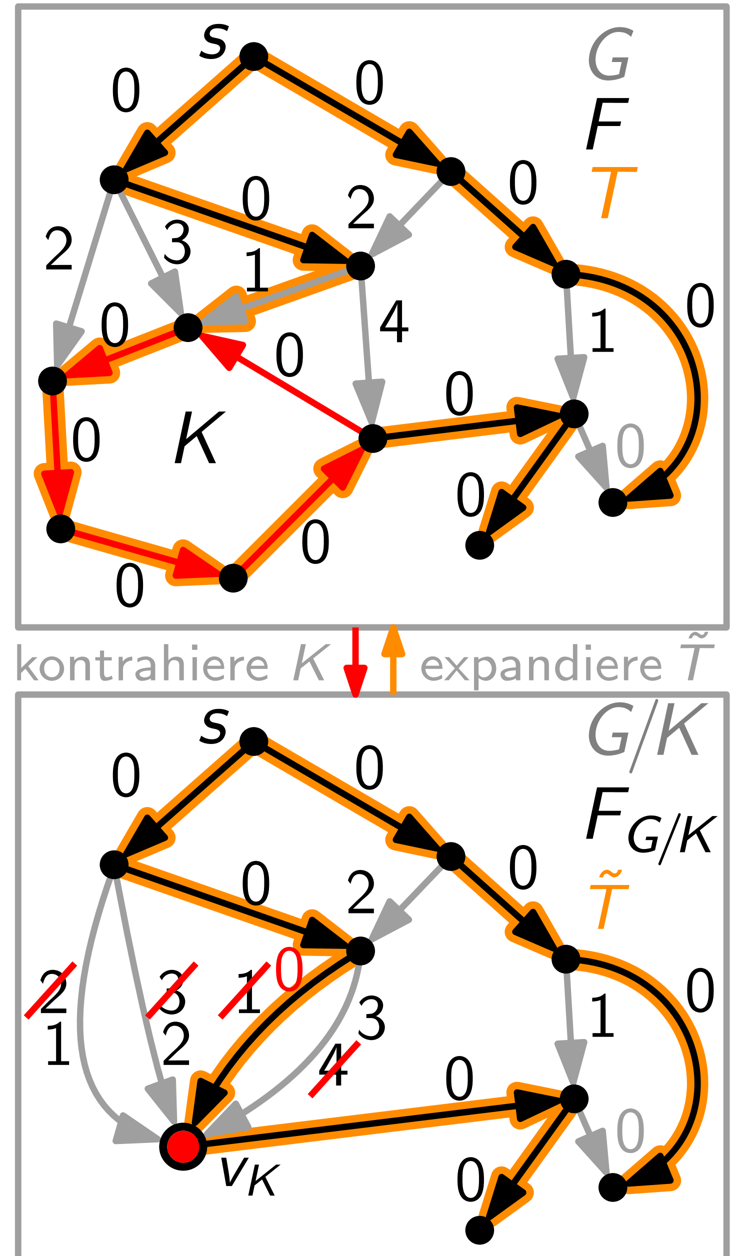

Jack R. Edmonds
*1934

# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$. (nach Lemma 2!)
- Gib $T$ zurück.

– Optimalität?





Jack R. Edmonds
*1934

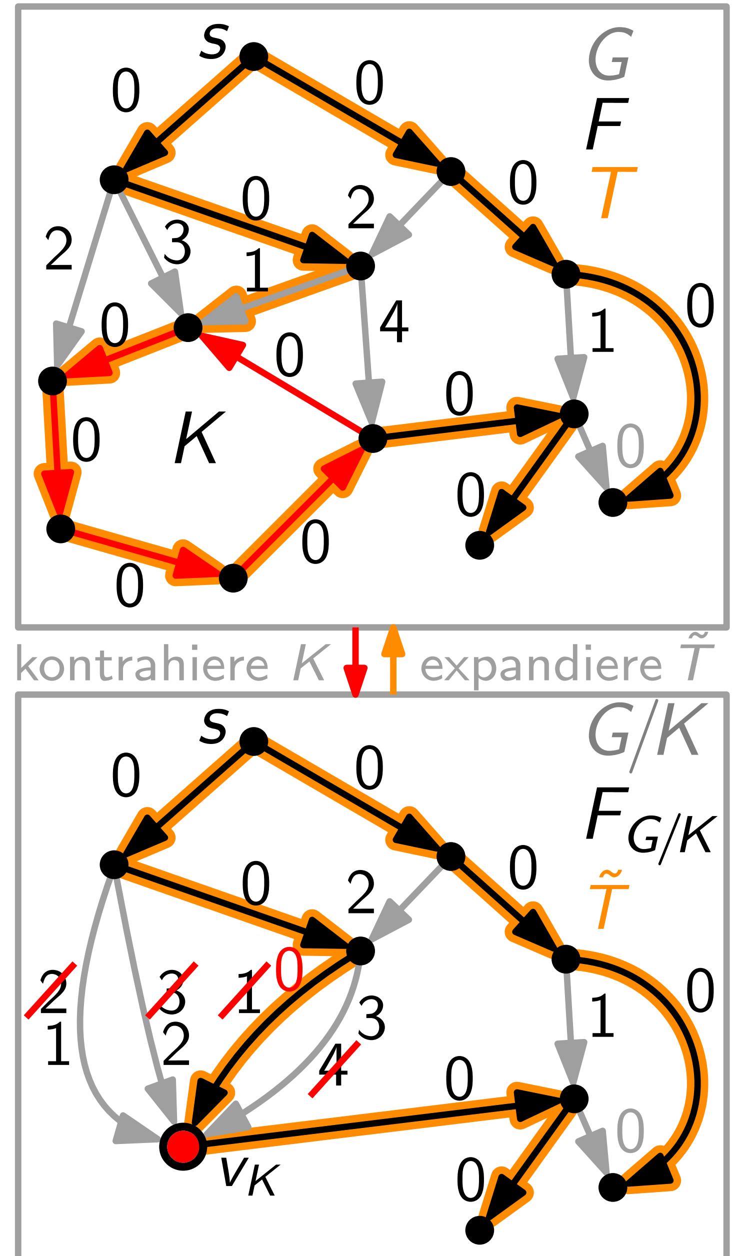
# Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$.
- Bestimme Teilgraph $F$.
- Falls $F$ azyklisch, gib $F$ zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis $K$ in $F$.
- Kontrahiere $G$ zu $G/K$.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für $G/K$.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$.
  (nach Lemma 2!)
- Gib $T$ zurück.

– Optimalität?
– Laufzeit?

Jack R. Edmonds
*1934



# Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn

# Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

# Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(V)$ rekursive Aufrufe.

# Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(V)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(E)$ Zeit.

# Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(V)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(E)$ Zeit.

**Satz.** Angewandt auf einen gewichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$, läuft Edmonds' Algorithmus in $O(VE)$ Zeit.

# Optimalität

**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

# Optimalität

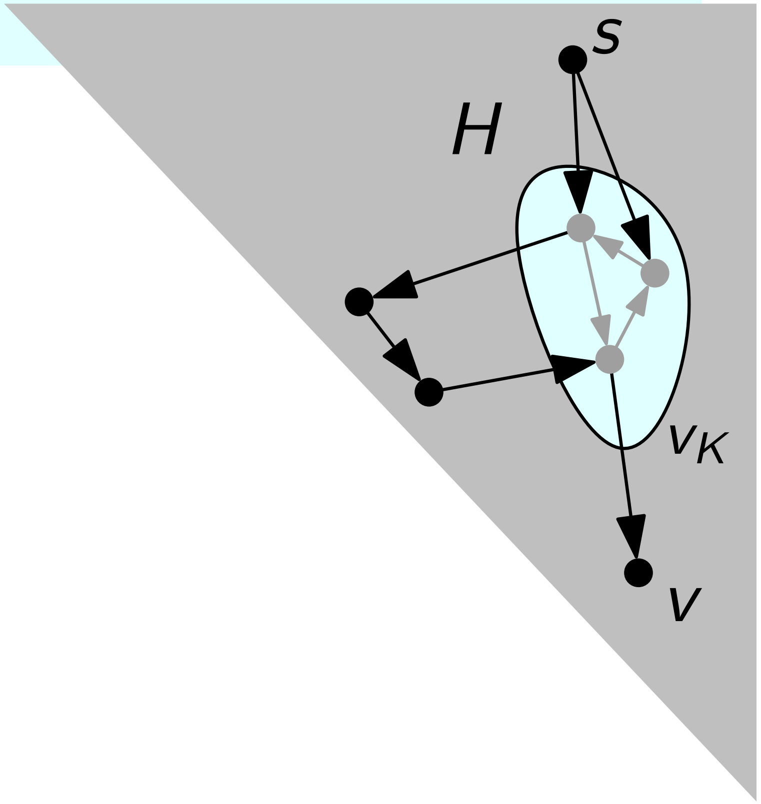
**Lem. 2.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $\tilde{T}$ $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $T$ von $G$ mit $c'(T) \leq c'(\tilde{T})$.

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.

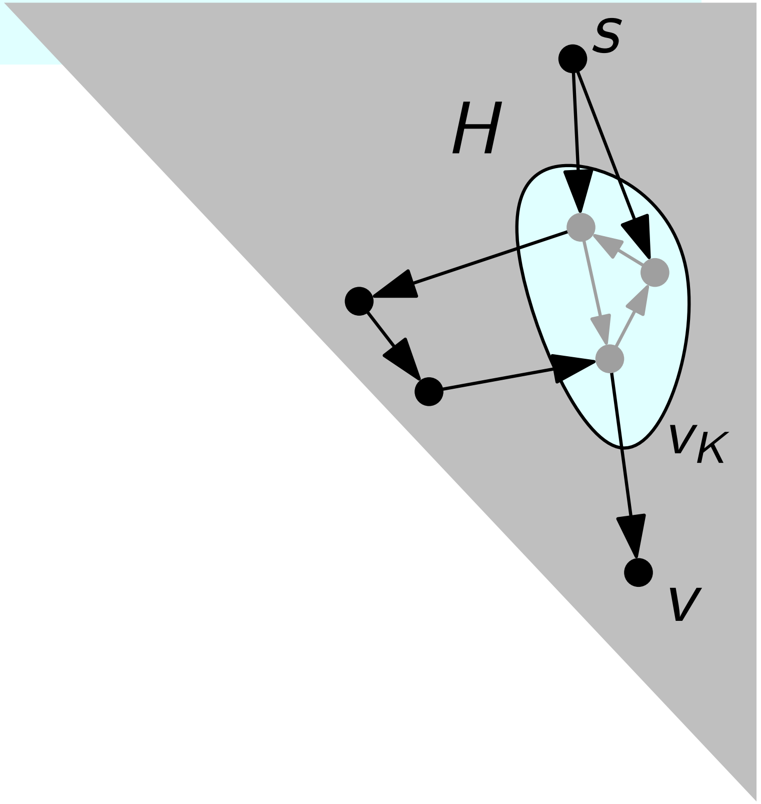


# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \le$

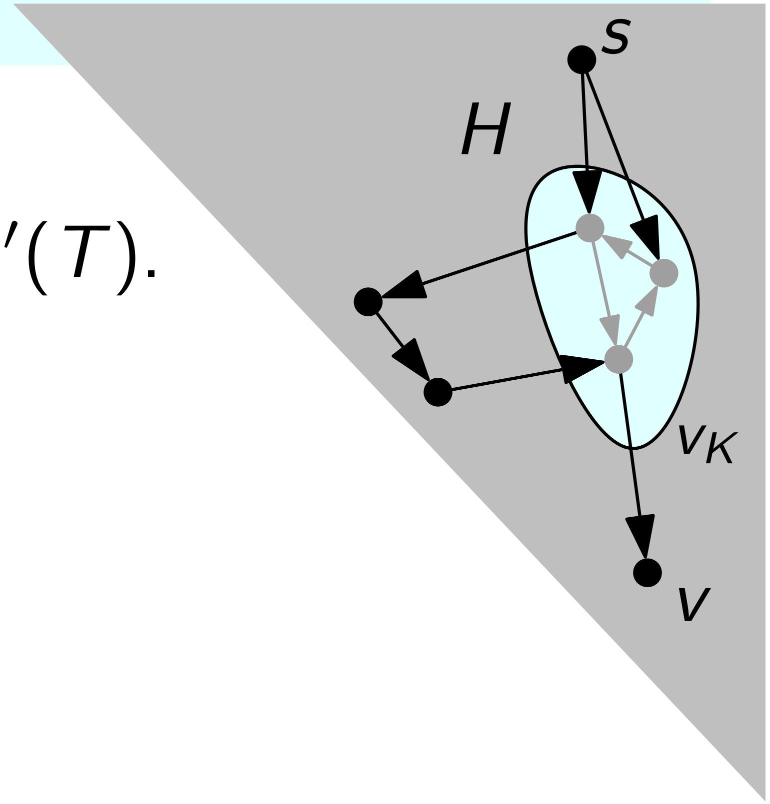


# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.



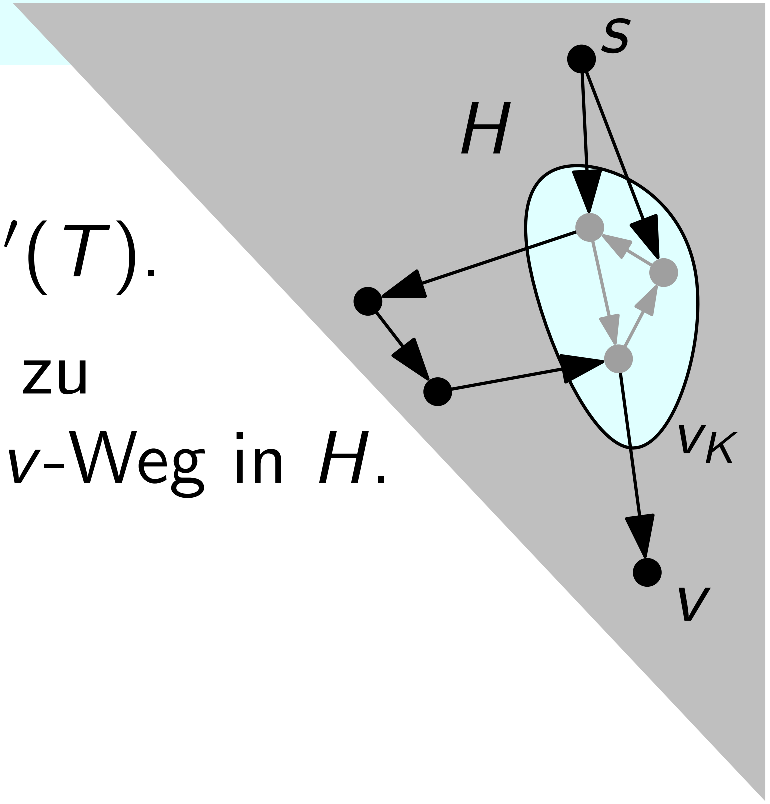
# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

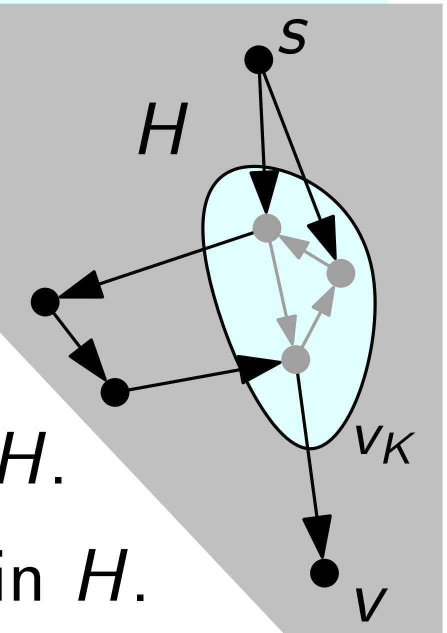
– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.



# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.




$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \le c'(T)$.

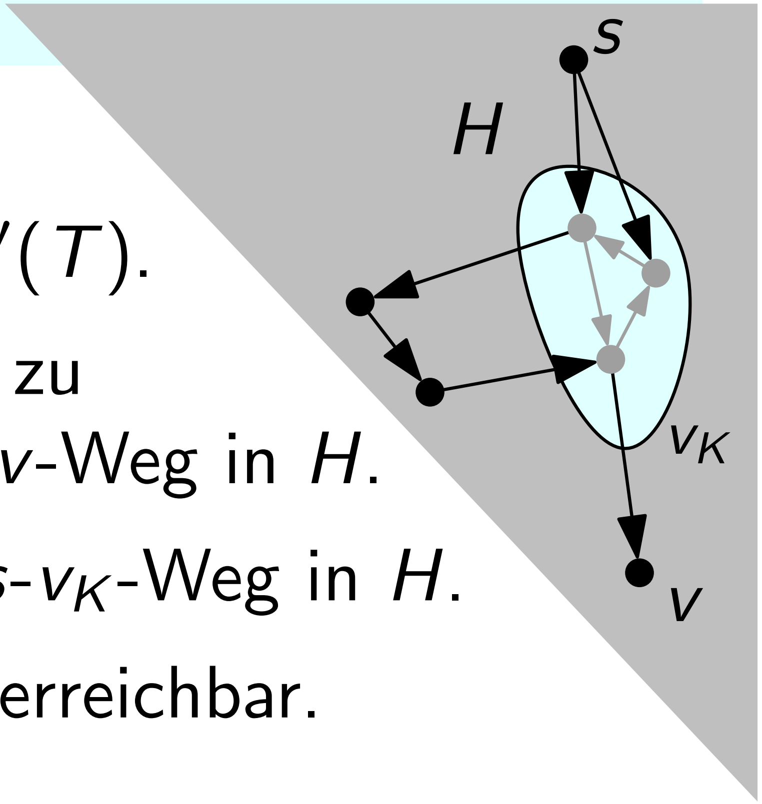
– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.




$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in $G/K$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

*Beweis.* Setze $H := T/K$.

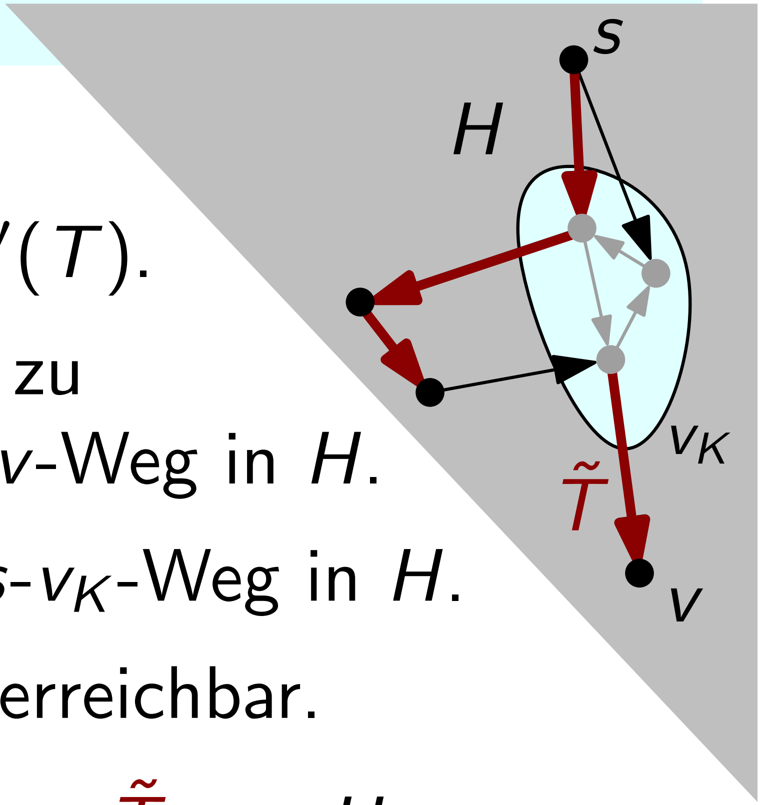
$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

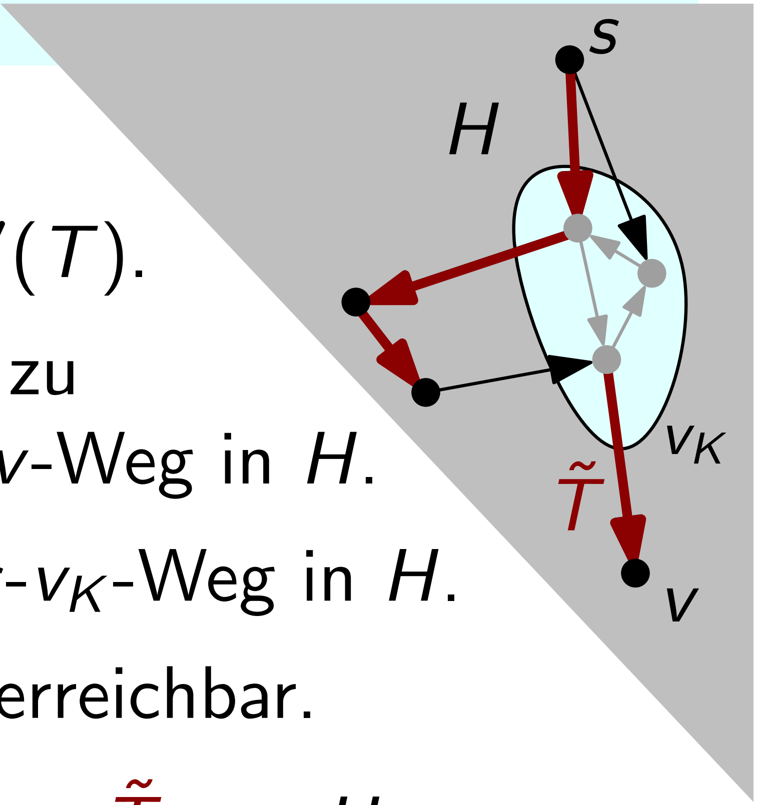
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in $G/K$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Betrachte (beliebigen) $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $H$.



# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.




*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

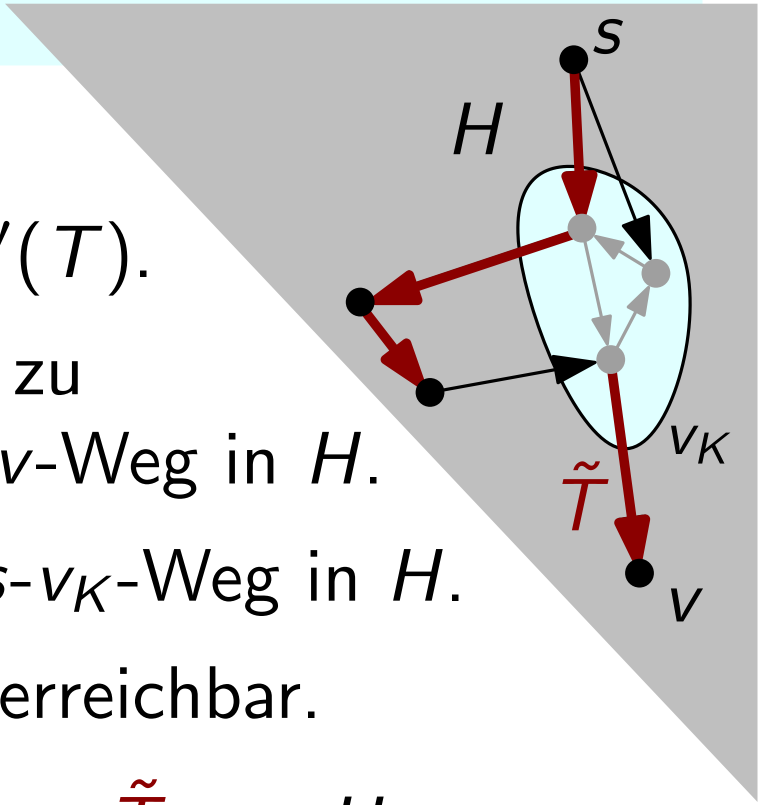
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in $G/K$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Betrachte (beliebigen) $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $H$.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.




*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

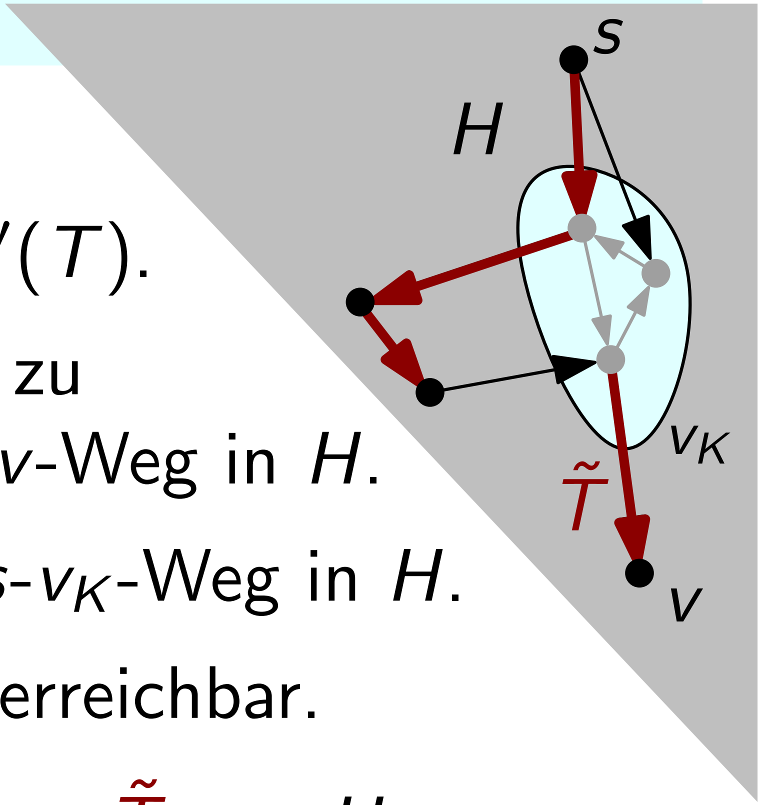
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in $G/K$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Betrachte (beliebigen) $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $H$.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$ und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq$

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.




*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

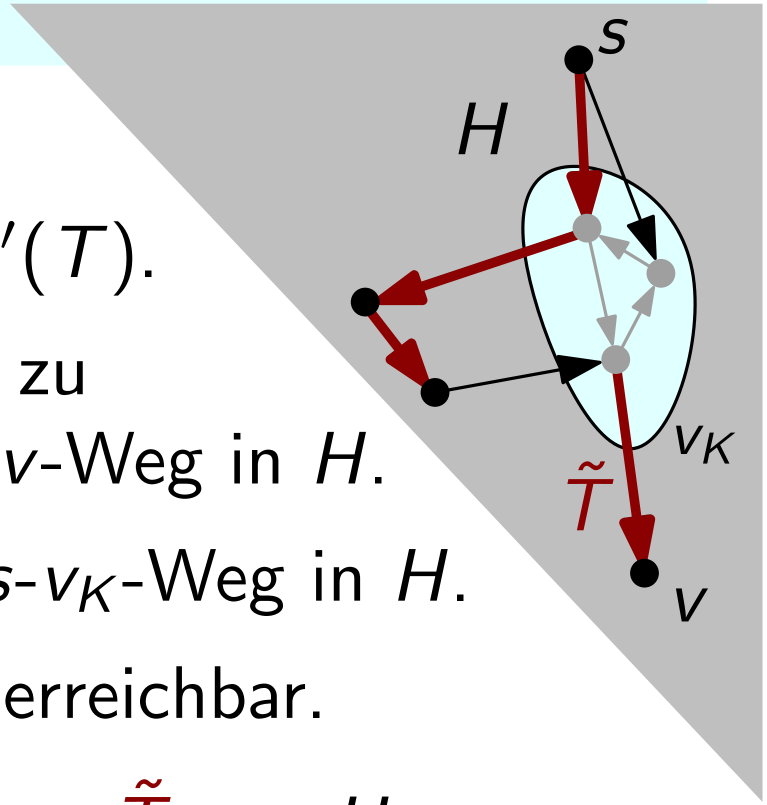
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in $G/K$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Betrachte (beliebigen) $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $H$.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$ und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq$

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei $K$ Kreis in $F$ und $T$ $s$-Wurzelspannbaum von $G$. Dann gibt es einen $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.




*Beweis.* Setze $H := T/K$.

$H$ ist Teilgraph von $G/K$ mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder $s$-$v$-Weg ($v \in V \setminus K$) in $T$ wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) $s$-$v$-Weg in $H$.

– Jeder $s$-$u$-Weg ($u \in K$) in $T$ wird zu $s$-$v_K$-Weg in $H$.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in $G/K$ ist in $H$ von $s$ erreichbar.

Betrachte (beliebigen) $s$-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von $H$.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch $s$-Wurzelspannbaum von $G/K$ und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq c'(T)$. $\square$

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. $\checkmark$
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. $\checkmark$

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.

Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. $\checkmark$

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.

Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. $\checkmark$

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star)$

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen $s$-WSB $\hat{T}$ von $G/K$.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen $s$-WSB $\hat{T}$ von $G/K$.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen $s$-WSB $\hat{T}$ von $G/K$.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.
Lem. 2 liefert $s$-WSB $T$ von $G$ mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \mathrm{OPT}'$.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen $s$-WSB $\hat{T}$ von $G/K$.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \le c'(\tilde{T})$.
Lem. 2 liefert $s$-WSB $T$ von $G$ mit $c'(T) \le c'(\hat{T}) \le \mathrm{OPT}'$.
$\Rightarrow$ $T$ ist optimal bzgl. $c'$

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen $s$-WSB $\hat{T}$ von $G/K$.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \le c'(\tilde{T})$.
Lem. 2 liefert $s$-WSB $T$ von $G$ mit $c'(T) \le c'(\hat{T}) \le \mathrm{OPT}'$.
$\Rightarrow$ $T$ ist optimal bzgl. $c'$ und somit bzgl. $c$.

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen $s$-Wurzelspannbaum.

*Beweis.* Falls $F$ azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl $n$.

Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, $G$ azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei $K$ Kreis in $F$ und $T^\star$ min. $s$-Wurzelspannbaum von $G$.

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ $s$-WSB $\tilde{T}$ von $G/K$ mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen $s$-WSB $\hat{T}$ von $G/K$.

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Lem. 2 liefert $s$-WSB $T$ von $G$ mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \mathrm{OPT}'$.

$\Rightarrow$ $T$ ist optimal bzgl. $c'$ und somit bzgl. $c$. ✓ $\square$