

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

5. Vorlesung

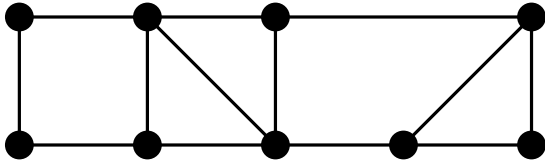
## Matchings / Paarungen

– Kombinatorische Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems –

# Paarungen (Matchings)

**Def.**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

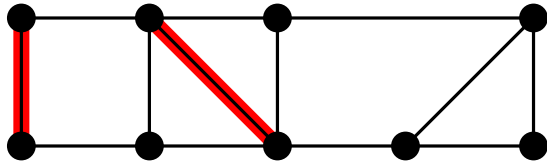


# Paarungen (Matchings)

**Def.**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

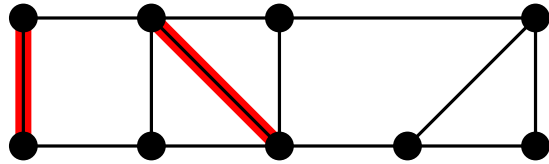
$M \subseteq E$  ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.



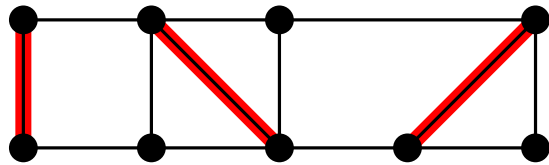
# Paarungen (Matchings)

**Def.**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.



$M \subseteq E$  ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.

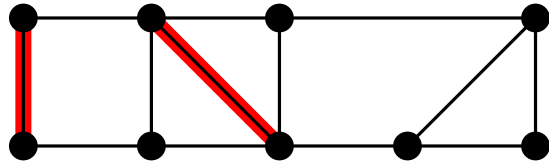


Falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  keine Paarung ist, so ist  $M$  *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).

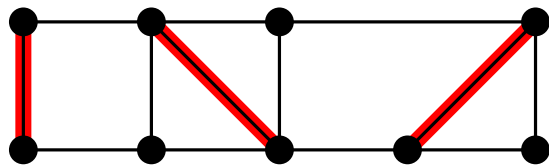
# Paarungen (Matchings)

**Def.**

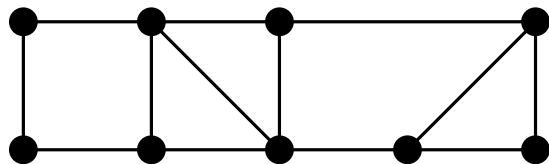
Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.



$M \subseteq E$  ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  keine Paarung ist, so ist  $M$  *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).

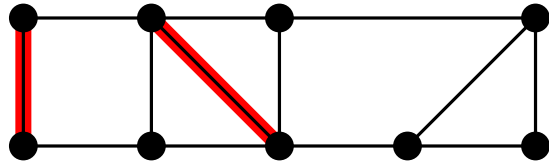


Falls für alle Paarungen  $M'$  in  $G$  gilt, dass  $|M'| \leq |M|$ , so ist  $M$  eine *größte Paarung* (engl. *maximum*).

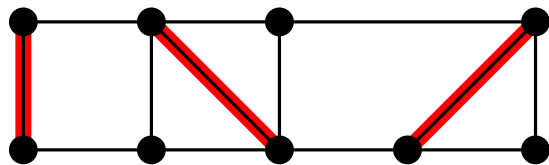
# Paarungen (Matchings)

## Def.

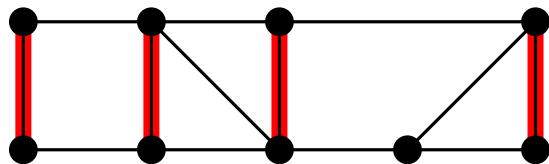
Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.



$M \subseteq E$  ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  keine Paarung ist, so ist  $M$  *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).

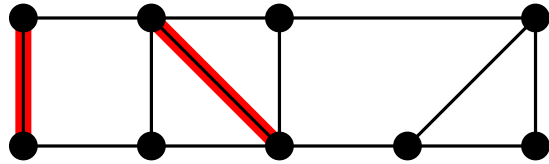


Falls für alle Paarungen  $M'$  in  $G$  gilt, dass  $|M'| \leq |M|$ , so ist  $M$  eine *größte Paarung* (engl. *maximum*).

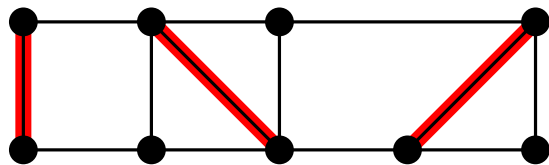
# Paarungen (Matchings)

## Def.

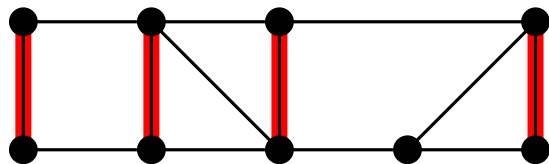
Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.



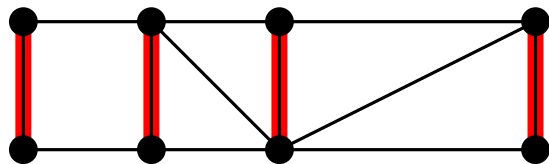
$M \subseteq E$  ist eine *Paarung* (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  keine Paarung ist, so ist  $M$  *nicht erweiterbar* (engl. *maximal*).



Falls für alle Paarungen  $M'$  in  $G$  gilt, dass  $|M'| \leq |M|$ , so ist  $M$  eine *größte Paarung* (engl. *maximum*).

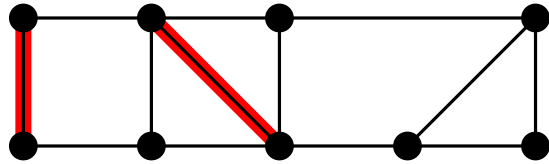


Falls jeder Knoten in  $G$  durch  $M$  *gepaart* ist, so ist  $M$  eine *perfekte Paarung* (engl. *perfect*).

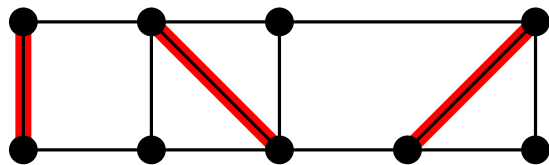
# Paarungen (Matchings)

## Def.

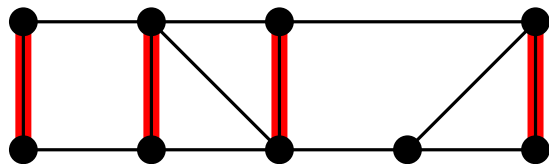
Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.



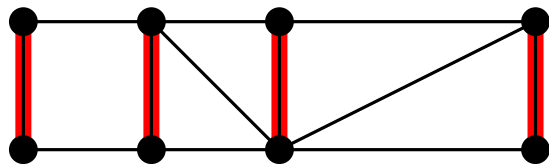
$M \subseteq E$  ist eine **Paarung** (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  keine Paarung ist, so ist  $M$  **nicht erweiterbar** (engl. *maximal*).



Falls für alle Paarungen  $M'$  in  $G$  gilt, dass  $|M'| \leq |M|$ , so ist  $M$  eine **größte Paarung** (engl. *maximum*).



Falls jeder Knoten in  $G$  durch  $M$  gepaart ist, so ist  $M$  eine **perfekte Paarung** (engl. *perfect*).



Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:

2. Zielfunktion:

3. Nebenbedingungen:

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion:

3. Nebenbedingungen:

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion:

3. Nebenbedingungen:

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

für jeden Knoten  $v$  von  $G$

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$



# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

*Bemerkung:*

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

*Bemerkung:*

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

*Bemerkung:*

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

[z.B. Blütenalg.,  
Edmonds, 1961]

*Größte Paarung* kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

*Bemerkung:*

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

[z.B. Blütenalg.,  
Edmonds, 1961]

*Größte Paarung* kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für  $G$  bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit  $x_e \geq 0$  zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

# Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable:  $x_e \in \{0, 1\}$  für jede Kante  $e$  von  $G$

2. Zielfunktion: maximiere  $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

*Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante  $e$  mit  $x_e = 1$  inzident.*

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

*Bemerkung:*

Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

[z.B. Blütenalg.,  
Edmonds, 1961]

*Größte Paarung* kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für  $G$  bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit  $x_e \geq 0$  zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

# Max-Flow-Min-Cut-Theorem

# Max-Flow-Min-Cut-Theorem

**Satz.** In einem ger. Graphen  $G$  mit Kap.  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \text{ } s-t\text{-Schnitt}} c(S)$$

# Max-Flow-Min-Cut-Theorem

**Satz.** In einem ger. Graphen  $G$  mit Kap.  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \text{ } s-t\text{-Schnitt}} c(S)$$

d.h. der Wert eines maximalen  $s-t$ -Flusses ist gleich der Kapazität eines minimalen  $s-t$ -Schnittes.



# Max-Flow-Min-Cut-Theorem

**Satz.** In einem ger. Graphen  $G$  mit Kap.  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  gilt:

$$\max_{f \text{ zulässiger } s-t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S,T) \text{ } s-t\text{-Schnitt}} c(S)$$

d.h. der Wert eines maximalen  $s-t$ -Flusses ist gleich der Kapazität eines minimalen  $s-t$ -Schnittes.



Lester Randolph Ford, Jr.  
(1927–2017)



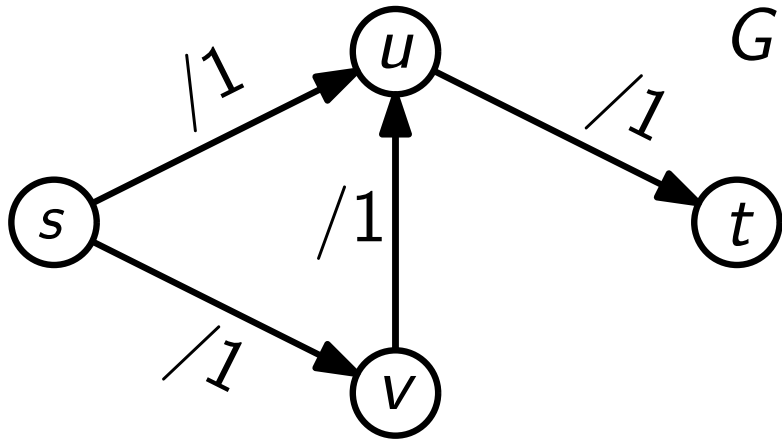
Delbert R. Fulkerson  
(1924–1976)

[Ford & Fulkerson 1956]

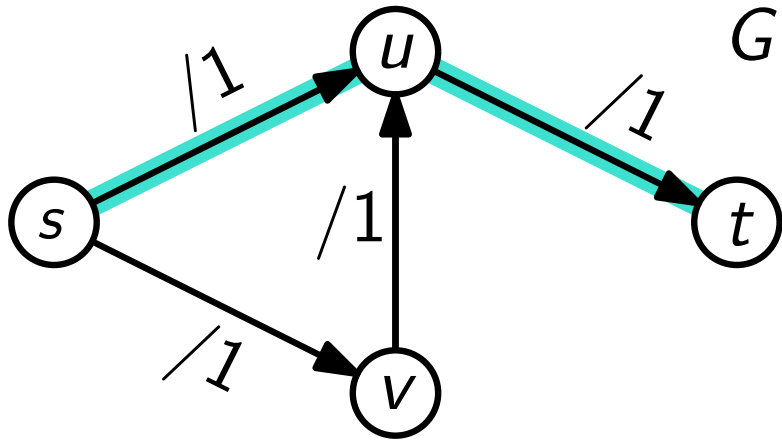
[Elias, Feinstein, Shannon 1956]

[Kotzig 1956]

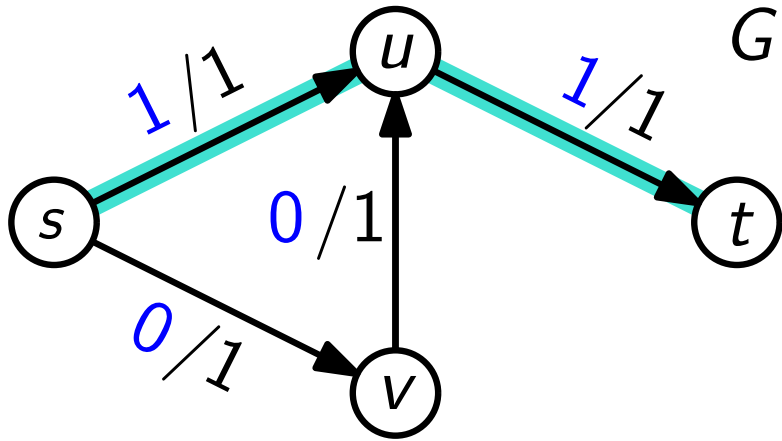
# Ganzzahligkeitssatz



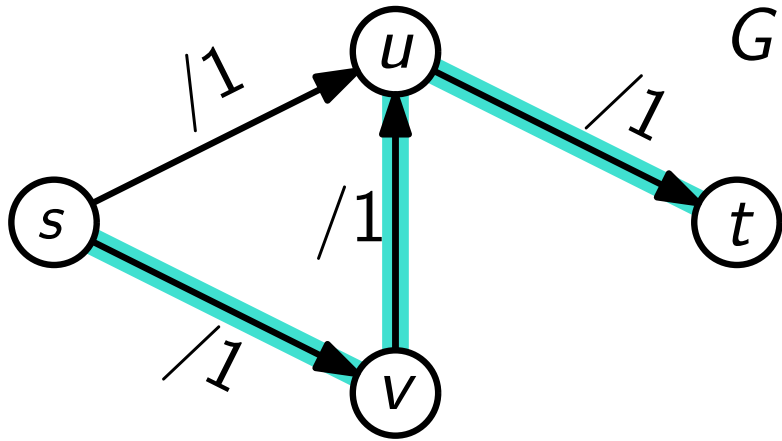
# Ganzzahligkeitssatz



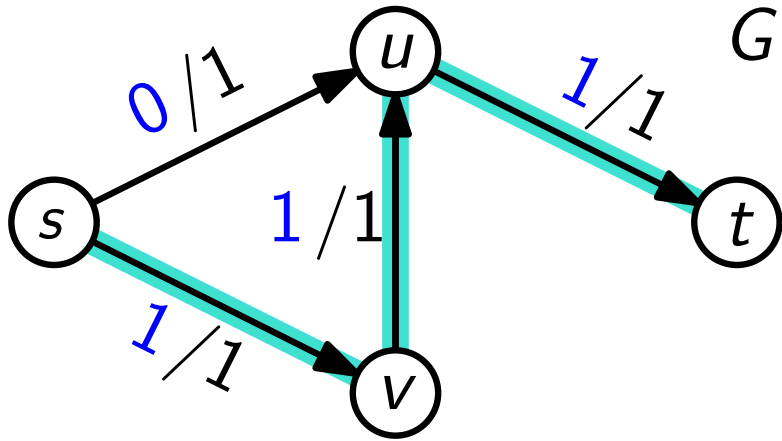
# Ganzzahligkeitssatz



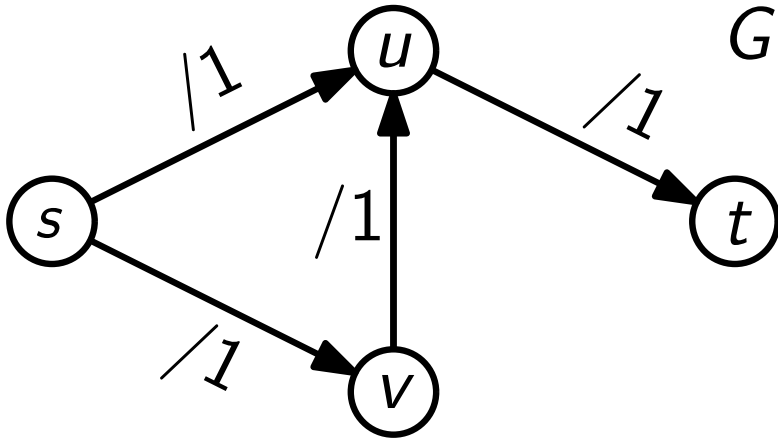
# Ganzzahligkeitssatz



# Ganzzahligkeitssatz

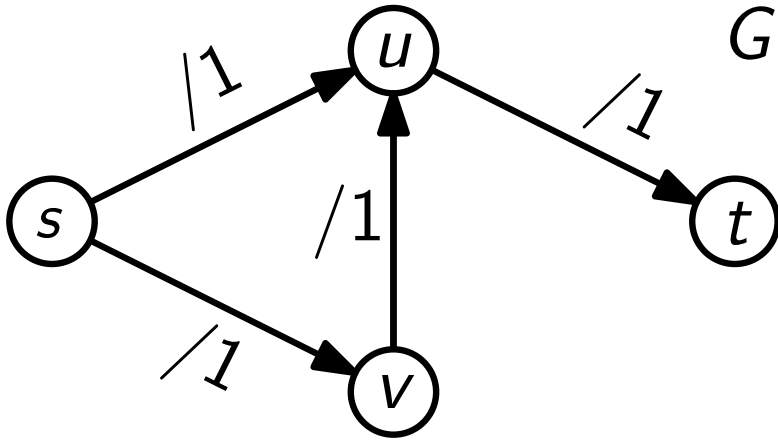


# Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss?

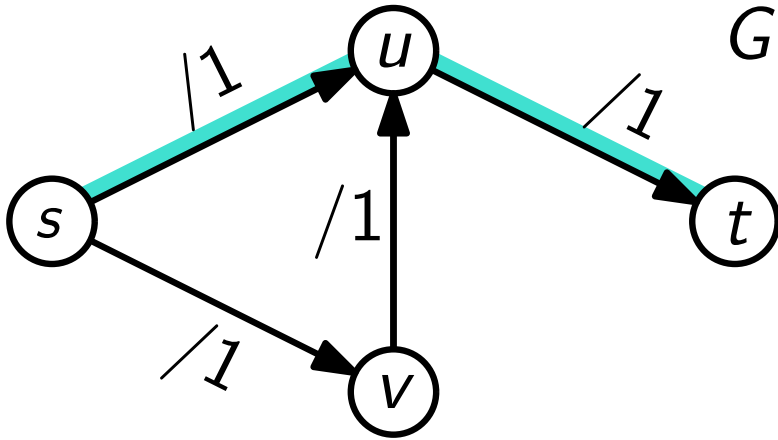
# Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

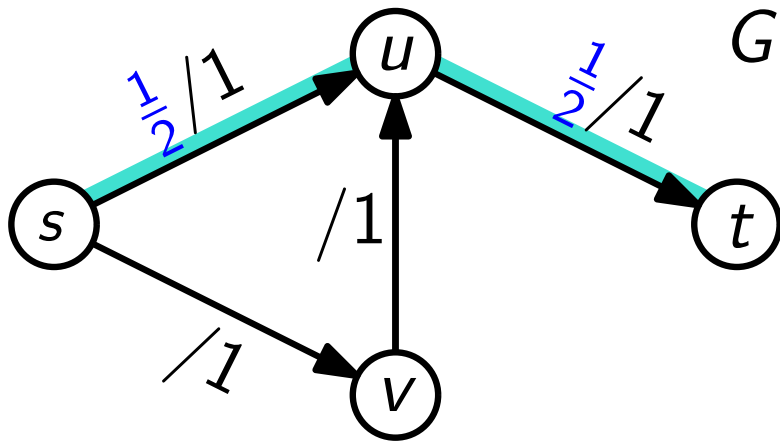


# Ganzzahligkeitssatz



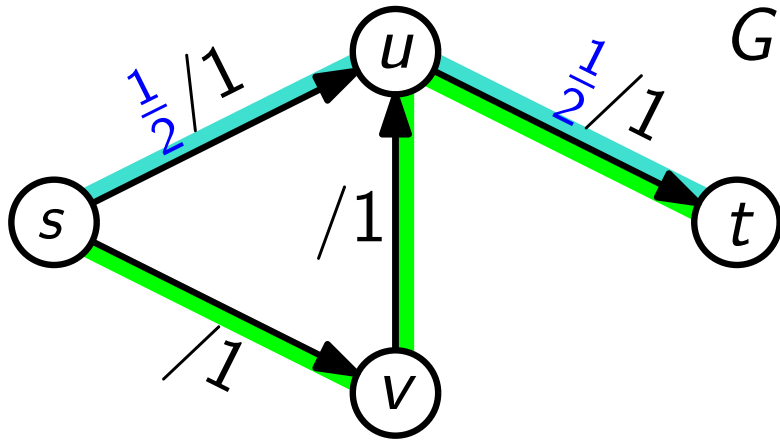
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

# Ganzzahligkeitssatz



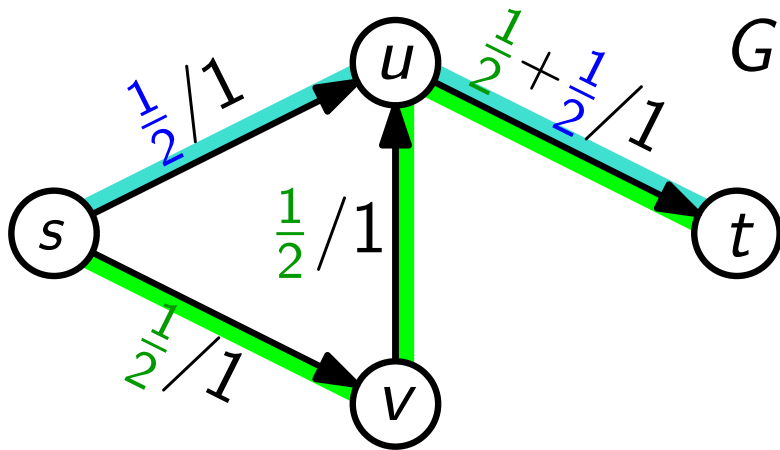
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

# Ganzzahligkeitssatz



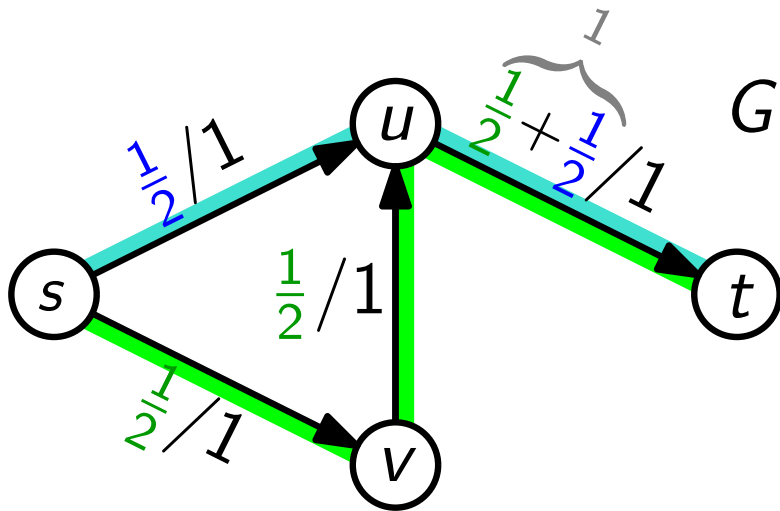
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

# Ganzzahligkeitssatz



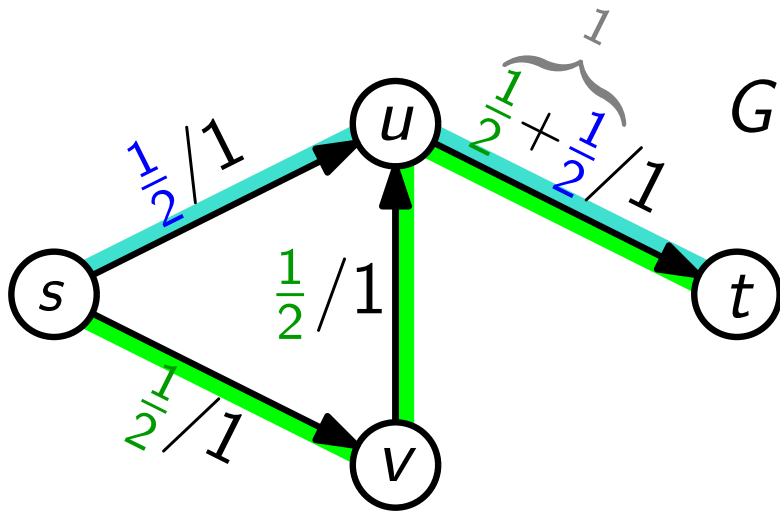
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

# Ganzzahligkeitssatz



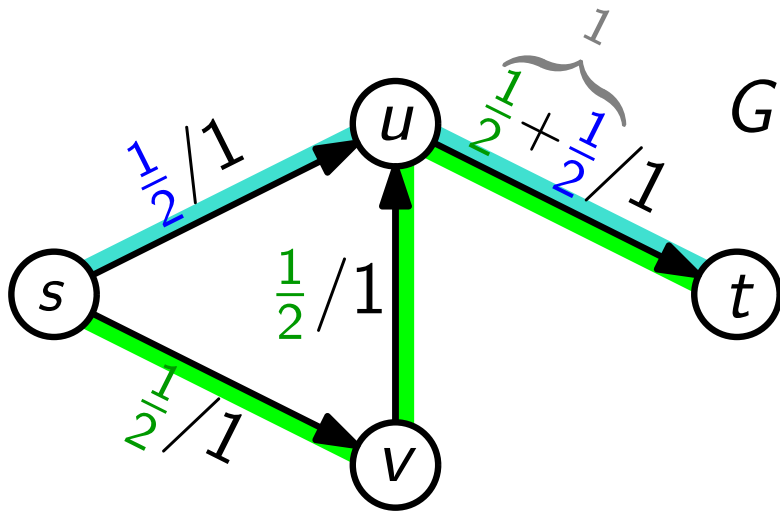
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

# Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? Ja!

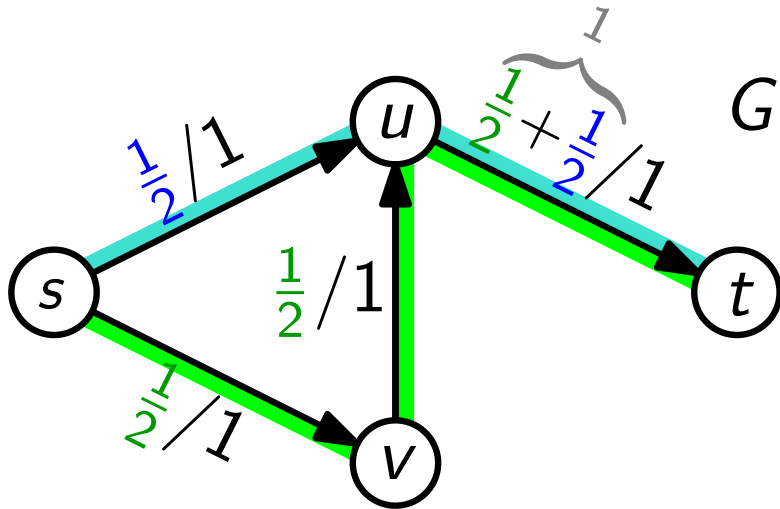
# Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss?

Ja!

# Ganzzahligkeitssatz

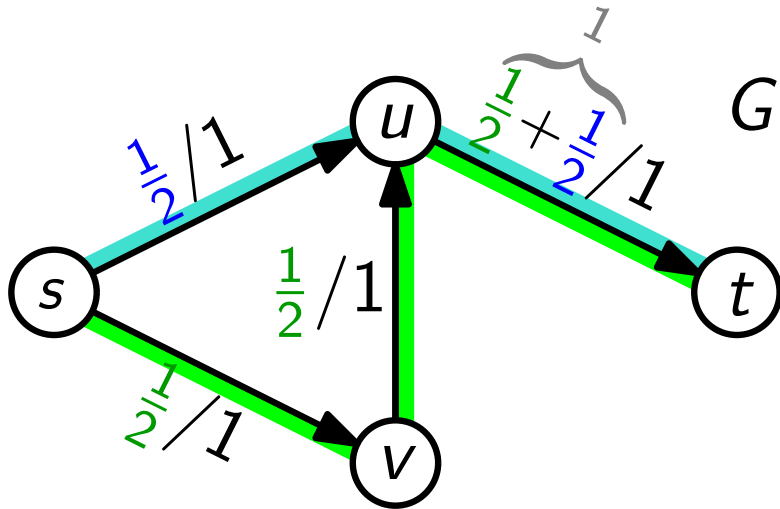


Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.



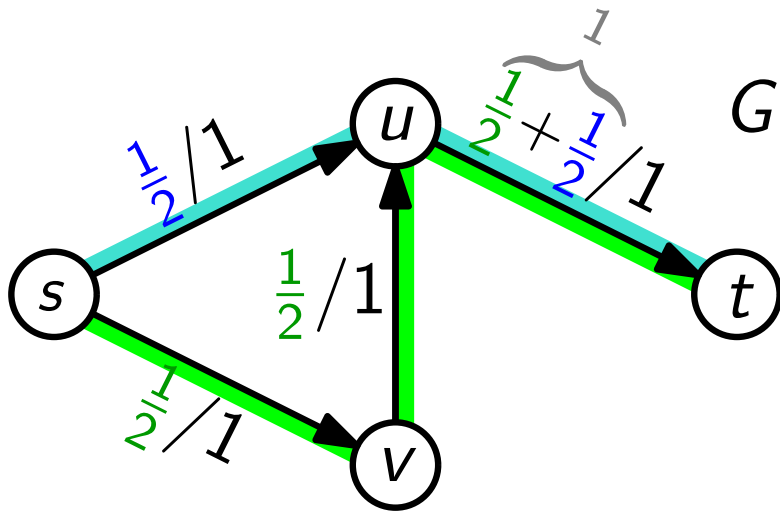
# Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

# Ganzzahligkeitssatz

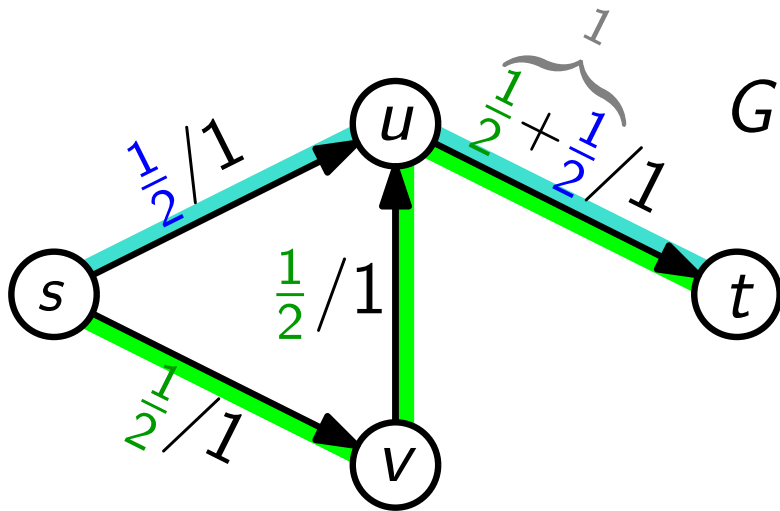


Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

**Korollar.** Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h.  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$ ,

# Ganzzahligkeitssatz

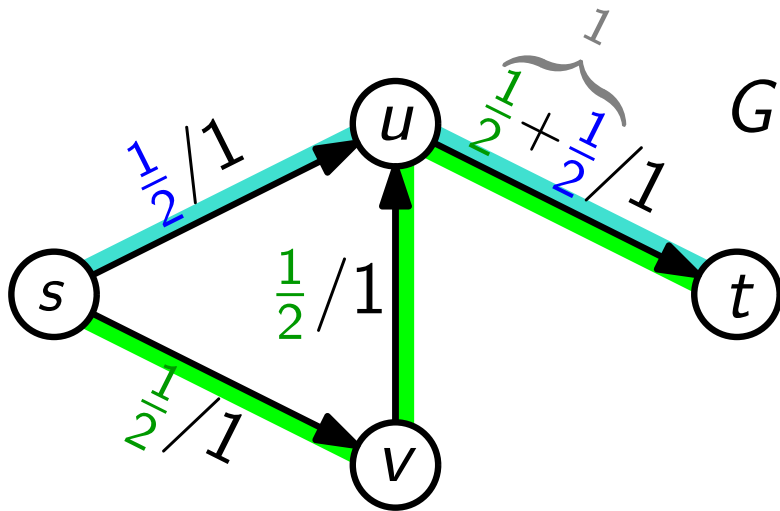


Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

**Korollar.** Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h.  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$ , so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

# Ganzzahligkeitssatz



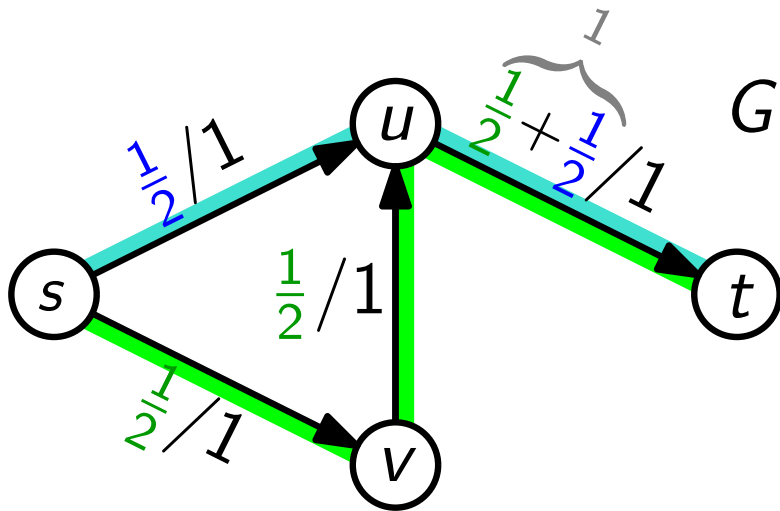
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

**Korollar.** Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h.  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$ , so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

*Beweis.* **?**

# Ganzzahligkeitssatz



Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

**Korollar.** Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h.  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$ , so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

*Beweis.* Wende FordFulkerson oder EdmondsKarp an! □

# Kantendisjunkte Wege

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .

# Kantendisjunkte Wege

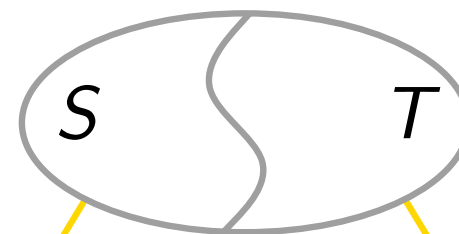
**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege

# Kantendisjunkte Wege

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

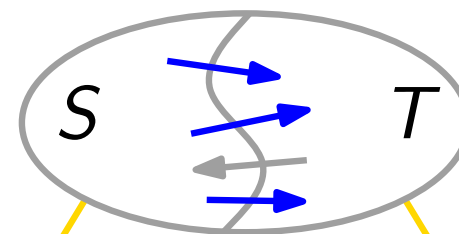


# Kantendisjunkte Wege



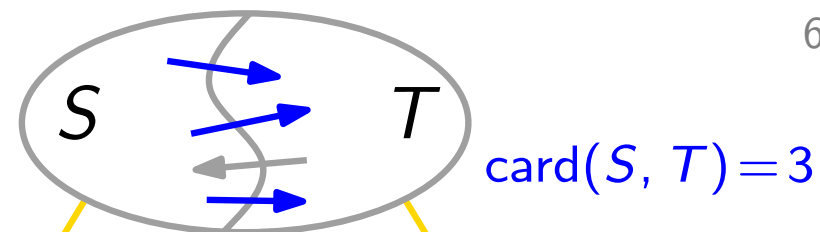
**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ . Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen **Kardinalität** eines  $s$ - $t$ -**Schnittes**.

# Kantendisjunkte Wege



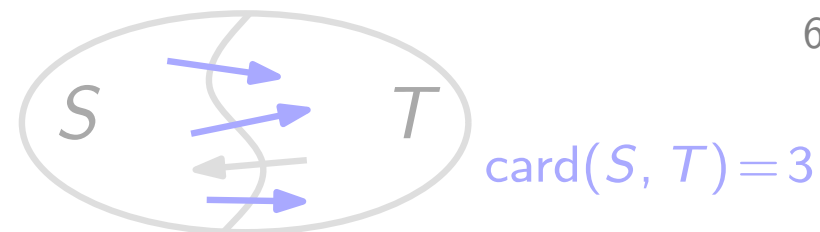
**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ . Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen **Kardinalität** eines  $s$ - $t$ -**Schnittes**.

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ . Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen **Kardinalität** eines  $s$ - $t$ -**Schnittes**.

# Kantendisjunkte Wege



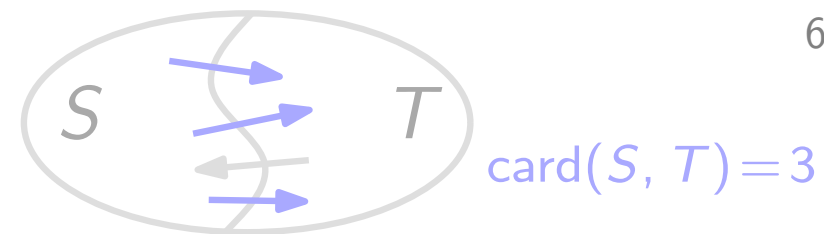
**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

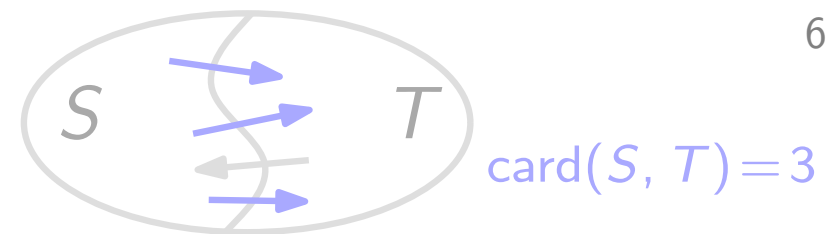
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

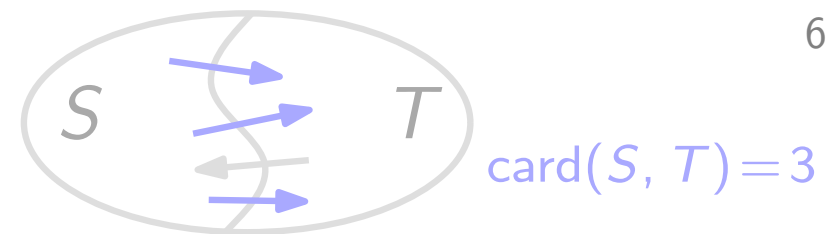
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$   
 Ganzz.-Satz



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:

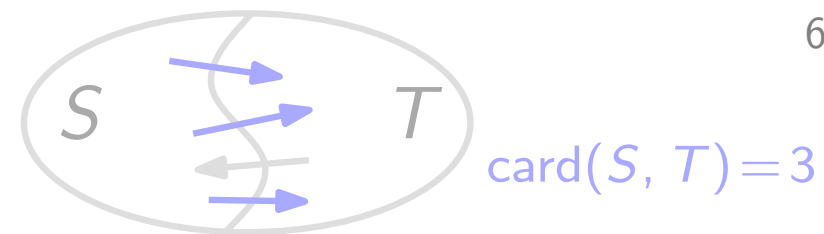


Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

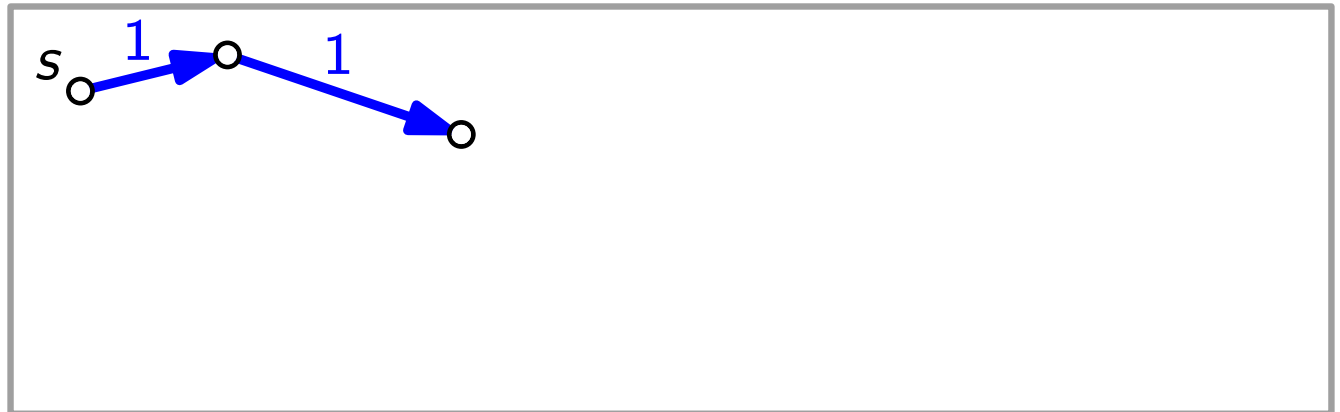


# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

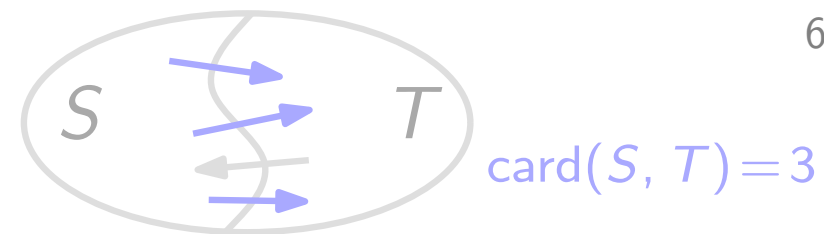
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

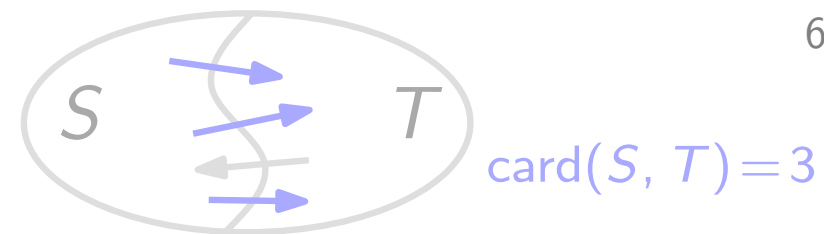
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

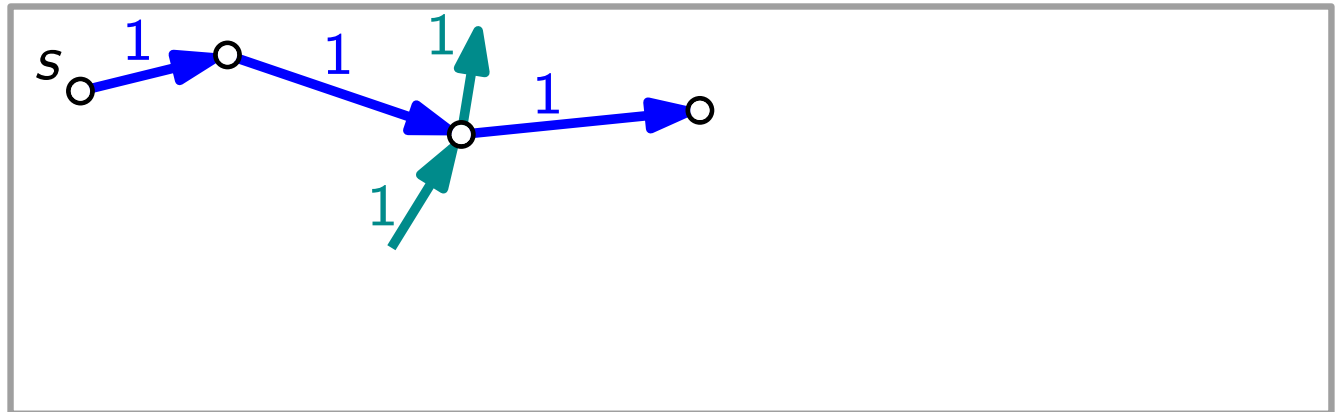
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

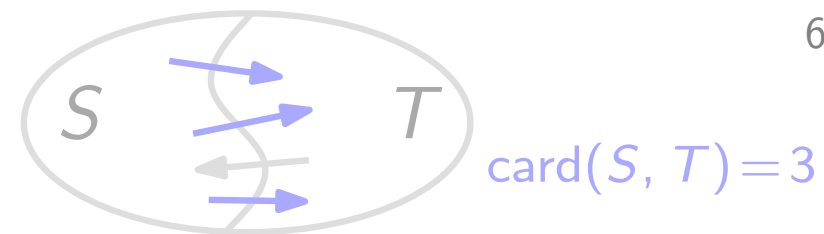
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

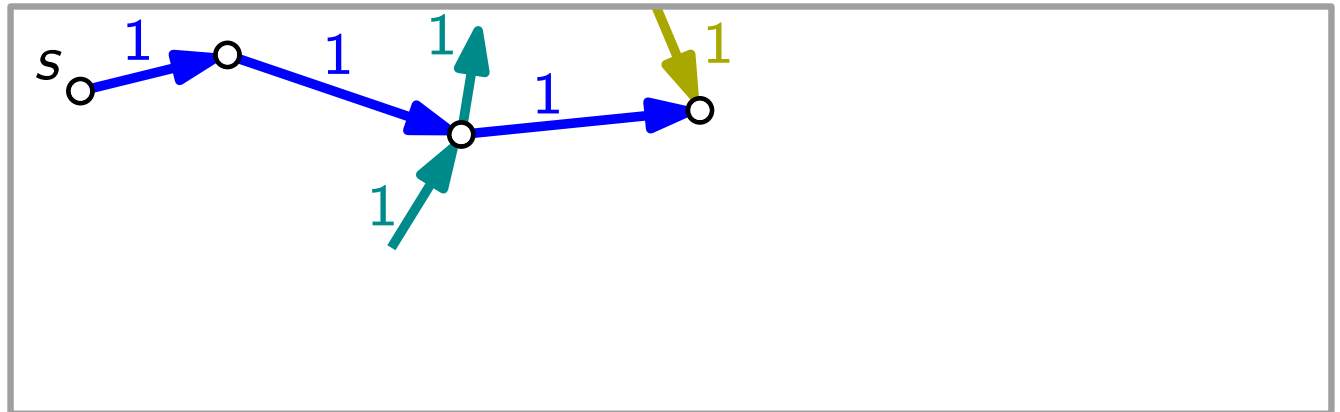
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

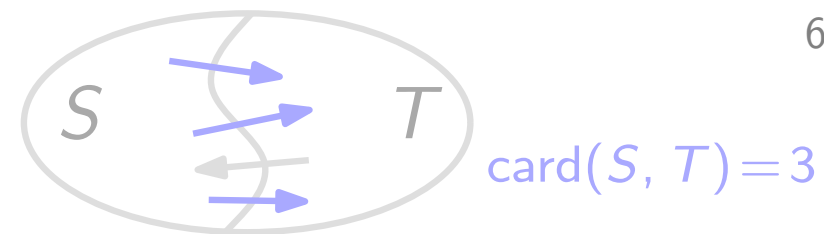
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

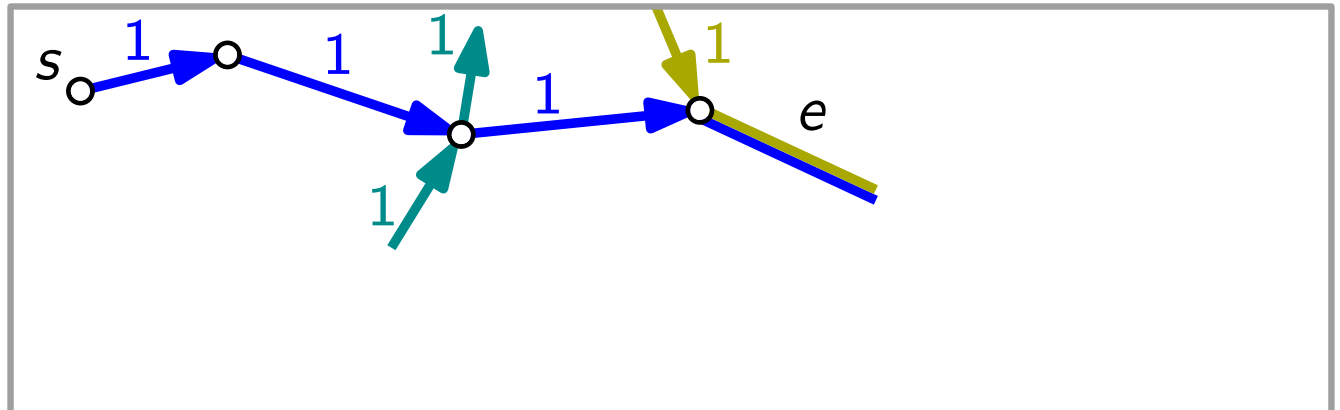
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

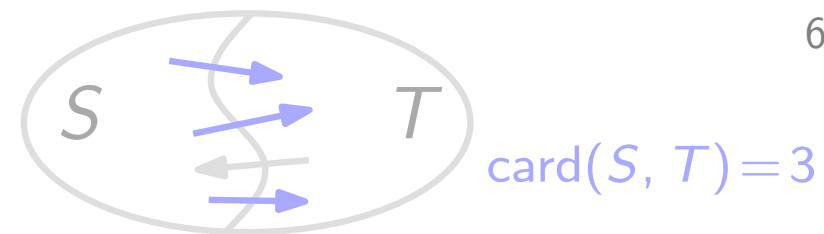
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

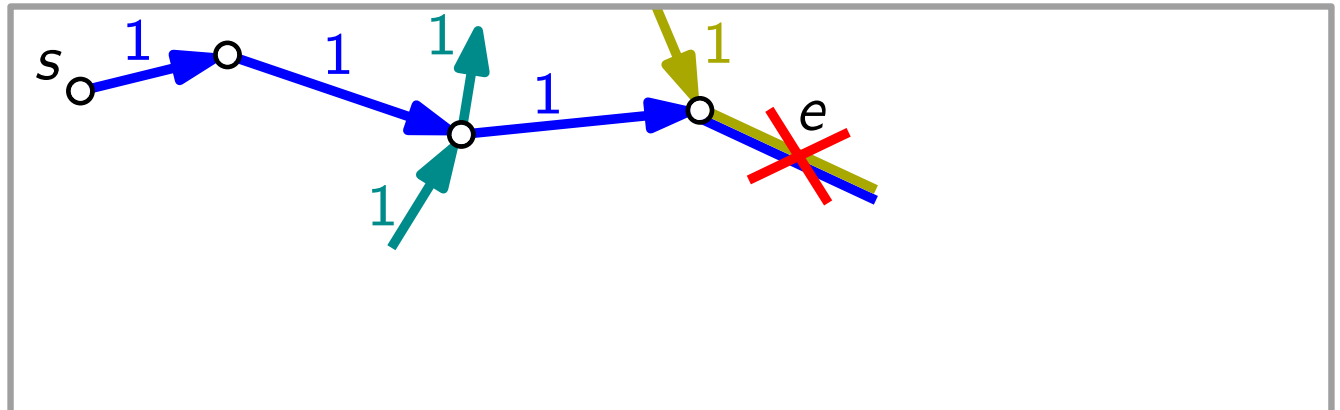
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

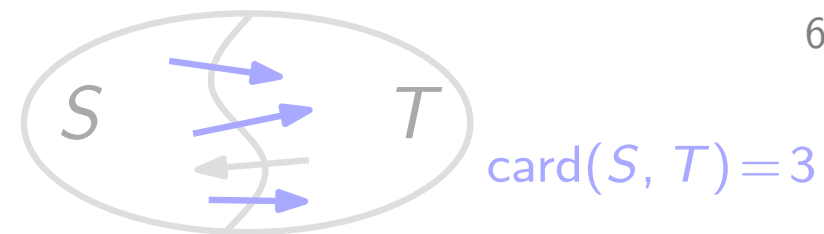
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

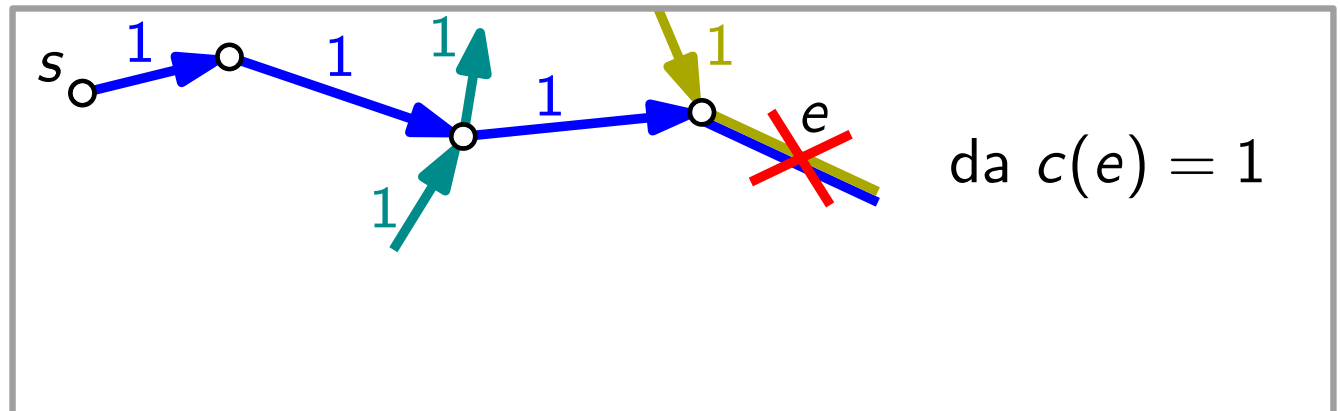
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

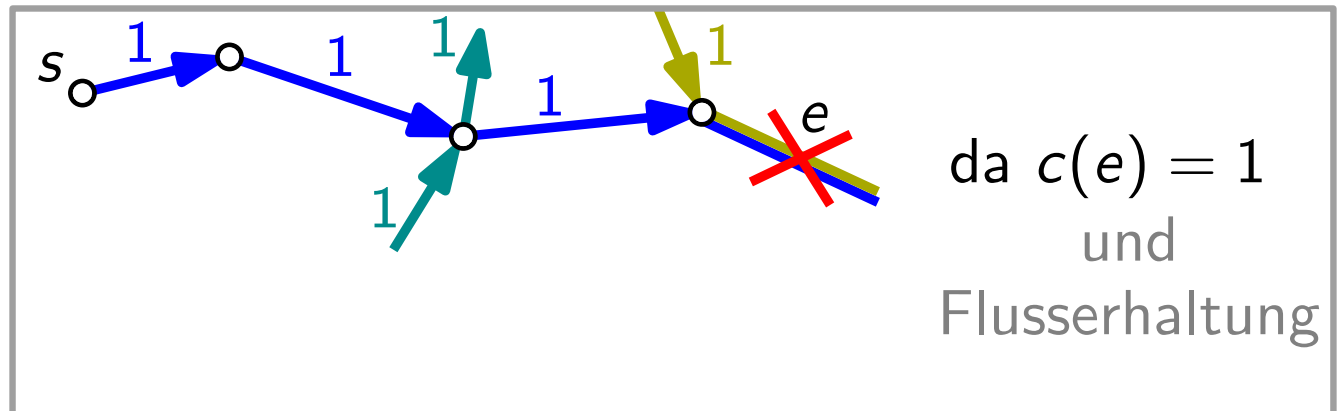
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:

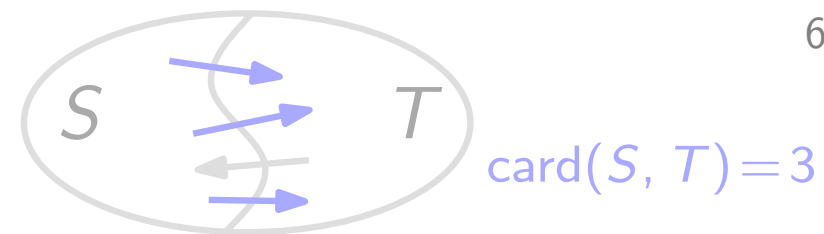


Karl Menger

Wien 1902 – Illinois 1985

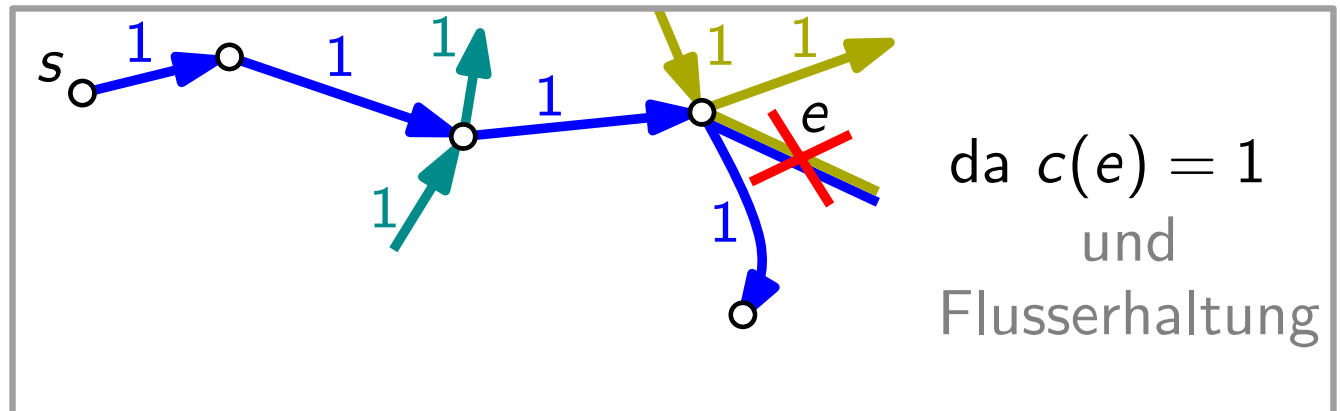


# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

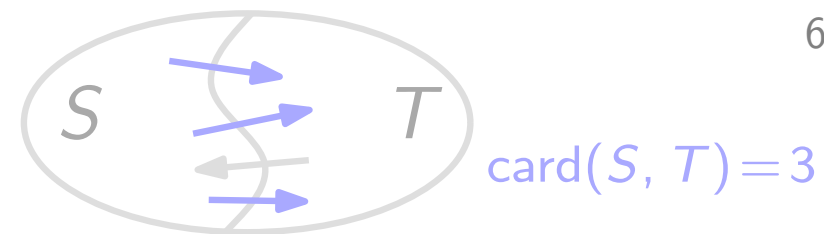
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

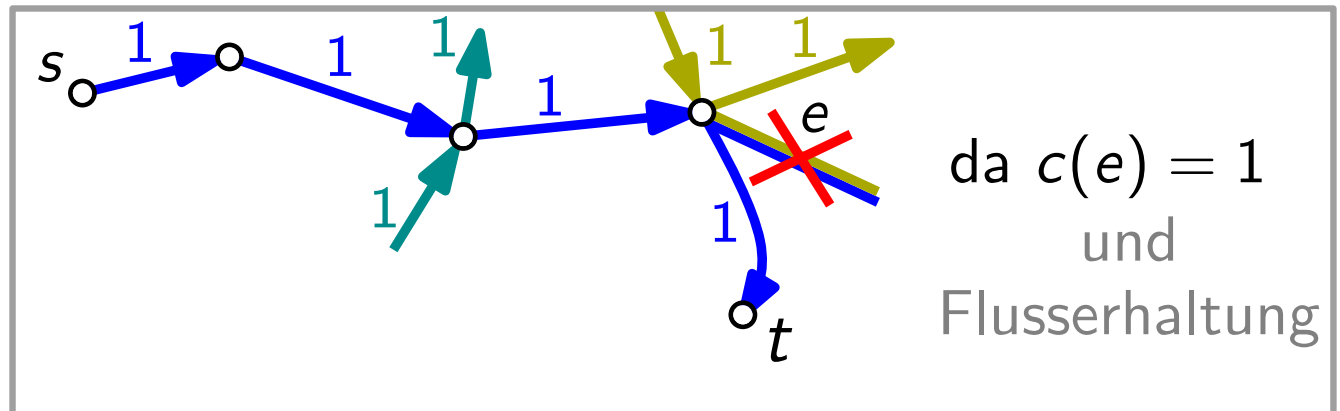
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

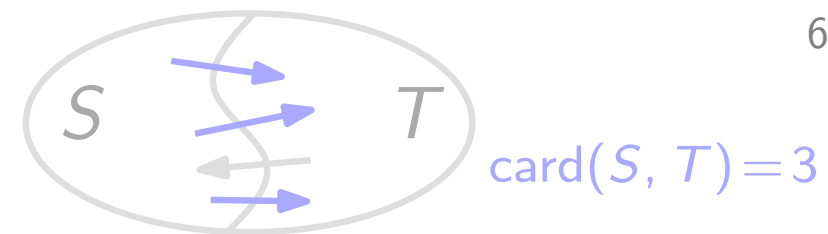
**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

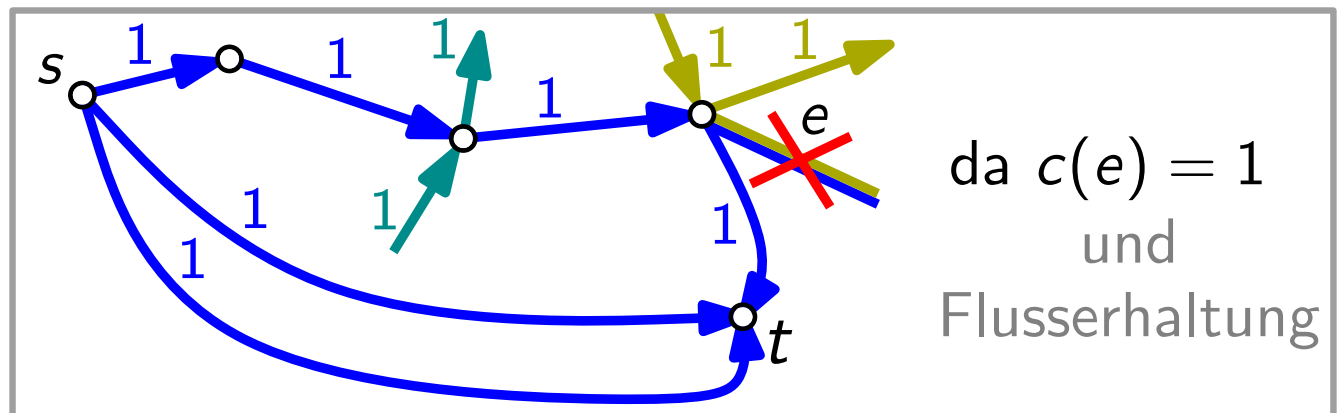
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



Karl Menger

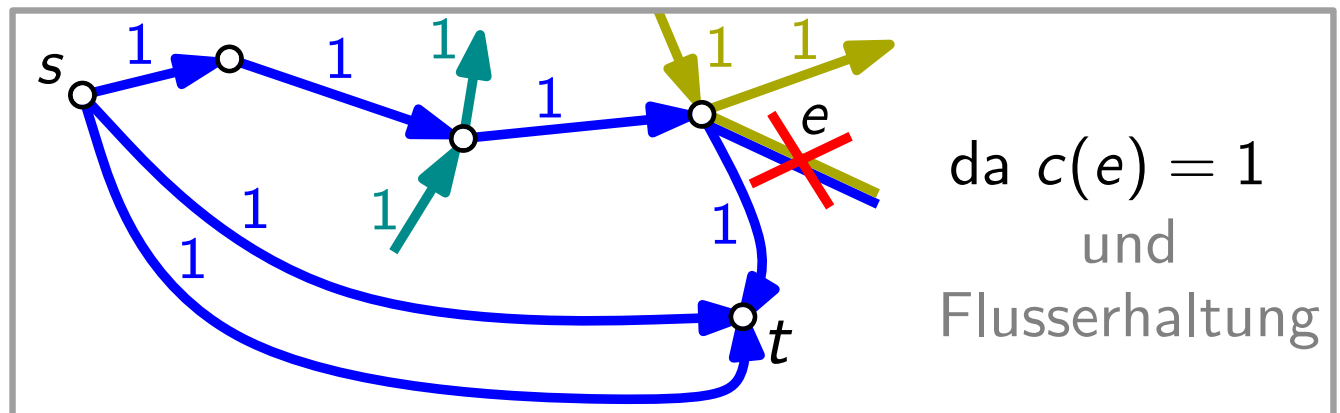
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



$\Rightarrow A := \text{max. Anz. kantendisj. } s\text{-}t\text{-Wege}$



Karl Menger

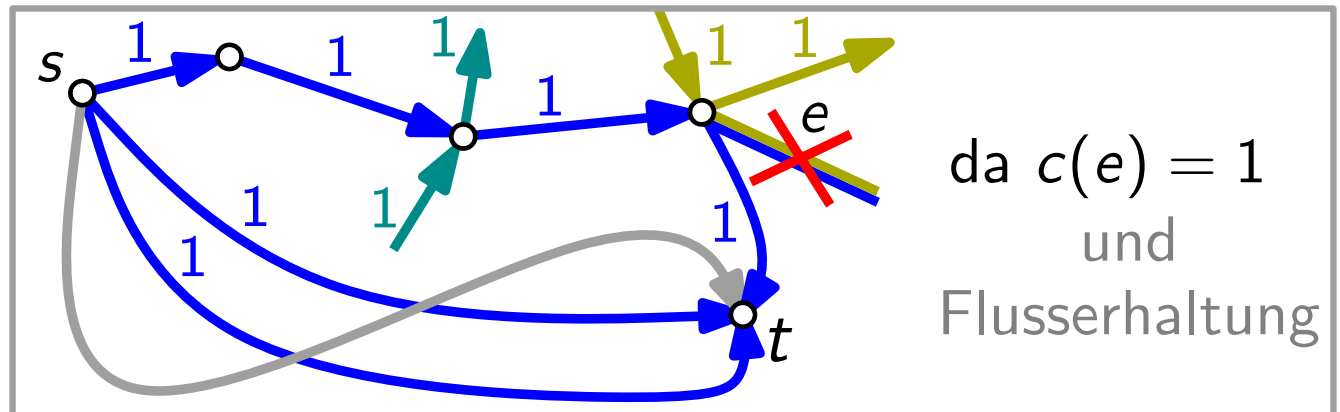
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



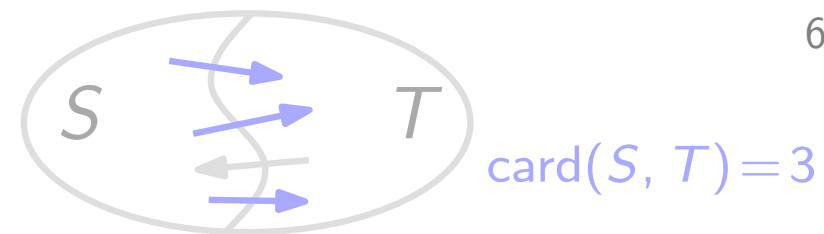
$\Rightarrow A := \text{max. Anz. kantendisj. } s\text{-}t\text{-Wege} \geq |f|$



Karl Menger

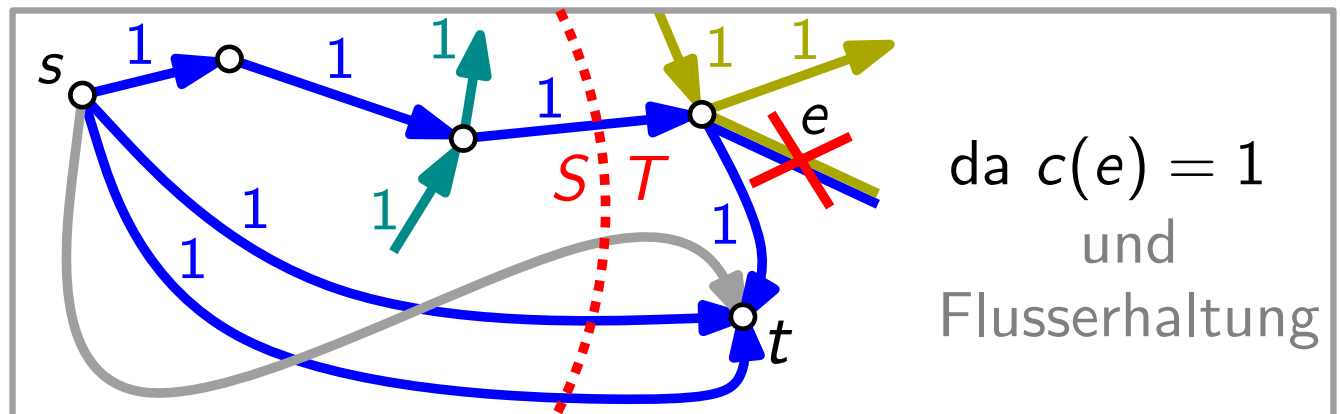
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege  
 gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



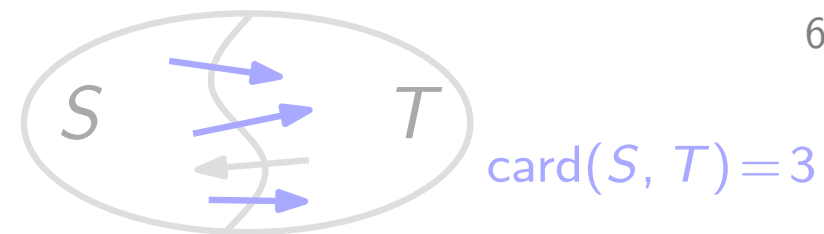
$\Rightarrow A := \max.$  Anz. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege  $\geq |f|$   
 Sei  $(S, T)$  ein minimaler  $s$ - $t$ -Schnitt.



Karl Menger

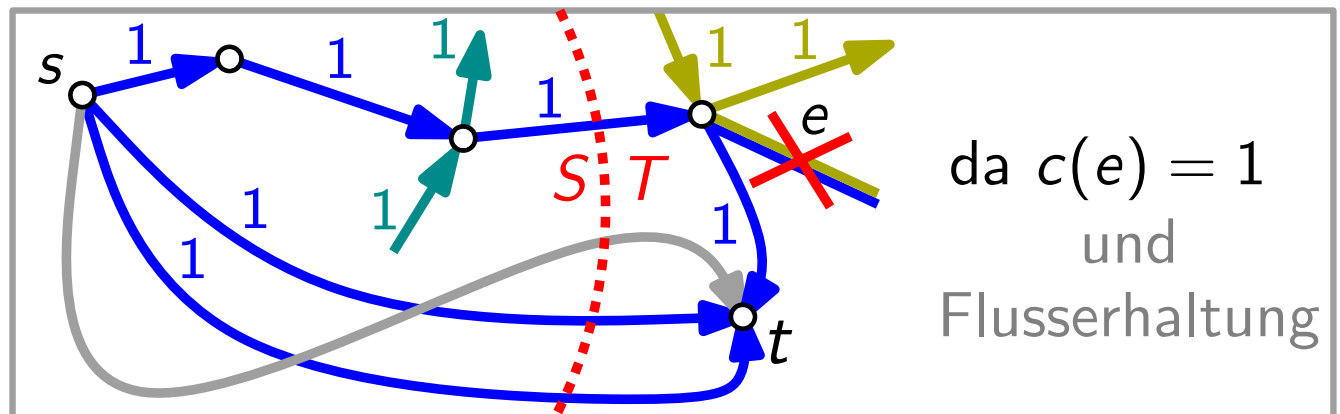
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$  Anz. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege  $\geq |f|$

Sei  $(S, T)$  ein minimaler  $s$ - $t$ -Schnitt.

$\Rightarrow$  jeder  $s$ - $t$ -Weg trägt  $\geq 1$  Kante zu  $\text{Raus}(S)$  bei.



Karl Menger

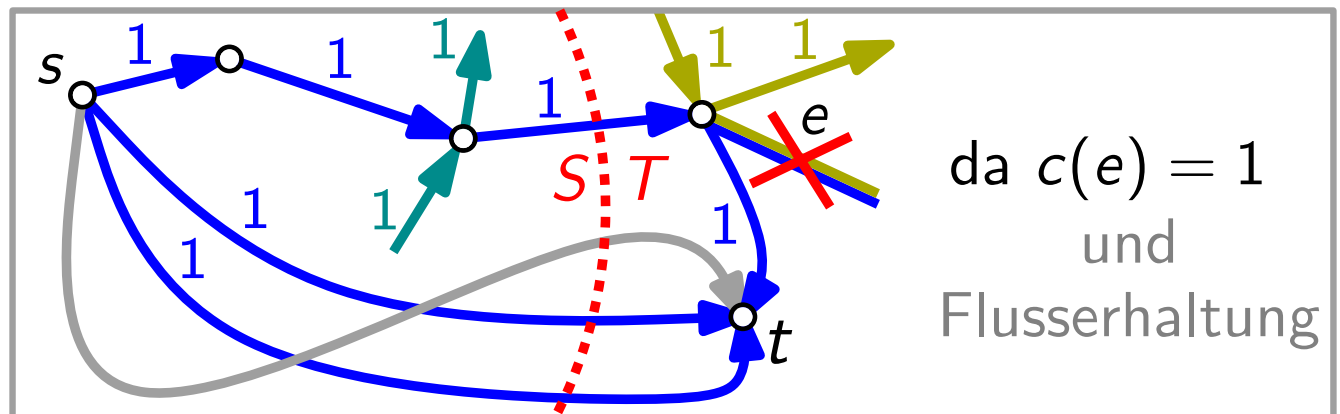
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$  Anz. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege  $\geq |f|$

Sei  $(S, T)$  ein minimaler  $s$ - $t$ -Schnitt.

$\Rightarrow$  jeder  $s$ - $t$ -Weg trägt  $\geq 1$  Kante zu  $\text{Raus}(S)$  bei.

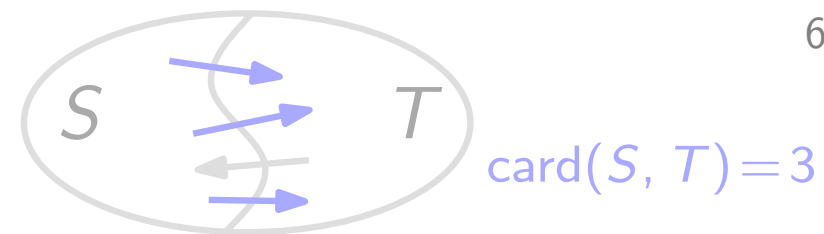
$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A$



Karl Menger  
 Wien 1902 – Illinois 1985

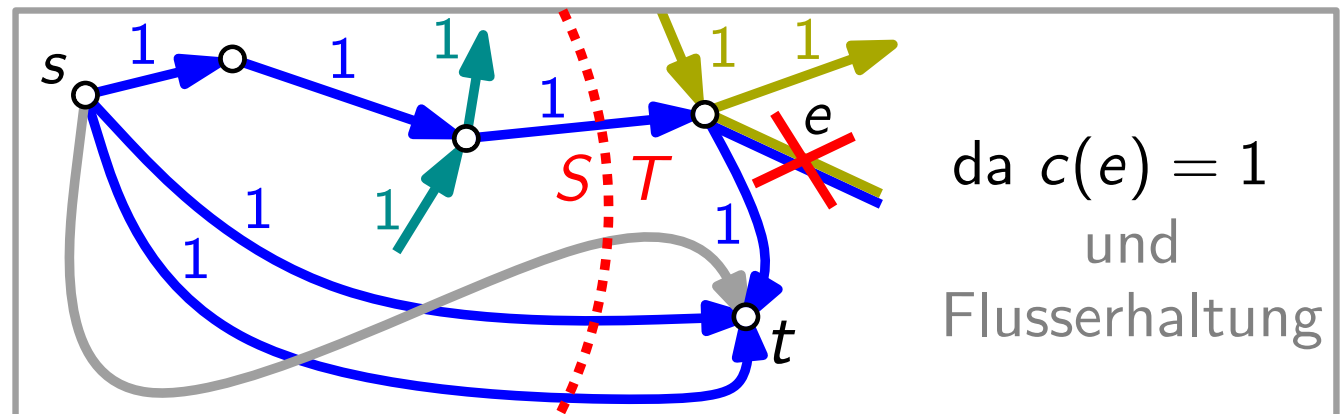


# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$  Anz. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege  $\geq |f|$

Sei  $(S, T)$  ein minimaler  $s$ - $t$ -Schnitt.

$\Rightarrow$  jeder  $s$ - $t$ -Weg trägt  $\geq 1$  Kante zu  $\text{Raus}(S)$  bei.

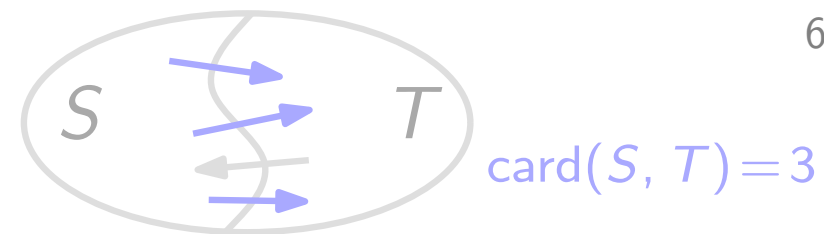
$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A$



Karl Menger

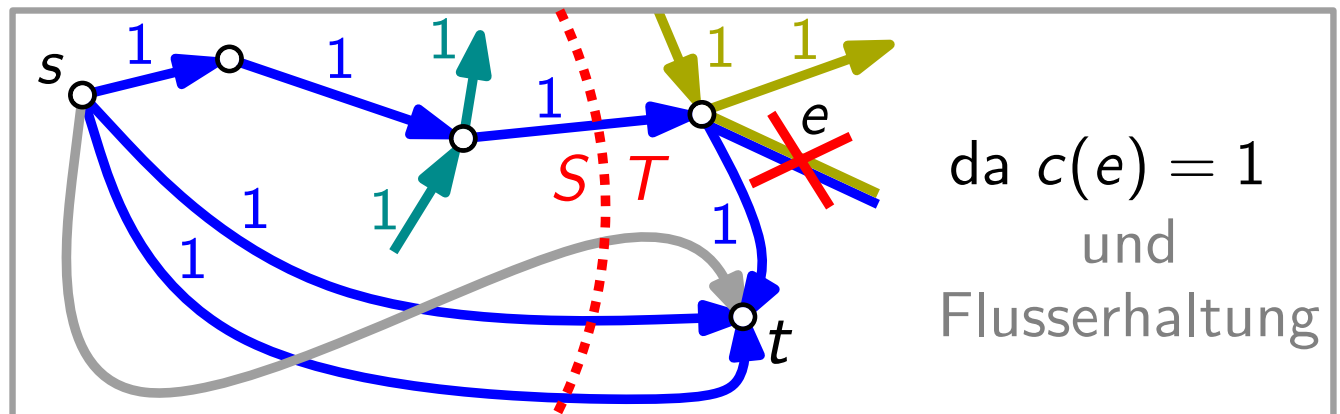
Wien 1902 – Illinois 1985

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$  Anz. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege  $\geq |f|$

Sei  $(S, T)$  ein minimaler  $s$ - $t$ -Schnitt.

$\Rightarrow$  jeder  $s$ - $t$ -Weg trägt  $\geq 1$  Kante zu  $\text{Raus}(S)$  bei.

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$



Karl Menger  
Wien 1902 – Illinois 1985

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines  
min. Schnittes

Wert eines  
max. Flusses

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines  
min. Schnittes

Wert eines  
max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

The diagram illustrates the relationship between the cardinality of an S-T cut, the capacity of a minimum cut, the value of a maximum flow, and the Max-Flow-Min-Cut Theorem. The equation  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$  is shown. The terms  $c(S)$  and  $|f|$  are highlighted in yellow. Below  $c(S)$  is a yellow box containing the text 'Kapazität eines min. Schnittes'. Below  $|f|$  is a yellow box containing the text 'Wert eines max. Flusses'. At the bottom is a yellow box containing the text 'Max-Flow-Min-Cut-Theorem'. Red arrows point from the 'Max-Flow-Min-Cut-Theorem' box to the  $c(S)$  and  $|f|$  terms, and from the 'Kapazität eines min. Schnittes' and 'Wert eines max. Flusses' boxes to the  $c(S)$  and  $|f|$  terms respectively.

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines  
min. Schnittes

=

Wert eines  
max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines  
min. Schnittes

=

Wert eines  
max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$



# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

Kapazität eines  
min. Schnittes

=

Wert eines  
max. Flusses

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$

$\Rightarrow$  Minimale Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnitts  
= maximale Anzahl kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege □

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

↑
↑

Kapazität eines min. Schnittes
=
Wert eines max. Flusses

↑

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$

$\Rightarrow$  Minimale Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnitts

$=$  maximale Anzahl kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege □

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  gerichteter Graph,  $s, t \in V$ ,  $st \notin E$ . Dann ist die max. Anzahl *knotendisjunkter*  $s$ - $t$ -Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die  $s$  und  $t$  trennt. [Menger, 1927]

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
mit  $D \cap H = \emptyset$ ,

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren mit  $D \cap H = \emptyset$ , sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit, d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.



# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
findet – und umgekehrt.

**Modell.**

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren mit  $D \cap H = \emptyset$ , sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit, d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch findet – und umgekehrt.

**Modell.**

$d_1$  ○  
○  
○  
○  
 $d_n$  ○

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
 eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
 mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
 sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
 findet – und umgekehrt.

**Modell.**

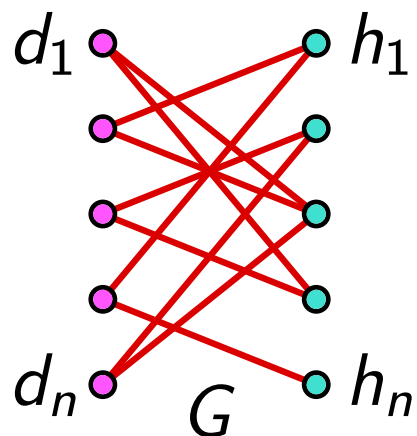
$d_1$	○	○	$h_1$
	○		○
	○		○
	○		○
$d_n$	○	○	$h_n$

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
 eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
 mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
 sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
 findet – und umgekehrt.

**Modell.**

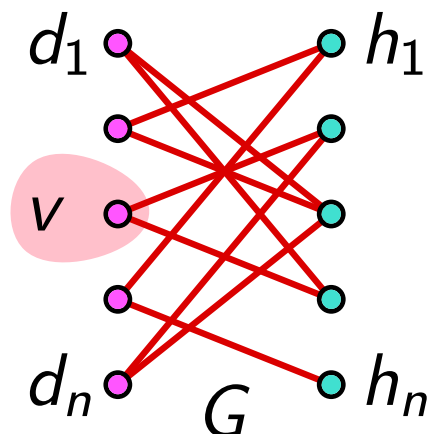


# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
 eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
 mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
 sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
 findet – und umgekehrt.

**Modell.**



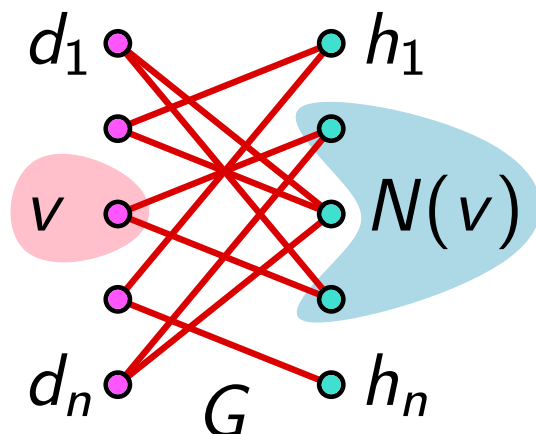
Nachbarschaft von  $v \in V$  ist

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
 eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
 mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
 sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
 findet – und umgekehrt.

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

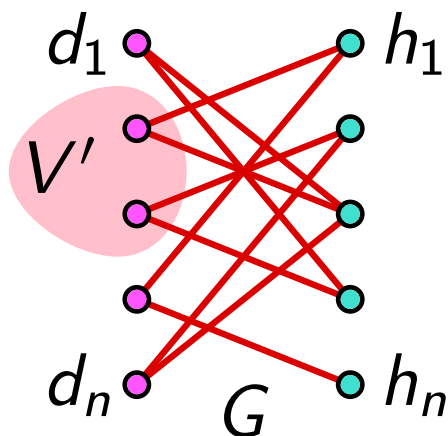
$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
 eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
 mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
 sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
 findet – und umgekehrt.

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

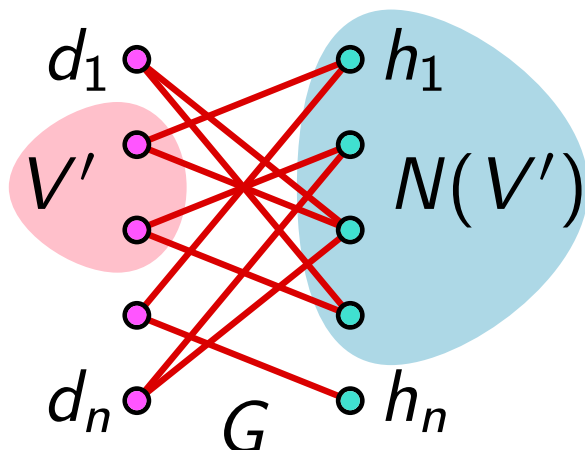
Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und  
 eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren  
 mit  $D \cap H = \emptyset$ ,  
 sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit,  
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit  
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch  
 findet – und umgekehrt.

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

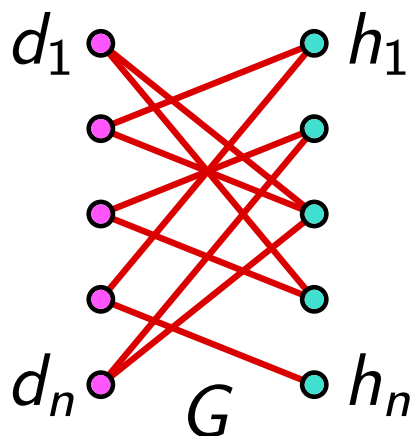
$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$



# Der Heiratssatz

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

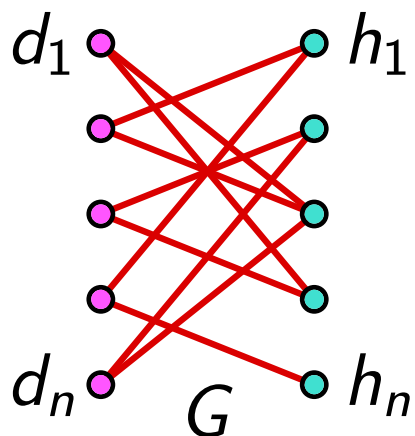
$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

# Der Heiratssatz

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

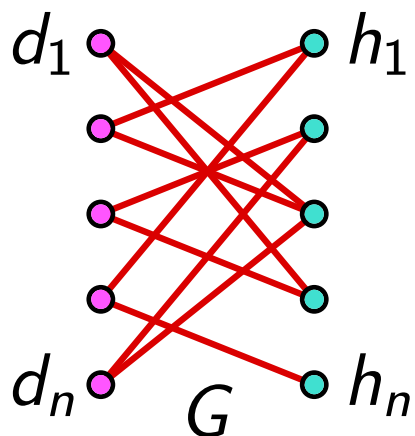
$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

# Der Heiratssatz

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

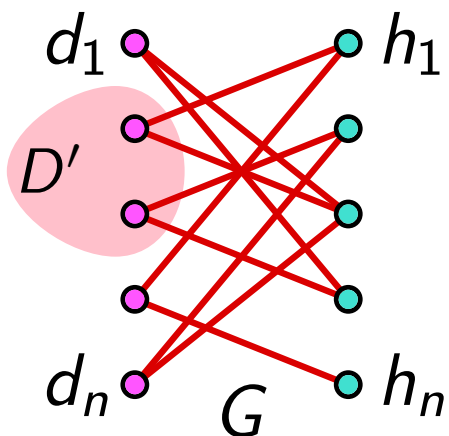
$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

# Der Heiratssatz

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

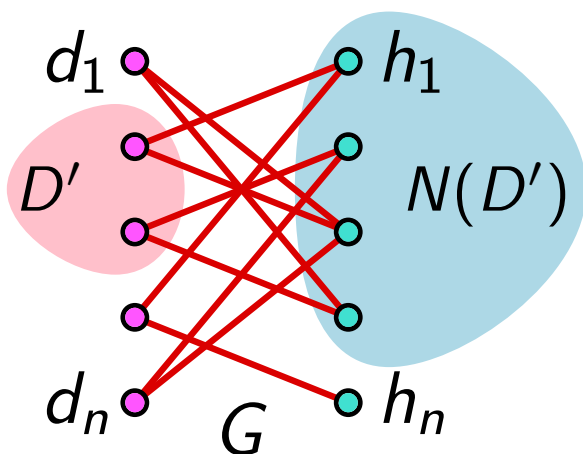
$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

# Der Heiratssatz

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

# Der Heiratssatz

[Hall 1935]

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

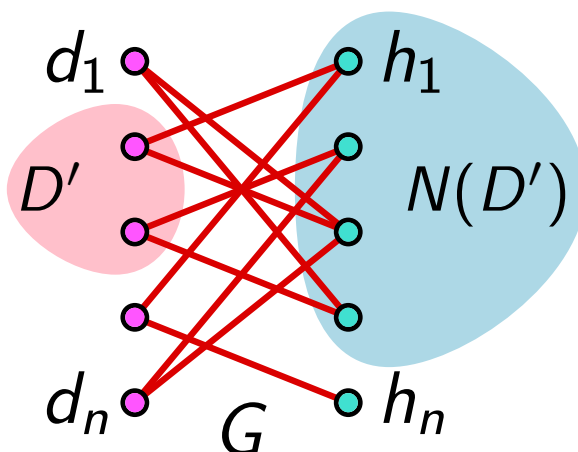
**Satz.**

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge



**Modell.**



# Der Heiratssatz

[Hall 1935]

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

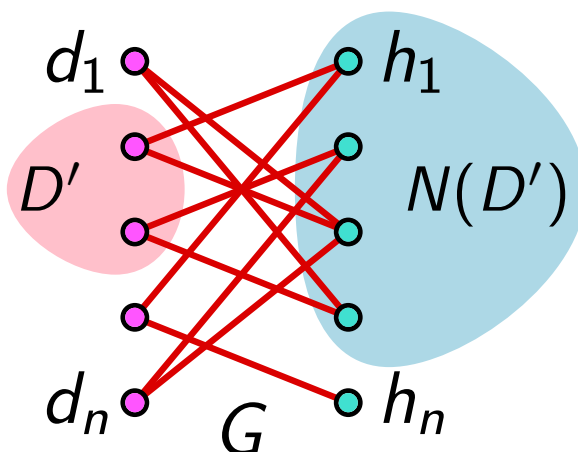
**Satz.** Dies ist auch hinreichend.

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge



**Modell.**



# Der Heiratssatz

[Hall 1935]

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

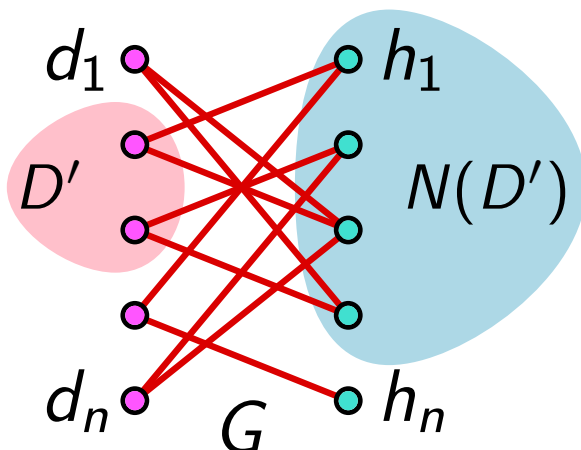
**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Satz.** Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

$G$  hat eine perfekte Paarung  $\Leftrightarrow$   
für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Modell.**



Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge





# Der Heiratssatz

[Hall 1935]

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

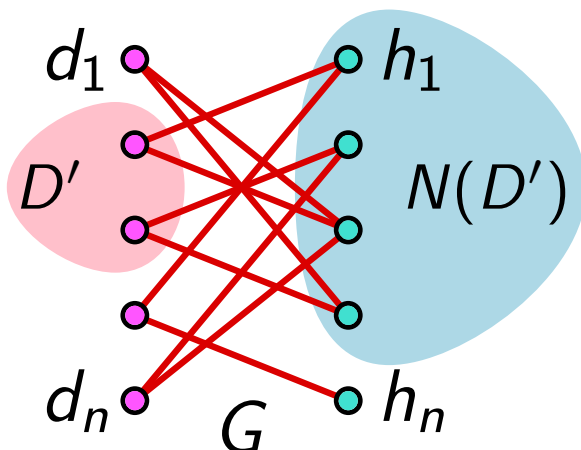
**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Satz.** Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

$G$  hat eine perfekte Paarung  $\Leftrightarrow$   
für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Modell.**



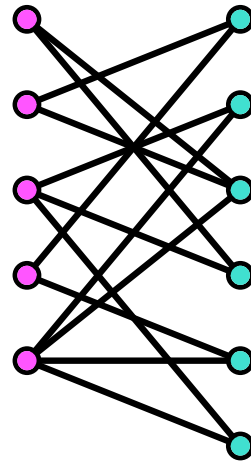
Beweis  
später!

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge

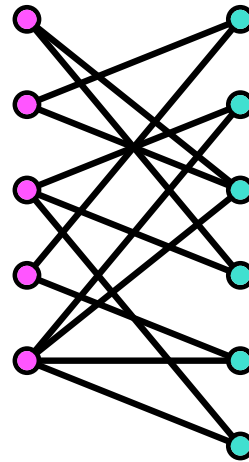


# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G$

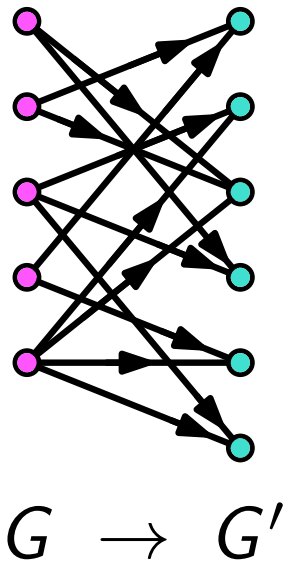
# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$G$

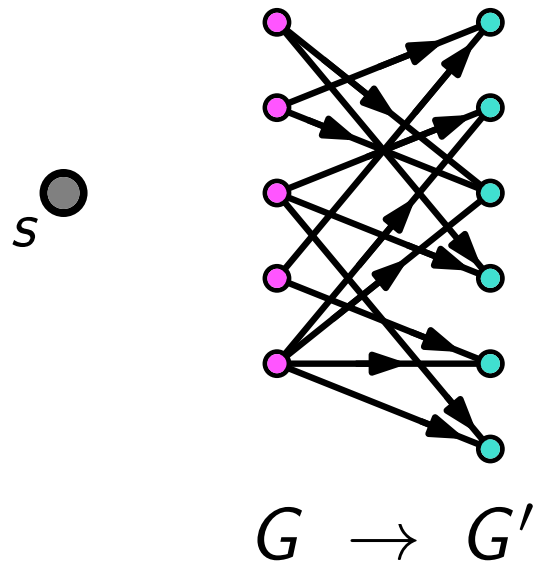
**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



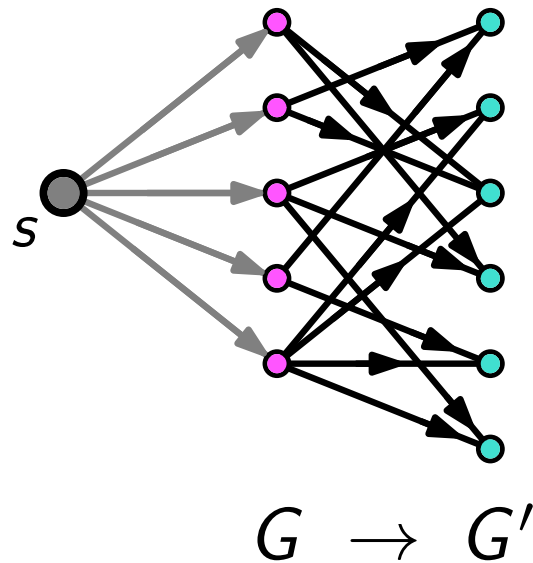
**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



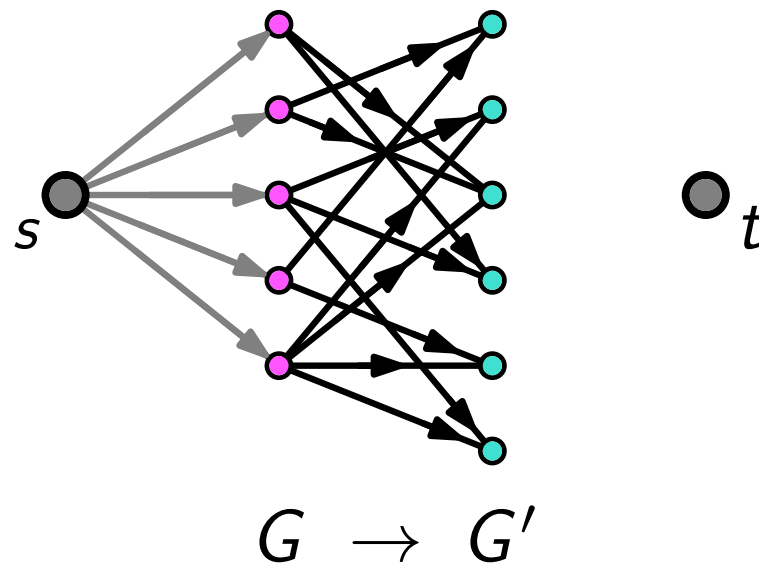
**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



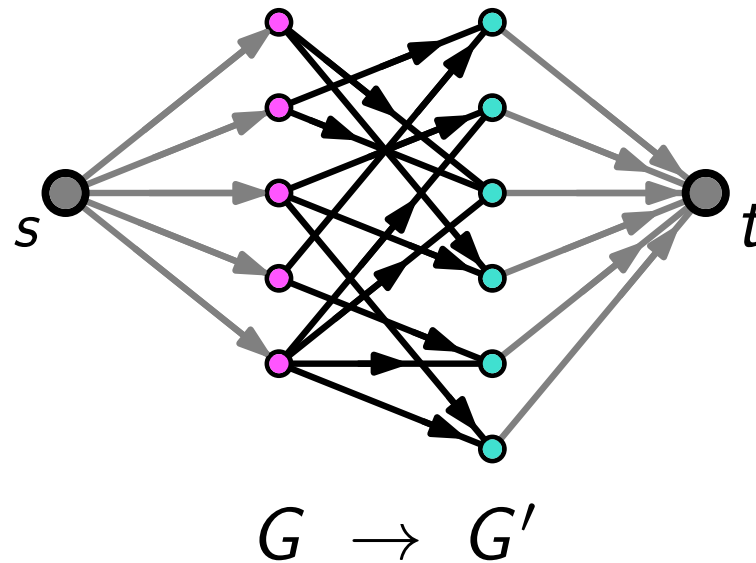
**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

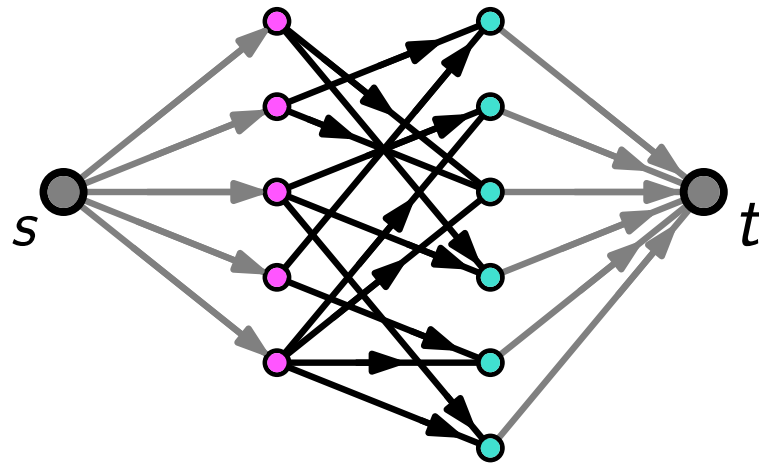
# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.



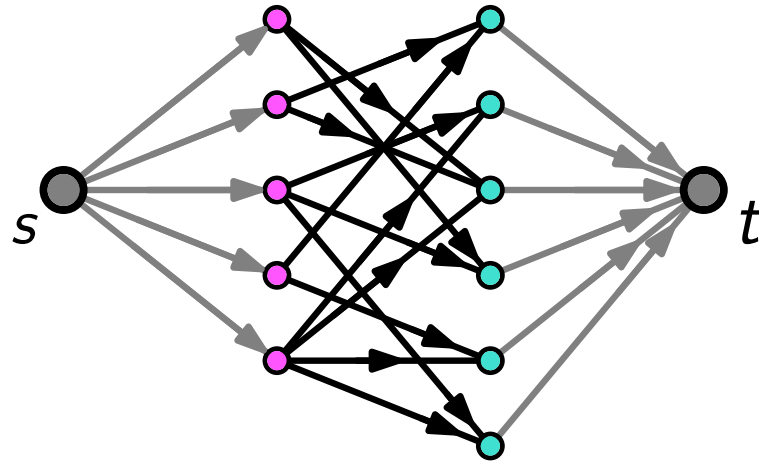
# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



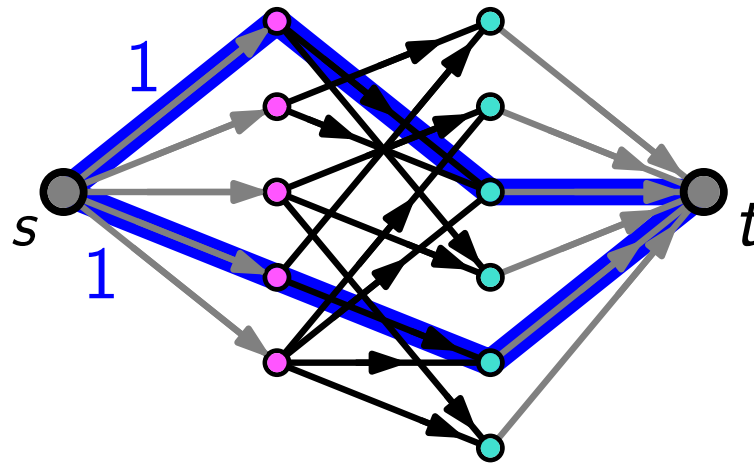
$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



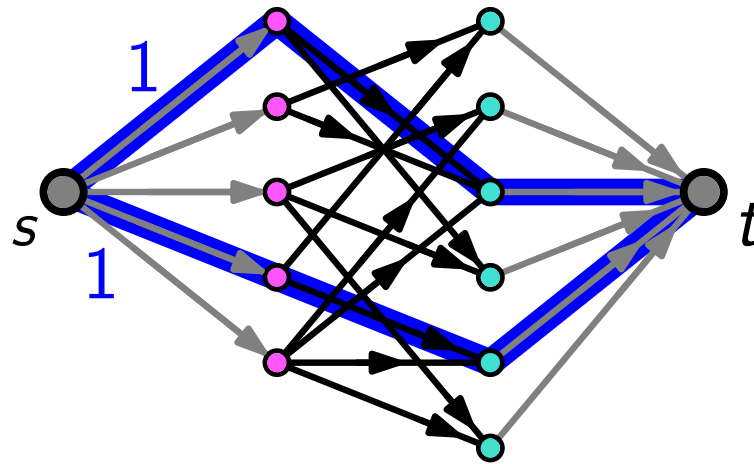
$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

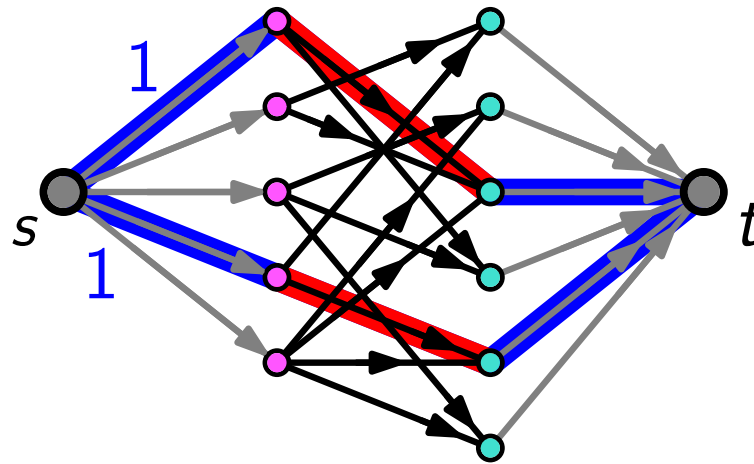
**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$



Menge *kantendisjunkter*  
 $s$ - $t$ -Wege in  $G'$

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$

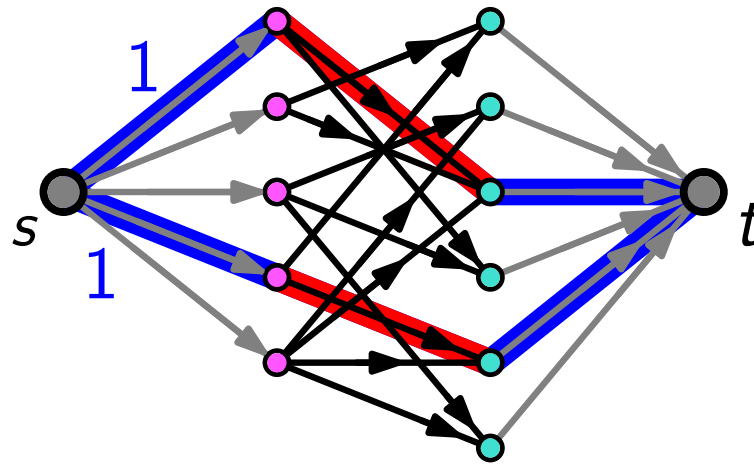


Menge *kantendisjunkter*  
 $s$ - $t$ -Wege in  $G'$



Menge *unabhängiger*  
Kanten in  $G$

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$

Paarung in  $G$

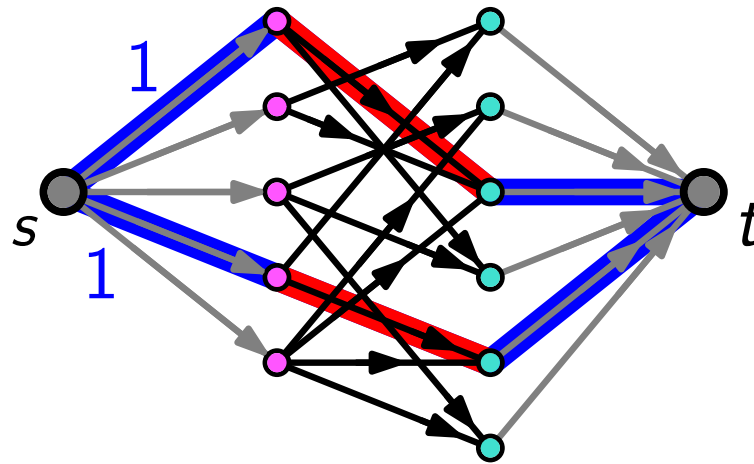


Menge *kantendisjunkter*  
 $s$ - $t$ -Wege in  $G'$

Menge *unabhängiger*  
Kanten in  $G$



# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen größte Paarungen berechnet.

**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$

1-zu-1

Paarung in  $G$

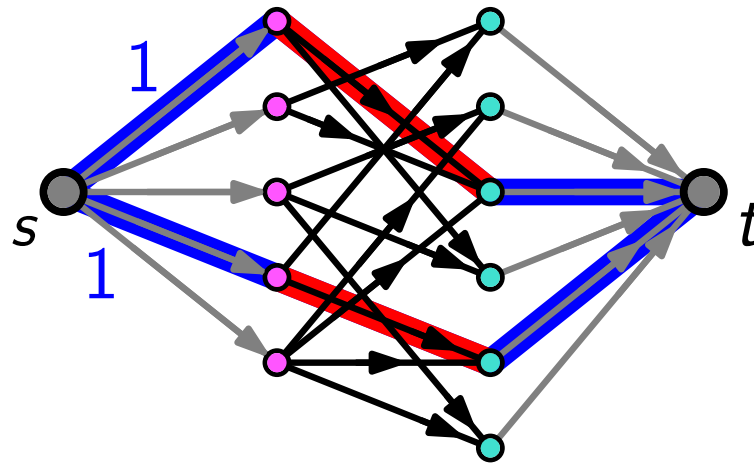


Menge *kantendisjunkter*  
 $s$ - $t$ -Wege in  $G'$



Menge *unabhängiger*  
Kanten in  $G$

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen **größte** Paarungen berechnet.

**Beob.**

Ganzzahl.  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$

1-zu-1

Paarung in  $G$



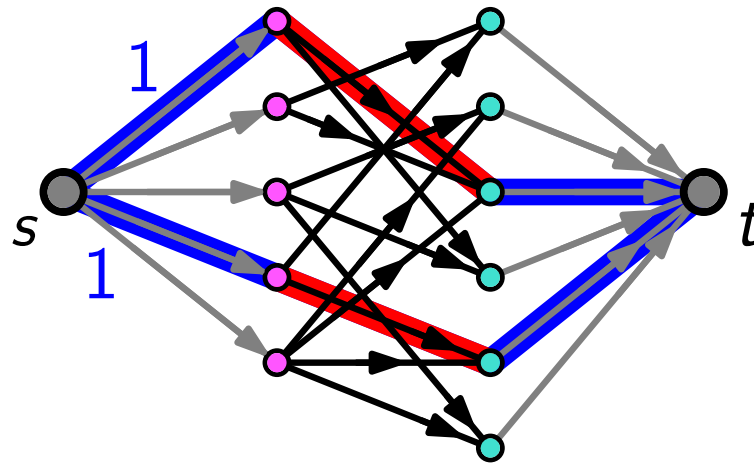
Menge *kantendisjunkter*  
 $s$ - $t$ -Wege in  $G'$



Menge *unabhängiger*  
Kanten in  $G$



# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



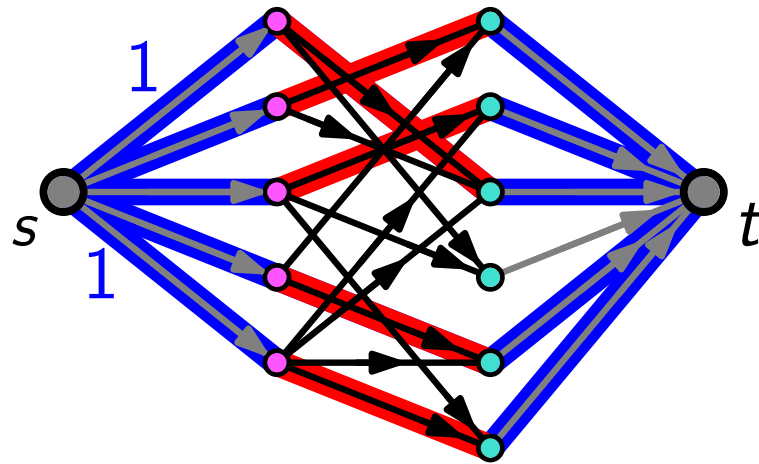
$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen **größte** Paarungen berechnet.

**Beob.**

<p><i>größter</i> Ganzzahl. <math>s</math>-<math>t</math>-Fluss in <math>G'</math></p>	<p>1-zu-1</p>	<p><i>größte</i> Paarung in <math>G</math></p>
<p><i>größte</i> Menge <i>kantendisjunkter</i> <math>s</math>-<math>t</math>-Wege in <math>G'</math></p>	<p></p>	<p><i>größte</i> Menge <i>unabhängiger</i> Kanten in <math>G</math></p>

# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen **größte** Paarungen berechnet.

**Beob.**

<p><i>größter</i> Ganzzahl. <math>s</math>-<math>t</math>-Fluss in <math>G'</math></p>	<p>1-zu-1</p>	<p><i>größte</i> Paarung in <math>G</math></p>
<p><i>größte</i> Menge <i>kantendisjunkter</i> <math>s</math>-<math>t</math>-Wege in <math>G'</math></p>	<p></p>	<p><i>größte</i> Menge <i>unabhängiger</i> Kanten in <math>G</math></p>

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
*reduziert*  
auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen**.

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
*reduziert*  
auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**  
sehr speziellen



# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
in  $O(V)$  Zeit *reduziert*  
auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen**.  
 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
sehr speziellen $\underbrace{\hspace{10em}}$   
mit Kap.  $\equiv 1$

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
in  $O(V)$  Zeit *reduziert*  
auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**  
sehr speziellenmit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
in  $O(V)$  Zeit *reduziert*  
auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen**.  
⏟ ⏟  
sehr speziellen mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
Zeit bestimmen.



# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

⏟  
sehr speziellen
⏟  
mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Beweis.*

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*

auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen**.  

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 sehr speziellen
 

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Beweis.* – Konstruktion von  $G'$ :

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*

auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**  

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 sehr speziellen
 

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Laufzeit*

*Beweis.* – Konstruktion von  $G'$ :

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*

auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**  

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 sehr speziellen
 

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Beweis.* – Konstruktion von  $G'$ :

*Laufzeit*  
 $O(V)$

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

sehr speziellen
mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Beweis.*

- Konstruktion von  $G'$ : *Laufzeit*  
 $O(V)$
- Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für  $G'$ :

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*

auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**  

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 sehr speziellen
 

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Beweis.*

	– Konstruktion von $G'$ :	<i>Laufzeit</i> $O(V)$
	– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für $G'$ :	$O(V' \cdot (E')^2)$

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*

auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**  

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 sehr speziellen
 

 $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*Beweis.*

<ul style="list-style-type: none"> <li>– Konstruktion von <math>G'</math>:</li> <li>– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für <math>G'</math>:</li> </ul>	<p><i>Laufzeit</i></p> <p><math>O(V)</math></p> <p><math>O(V' \cdot (E')^2)</math></p> <p><math>= O(VE^2)</math></p>
---	--

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit **reduziert**  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

⏟  
sehr speziellen
⏟  
mit Kap.  $\equiv 1$

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

**Beweis.**

– Konstruktion von $G'$ :	<i>Laufzeit</i> $O(V)$
– Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für $G'$ :	$O(V' \cdot (E')^2)$ $= O(VE^2)$
	$O(VE^2)$



# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit *reduziert*  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

*sehr speziellen*

*mit Kap.  $\equiv 1$*

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*ausnutzen!*

**Beweis.**

- Konstruktion von  $G'$ :
- Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für  $G'$ :

<i>Laufzeit</i>	
$O(V)$	
$O(V' \cdot (E')^2)$	
$= O(VE^2)$	
<hr/>	
$O(VE^2)$	

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit **reduziert**  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

*sehr speziellen*

*mit Kap.  $\equiv 1$*

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*ausnutzen!*

**Beweis.**

– Konstruktion von $G'$ :	<i>Laufzeit</i> $O(V)$
– <del>Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für <math>G'</math>:</del>	<del><math>O(V' \cdot (E')^2)</math></del>
Berechne $\leq  V $ $s$ - $t$ -Wege in je $O(E')$ Zeit	$= O(VE^2)$
	<hr/>
	$O(VE^2)$

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit **reduziert**  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

*sehr speziellen*

*mit Kap.  $\equiv 1$*

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*ausnutzen!*

**Beweis.**

- Konstruktion von  $G'$ : *Laufzeit*  
 $O(V)$
- ~~Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für  $G'$ :~~  ~~$O(V \cdot (E')^2)$~~
- ~~Berechne  $\leq |V|$   $s$ - $t$ -Wege in je  $O(E')$  Zeit~~  ~~$= O(VE^2)$~~

---

$O(VE^2)$

# Anmerkungen

- Bem.** Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
- maximale Flüsse in allg. Graphen in  $O(V^2E)$  Zeit
  - Matchings in bipartiten Graphen in  $O(\sqrt{V}E)$  Zeit.
- [KN, Kapitel 9.6]

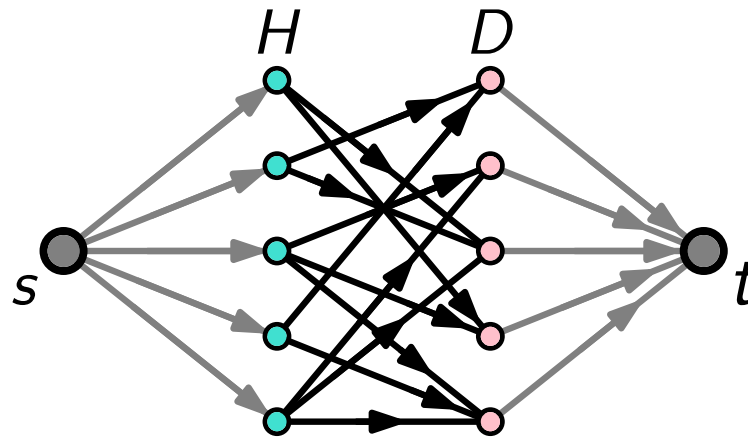
# Anmerkungen

- Bem.** Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
- maximale Flüsse in allg. Graphen in  $O(V^2E)$  Zeit
  - Matchings in bipartiten Graphen in  $O(\sqrt{VE})$  Zeit.
- [KN, Kapitel 9.6]

**Satz.** Selbst in einem beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  lässt sich eine größte Paarung in  $O(\sqrt{VE})$  Zeit berechnen.

[Micali & Vazirani, FOCS'80]

# Beweis des Heiratssatzes



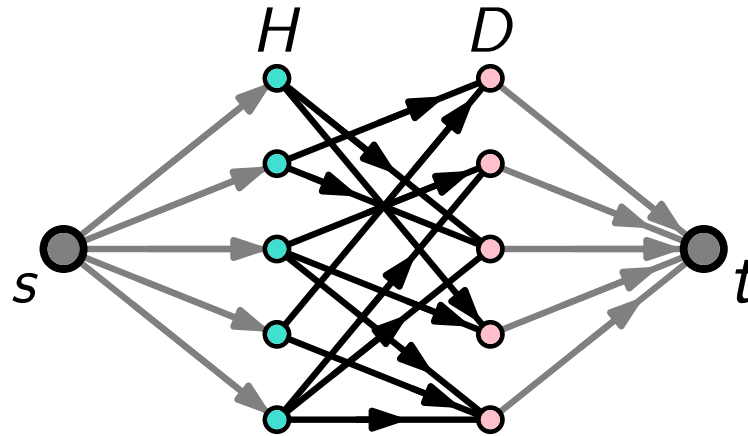
$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

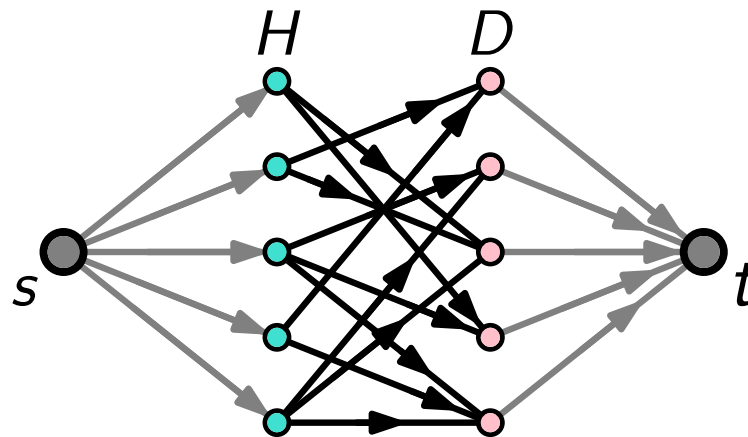
$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \cup H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

*Beweis.*

„ $\Leftarrow$ “

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

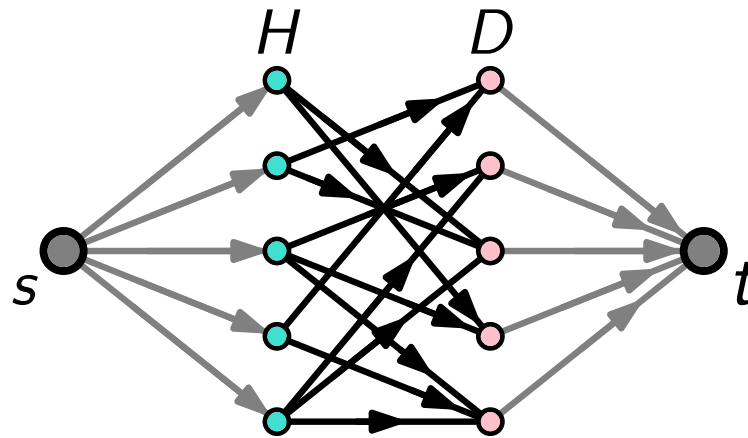
$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  $G$  hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$



# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

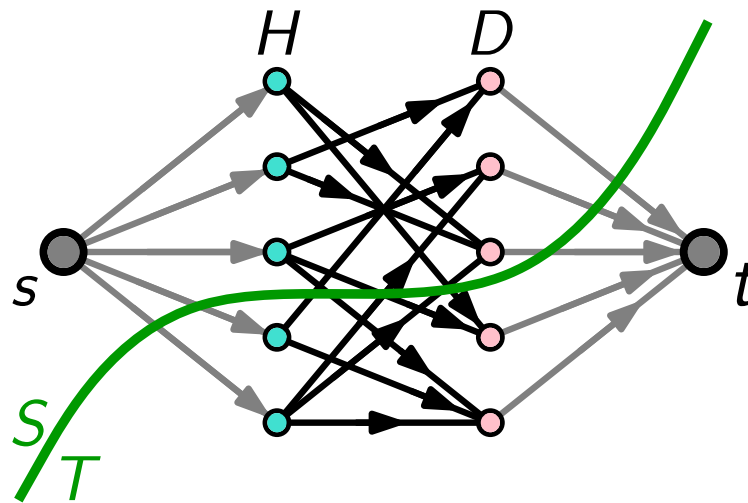
**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

$G$  hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$  für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $(S, T)$  in  $G'$  gilt  $c(S) \geq |D|$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \cup H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

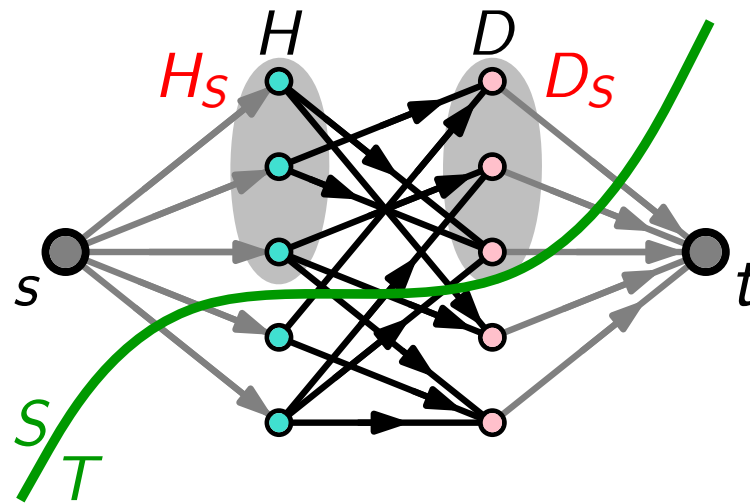
**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

$G$  hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$  für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $(S, T)$  in  $G'$  gilt  $c(S) \geq |D|$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \cup H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

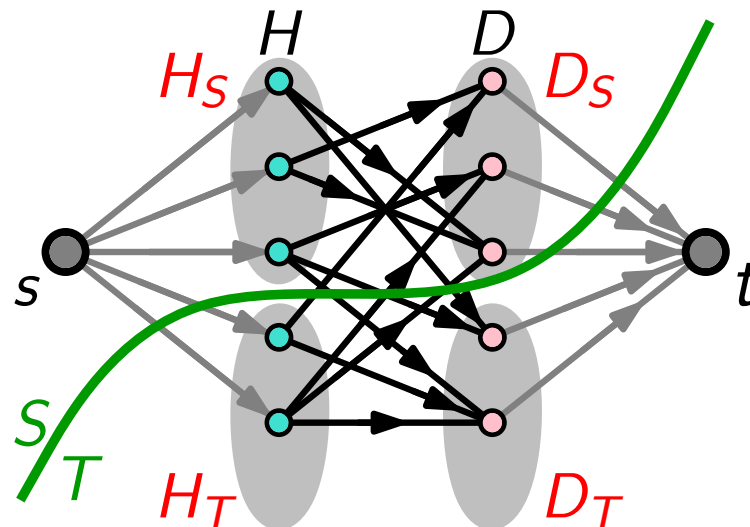
**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

$G$  hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$  für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $(S, T)$  in  $G'$  gilt  $c(S) \geq |D|$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

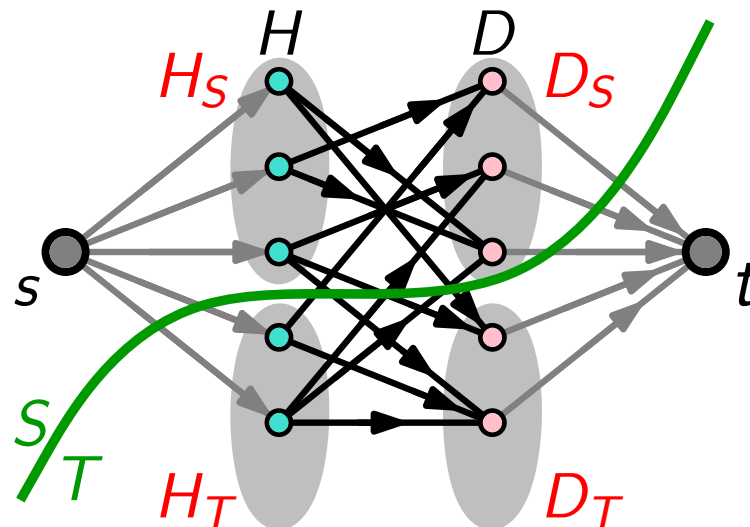
**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

$G$  hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$  für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $(S, T)$  in  $G'$  gilt  $c(S) \geq |D|$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

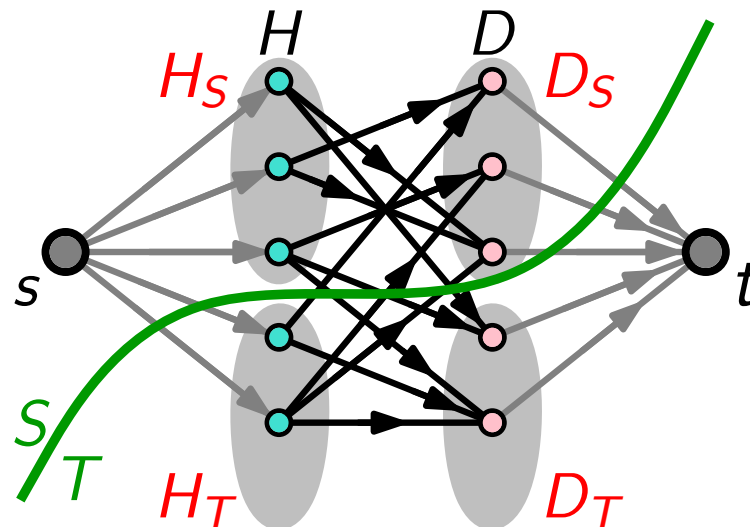
$G$  hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$  für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $(S, T)$  in  $G'$  gilt  $c(S) \geq |D|$

zu zeigen!

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

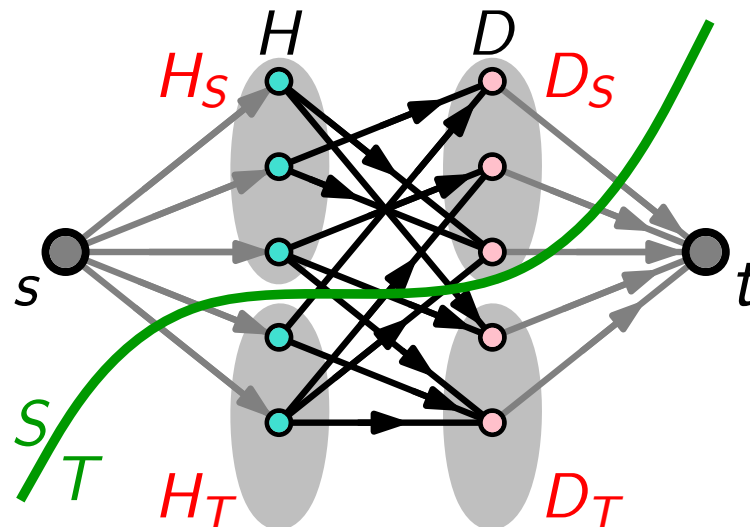
$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.** z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$   
 $\Leftarrow$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

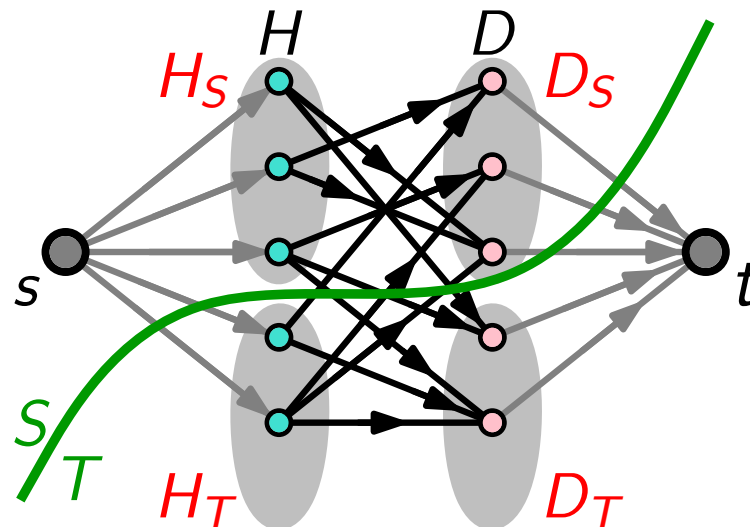
$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \cup H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.** z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$   
 „ $\Leftarrow$ “  
 Es gilt  $c(S) =$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

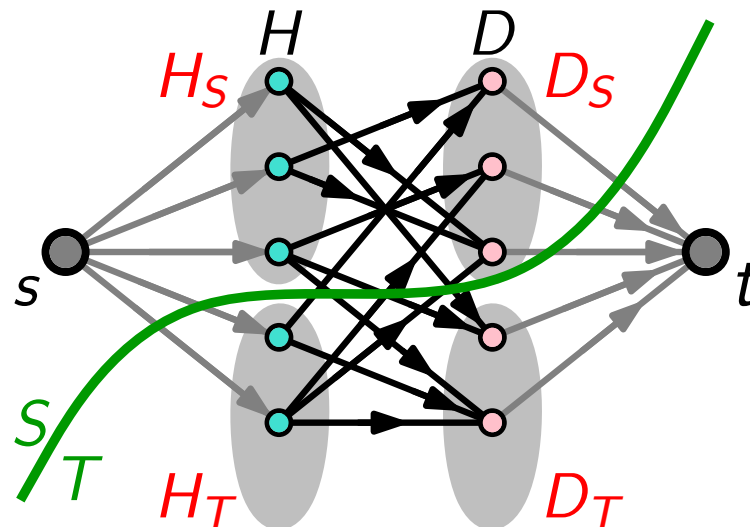
**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$   
 Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) =$



# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

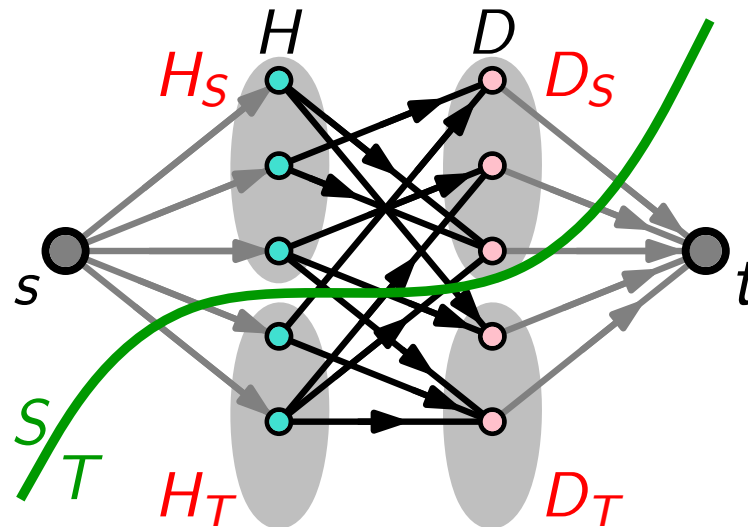
**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e)$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

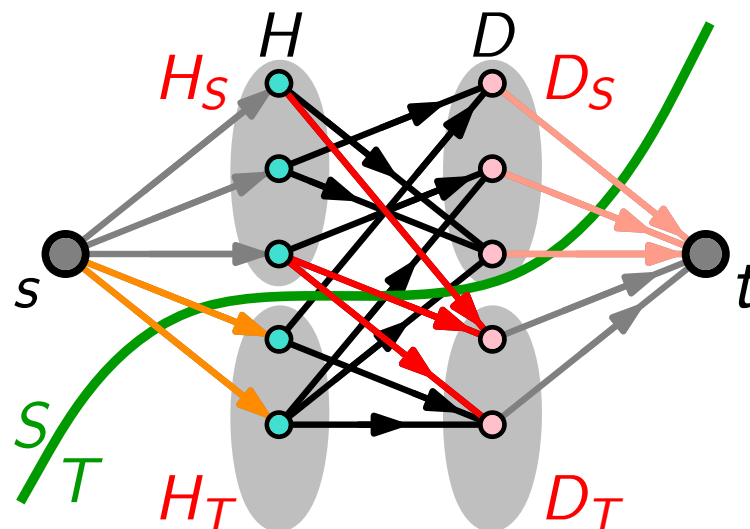
**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

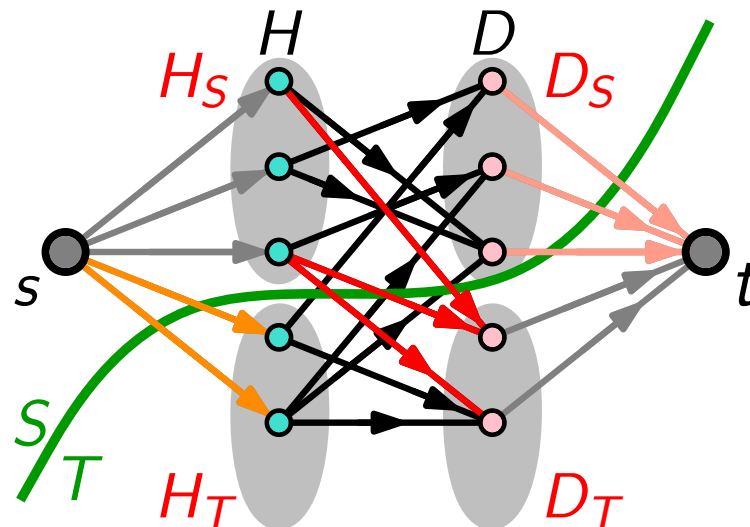
**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } c(S) &= c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)| \\ &\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S| \end{aligned}$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

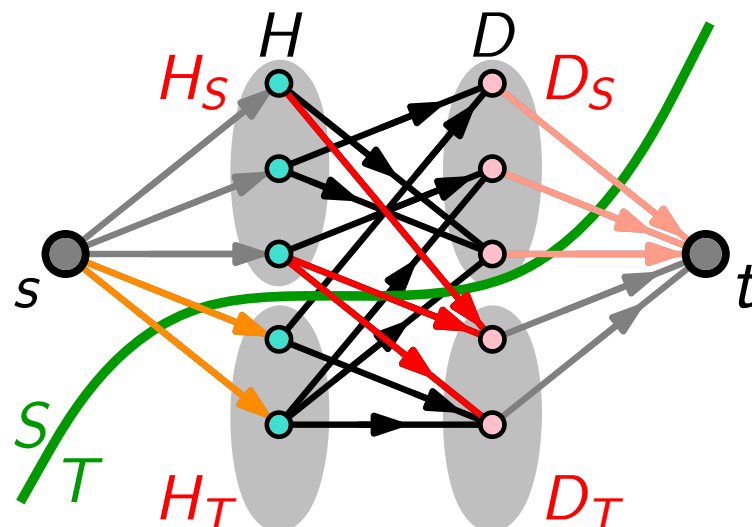
z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

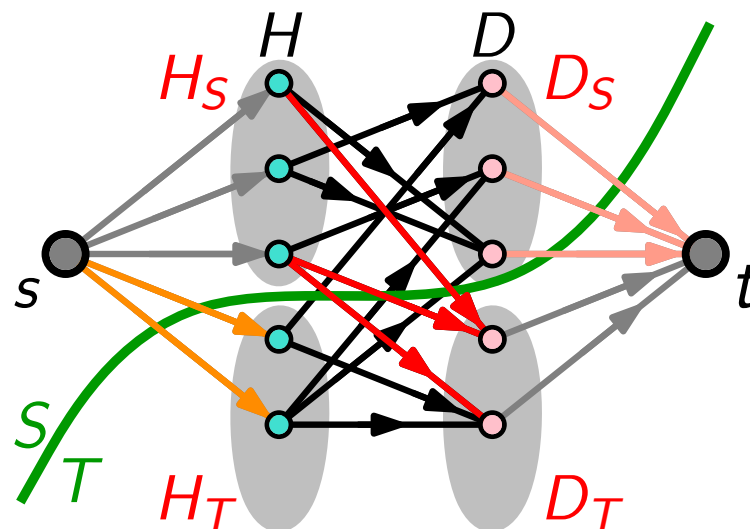
**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\begin{aligned}
 H_T \supseteq N_G(D_T) \cap H_T &\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S| \\
 &\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|
 \end{aligned}$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

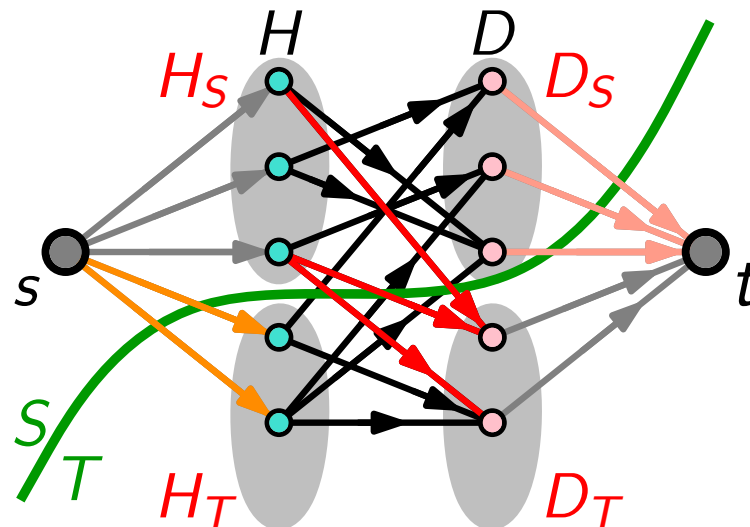
Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S|$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

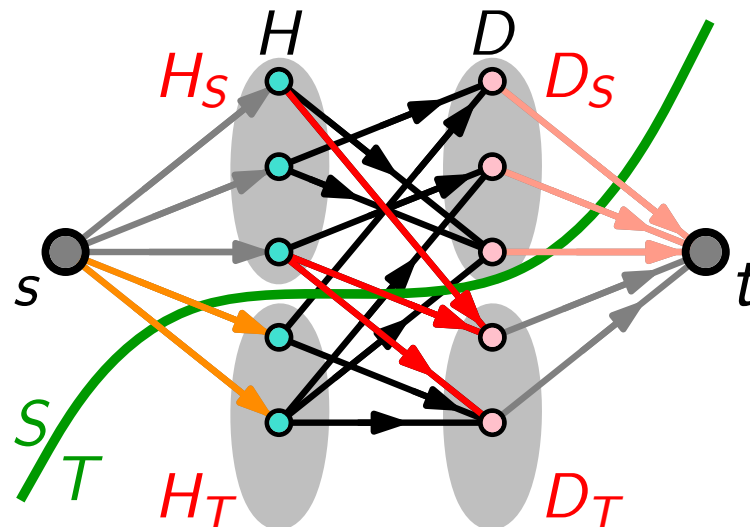
z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\begin{aligned} H = H_T \dot{\cup} H_S &\leftarrow \geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S| \\ &= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| \end{aligned}$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

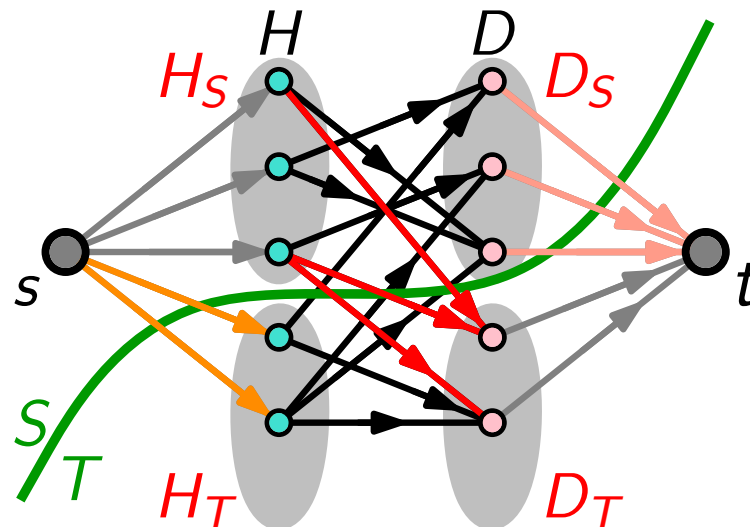
$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$



# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

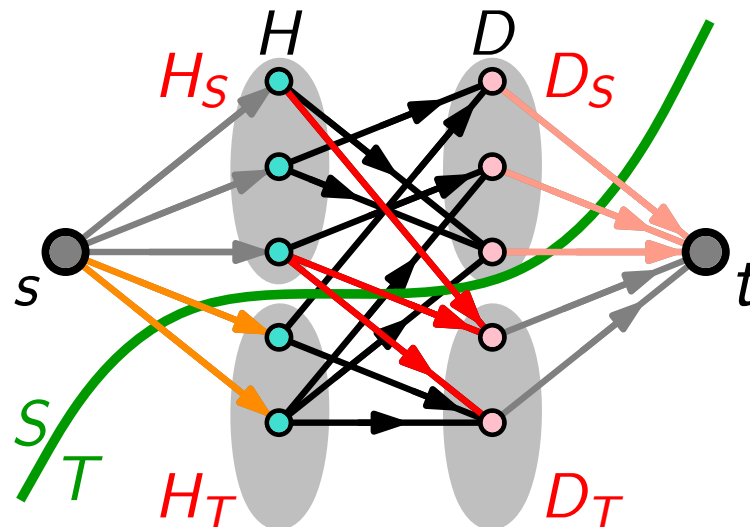
$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$N_G(D_T) \subseteq H$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

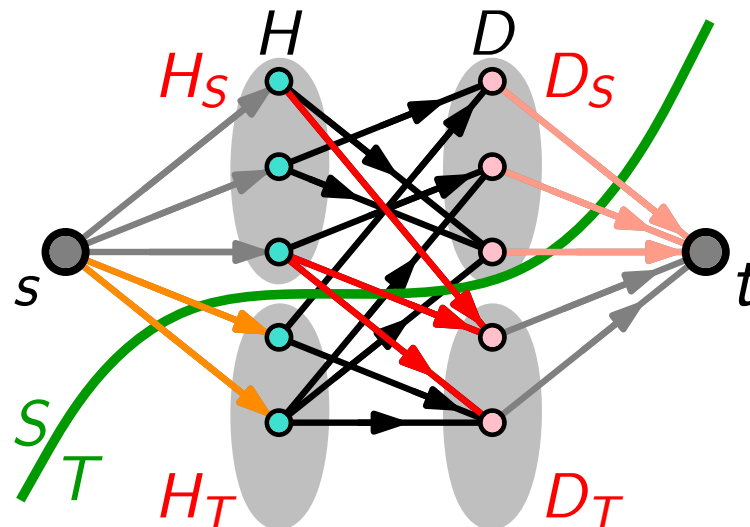
$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$\geq |D_T| + |D_S|$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

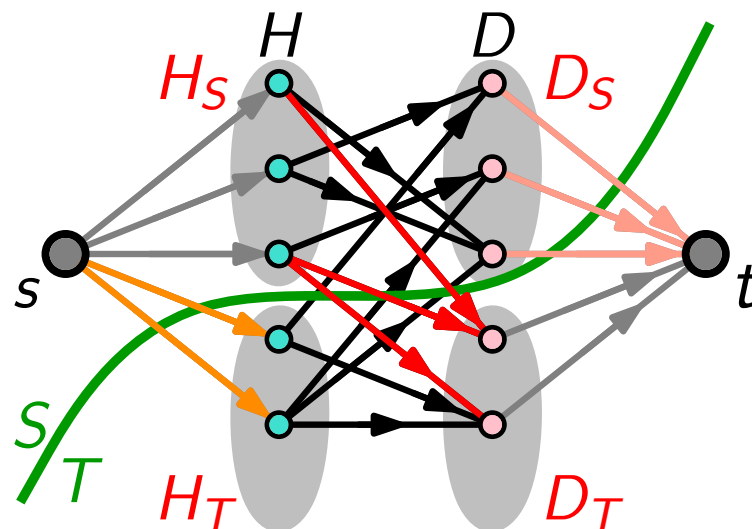
$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$\geq |D_T| + |D_S|$$

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \dot{\cup} H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$\geq |D_T| + |D_S| = |D|$$

□