

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

2. Vorlesung

## Lineares Programmieren

# Gewinnmaximierung

Sie sind Chef einer kleinen Firma, die zwei Produkte  $P_1$  und  $P_2$  herstellt. Produzieren Sie  $x_1$  Einheiten  $P_1$  und  $x_2$  Einheiten  $P_2$ , so beträgt Ihr Gewinn in €

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$

Drei Mitarbeiter  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_C$  produzieren die dafür jeweils notwendigen Einzelteile. Dabei brauchen sie eine bestimmte Zeit pro Teil und haben jeweils eine maximale Arbeitszeit, die die Produktion der Einzelteile einschränkt:

$$M_A: \quad 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$

$$M_B: \quad x_1 + x_2 \leq 150$$

$$M_C: \quad x_2 \leq 60$$

Welche Wahl von  $(x_1, x_2)$  maximiert den Gewinn?

# Lösung

*Lineare Beschränkungen:*

$$M_A: 4x_1 + 11x_2 \leq 880$$

$$M_B: x_1 + x_2 \leq 150$$

$$M_C: x_2 \leq 60$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

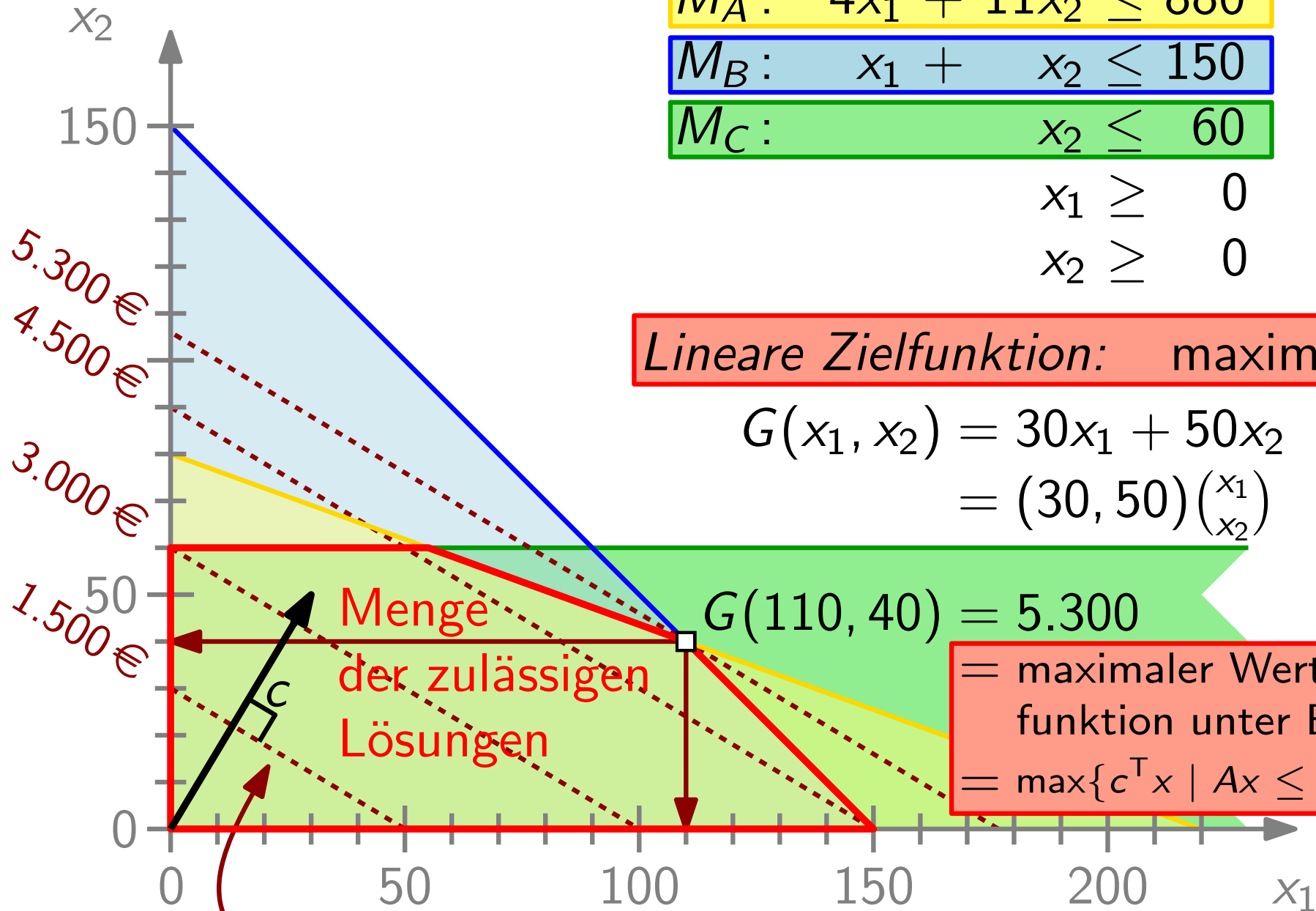
*Lineare Zielfunktion:* maximiere  $c^T x$

$$G(x_1, x_2) = 30x_1 + 50x_2$$

$$= (30, 50) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$G(110, 40) = 5.300$$

= maximaler Wert der Zielfunktion unter Beschränk.  
 =  $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$



„Iso-Gewinn-Line“: orthogonal zu  $\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$

Menge  
der zulässigen  
Lösungen

# Lineares Programmieren I

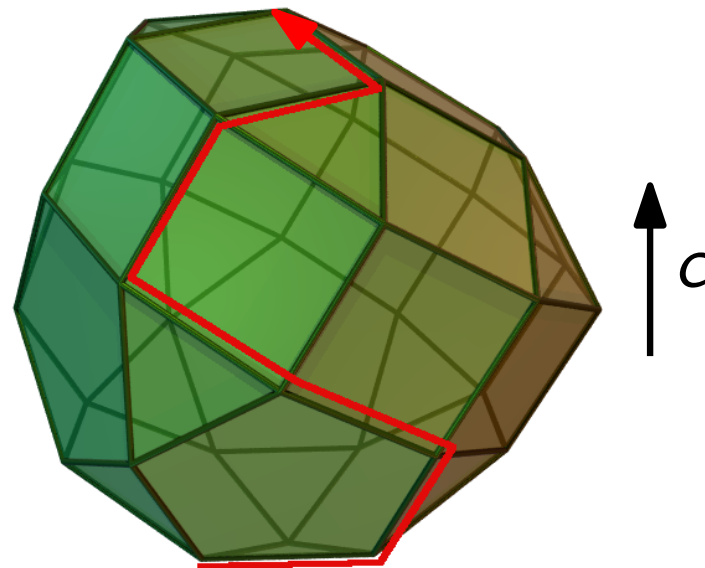
**Gegeben:**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$

**Gesucht:**  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^* = \arg \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

**Satz.** [Dantzig, 1947]



Der Simplex-Algorithmus löst lineare Programme.



**Satz.** [Klee & Minty, 1972]

Es gibt Beispiele, auf denen der Simplex-Algorithmus exponentielle Zeit benötigt.

# Lineares Programmieren II

**Satz.**

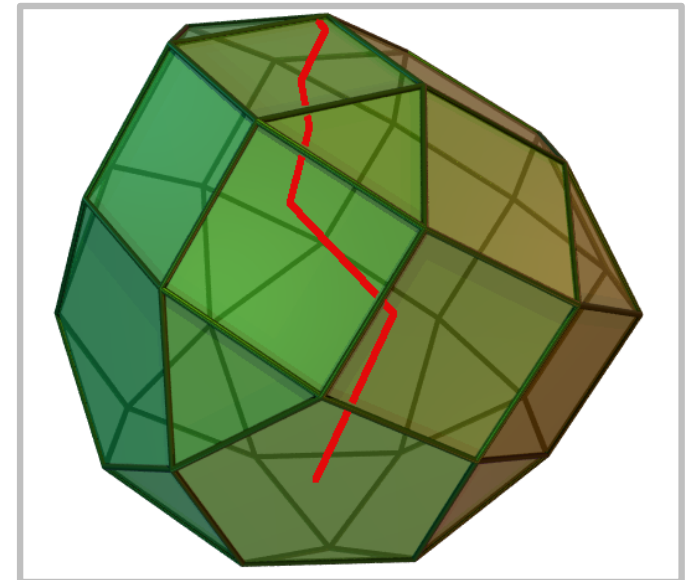
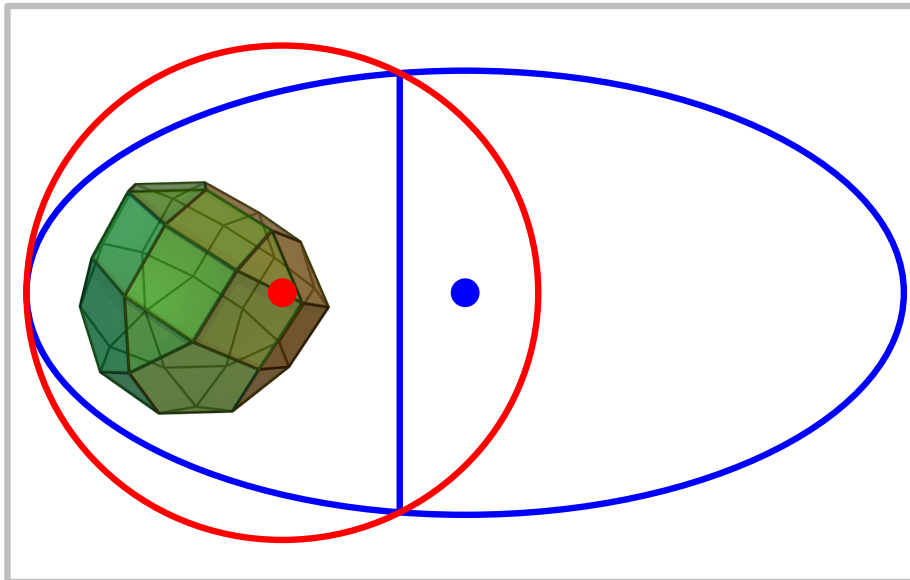
[Khachiyan, 1979]

*Ellipsoidmethode*

Ein Lineares Programm der Dim.  $n$  lässt sich in  $O(L^2 \cdot n^6)$  Zeit lösen, wobei  $L =$  Anz. Bits in der Eingabe.



Leonid Khachiyan  
\*1952 Leningrad  
†2005 South  
Brunswick, NJ



Narendra Karmarkar  
\*1957 Gwalior, Indien

**Satz.**

[Karmakar, 1984]

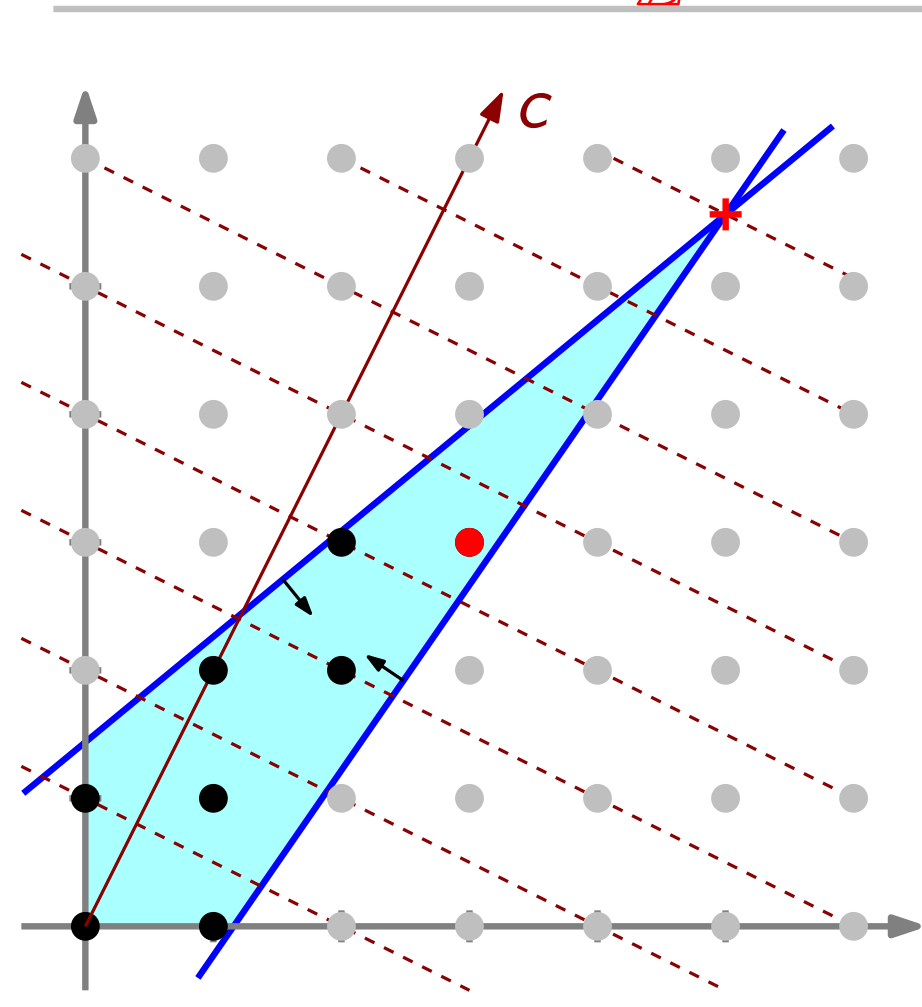
*Innere-Punkt-Methode*

Ein Lineares Programm der Dim.  $n$  lässt sich in  $O(L^2 \cdot n^{3.5})$  Zeit *numerisch stabil* lösen.

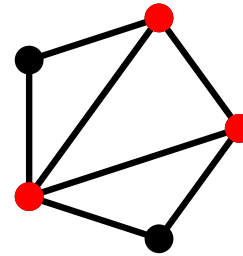
# Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

**Gegeben:**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$

**Gesucht:**  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^* = \arg \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$   
 häufig  $\{0, 1\}^n$  oder  $\arg \min$   $x \in \mathbb{Z}^n$



**Problem.** Geg. Graph  $G = (V, E)$   
 Ges. Knotenüberdeckung,  
 d.h.  $V' \subseteq V$ , so dass  
 jede Kante mind. einen  
 Endpunkt in  $V'$  hat.



Ziel:  $|V'|$  minimal!

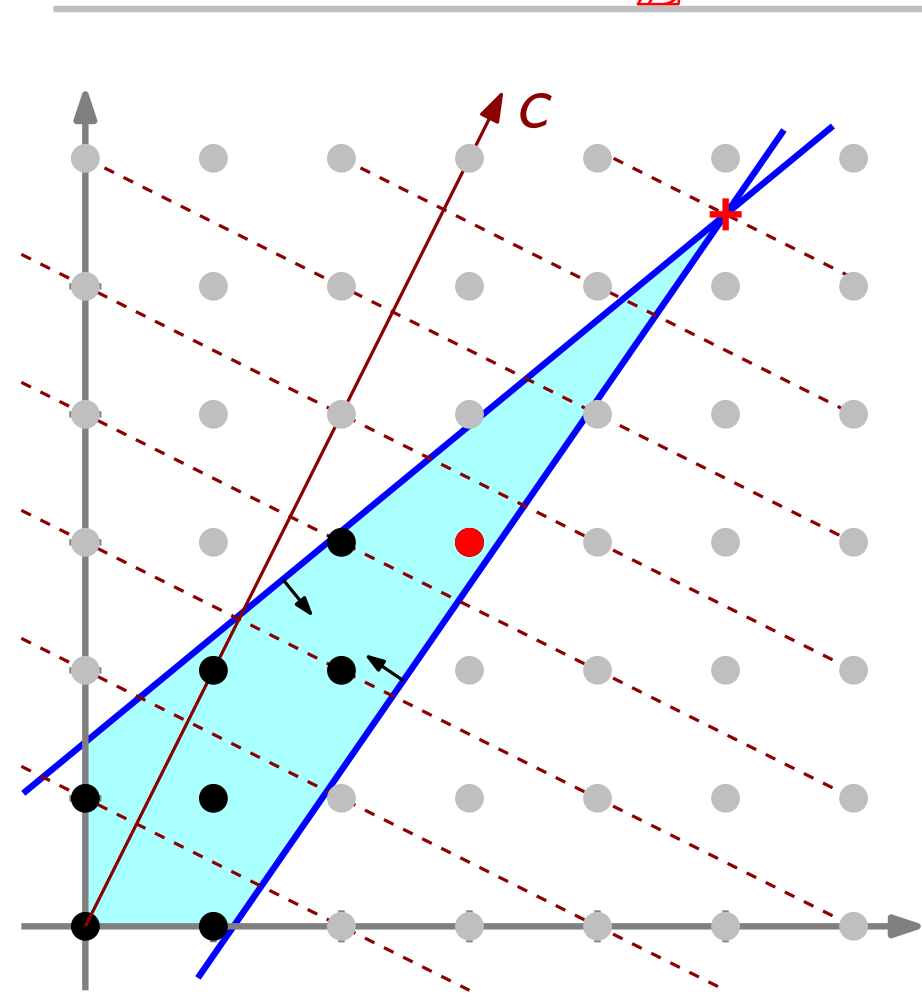
**Aufgabe.** Modellieren Sie dieses  
 Problem als ILP!

**Tipp.** Verwenden Sie für jeden  
 Knoten  $v$  eine Variable  
 $x_v \in \{0, 1\}$ , mit  
 $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$

# Ganzzahlige lineare Programmierung (ILP)

**Gegeben:**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$

**Gesucht:**  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^* = \arg \max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$   
 häufig  $\{0, 1\}^n$  oder  $\arg \min$   $x \in \mathbb{Z}^n$



**Problem.** { Geg. Graph  $G = (V, E)$   
 Ges. Knotenüberdeckung,  
 d.h.  $V' \subseteq V$ , so dass  
 jede Kante mind. einen  
 Endpunkt in  $V'$  hat.  
 Ziel:  $|V'|$  minimal!

NP-  
schwer

**Modell.** { Für  $v \in V$  sei  $x_v \in \{0, 1\}$ .

Ziel: minimiere  $\sum_{v \in V} x_v$

Beschränkungen:

für jede Kante  $uv \in E$   
 fordern wir  $x_u + x_v \geq 1$ .

0-1-ILP



NP-  
schwer

# Bsp. II: ILP-Formulierung für MaxClique

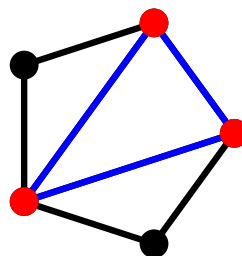
Geg. ungerichteter, ungewichteter Graph  $G = (V, E)$

Ges. Clique in  $G$ ,  $G[V'] := (V', \{u'v' \in E : u' \in V', v' \in V'\})$

d.h.  $V' \subseteq V$ , sodass der von  $V'$  induzierte Graph  $G[V']$  vollständig

m.a.W.  $V' \subseteq V$ , so dass für alle  $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$  gilt  $u'v' \in E$ .

Ziel:  $|V'|$  maximal!



Variable:

Für  $v \in V$  sei  $x_v \in \{0, 1\}$ . (Damit codieren wir die Menge  $V'$ !)

Zielfunktion:

Maximiere  $\sum_{v \in V} x_v$

unter den Nebenbedingungen:

für jede Nicht-Kante  $\{u, v\} \in \binom{V}{2} \setminus E$ :  $x_u + x_v \leq 1$ .

D.h. wenn  $u$  und  $v$  nicht benachbart sind, darf höchstens einer in die Clique.



# Bsp. III: ILP-Formulierung für TSP

**Gegeben:** vollständiger Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und Kantenkosten  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

**Gesucht:** Hamiltonkreis  $K$  in  $G$  mit minimalen Kosten  $c(K)$ .  
d.h. Permutation  $\sigma$  von  $\langle 1, \dots, n \rangle$ , die  
 $c(v_{\sigma(n)}, v_{\sigma(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(i+1)})$  minimiert.

**Problem:** Wie viele solcher Schnitte gibt's?

**Variable:**

Für  $uv \in E$  sei  $x_{uv} \in \{0, 1\}$ .

**Zielfunktion:**

Minimiere  $\sum_{uv \in E} c(u, v) \cdot x_{uv}$

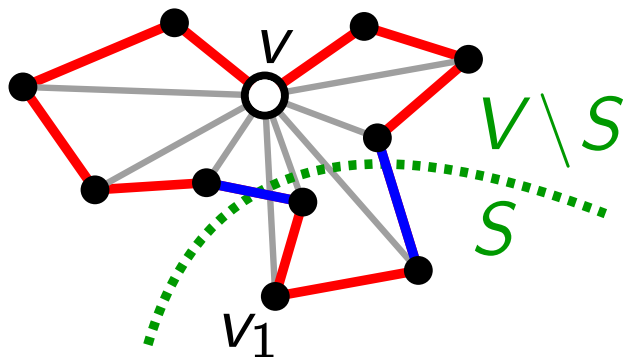
**Nebenbedingungen:**

für jeden Knoten  $v \in V$ :

$$\sum_{u \in \text{Adj}[v]} x_{uv} = 2$$

für jeden Schnitt  $(S, V \setminus S)$  mit  $\begin{cases} v_1 \in S \\ S \neq V \end{cases}$

$$\sum_{u \in S, v \in V \setminus S} x_{uv} \geq 2$$



# Bsp. III: ILP-Formulierung für TSP

- Lösung:**
- Stelle Formulierung nur mit Knotenbedingungen auf.
  - Löse Formulierung  $F$  mit ILP-Solver (Cplex o.ä.)
  - Solange Lösung aus mehreren Kreisen besteht:
    - Für jeden Kreis  $K$ 
      - füge die Schnittbed. für  $(K, V \setminus K)$  zu  $F$  hinzu.
    - Fahre mit der Lösung des ILPs fort („Warmstart“).

**Problem:** Es gibt  $2^{n-1} - 1$  solcher Schnitte!

Variable:

Für  $uv \in E$  sei  $x_{uv} \in \{0, 1\}$ .

Zielfunktion:

Minimiere  $\sum_{uv \in E} c(u, v) \cdot x_{uv}$

Nebenbedingungen:

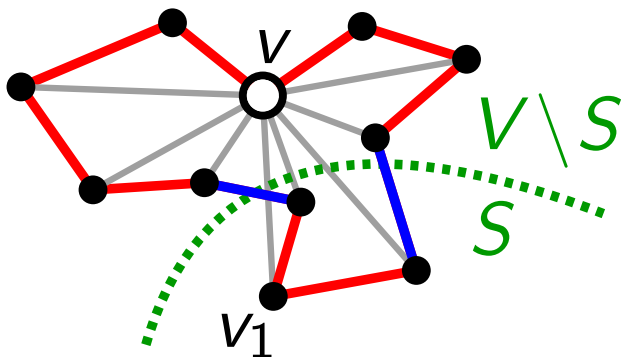
für jeden Knoten  $v \in V$ :

$$\sum_{u \in \text{Adj}[v]} x_{uv} = 2$$

für jeden Schnitt  $(S, V \setminus S)$  mit  $\begin{cases} v_1 \in S \\ S \neq V \end{cases}$

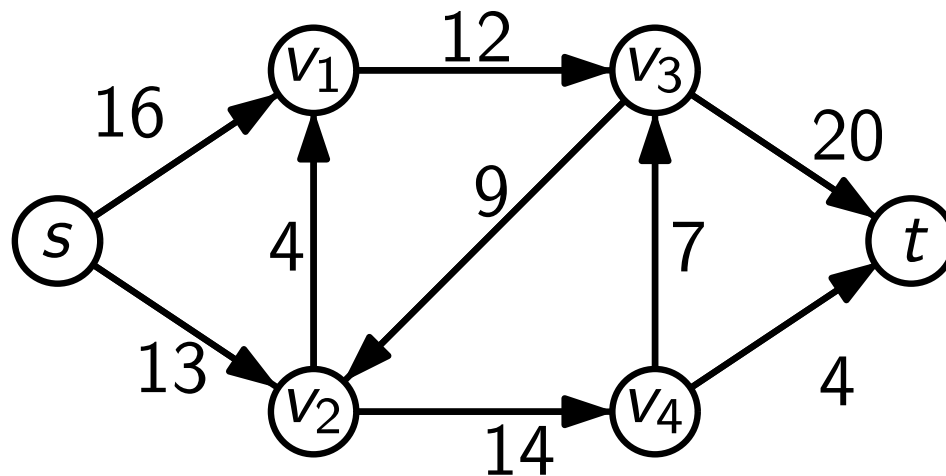
$$\sum_{u \in S, v \in V \setminus S} x_{uv} \geq 2$$

□



## Bsp. IV: Ein Transportproblem

Ihre Firma möchte eine möglichst große Menge einer Ware von ihrem Lager  $s$  zu einem Kunden am Zielort  $t$  transportieren. Aufgrund bestehender Transport-Kapazitäten kann nur eine begrenzte Menge der Ware pro Transportabschnitt (Kante) transportiert werden. Welche Menge pro Tag können Sie zum Großkunden senden?



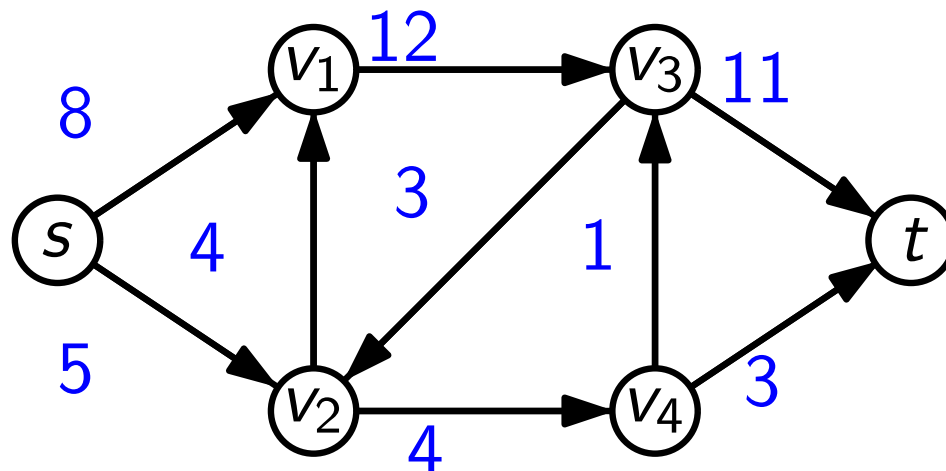
# Modellierung durch Flüsse

**Def.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph mit  $s, t \in V$ .  
 Eine Funktion  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt *s-t-Fluss* („Fluss“),  
 wenn für jeden Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$  gilt

Fluss-erhaltung

$$\underbrace{\sum_{\{u \in V : v \in \text{Adj}[u]\}} f(uv)}_{\text{Zufluss}_f(v)} - \underbrace{\sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw)}_{\text{Abfluss}_f(v)} = 0.$$

Nettozufluss $_f(v)$



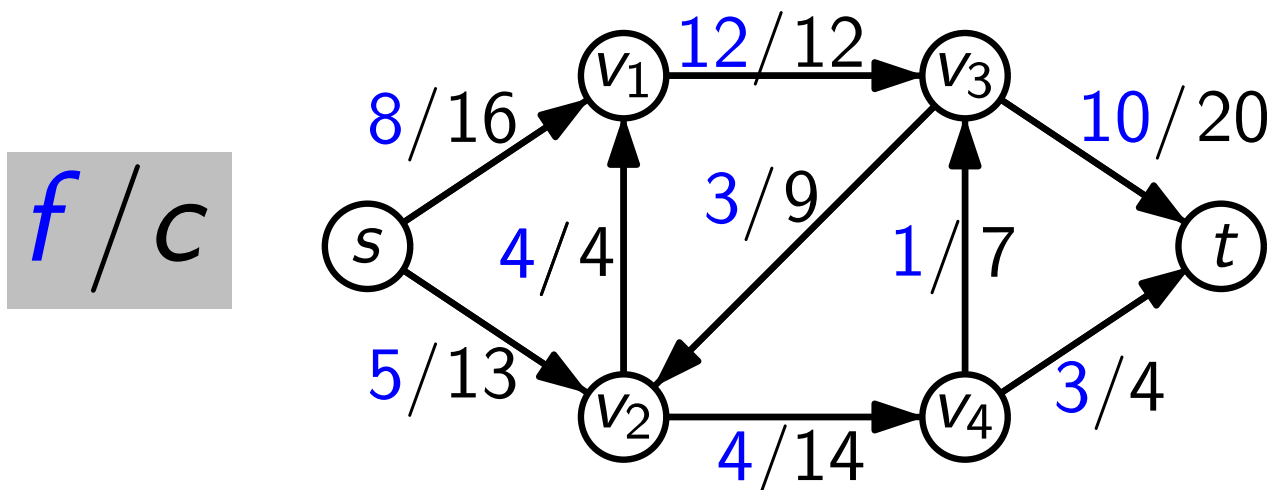
# Zulässige und maximale Flüsse

**Def.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph mit  $s, t \in V$ .  
Seien durch  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  Kantenkapazitäten\* gegeben.  
Ein Fluss  $f$  ist *zulässig*, wenn für jede Kante  $e \in E$  gilt

$$0 \leq f(e) \leq c(e).$$

Der *Wert*  $|f|$  eines zulässigen Flusses  $f$  ist  
Nettozufluss $_f(t)$ .

Ein zulässiger Fluss  $f$  ist *maximal*,  
wenn für jeden zulässigen Fluss  $f'$  gilt  $|f'| \leq |f|$ .



\*) Diese Funktion hat nichts mit dem Zielfunktionsvektor bei den LPs zu tun!

# Aufgabe

*YES, it's an LP!*

Gegeben sei ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $s, t \in V$  und Kantenkapazitäten  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .

Geben Sie eine Methode an, die einen **maximalen  $s$ - $t$ -Fluss  $f$**  konstruiert, also eine Funktion  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , die

– den Fluss erhält, d.h. für jeden Knoten  $v \notin \{s, t\}$  sicherstellt:

$$\text{Nettozufluss}_f(v) = \sum_{\{u \in V: v \in \text{Adj}[u]\}} f(uv) - \sum_{w \in \text{Adj}[v]} f(vw) = 0,$$

– zulässig ist, d.h. für jede Kante  $e$  garantiert:

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

$|V| - 2 + |E|$  lineare Beschränkungen!

– maximal ist, d.h. unter allen zulässigen  $s$ - $t$ -Flüssen

$$|f| = \text{Nettozufluss}_f(t) \text{ maximiert.}$$

lineare Zielfunktion!

# Flussalgorithmen

Kann man maximale Flüsse (= Spezialfall eines LPs) auch mit maßgeschneiderten kombinatorischen Algorithmen berechnen?

**Hoffnung:** Das könnte schneller gehen –  
und strukturelle Einsichten liefern.

*Fortsetzung folgt!*