

Algorithmische Graphentheorie

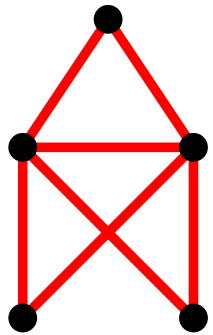
Sommersemester 2023

1. Vorlesung

Rundreiseprobleme: Teil II – Hamiltonkreise

Übersicht

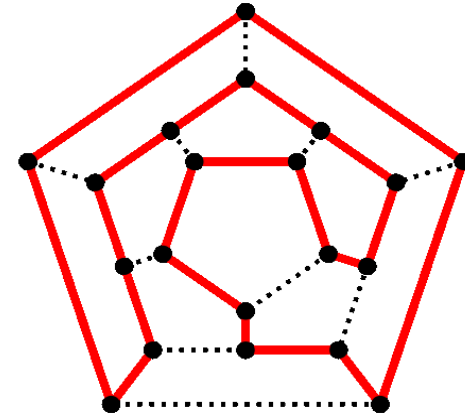
I) Eulerkreise



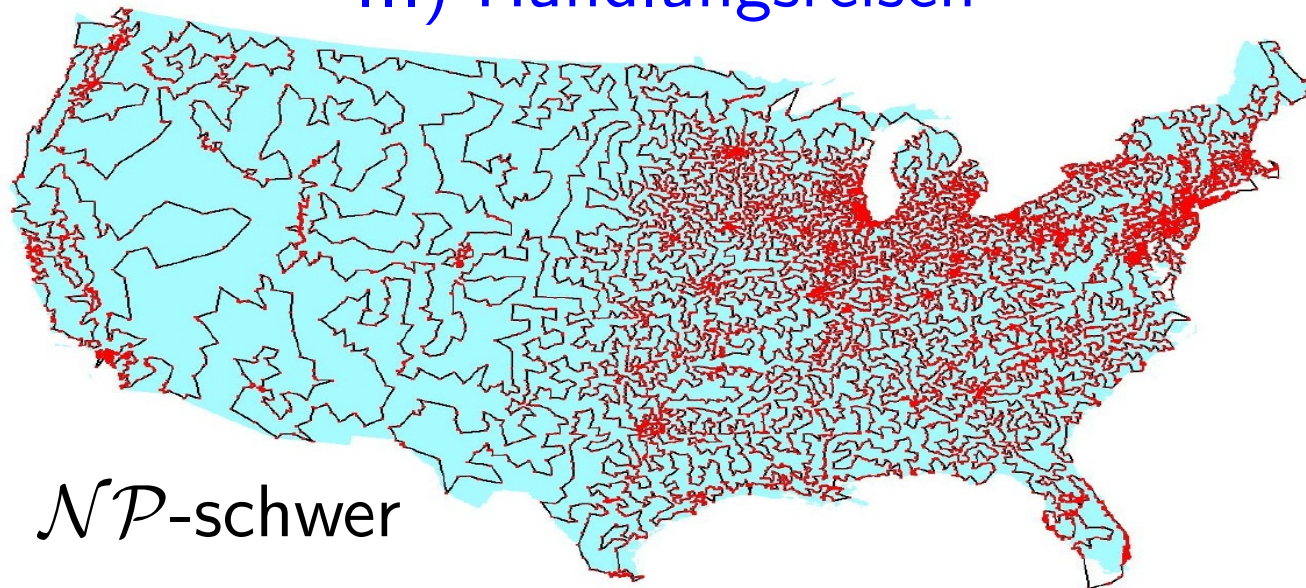
\mathcal{P}

\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise

Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
 Ein *Hamiltonkreis* (-weg) in G ist ein Kreis (Weg),
 der jeden *Knoten* genau einmal durchläuft.
 Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen
 Hamiltonkreis enthält.

Sir William Rowan Hamilton



1805 Dublin – 1865 Dunsink

Icosian Game / Traveller's Dodecahedron

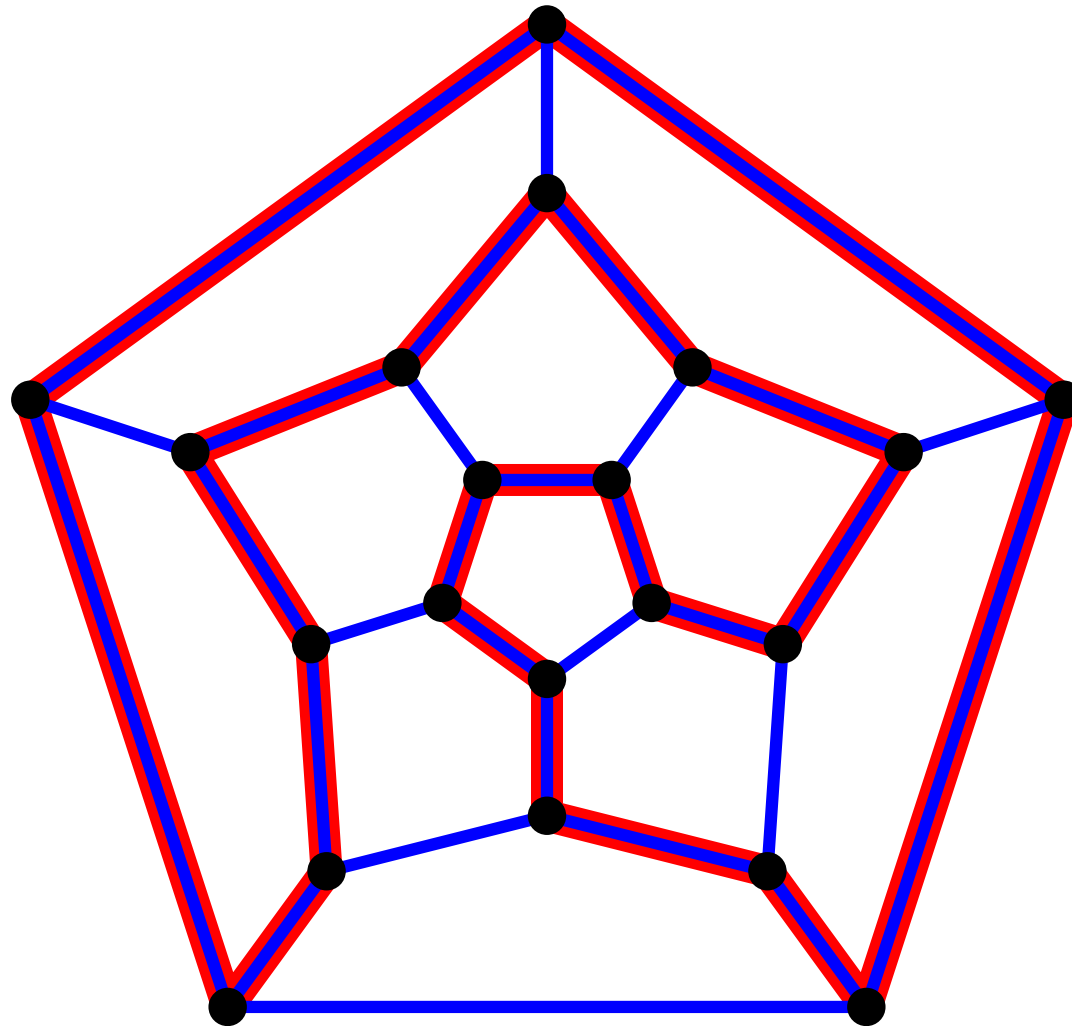


(c) 2002 James Dalgety, The Puzzle Museum

A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

Antwort: Ja!



Die Skelette der vier anderen platonischen Körper auch.

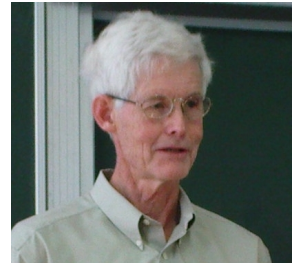
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* **hinreichende Bedingungen** dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
„ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

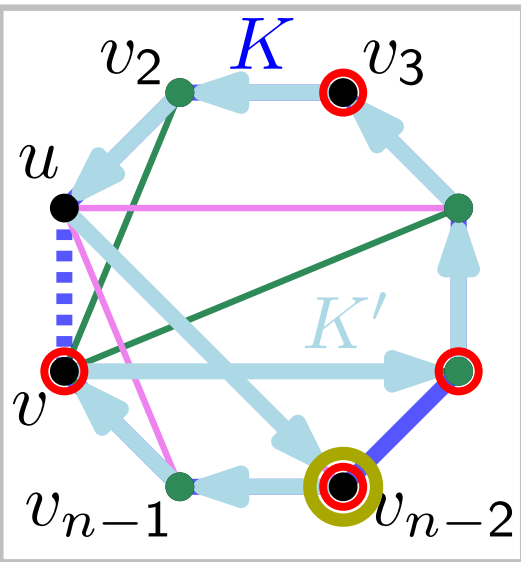
Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$



Satz von Dirac

Satz.

[Chvátal & Bondy]

Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.

Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Kor.

Sei G ein ungerichteter Graph mit $n := |V(G)| \geq 3$.
Falls jeder Knoten von G Grad $\geq n/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Beweis. Probieren Sie's!