

# Algorithmische Graphentheorie

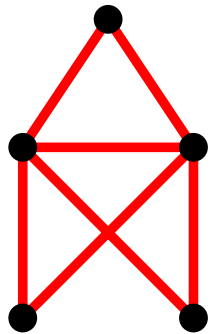
Sommersemester 2023

1. Vorlesung

Rundreiseprobleme: Teil II – Hamiltonkreise

# Übersicht

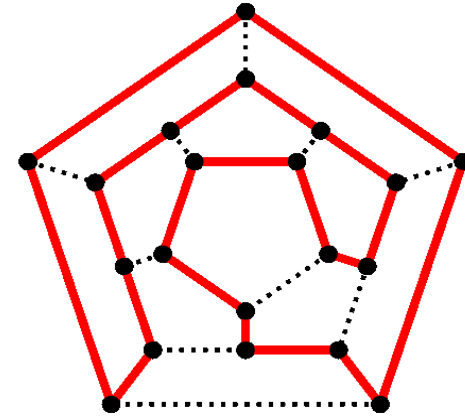
## I) Eulerkreise



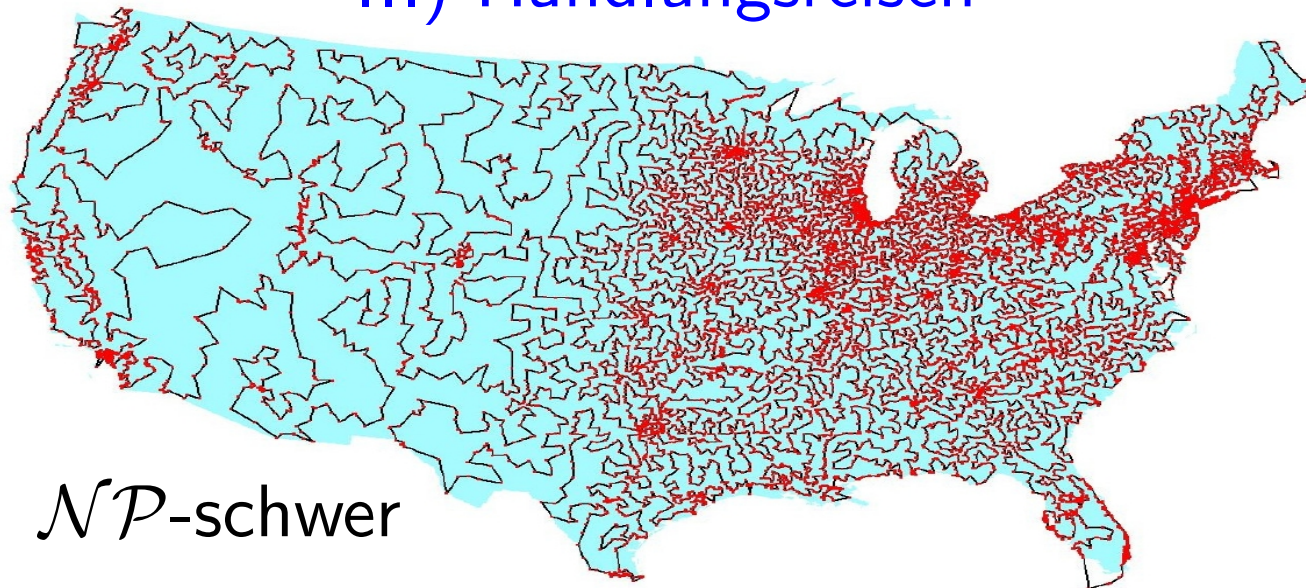
$\mathcal{P}$

$\mathcal{NP}$ -schwer

## II) Hamiltonkreise



## III) Handlungsreisen



$\mathcal{NP}$ -schwer

## II) Hamiltonkreise

**Def.** Sei  $G$  ein (un-)gerichteter Graph.  
 Ein *Hamiltonkreis* (-weg) in  $G$  ist ein Kreis (Weg),  
 der jeden *Knoten* genau einmal durchläuft.  
 Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen  
 Hamiltonkreis enthält.

Sir William Rowan Hamilton



1805 Dublin – 1865 Dunsink

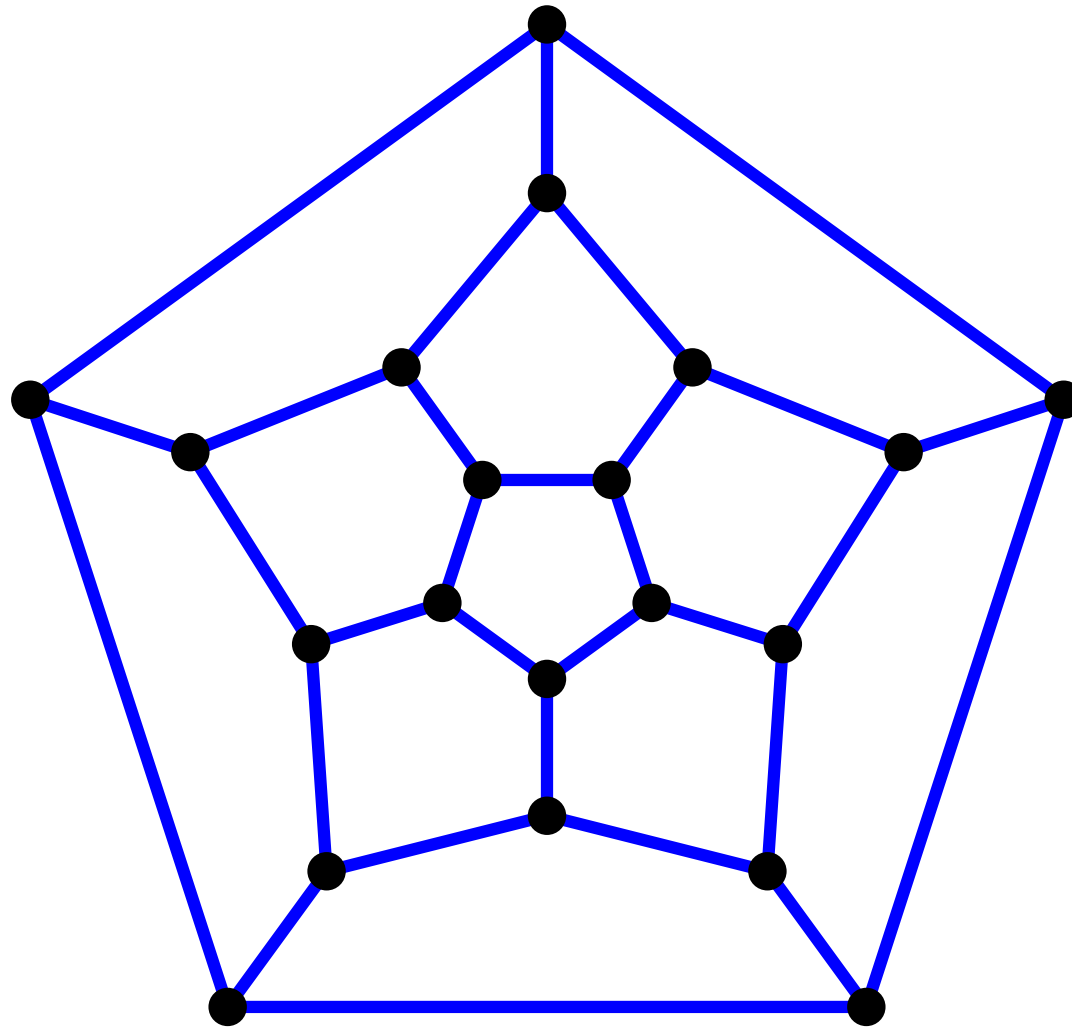
Icosian Game / Traveller's Dodecahedron



(c) 2002 James Dalgety, The Puzzle Museum

# A Voyage Round the World

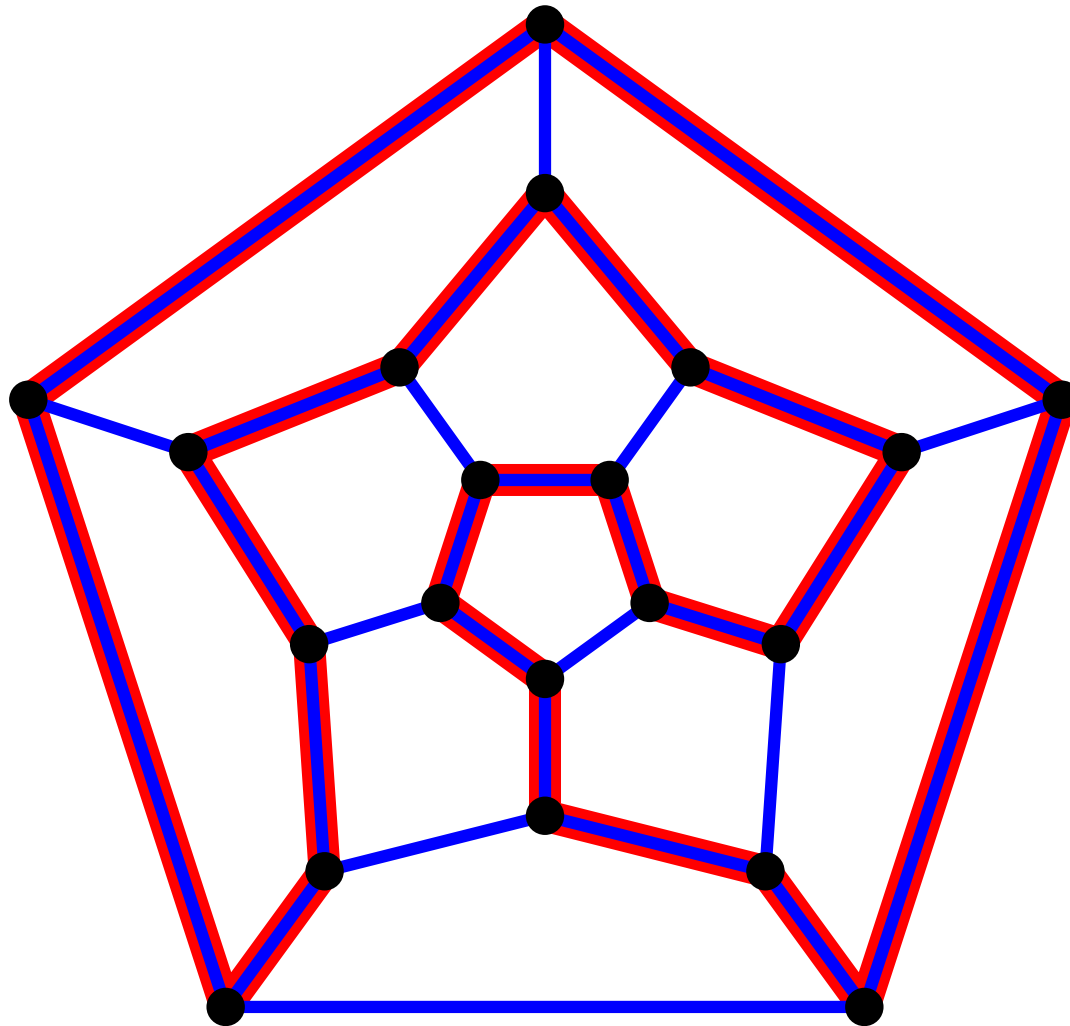
**Frage:** Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?



# A Voyage Round the World

**Frage:** Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

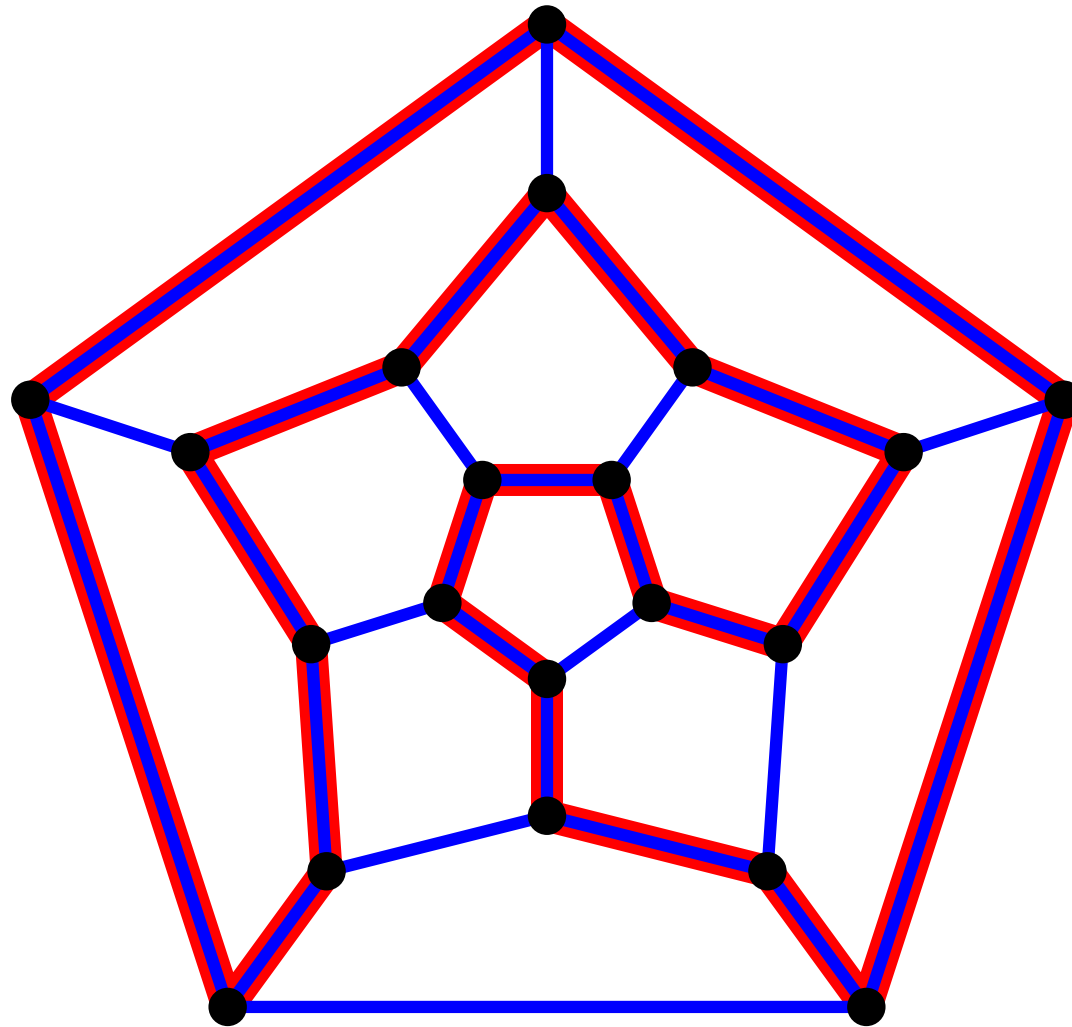
**Antwort:** Ja!



# A Voyage Round the World

**Frage:** Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

**Antwort:** Ja!



Die Skelette der vier anderen platonischen Körper auch.

# Bad News

**Satz.** [Karp, 1972]



# Bad News

**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.



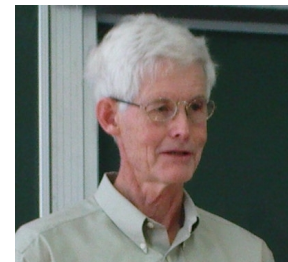


# Bad News

**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



# Bad News

**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

$SAT \preceq_p CLIQUE \preceq_p VC \preceq_p gerHK \preceq_p HK$



# Bad News

**Satz.** [Karp, 1972]

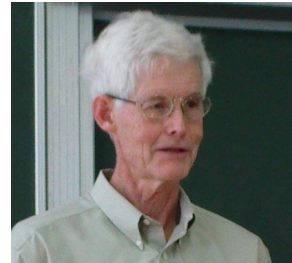
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.



*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT  $\stackrel{\circ}{\leq}_p$  CLIQUE  $\leq_p$  VC  $\leq_p$  gerHK  $\leq_p$  HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“



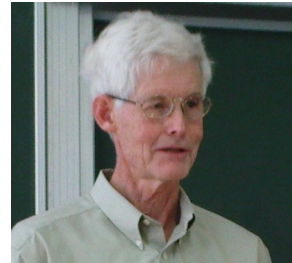
# Bad News



**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT  $\stackrel{\circ}{\leq}_p$  CLIQUE  $\leq_p$  VC  $\leq_p$  gerHK  $\leq_p$  HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

*Was nun?*

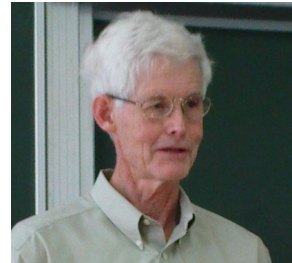
# Bad News



**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT  $\stackrel{\circ}{\leq}_p$  CLIQUE  $\leq_p$  VC  $\leq_p$  gerHK  $\leq_p$  HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

*Was nun?*

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.

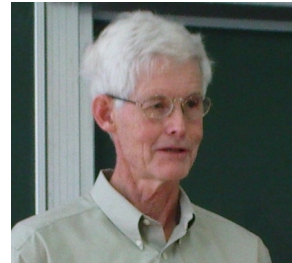
# Bad News



**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT  $\stackrel{\text{p}}{\leq}$  CLIQUE  $\preceq_p$  VC  $\preceq_p$  gerHK  $\preceq_p$  HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

*Was nun?*

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.

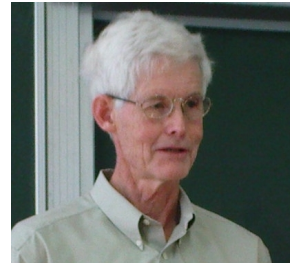
# Bad News



**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT  $\stackrel{\circ}{\leq}_p$  CLIQUE  $\leq_p$  VC  $\leq_p$  gerHK  $\leq_p$  HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

*Was nun?*

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* hinreichende *Bedingungen* dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

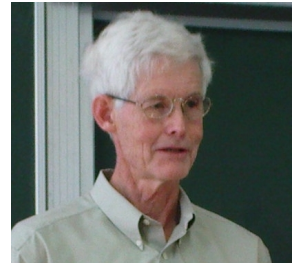
# Bad News



**Satz.** [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

*Beweis.* SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT  $\stackrel{\circ}{\leq}_p$  CLIQUE  $\leq_p$  VC  $\leq_p$  gerHK  $\leq_p$  HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

*Was nun?*

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* **hinreichende Bedingungen** dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

## Satz.

Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
 Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

*Beweis.*

# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
 Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .

# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

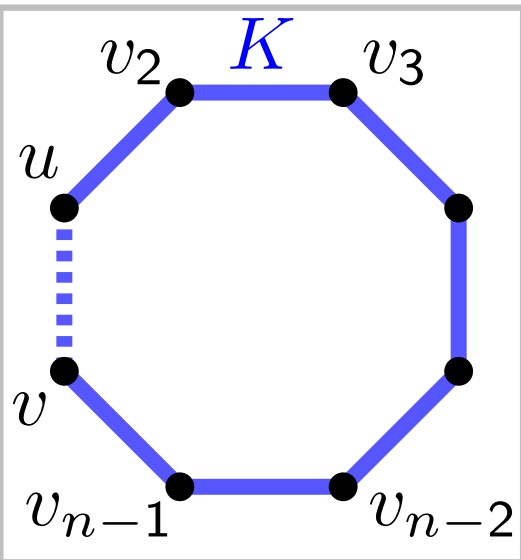
# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.



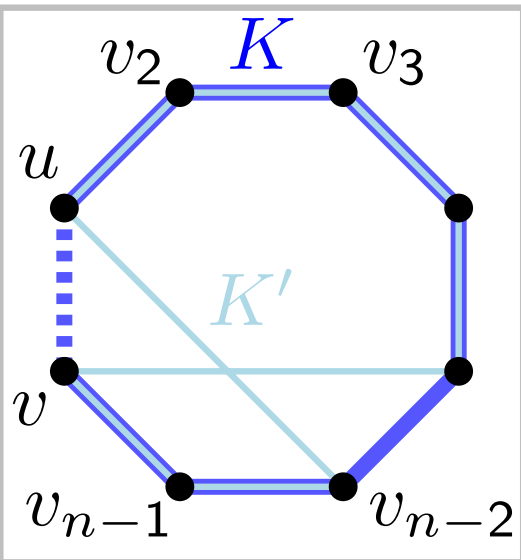
# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.  
z.z. es existiert HK  $K'$  ohne Kante  $uv$ .





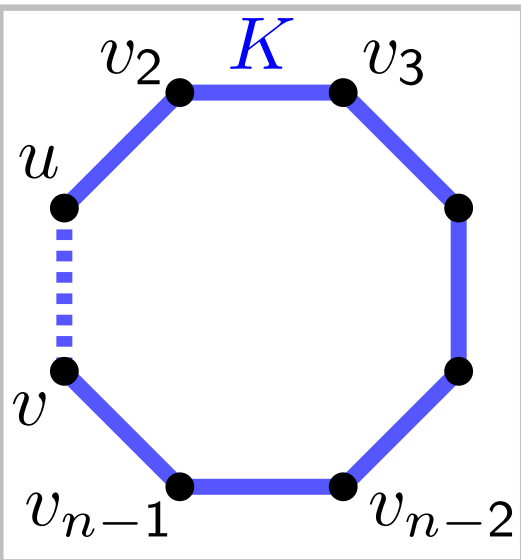
# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.



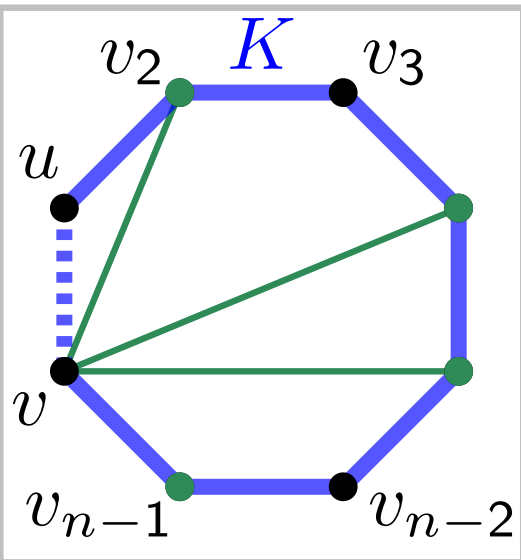
# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.  
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

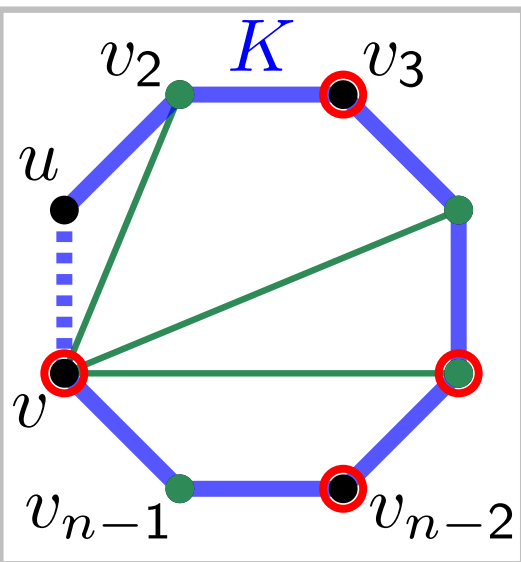
**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

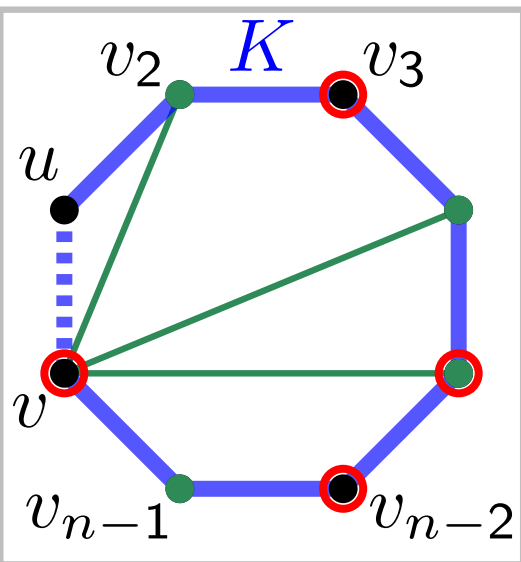
**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) =$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

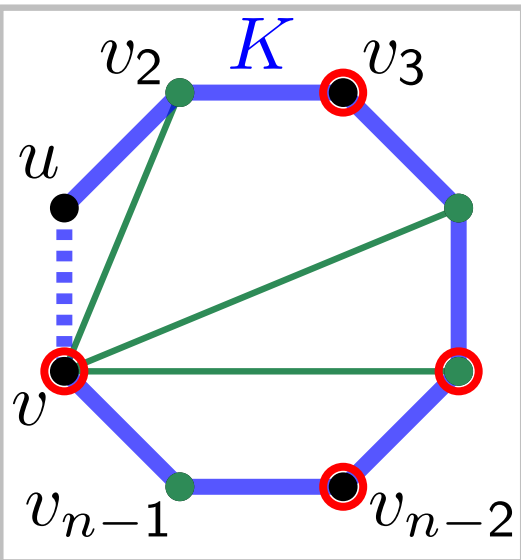
**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| =$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

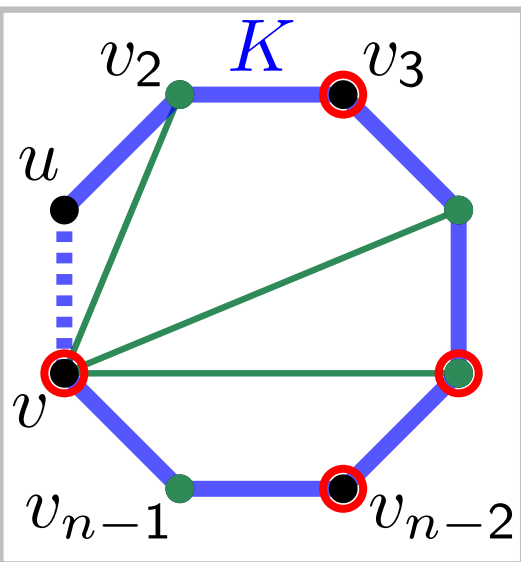
**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

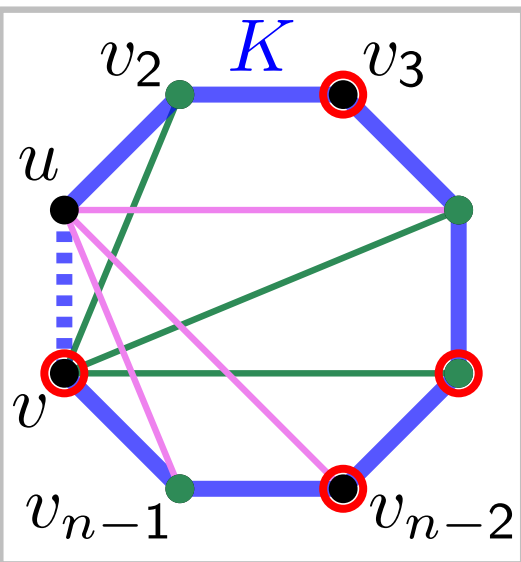
Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

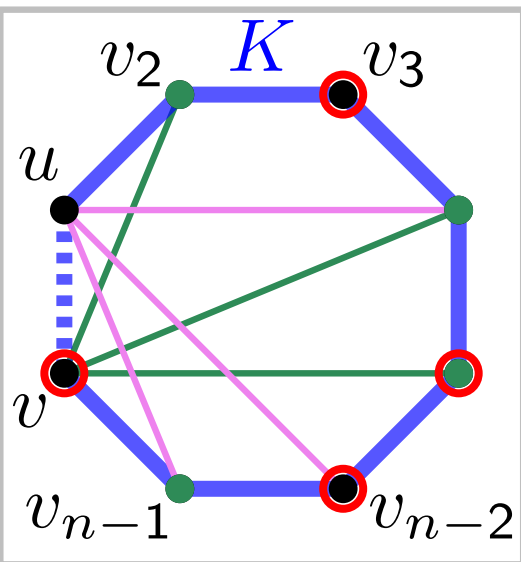
$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v)$





# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

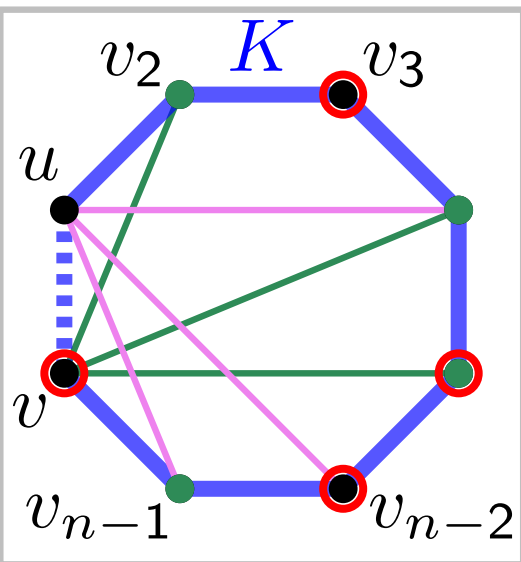
$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

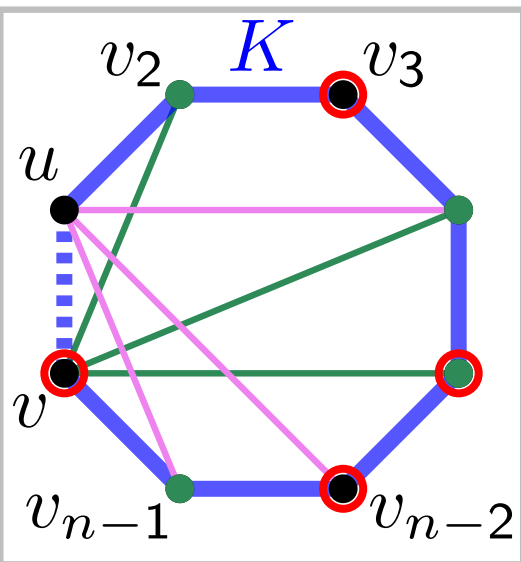
$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

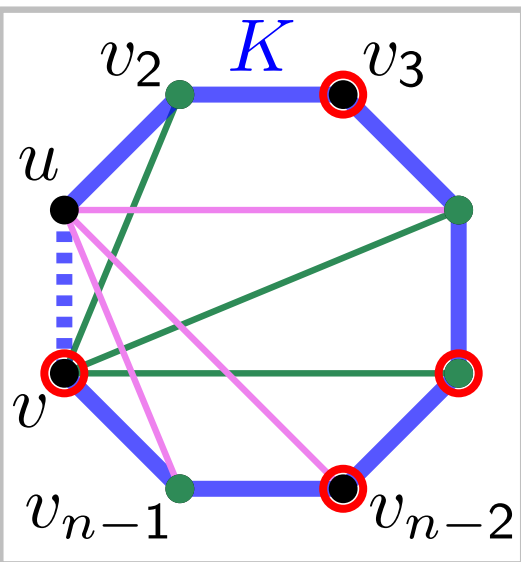
$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .

Aber  $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$ .



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

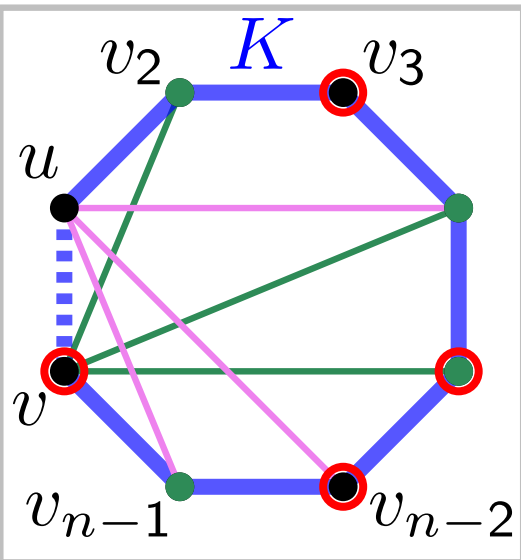
Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .

Aber  $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$ .

Es gilt immer  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

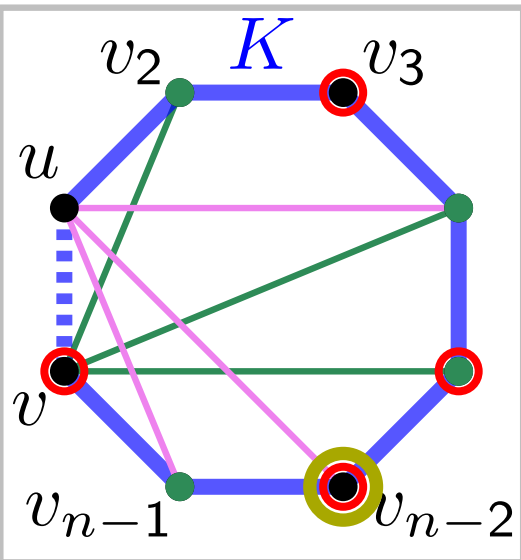
Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .

Aber  $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$ .

Es gilt immer  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

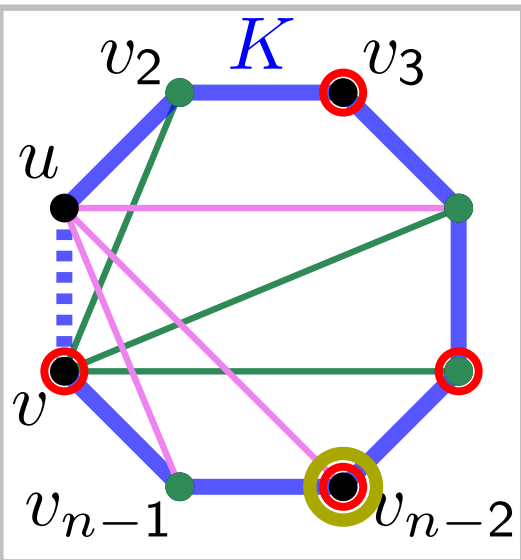
Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .

Aber  $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$ .

Es gilt immer  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

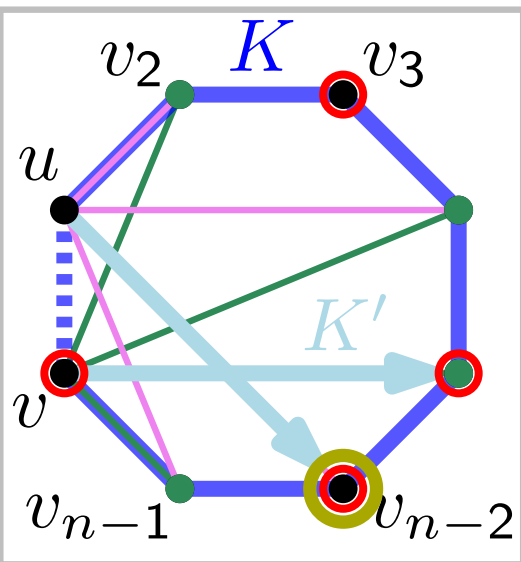
Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .

Aber  $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$ .

Es gilt immer  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$



# Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

**Satz.** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .  
Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  
 $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$ . Dann gilt:  
 $G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ Jeder HK in  $G$  ist auch ein HK in  $G + uv$ .  
„ $\Leftarrow$ “ Annahme: Jeder HK in  $G + uv$  benutzt die Kante  $uv$ .

Sei  $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$  ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $v$ .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$  sind deren Nachfolger.

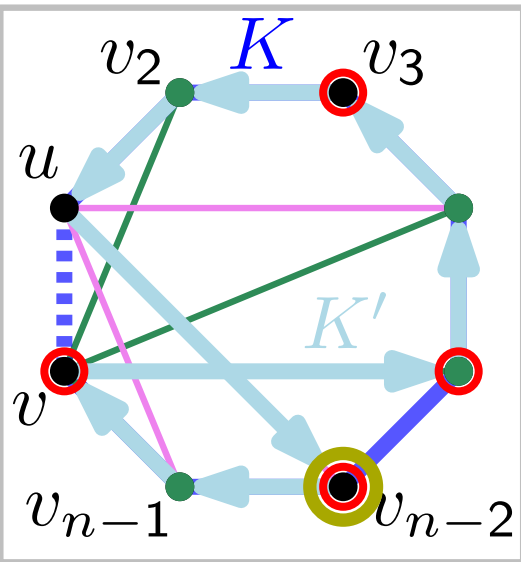
Es gilt  $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$ .

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$  sind die Nachbarn von  $u$ .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$ .

Aber  $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$ .

Es gilt immer  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$





# Satz von Dirac

## Satz.

[Chvátal & Bondy]

Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .

Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$ . Dann gilt:

$G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

# Satz von Dirac

**Satz.**

[Chvátal & Bondy]

Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .

Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$ . Dann gilt:

$G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Kor.**

Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $n := |V(G)| \geq 3$ .  
Falls jeder Knoten von  $G$  Grad  $\geq n/2$  hat, so ist  $G$  hamiltonsch.

# Satz von Dirac

**Satz.**

[Chvátal & Bondy]

Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $|V(G)| \geq 3$ .

Seien  $u$  und  $v$  nicht-adjazente Knoten von  $G$  mit  $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$ . Dann gilt:

$G$  hamiltonsch  $\Leftrightarrow G + uv$  hamiltonsch.

**Kor.**

Sei  $G$  ein ungerichteter Graph mit  $n := |V(G)| \geq 3$ .  
Falls jeder Knoten von  $G$  Grad  $\geq n/2$  hat, so ist  $G$  hamiltonsch.

*Beweis.* Probieren Sie's!