Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2023

1. Vorlesung

Graphen: Eine Einführung

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung:

- Folien und Videos auf WueCampus
- Mittwochs, 10:15–11:45, Vorlesung im HS 2
  Fragen: mündlich in der VL oder schriftlich im UniWü-Chat.
- Dozent: Prof. Alexander Wolff
  (Büro M4.01.001, Sprechstunde: Mi, 13:30–14:30)

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung:

– Folien und Videos auf WueCampus
– Mittwochs, 10:15–11:45, Vorlesung im HS 2
  Fragen: mündlich in der VL oder schriftlich im UniWü-Chat.
– Dozent: Prof. Alexander Wolff
  (Büro M4.01.001, Sprechstunde: Mi, 13:30–14:30)

Alle Links dazu auf WueCampus!

Termine & das Kleingedruckte

Vorlesung:

– Folien und Videos auf WueCampus
– Mittwochs, 10:15–11:45, Vorlesung im HS 2
  Fragen: mündlich in der VL oder schriftlich im UniWü-Chat.
– Dozent: Prof. Alexander Wolff
  (Büro M4.01.001, Sprechstunde: Mi, 13:30–14:30)

Alle Links dazu auf WueCampus!

Übungen:

– Organisation: Felix Klesen
  (Büro M4.01.002, dort oder per Email erreichbar)
– TutorInnen:
  Martin Hesse, Jan Krause, Thanh Mai Pham
– Freitags, 8:30 (SE I), 10:15 (SE 8 – Physikgeb.), 12:15 (SE I)
– Erstmals schon diese Woche, **21.4.!**

Termine & das Kleingedruckte

Übungsaufgaben:

– Bearbeitung in Gruppen von max. je zwei TeilnehmerInnen
– Ausgabe: dienstags via WueCampus
– Abgabe: dienstags, 12:00 Uhr, auf WueCampus (nur pdf)
Lösungen bitte mit LaTeX schreiben!
– Klausurbonus: eine Notenstufe (0,3) bei einer bestanden Klausur,
wenn 50 % der Übungsblattpunkte erreicht werden.

Termine & das Kleingedruckte

Übungsaufgaben:

– Bearbeitung in Gruppen von max. je zwei TeilnehmerInnen
– Ausgabe: dienstags via WueCampus
– Abgabe: dienstags, 12:00 Uhr, auf WueCampus (nur pdf)
Lösungen bitte mit LaTeX schreiben!
– Klausurbonus: eine Notenstufe (0,3) bei einer bestanden Klausur, wenn 50 % der Übungsblattpunkte erreicht werden.

– Manche Übungsaufgaben müssen mit OPL bearbeitet werden.
– Dafür gibt es am Fr, 28.4., eine Einführung im CIP-Raum E40 (Gebäude Z8 über dem Rechenzentrum), wo OPL installiert ist.

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort* **bei WueStudy und WueCampus an**

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort* bei WueStudy und WueCampus an

- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig für die persönliche Besprechung Ihrer Kleingruppe mit dem Übungsleiter.)

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort* bei WueStudy und WueCampus an

- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig für die persönliche Besprechung Ihrer Kleingruppe mit dem Übungsleiter.)
- WueCampus für Kommunikation, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
  (Zum Einschreiben klicken Sie oben unter dem Kursnamen auf "Mich in diesem Kurs einschreiben".)

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort* bei WueStudy und WueCampus an

- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig für die persönliche Besprechung Ihrer Kleingruppe mit dem Übungsleiter.)
- WueCampus für Kommunikation, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
  (Zum Einschreiben klicken Sie oben unter dem Kursnamen auf "Mich in diesem Kurs einschreiben".)

Klausuren:

– 1. Termin: Mitte Juli [Anmeldung 16.04.–15.07.]
– 2. Termin: Anfang Oktober [Anmeldung 01.09.–30.09.]

2x Anmelden!

Bitte melden Sie sich *sofort* bei WueStudy und WueCampus an

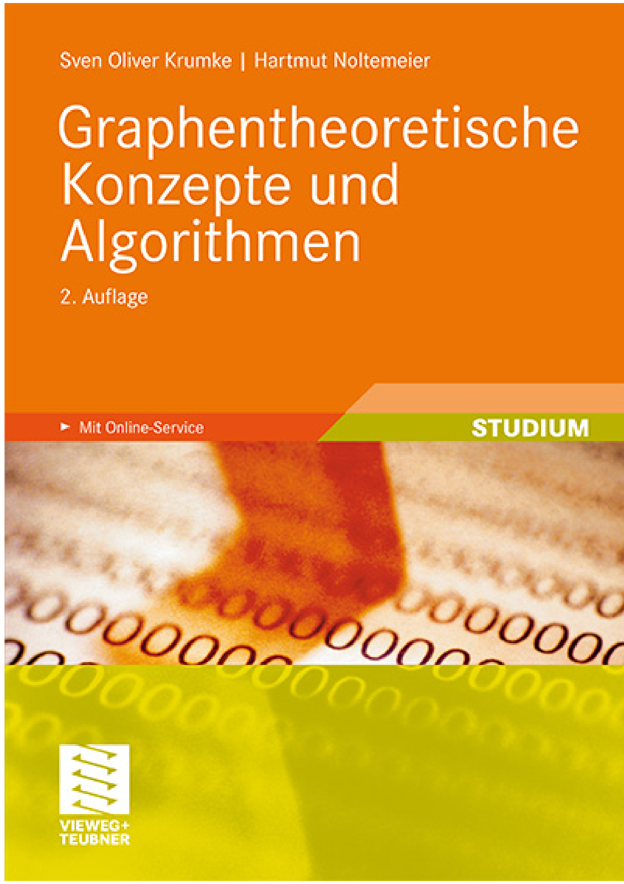
- Übungseinteilung erfolgt über WueStudy
  (Die Übungszeiten sind wichtig für die persönliche Besprechung Ihrer Kleingruppe mit dem Übungsleiter.)
- WueCampus für Kommunikation, z.B. falls eine Übungsaufgabe fehlerhaft oder missverständlich ist.
  (Zum Einschreiben klicken Sie oben unter dem Kursnamen auf "Mich in diesem Kurs einschreiben".)

Klausuren:

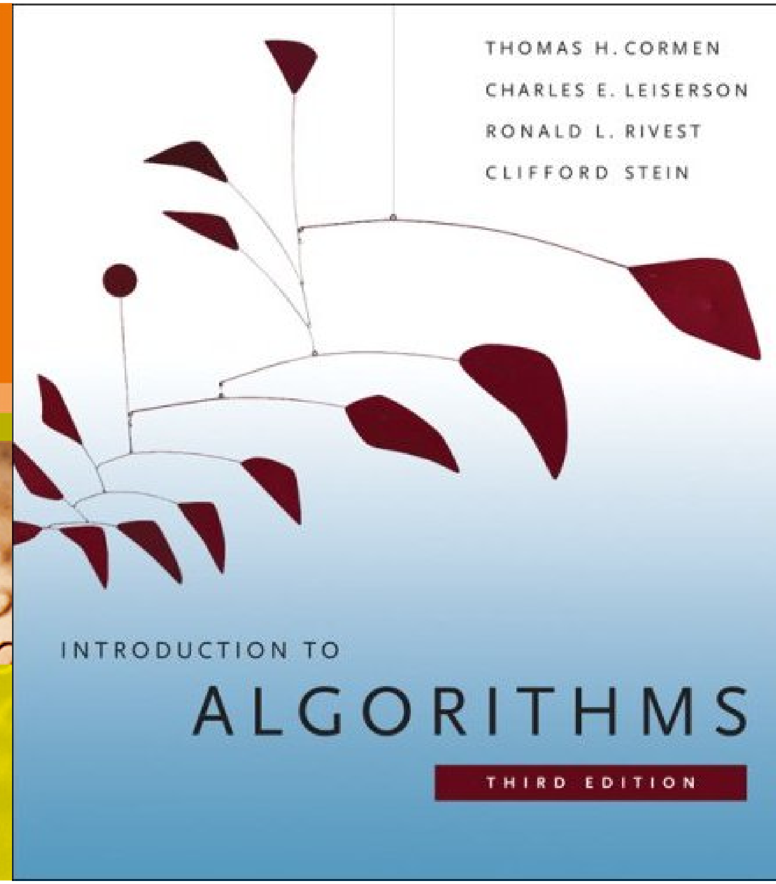
– 1. Termin: Mitte Juli [Anmeldung 16.04.–15.07.]
– 2. Termin: Anfang Oktober [Anmeldung 01.09.–30.09.]

- Wenn Sie sich nicht fristgerecht bei WueStudy anmelden, ist es für uns **unmöglich**, Ihre Note zu verbuchen.

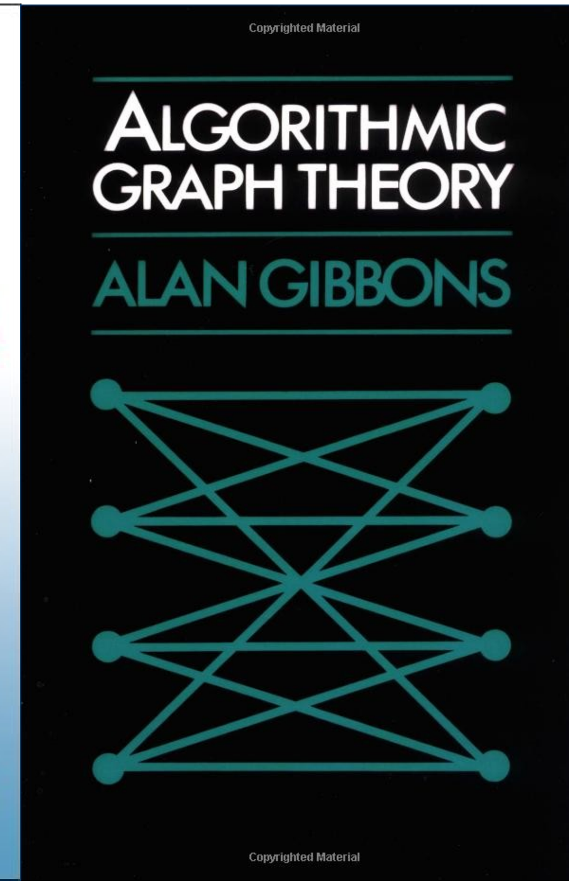
Bücher zur Vorlesung



[KN]

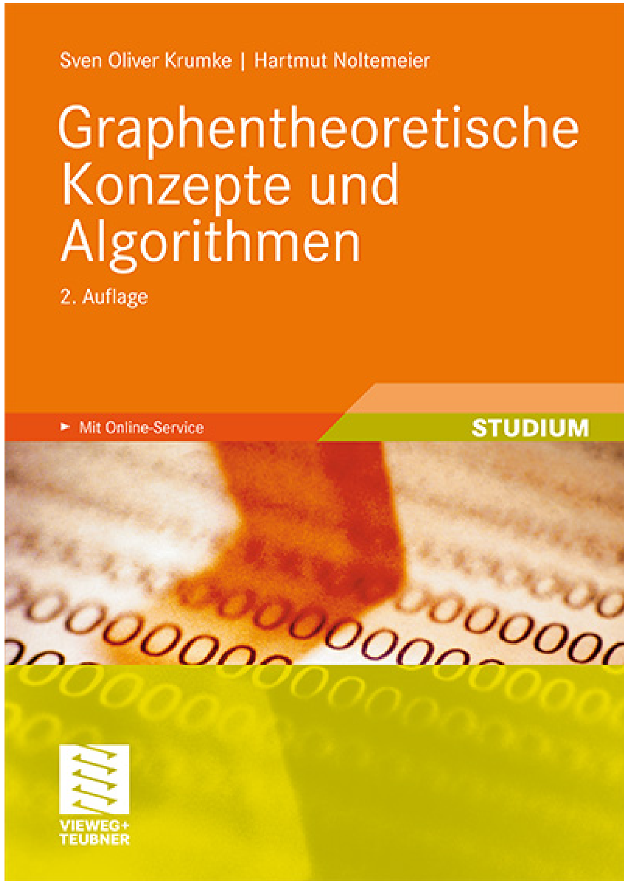


[CLRS]

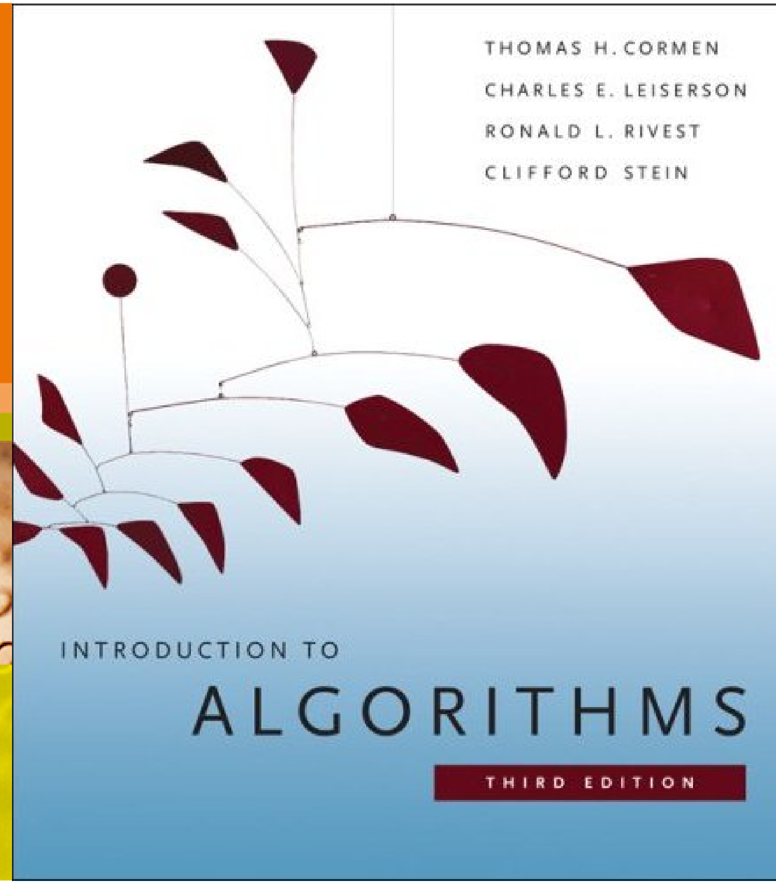


[G]

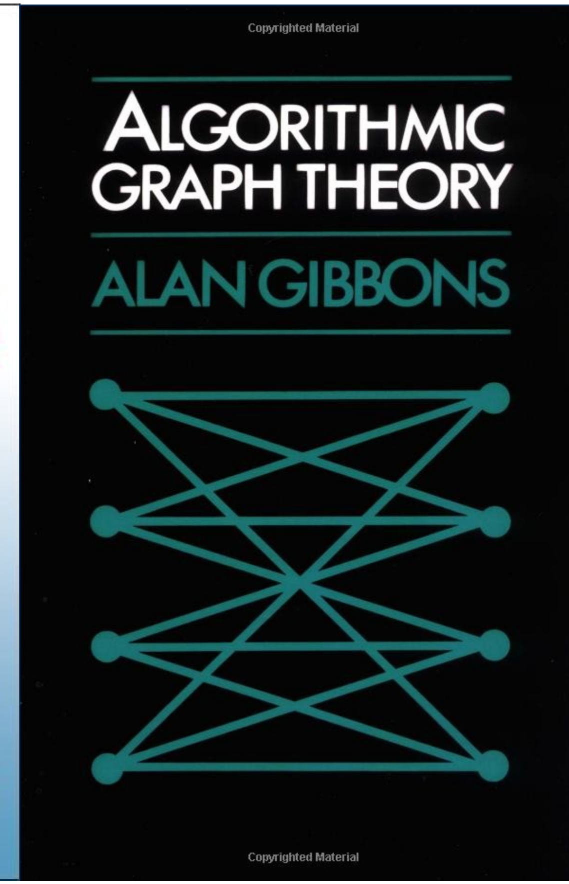
Bücher zur Vorlesung



[KN]



[CLRS]



[G]

Hauptreferenz; elektronische Kopie über die Unibib erhältlich

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche

- Berechnung kürzester Wege

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume

Voraussetzungen

Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Jarník–Prim

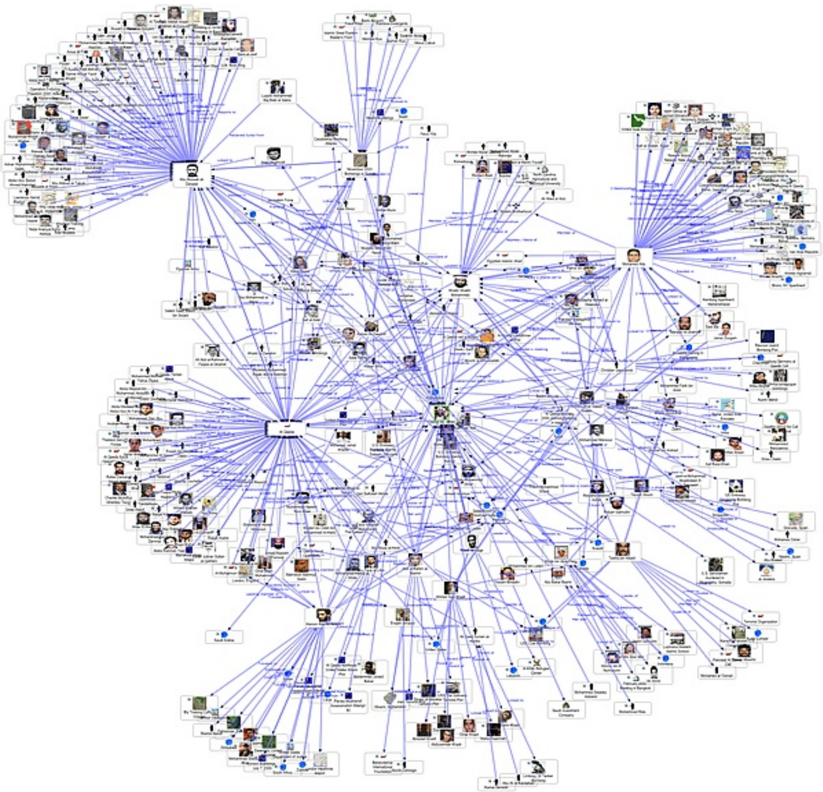
Voraussetzungen

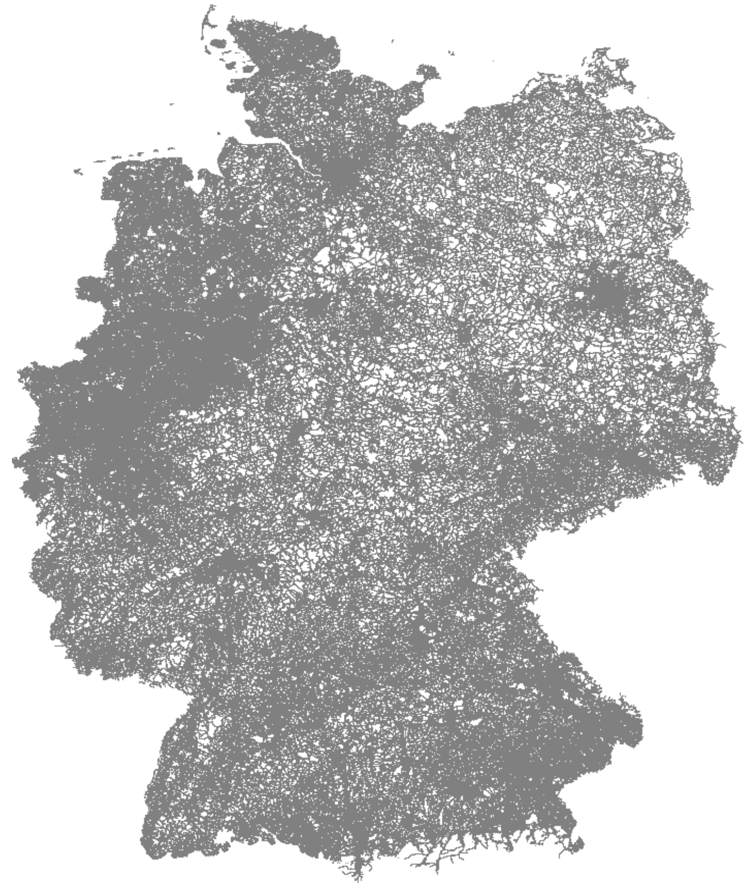
Wissen aus der Vorlesung *Algorithmen und Datenstrukturen*:

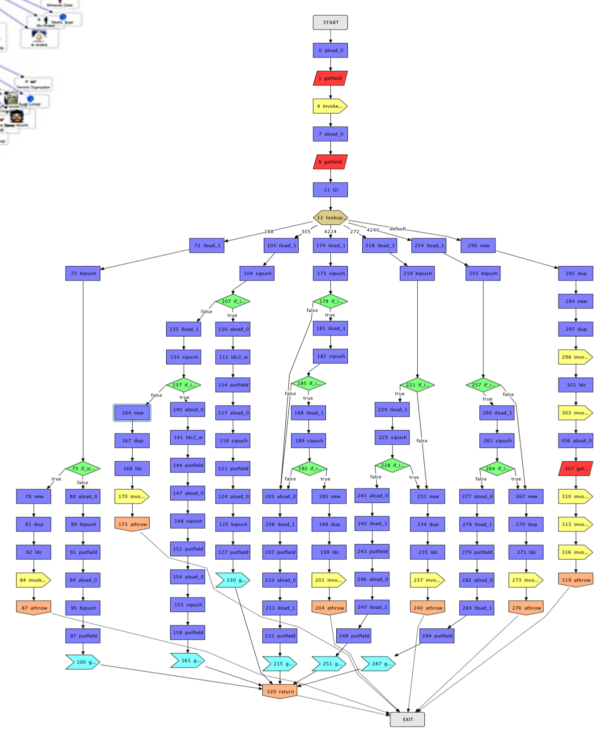
- Graphdurchlauf-Strategien
  - Breitensuche
  - Tiefensuche
- Berechnung kürzester Wege
  - Breitensuche
  - Algorithmus von Dijkstra
- Minimale Spannbäume
  - Algorithmus von Kruskal
  - Algorithmus von Jarník–Prim

Repetitorium in der allerersten Übung

Graphen







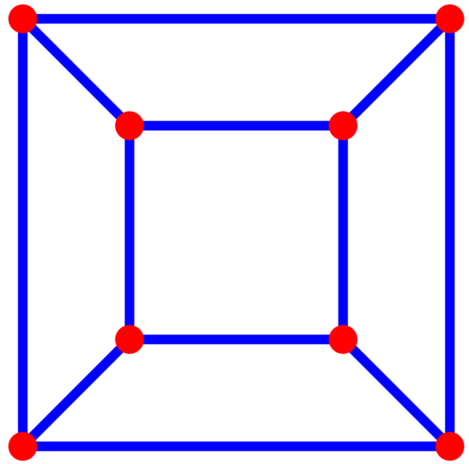
F: Was ist ein Graph?

F: Was ist ein Graph?

A$_1$: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$:

F: Was ist ein Graph?

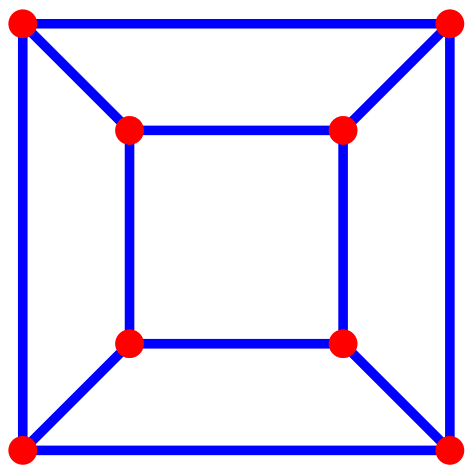
A_1: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$:



F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$:

- $V(G)$ *Knotenmenge* und
- $E(G) \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V(G) \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

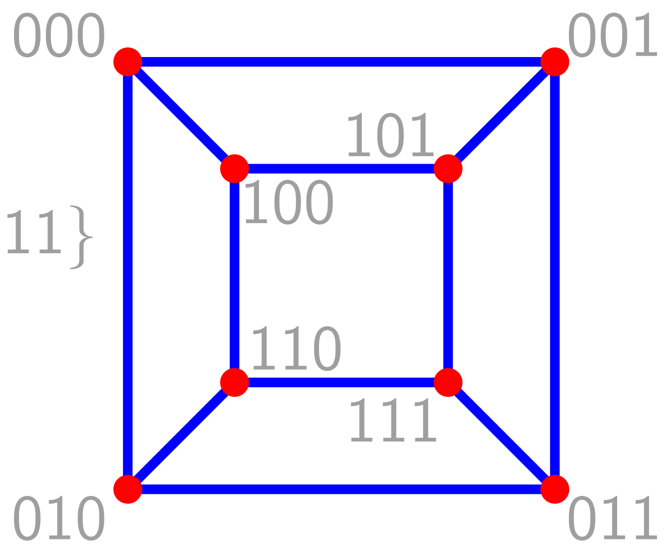


F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$:

- $V(G)$ *Knotenmenge* und
- $E(G) \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u,v\} \subseteq V(G) \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V(G) = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u,v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad ?$

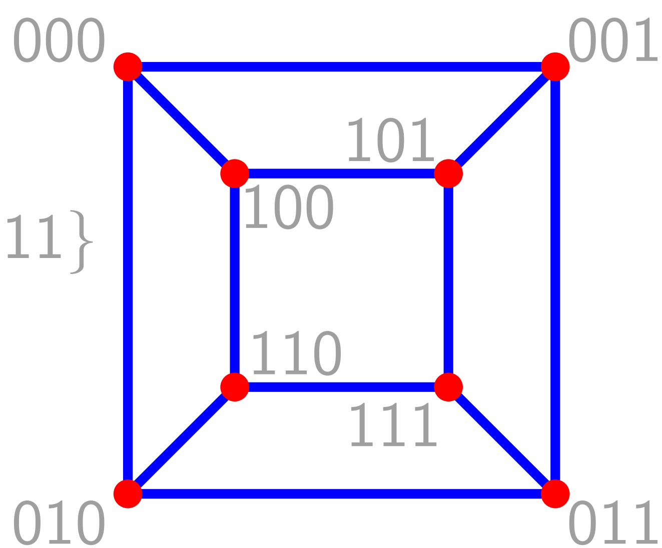


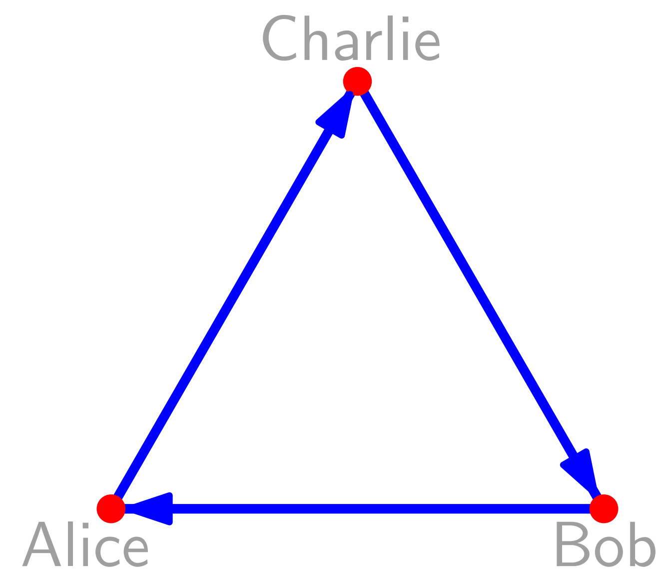
F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$:

- $V(G)$ *Knotenmenge* und
- $E(G) \subseteq \binom{V}{2} = \big\{\{u, v\} \subseteq V(G) \mid u \neq v\big\}$ *Kantenmenge*.

$V(G) = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow$?





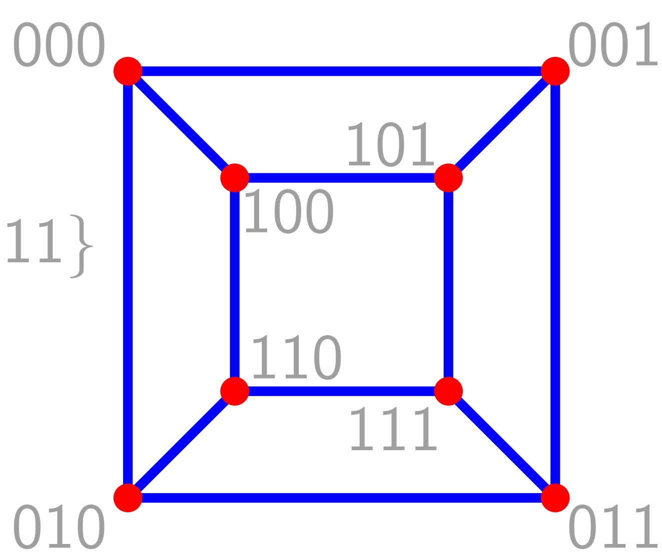
F: Was ist ein Graph?

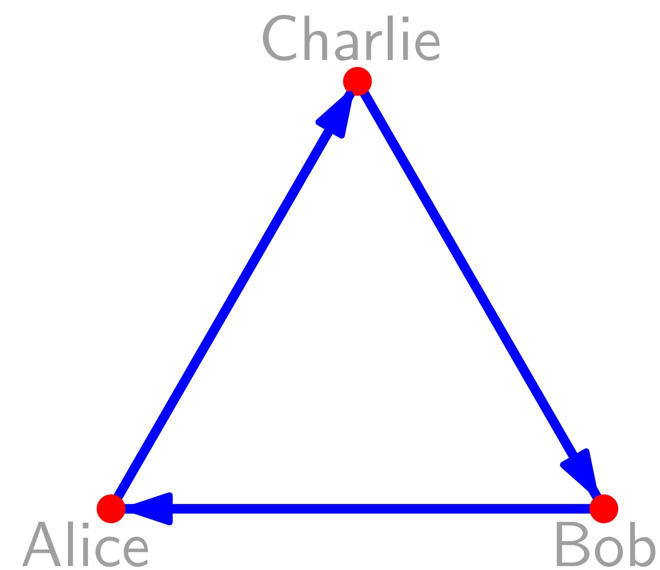
A_1: Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$:

- $V(G)$ *Knotenmenge* und
- $E(G) \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V(G) \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V(G) = \{000, 001, \ldots, 111\}$

$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad ?$

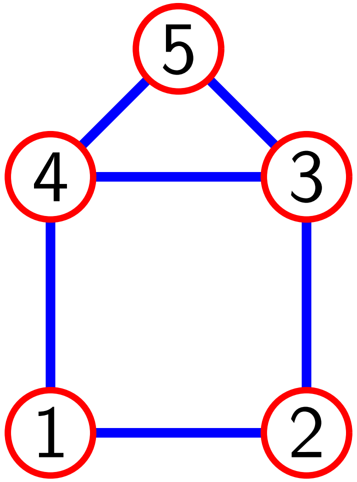




A_2: Ein *gerichteter* Graph G ist ein Tupel $(V(G), E(G))$, wobei

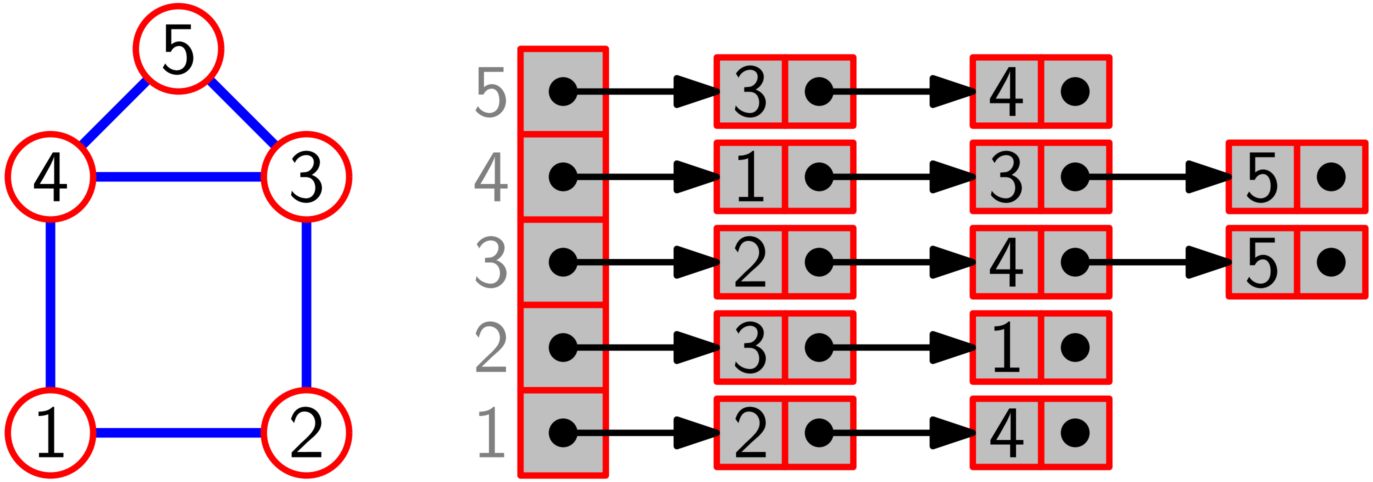
- $V(G)$ *Knotenmenge* und
- $E(G) \subseteq V(G) \times V(G) = \{(u, v) \mid u, v \in V(G), u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



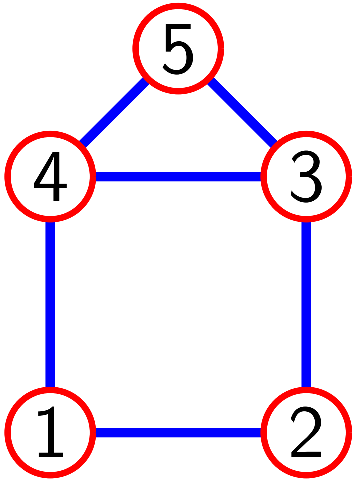
ungerichteter Graph

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

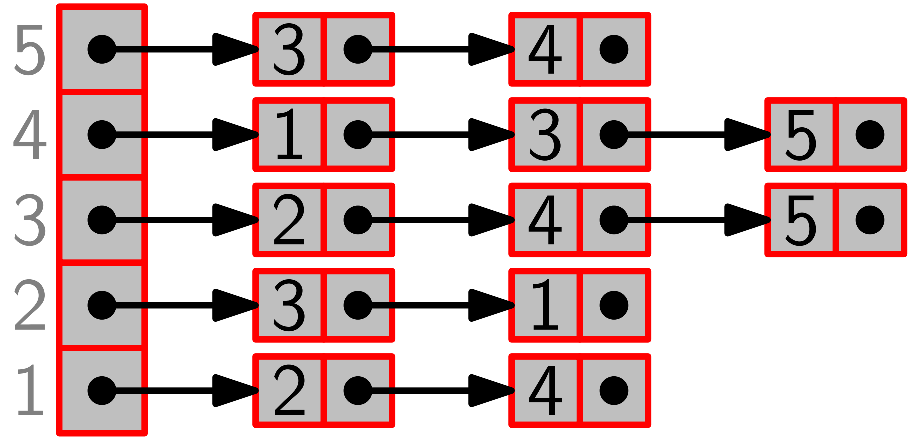


ungerichteter
Graph

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



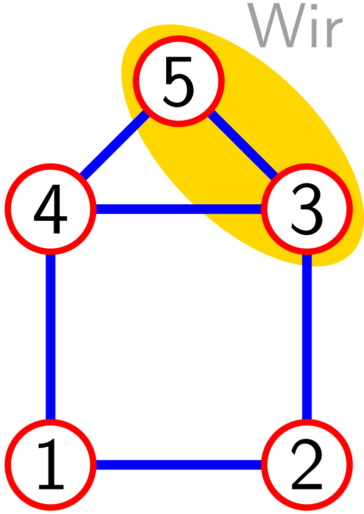
ungerichteter Graph



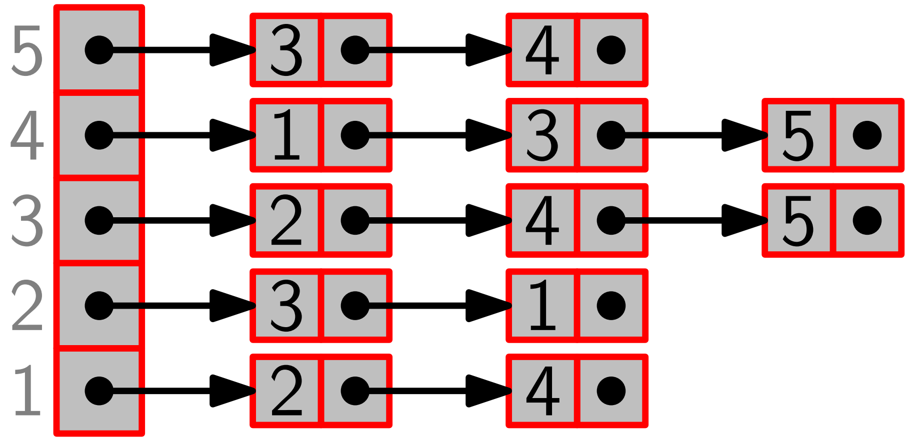
Adjazenzlisten

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



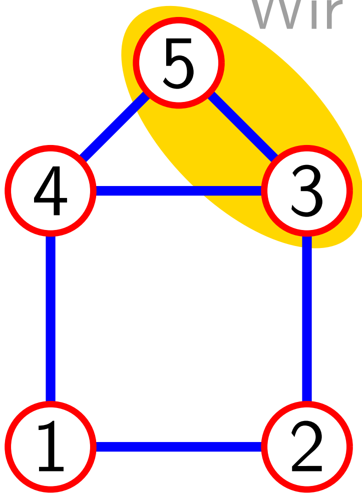
ungerichteter Graph



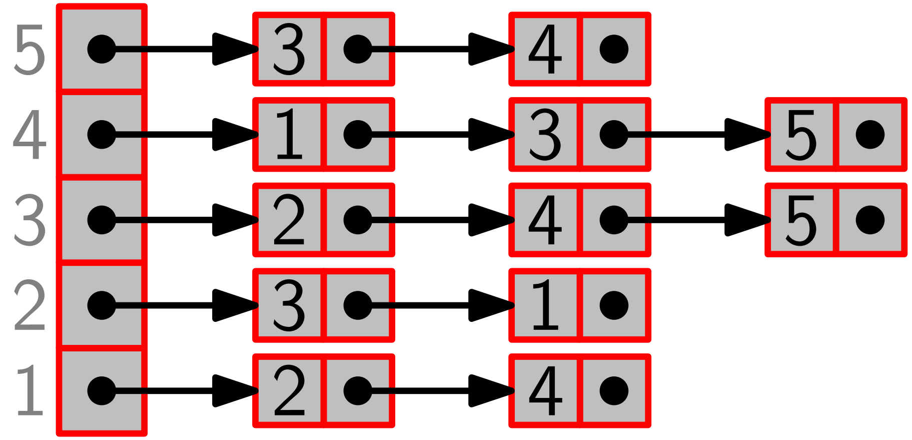
Adjazenzlisten

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

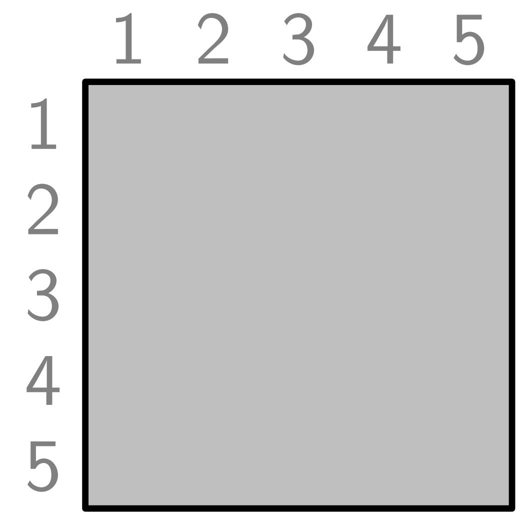
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



ungerichteter Graph

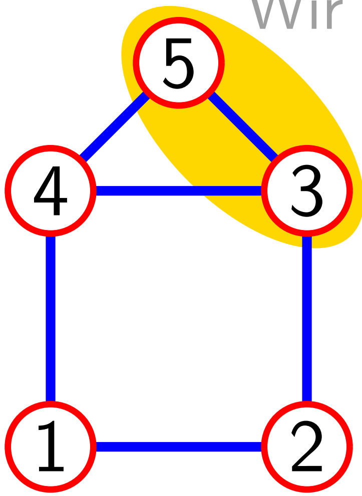


Adjazenzlisten

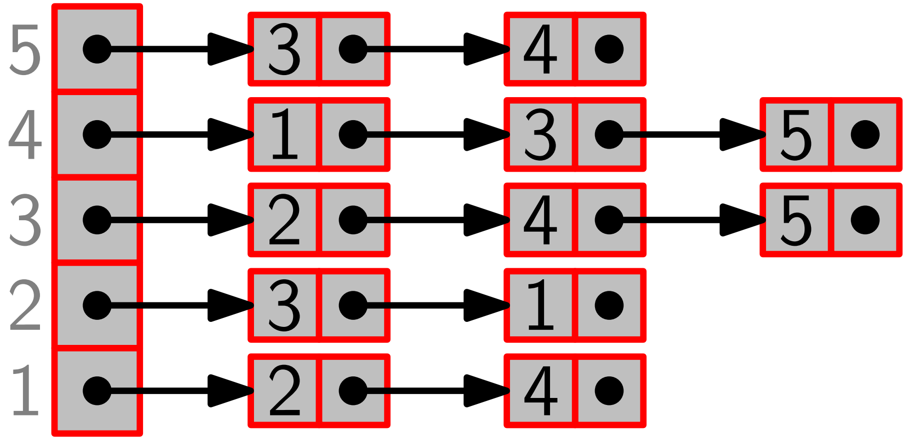


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



ungerichteter Graph

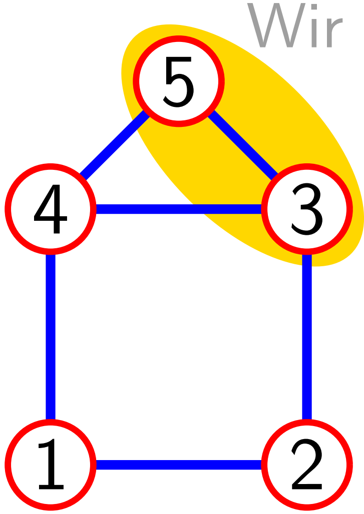


Adjazenzlisten

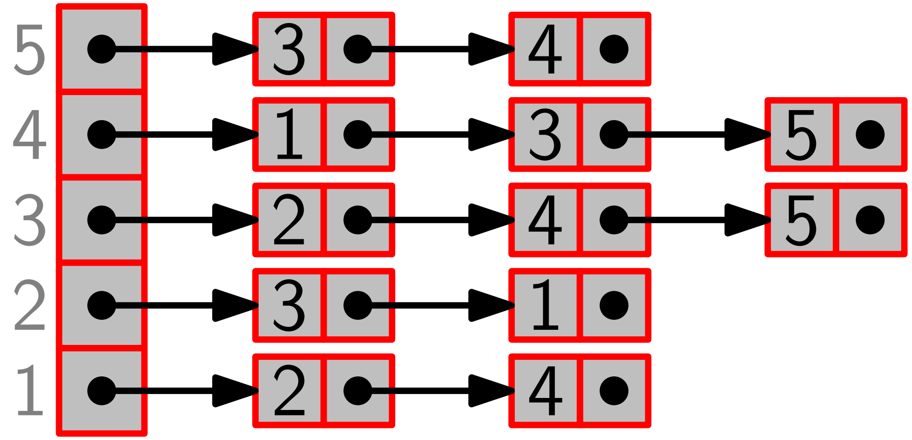
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



ungerichteter Graph



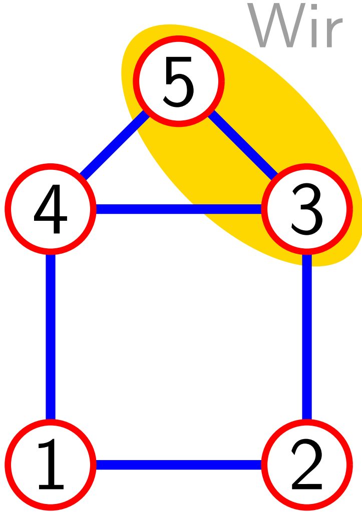
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

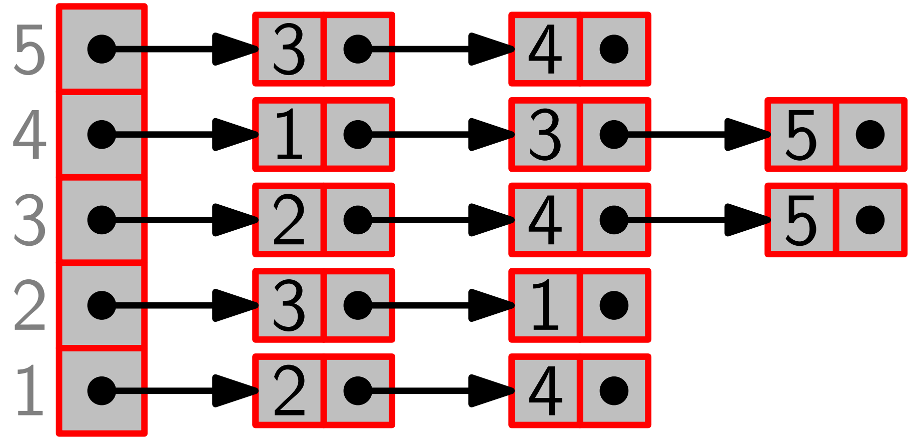
Adjazenzmatrix

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



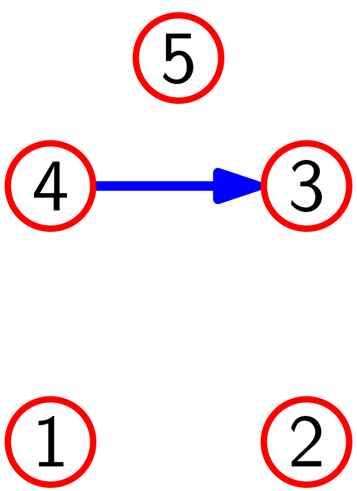
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

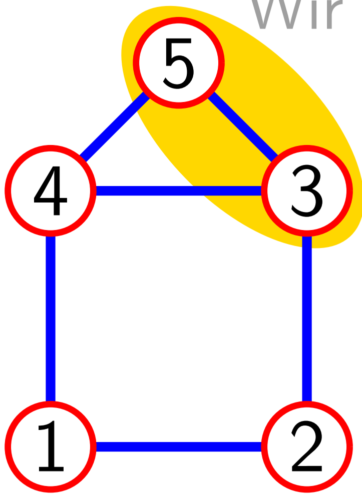
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

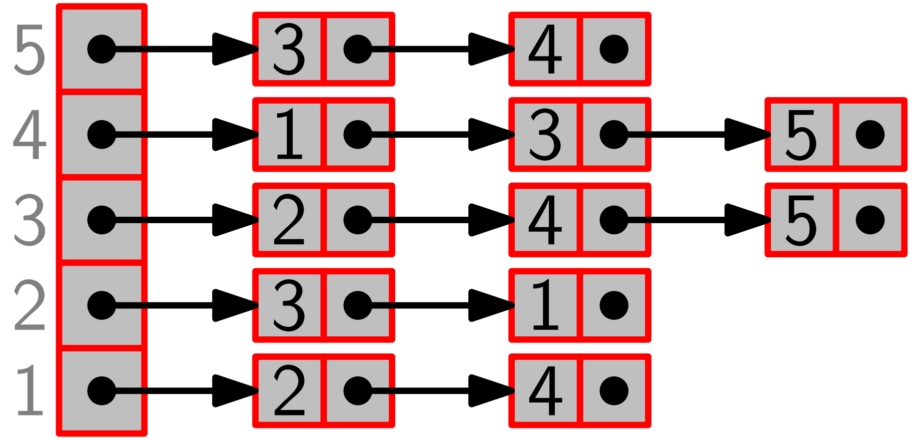


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



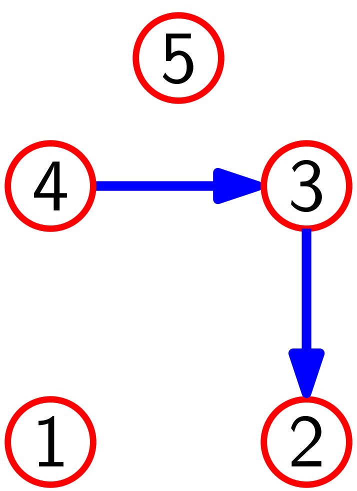
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

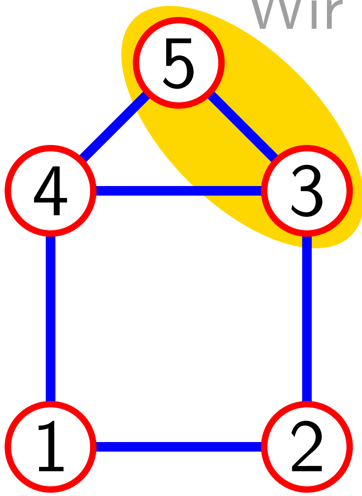
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

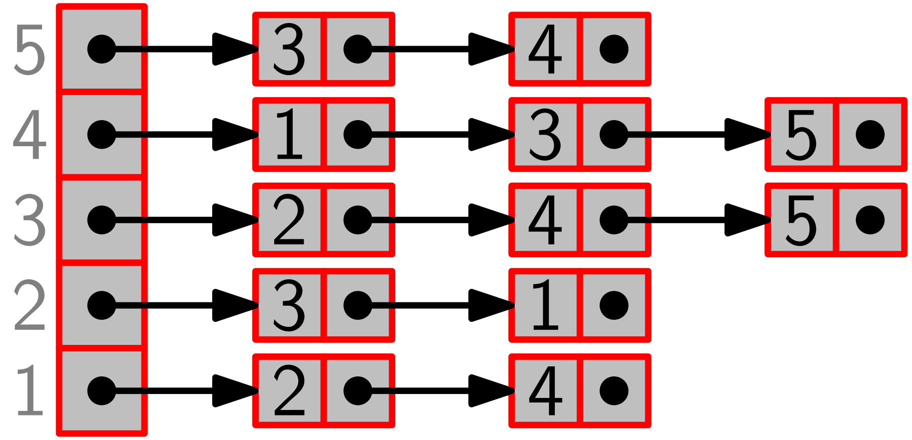


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



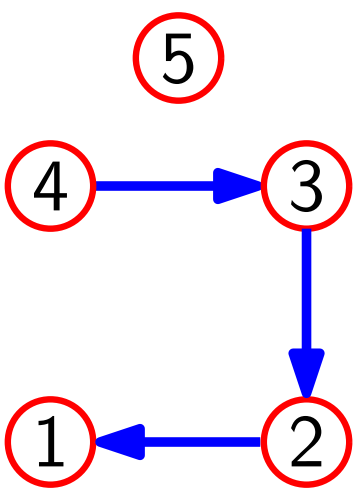
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

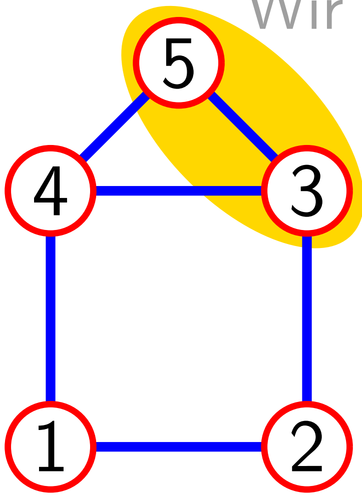
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

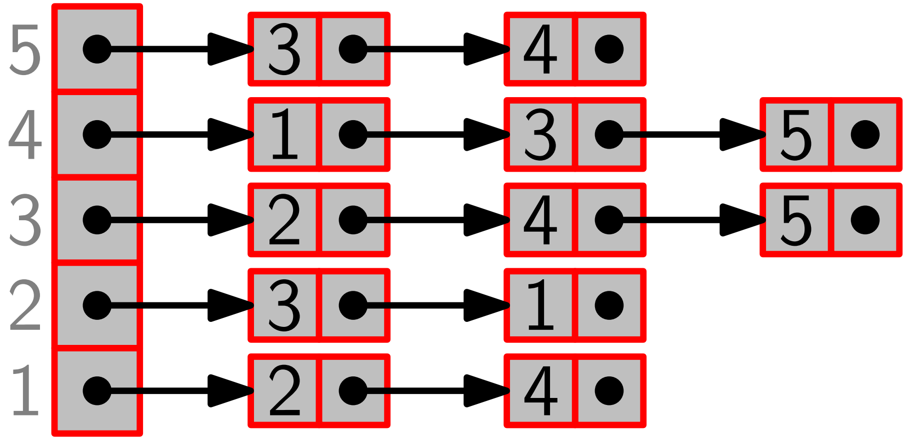


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



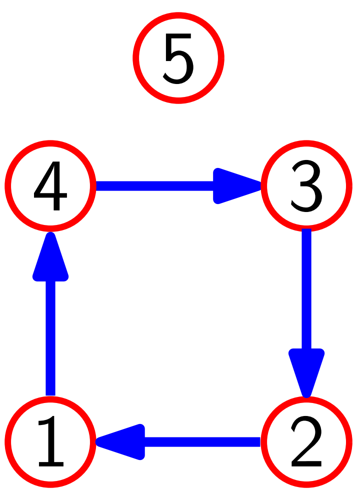
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

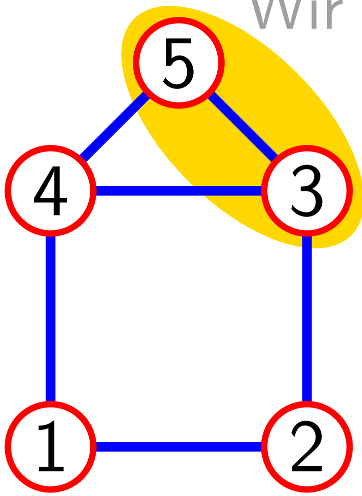
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

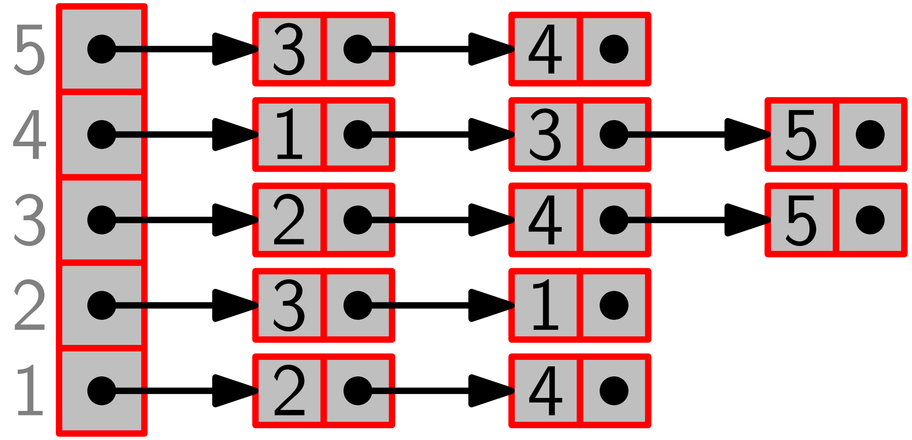


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



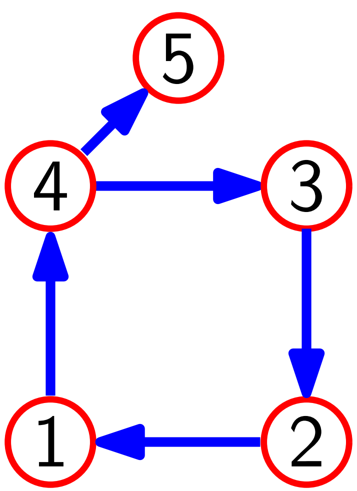
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

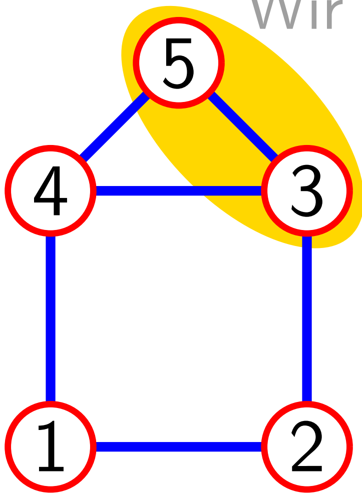
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

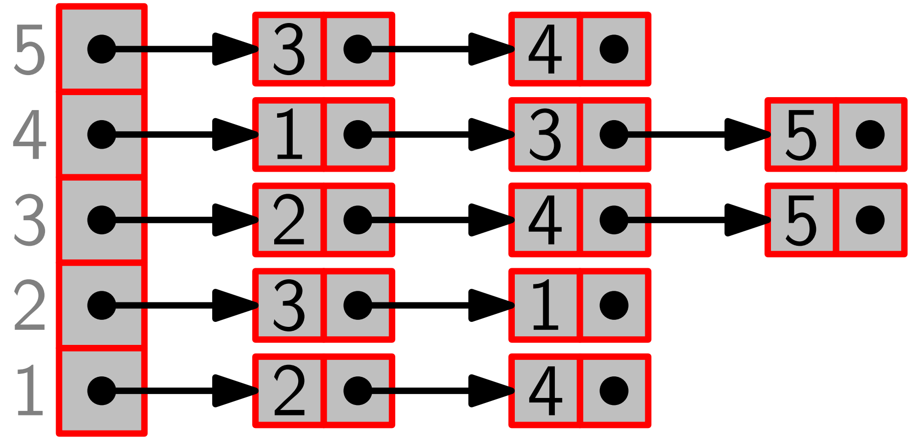


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



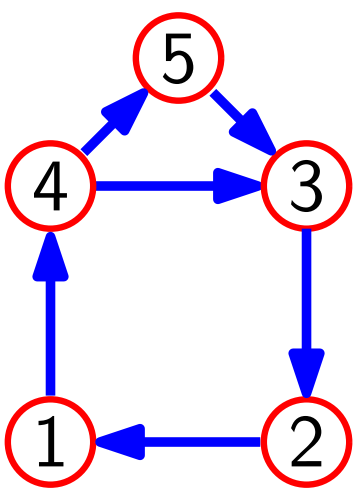
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

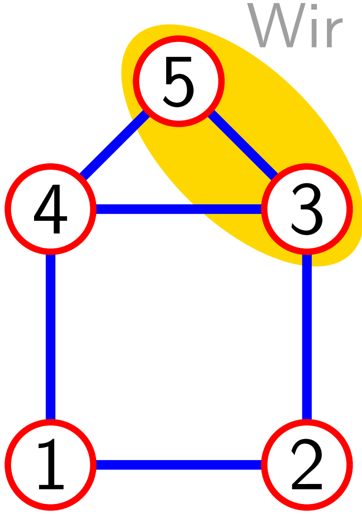
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

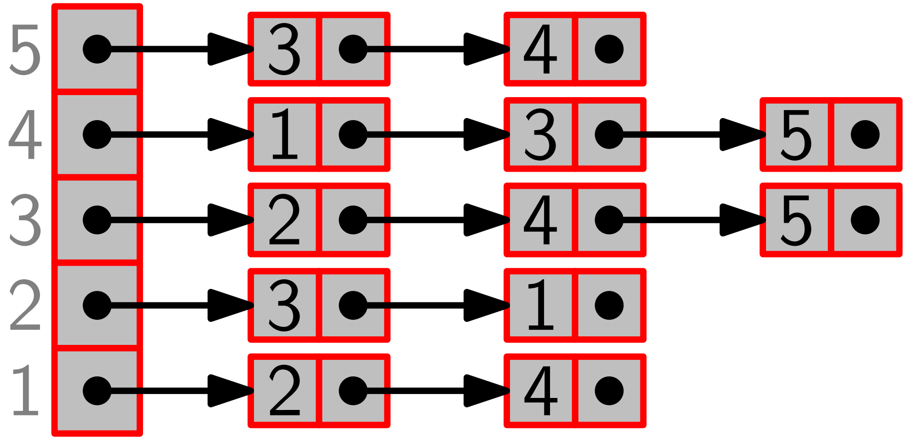


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



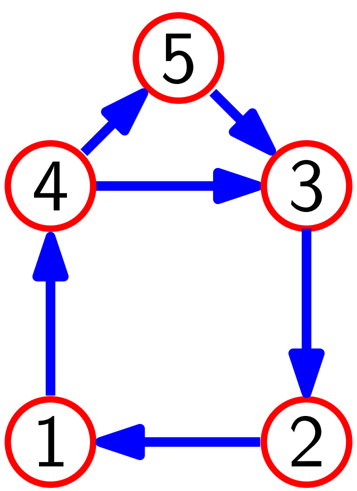
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

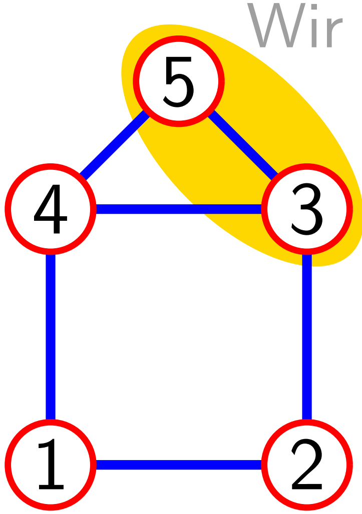
Adjazenzmatrix



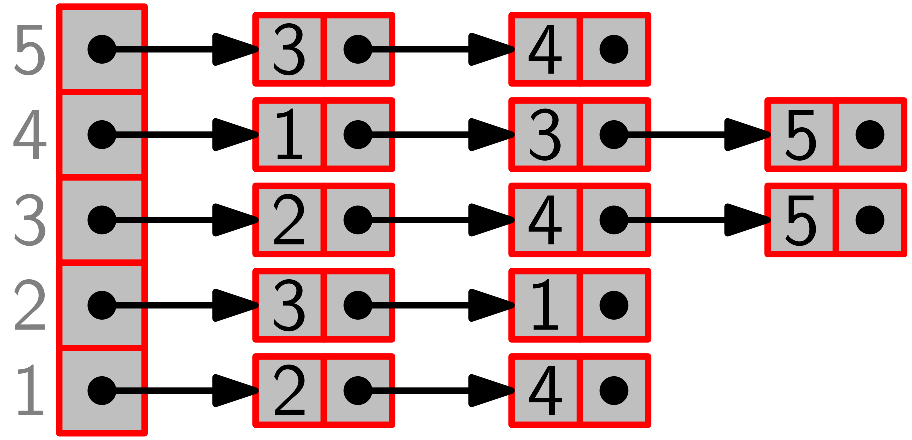
gerichteter Graph

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



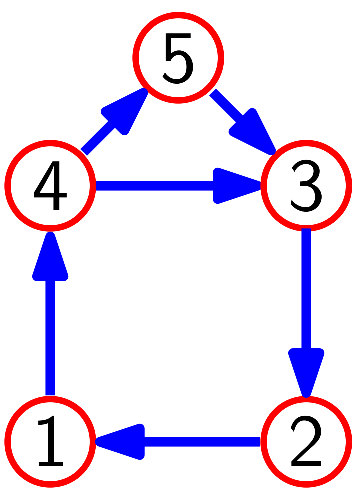
ungerichteter Graph



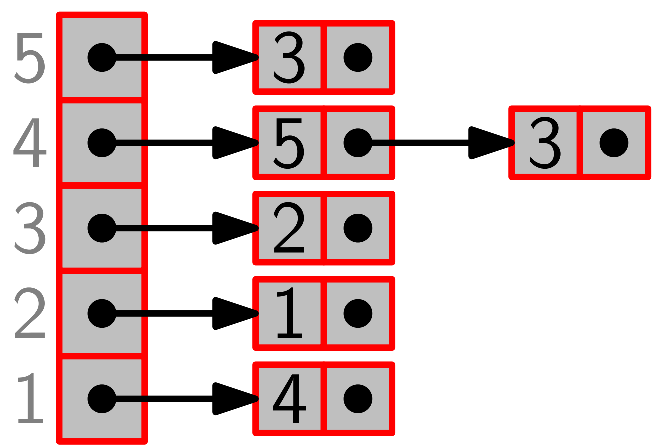
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



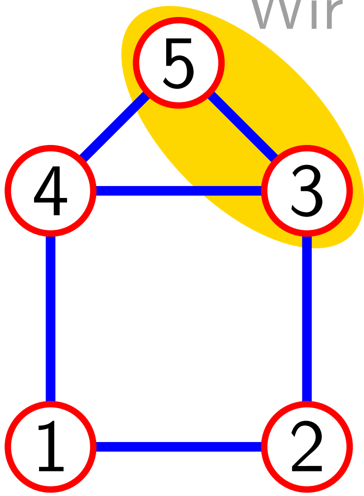
gerichteter Graph



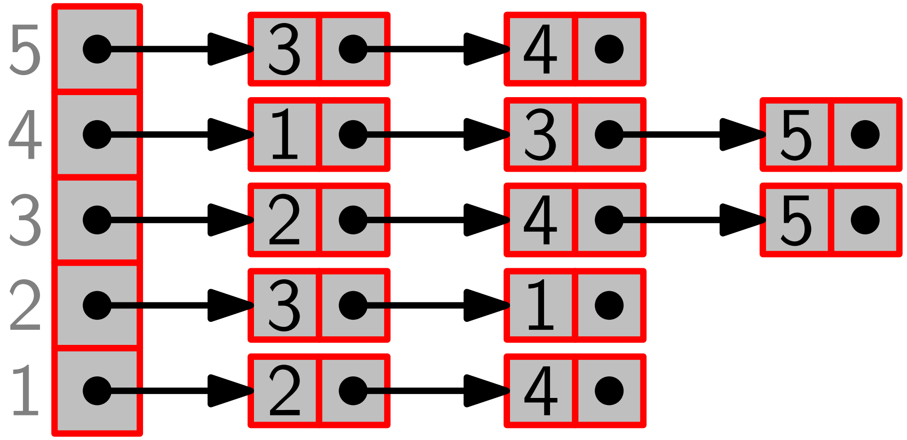
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V(G) : (i,j) \in E(G)\}$

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



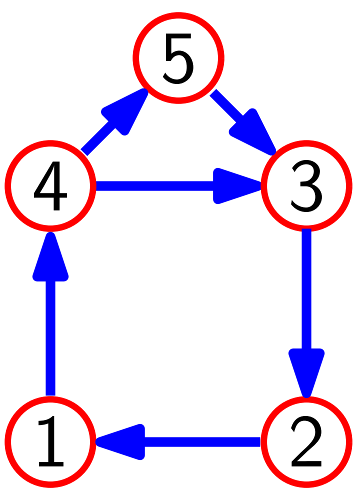
ungerichteter Graph



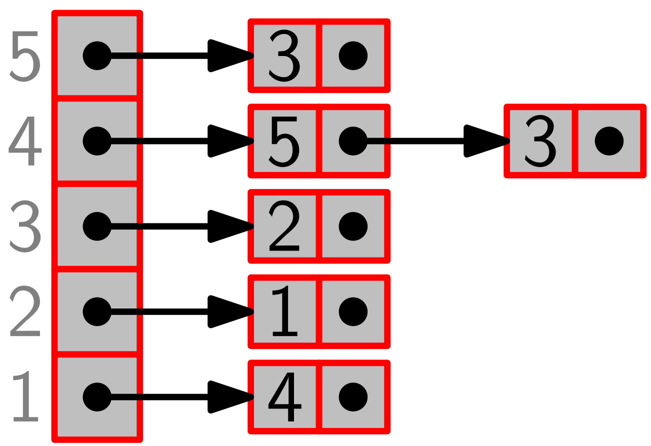
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



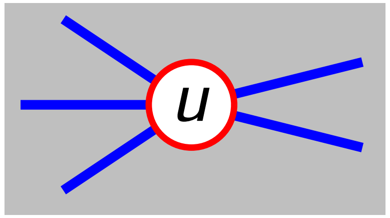
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V(G) : (i,j) \in E(G)\}$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0

$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E(G)$

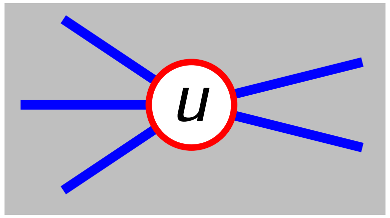
Grad eines Knotens

Def.



Grad eines Knotens

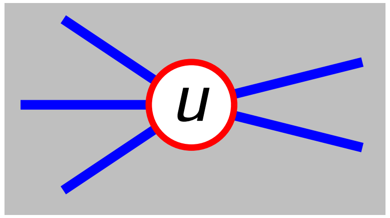
Def.



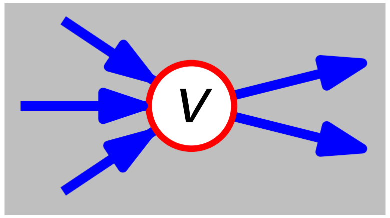
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

Grad eines Knotens

Def.

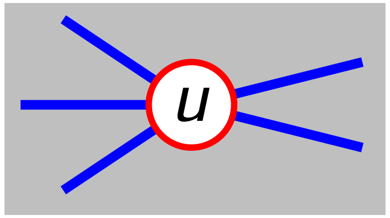


$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

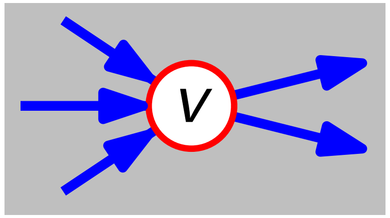


Grad eines Knotens

Def.



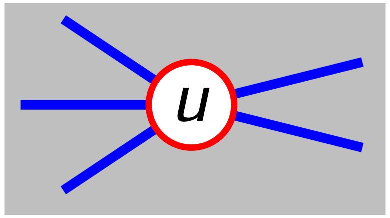
$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$



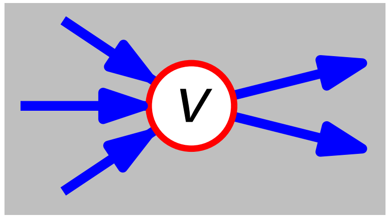
$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

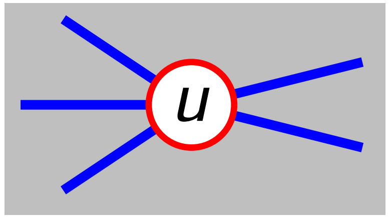


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

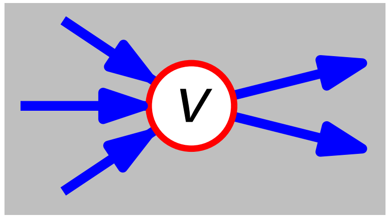
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



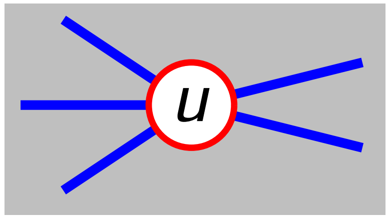
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

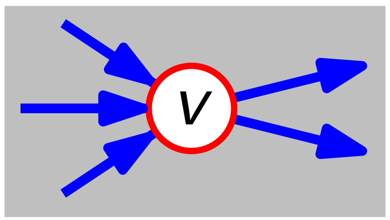
Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $=$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



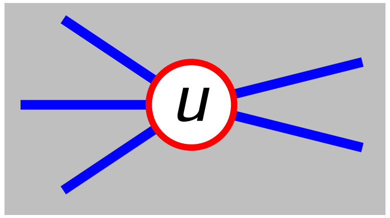
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

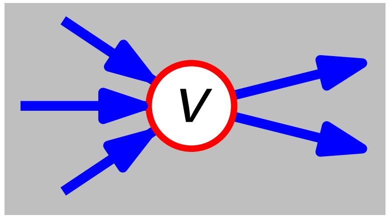
Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= \boxed{2 \cdot |E(G)|}$.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

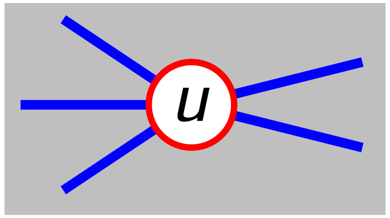
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

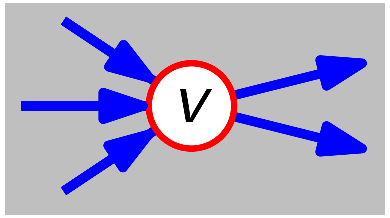
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

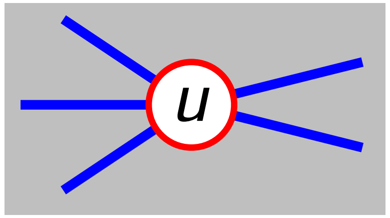
Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

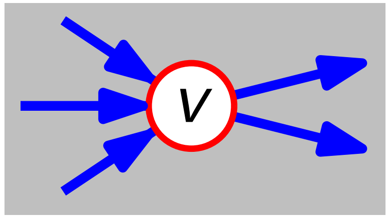
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



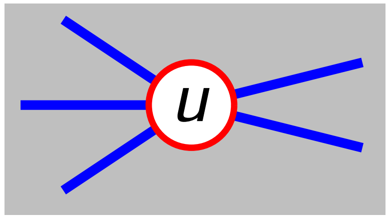
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

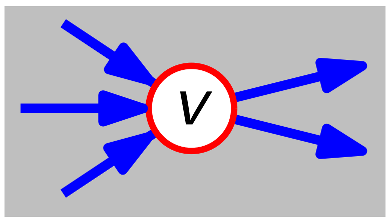
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$



$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$

$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

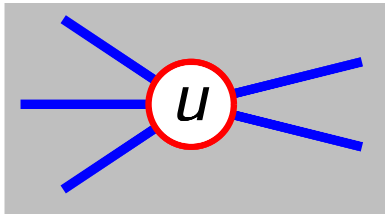
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

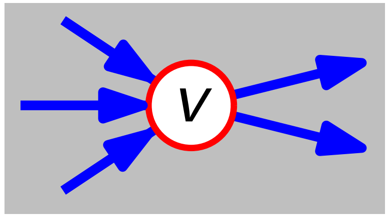
Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) : (u,v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

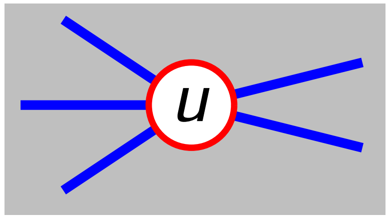
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

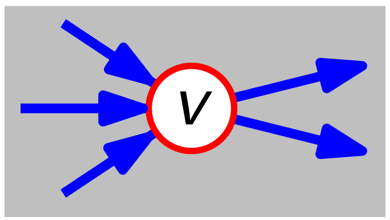
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

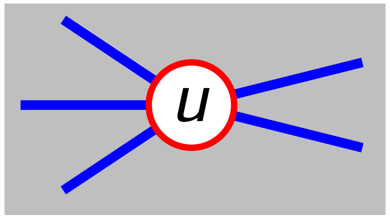
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten:

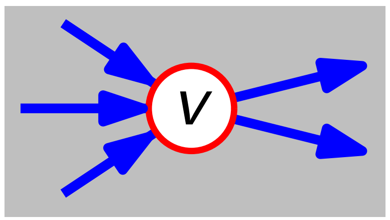
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$



$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$

$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

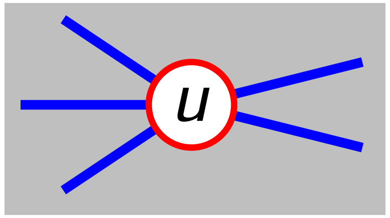
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$

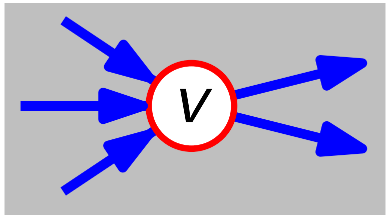
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

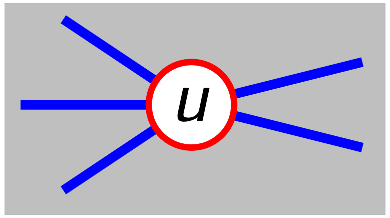
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$

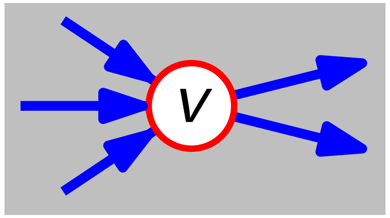
Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E(G)} 2$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

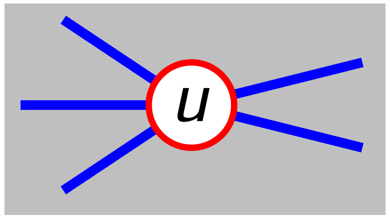
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$

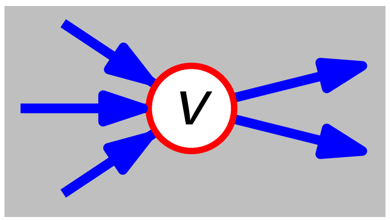
Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E(G)} 2 = 2 \cdot |E(G)|$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

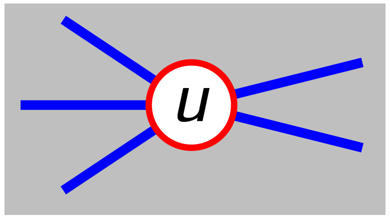
Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$

Aus Sicht der Kanten: $\sum_{e \in E(G)} 2 = 2 \cdot |E(G)|$

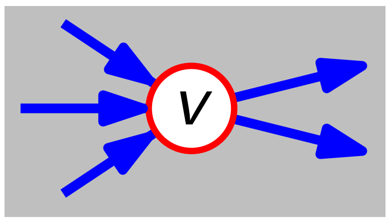
also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



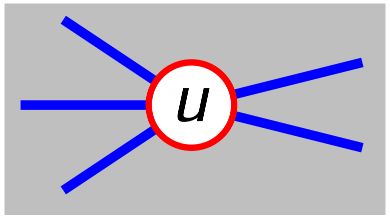
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

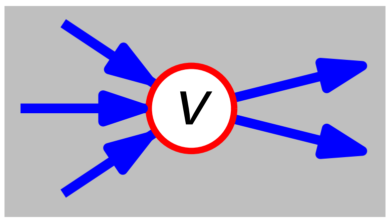
Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



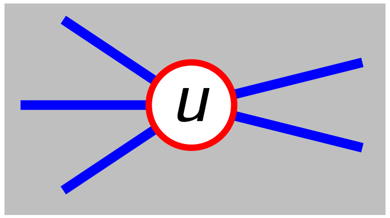
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

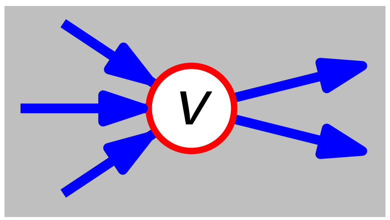
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}|$$

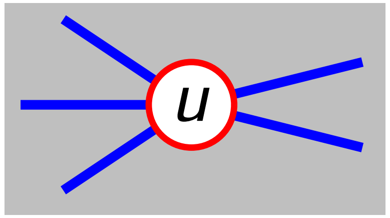
Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

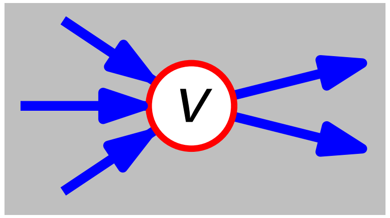
Beweis. $2 \cdot |E(G)| =$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

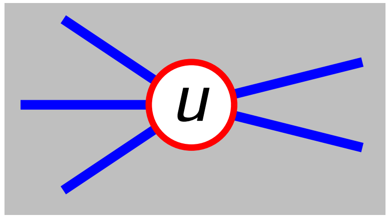
Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

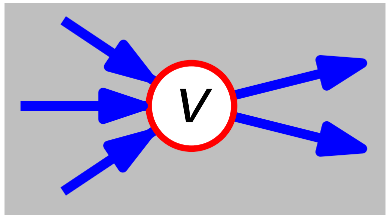
Beweis. $2 \cdot |E(G)| = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

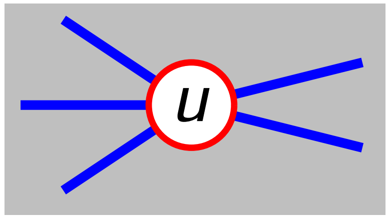
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

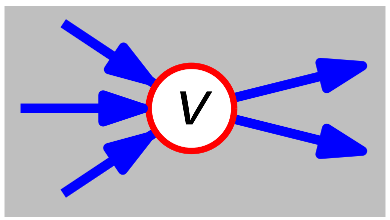
Beweis. $2 \cdot |E(G)| = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

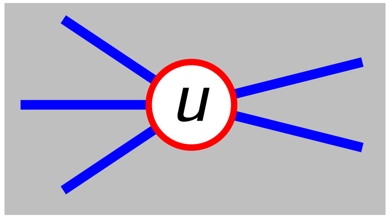
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

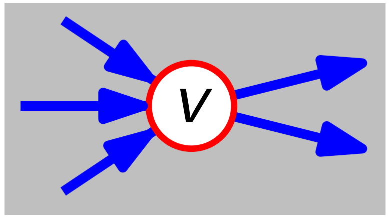
Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E(G)|}_{\textit{gerade!}} = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v) + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$



$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$

$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

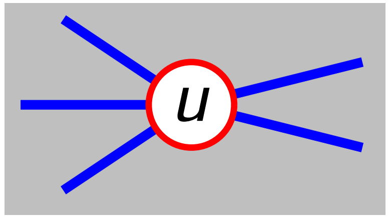
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

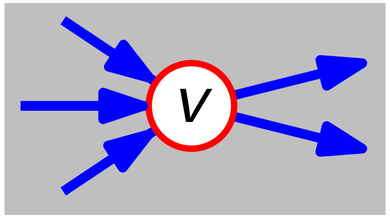
Beweis. $\underbrace{\boxed{2 \cdot |E(G)|}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v)}}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$



$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$

$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

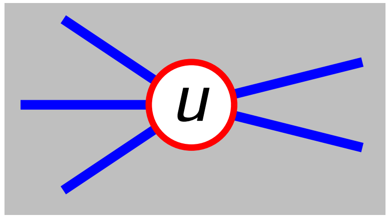
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

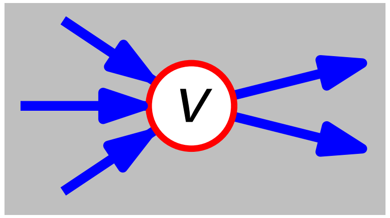
Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E(G)|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

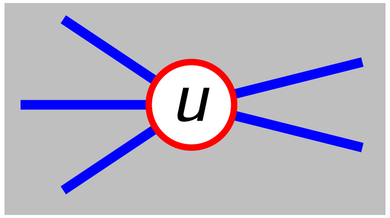
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

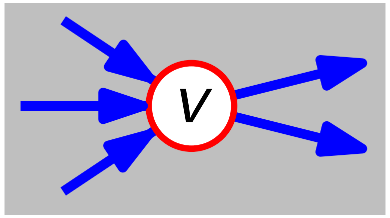
Beweis. $\underbrace{2 \cdot |E(G)|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)}_{\Rightarrow \ \textit{gerade!}}$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

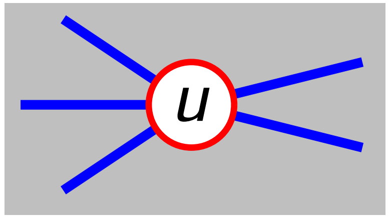
$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

Beweis. $\underbrace{\boxed{2 \cdot |E(G)|}}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v)}}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)}}_{\Rightarrow\ \textit{gerade!}}$

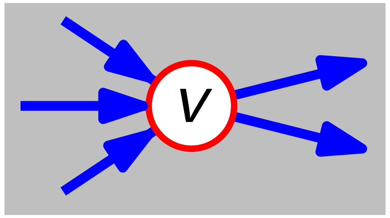
$\boxed{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)}$ *gerade* $\Rightarrow$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V(G) \colon (u,v) \in E(G)\}|$$

Beob. Sei G ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E(G)|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

$V(G) = V_{\mathrm{ger}}(G) \cup V_{\mathrm{ung}}(G)$

Beweis. $$\underbrace{2 \cdot |E(G)|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}(G)} \deg(v)}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)}_{\Rightarrow\ \textit{gerade!}}$$

$\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}(G)} \deg(v)$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\mathrm{ung}}(G)|$ *gerade!* $\square$