

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2022/23

17. Vorlesung

Amortisierte Analyse

Themen für den 3. Zwischentest (Do, 19.1.22)²

- Rot-Schwarz-Bäume (R-S-Eigenschaften, Höhe)
- Augmentieren von Datenstrukturen
- Nächstes Paar (Teile und Herrsche)
- Amortisierte Analyse
- Graphen und Breitensuche

Einstiegsbeispiel: Hash-Tabellen

Frage: Wie groß macht man eine Hash-Tabelle?

Ziel: So groß wie nötig, so klein wie möglich...

Verhindere, dass die Tabelle überläuft
oder dass Operationen ineffizient werden.

Problem: Was tun, wenn man die maximale Anzahl zu speichernder Elemente vorab nicht kennt?

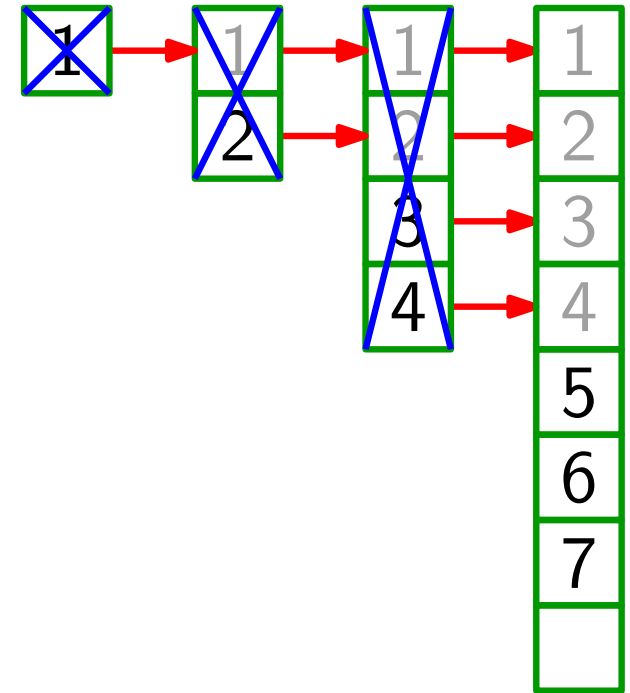
Lösung: *Dynamische* Tabellen!

Dynamische Tabellen

Idee:

- Wenn Tabelle voll, fordere doppelt so große Tabelle an (mit `new`).
- Kopiere alle Einträge von alter in neue Tabelle.
- Gib Speicher für alte Tabelle frei.

Insert(1)
 Insert(2)
 Insert(3)
 Insert(4)
 Insert(5)
 Insert(6)
 Insert(7)
 ...



Analyse: Welche Laufzeit benötigen n Einfügeoperationen im schlimmsten Fall?

- Antwort:**
- Tabelle wird genau $(\lceil \log_2 n \rceil)$ -mal kopiert.
 - Im schlimmsten (letzten!) Fall ist der Aufwand $\Theta(n)$.

Lüge!

Also ist der Gesamtaufwand ~~$\Theta(n \log n)$~~ , **genauer $\Theta(n)$** .
Let's see why...

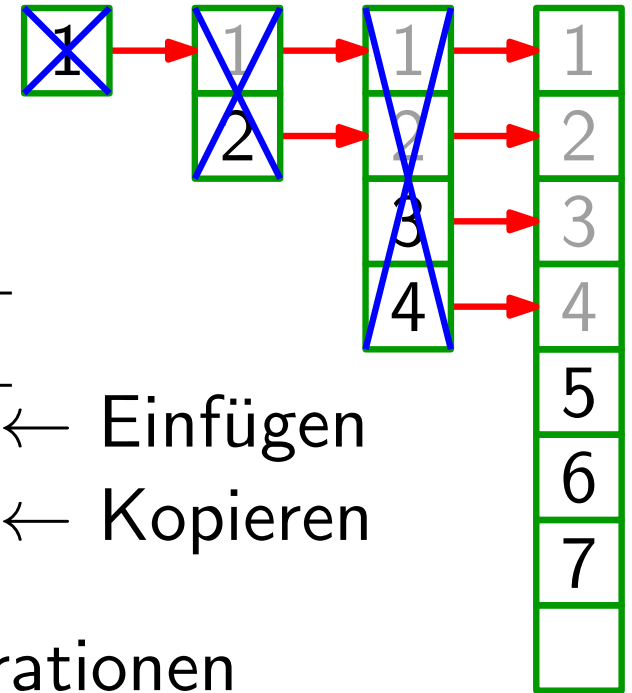
Genauere Abschätzung: Aggregationsmethode

Für $i = 1, \dots, n$ sei

$c_i =$ Kosten fürs i -te Einfügen.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$size_i$	1	2	4	4	8	8	8	8	16
c_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2		4				8

← Einfügen
← Kopieren



Also betragen die Kosten für n Einfügeoperationen

$$\sum_{i=1}^n c_i = n + \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} 2^j \leq n + \frac{2^{\log_2(n-1)+1} - 1}{2 - 1}$$

$$= n + 2(n - 1) - 1$$

$$< 3n \in \Theta(n)$$

$$\sum_{j=0}^k q^j = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \left[\begin{array}{l} \text{endl.} \\ \text{geom.} \\ \text{Reihe} \end{array} \right]$$

D.h. die durchschnittlichen („amortisierten“) Kosten sind $\Theta(1)$.

Amortisierte Analyse...

...bedeutet zu zeigen, dass die Operationen einer gegebenen Folge kleine durchschnittliche Kosten haben –
auch wenn einzelne Operationen in der Folge teuer sind!

Auch *randomisierte Analyse* kann man als Durchschnittsbildung (über alle mögl. Ergebnisse, gewichtet nach Wahrscheinlichkeit) betrachten.

Bei amortisierter Analyse geht es jedoch um die durchschnittliche Laufzeit *im schlechtesten Fall* – nicht im Erwartungswert!

Wir betrachten 3 verschiedene Typen von amortisierter Analyse:

- Aggregationsmethode ✓
- Buchhaltermethode
- Potentialmethode

Buchhaltermethode

- Verbindet mit jeder Operation op_i *amortisierte* Kosten \hat{c}_i , die oft nicht mit den tatsächlichen Kosten c_i übereinstimmen.

$\hat{c}_i > c_i \Rightarrow$ Wir legen etwas beiseite.

$c_i > \hat{c}_i \Rightarrow$ Wir bezahlen teure Operationen mit vorher Beiseitegelegtem.

- Damit's klappt: wir dürfen nie in die Miesen kommen –

Guthaben $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i - \sum_{i=1}^n c_i$ darf nicht negativ werden!

Dann gilt $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^n c_i$.

D.h. amortisierte Kosten sind obere Schranke für tatsächliche Kosten!

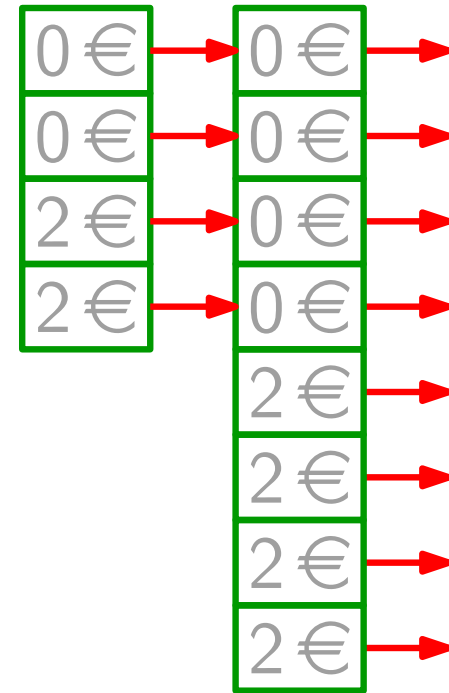
Buchhaltermethode für dynamische Tabellen

Jede Einfügeoperation op_i bezahlt $\hat{c}_i = 3\text{€}$:

- 1 € fürs tatsächliche Einfügen
- 2 € für die nächste Tabellenvergrößerung

Wir verknüpfen die Teilguthaben mit konkreten Objekten der Datenstruktur.

Damit wird deutlich, dass die DS nie Miese macht.



*Also sind amortisierte
Kosten obere Schranke
für tatsächliche Kosten!*

$$\sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{i=1}^n \hat{c}_i = 3n = \Theta(n)$$

D.h. die (tats.) Kosten für n Einfügeoperationen betragen $\Theta(n)$.

Buchhaltermethode: noch'n Beispiel



Stapel

verwaltet sich ändernde Menge nach *LIFO-Prinzip*

Abs. Datentyp

boolean Empty()

Push(key k)

key Pop()

key Top()

Multipop(int k)

neu!

Implementierung

while not Empty() **and** $k > 0$ **do**

```
├ Pop()
└  $k = k - 1$ 
```

Buchhaltermethode: Stapel mit Multipop

Betrachte Folge von Push-, Pop- und Multipop-Operationen.

Operation _{<i>i</i>}	tatsächliche Kosten c_i	amortisierte Kosten \hat{c}_i
Push	1	2
Pop	1	0
Multipop(k_i)	$\min\{k_i, size_i\}$	0

Geht das gut??? – *Ja!* D.h. Folge von n Op. dauert $\Theta(n)$ Zeit.

Zeige: Amortisierte Kosten „bezahlen“ immer für die echten!

- Jede Push-Operation legt einen Teller auf den Stapel. Dafür bezahlt sie 1 € und legt noch 1 € auf den Teller.
- Jede (Multi-)Pop-Operation wird mit den Euros auf den Tellern, die sie wegnimmt, komplett bezahlt.

Potentialmethode

Idee: Betrachte Bankguthaben (siehe Buchhaltermethode)
als physikalische Größe,
 die den augenblicklichen Zustand der DS beschreibt.

Datenstruktur $D_0 \xrightarrow{op_1} D_1 \xrightarrow{op_2} \dots \xrightarrow{op_n} D_n$

Wähle Potential $\phi: D_i \rightarrow \mathbb{R}$. O.B.d.A. $\phi(D_0) = 0$

Ziel: Bank macht keine Miesen.

Also fordern wir $\phi(D_i) \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$.

amortisierte Kosten \leftarrow *echte Kosten* \leftarrow *Potentialdifferenz*

Def. $\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi(D_i)$, wobei $\Delta\phi(D_i) = \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$

Folge: $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i = \sum_{i=1}^n (c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$ *teleskopierende Summe*

$$\downarrow = \sum_{i=1}^n c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0) \geq \sum_{i=1}^n c_i$$

D.h. amortisierte Kosten „bezahlen“ für echte Kosten.



Potentialmethode: Stapel mit Multipop

To do: Definiere Potentialfunktion –
in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand des Stapels!

Idee: Nimm $\phi(D_i) = size_i$, also aktuelle Stapelgröße.
 $\Rightarrow \phi(D_0) = 0$ und $\phi(D_1), \dots, \phi(D_n) \geq 0$. ✓

Prüfe: Falls die i -te Operation eine Push-Operation ist:
 $\Rightarrow \Delta\phi(D_i) = +1$ und $\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi D_i = 1 + 1 = 2$

*Was
sind die
amort.
Kosten?*

Falls die i -te Operation eine Multipop-Operation ist:

$$\Rightarrow \Delta\phi(D_i) = - \min\{k_i, size_i\}$$

$$c_i = + \min\{k_i, size_i\}$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi D_i = 0, \text{ dito mit Pop } (k_i = 1).$$

Also: Amortisierte Kosten pro Operation $O(1)$.
 \Rightarrow Echte Kosten für n Oper. im worst case $O(n)$.

Zusammenfassung

Zeige mit **amortisierter Analyse**, dass die Operationen einer gegebenen Folge kleine durchschnittliche Kosten haben – *auch wenn einzelne Operationen in der Folge teuer sind!*

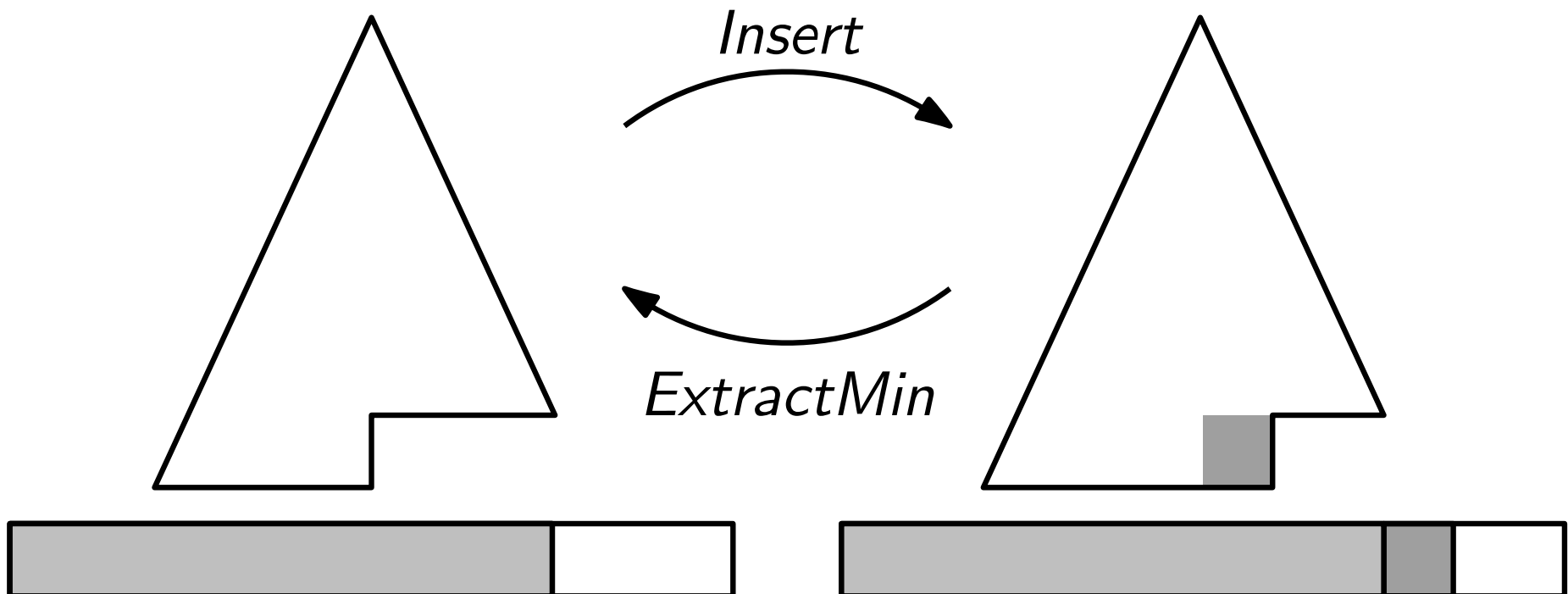
Drei Typen von amortisierter Analyse:

- Aggregationsmethode ✓
Summiere tatsächliche Kosten (oder obere Schranken dafür) auf.
- Buchhaltermethode ✓
Verbinde Extrakosten mit konkreten Objekten der DS und bezahle damit teure Operationen.
- Potentialmethode ✓
Definiere Potential der gesamten DS, so dass mit der Potentialdifferenz teure Operationen bezahlt werden können.

Übungsaufgaben zur amortisierten Analyse (I)

Gegeben sei ein gewöhnlicher MinHeap, dessen Methoden *Insert* und *ExtractMin* im schlechtesten Fall $O(\log n)$ Zeit brauchen.

Zeigen Sie mit der **Potentialmethode**, dass *Insert* amortisiert $O(\log n)$ Zeit und *ExtractMin* amortisiert $O(1)$ Zeit benötigt.



Übungsaufgaben zur amortisierten Analyse (II)

Entwerfen Sie eine Datenstruktur zum Verwalten einer dynamischen Menge von Zahlen. Die DS soll 2 Methoden haben:

- *Insert* zum Einfügen einer Zahl und
- *DeleteLargerHalf* zum Löschen aller Zahlen aus der Datenstruktur, die größer oder gleich dem aktuellen Median der Zahlenmenge sind.

Beide Methoden sollen **amortisiert $O(1)$ Zeit** benötigen.

Tipp: Verwenden Sie eine Liste!

1. Beschreiben Sie Ihren Entwurf der Datenstruktur einschließlich der beiden Methoden in Worten.
2. Analysieren Sie mithilfe der **Buchhaltermethode**. Geben Sie die amortisierten Kosten, die Sie mit *Insert* und *DeleteLargerHalf* verbinden, exakt an.