Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2022/23

14. Vorlesung

Rot-Schwarz-Bäume

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Vorlesungsumfrage

Sehr geehrter Herr Prof. Dr. Wolff,

die Rücklaufquote der Umfrage "Algorithmen und Datenstrukturen" liegt aktuell bei 18% (Teilnehmerzahl insgesamt: 356).

Dieser Wert liegt unter einer definierten Schwelle von 50%. Wir möchten Sie daher bitten, Ihre Teilnehmer nochmals zu ermuntern, sich an der Umfrage zu beteiligen.

Bitte beachten Sie, dass die Umfrage am 15.12.2022 23:59:00 geschlossen wird.

Ihr EvaSys Administrator

Vorlesungsumfrage

Sehr geehrter Herr Prof. Dr. Wolff,

die Rücklaufquote der Umfrage "Algorithmen und Datenstrukturen" liegt aktuell bei 18% (Teilnehmerzahl insgesamt: 356).

Dieser Wert liegt unter einer definierten Schwelle von 50%. Wir möchten Sie daher bitten, Ihre Teilnehmer nochmals zu ermuntern, sich an der Umfrage zu beteiligen.

Bitte beachten Sie, dass die Umfrage am 15.12.2022 23:59:00 geschlossen wird.

Ihr EvaSys Administrator

Bitte teilnehmen!

Dynamische Menge

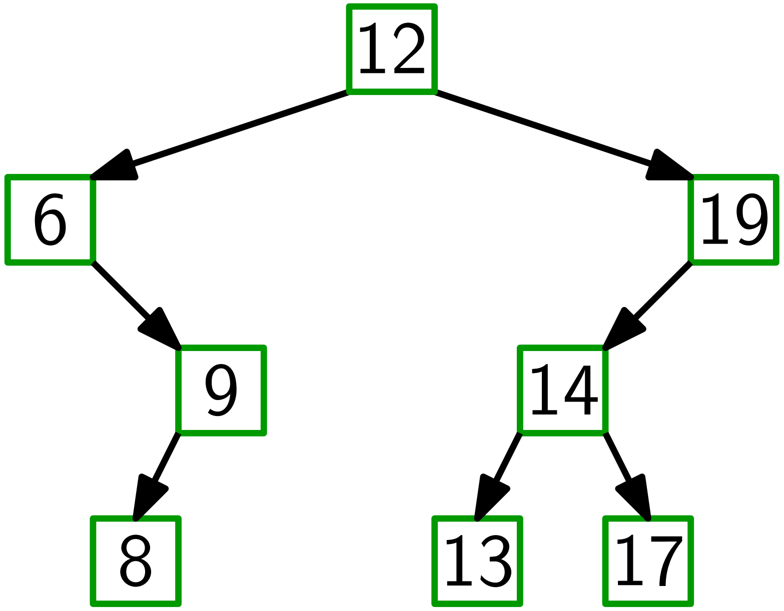
verwaltet Elemente einer
sich ändernden Menge M

Abstrakter Datentyp	*Funktionalität*
ptr Insert(key k, info i) Delete(ptr x)	} Änderungen
ptr Search(key k) ptr Minimum() ptr Maximum() ptr Predecessor(ptr x) ptr Successor(ptr x)	} Anfragen

Implementierung: je nachdem...

Binäre Suchbäume

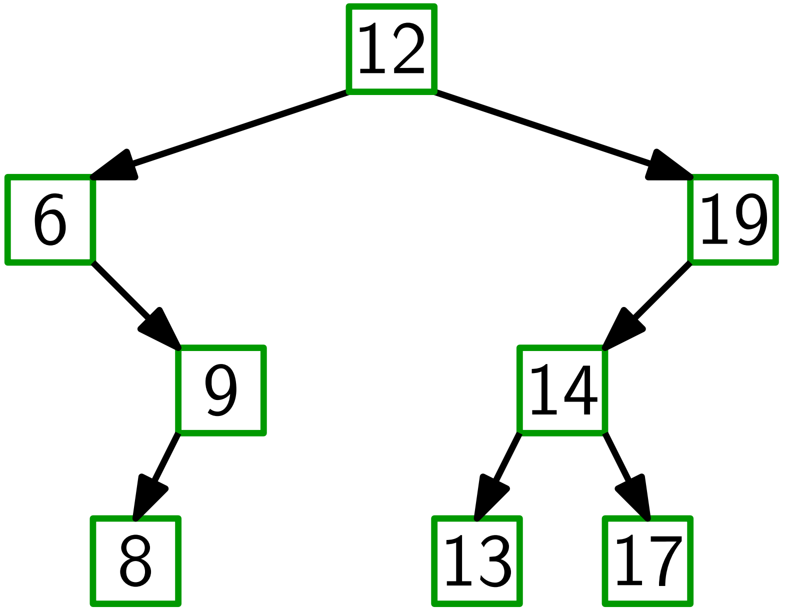
Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.



Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

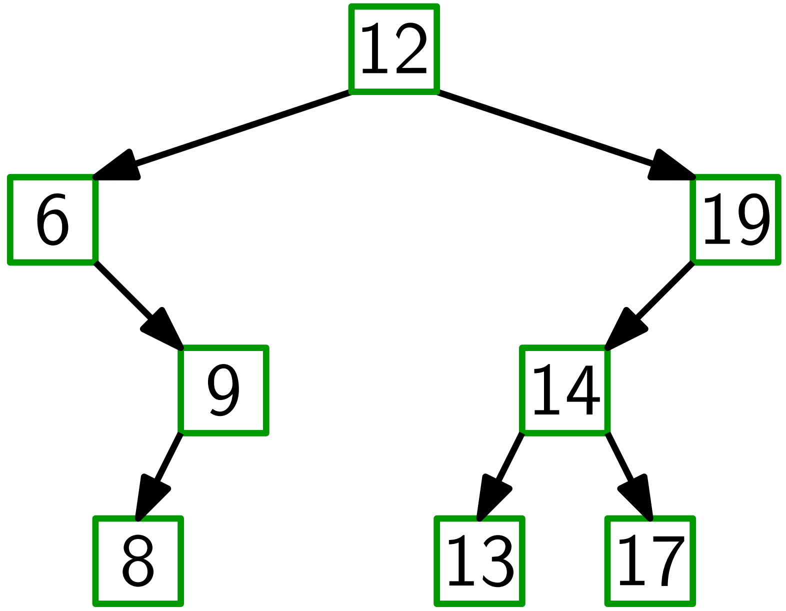
Aber:



Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

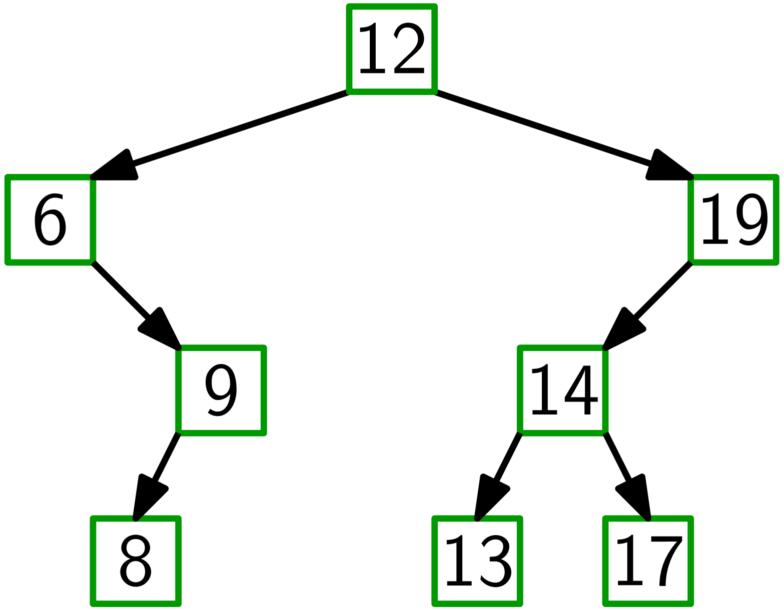


Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel:

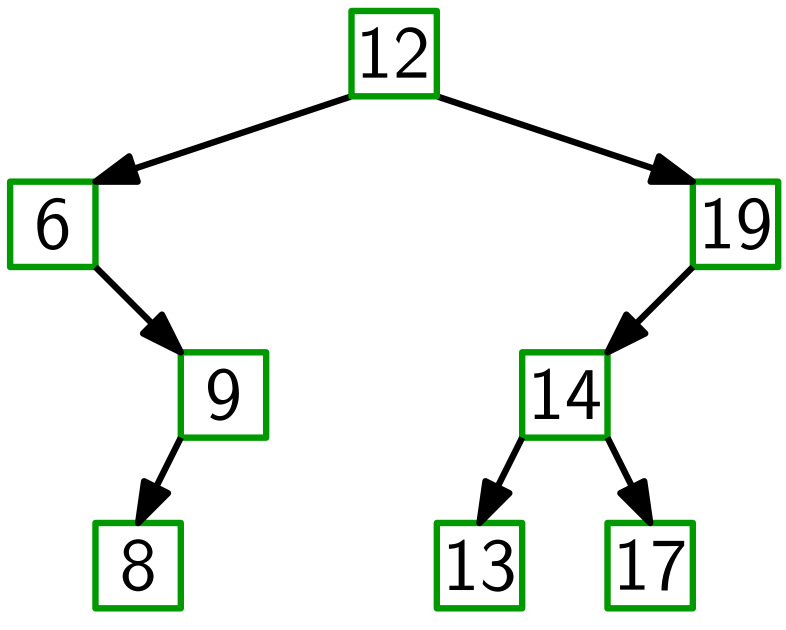


Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!

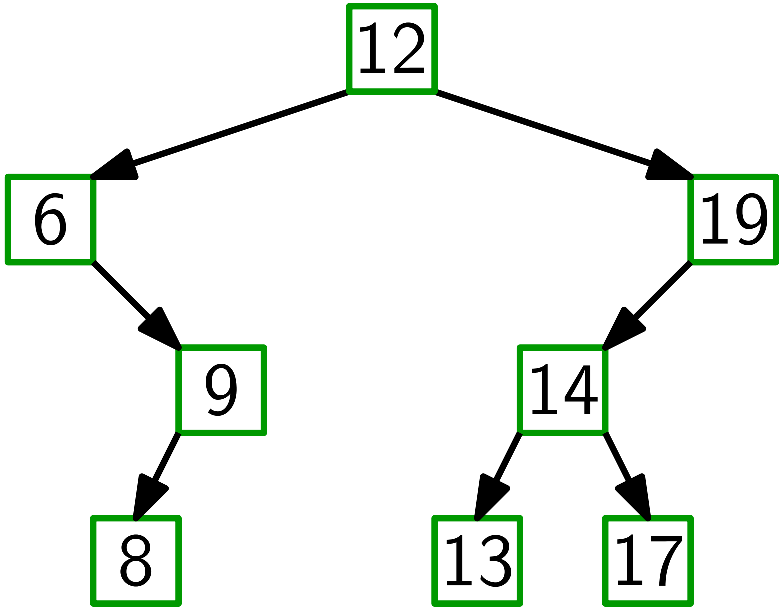


Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!
$\Rightarrow \; h \in O(\log n)$

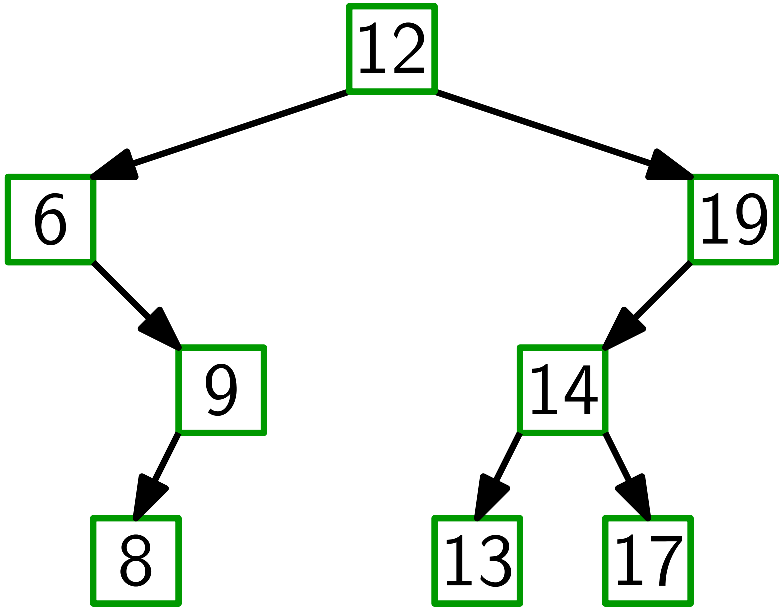


Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!
$\Rightarrow \ h \in O(\log n)$



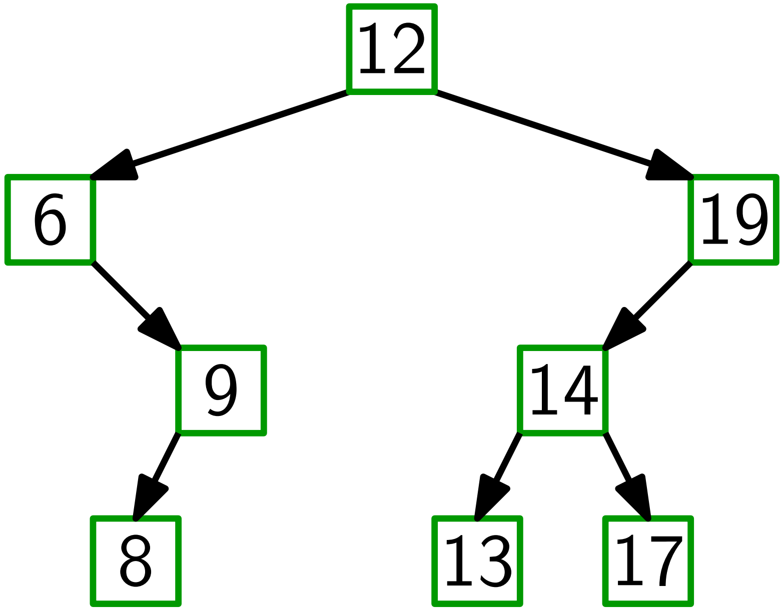
Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!
$\Rightarrow \; h \in O(\log n)$



Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

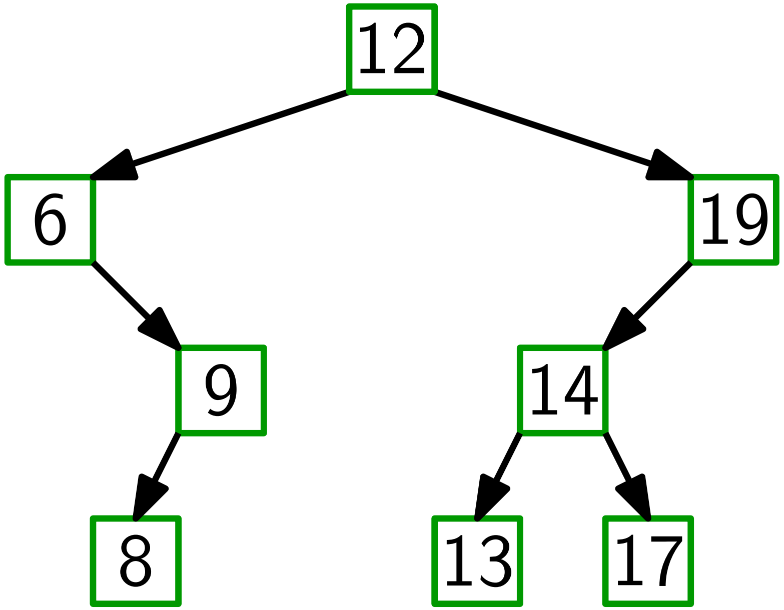
Für jeden Knoten v gilt:

Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!
$\Rightarrow \; h \in O(\log n)$



Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

Für jeden Knoten v gilt:

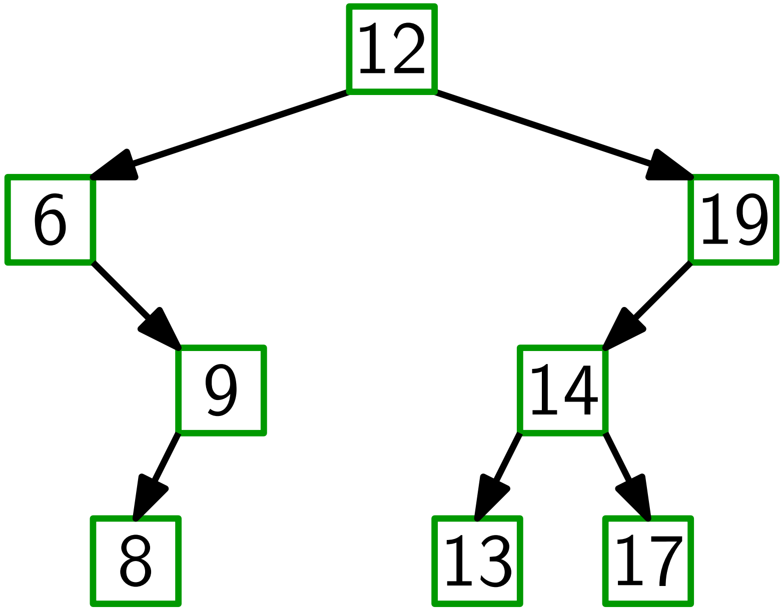
alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$

Binäre Suchbäume

Satz. Binäre Suchbäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(h)$ Zeit, wobei h die momentane Höhe des Baums ist.

Aber: Im schlechtesten Fall gilt $h \in \Theta(n)$.

Ziel: Suchbäume *balancieren*!
$\Rightarrow \; h \in O(\log n)$



Binärer-Suchbaum-Eigenschaft:

Für jeden Knoten v gilt:

alle Knoten im linken Teilbaum von v haben Schlüssel $\leq v.key$
rechten $\geq$

Balaciermethoden


(c) Rhein-Zeitung, 2.8.1998

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) von linkem u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

Balaciermethoden

nach **Gewicht**

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) von linkem
u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach **Höhe**

für jeden Knoten ist die Höhe
von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

Balaciermethoden

nach Gewicht

für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) von linkem u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach Höhe

für jeden Knoten ist die Höhe von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach Grad

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

Balaciermethoden


(c) Rhein-Zeitung, 2.8.1998

nach Gewicht

für jeden Knoten ist das Gewicht
(= Anzahl der Knoten) von linkem
u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach Höhe

für jeden Knoten ist die Höhe
von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach Grad

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere
Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach Knotenfarbe

jeder Knoten ist entw. „gut“ oder „schlecht“; der Anteil
schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Balaciermethoden

Beispiele


(c) Rhein-Zeitung, 2.8.1998

nach **Gewicht** $BB[\alpha]$-Bäume

für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) von linkem u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach **Höhe** AVL-Bäume*

für jeden Knoten ist die Höhe von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach **Grad** $(2,3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe** Rot-Schwarz-Bäume

jeder Knoten ist entw. „gut“ oder „schlecht“; der Anteil schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

(c) Rhein-Zeitung, 2.8.1998

Balaciermethoden

Beispiele

nach **Gewicht** $BB[\alpha]$-Bäume

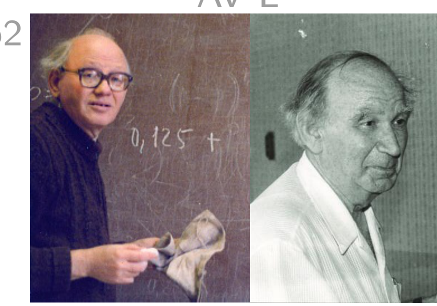
für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) von linkem u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach **Höhe** AVL-Bäume*

für jeden Knoten ist die Höhe von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

*) Georgi M. Adelson-Velski & Jewgeni M. Landis, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1962

AV L



1922–2014 1921–1997

nach **Grad** $(2,3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe** Rot-Schwarz-Bäume

jeder Knoten ist entw. „gut“ oder „schlecht“; der Anteil schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Fotos: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University (AV), Konrad Jacobs / wikipedia (L)

(c) Rhein-Zeitung, 2.8.1998

Balaciermethoden

Beispiele

nach **Gewicht** — $BB[\alpha]$-Bäume

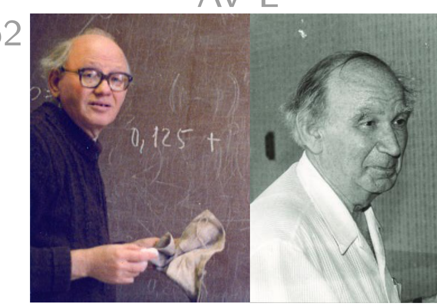
für jeden Knoten ist das Gewicht (= Anzahl der Knoten) von linkem u. rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

nach **Höhe** — AVL-Bäume*

für jeden Knoten ist die Höhe von linkem und rechtem Teilbaum ungefähr gleich.

*) Georgi M. Adelson-Velski & Jewgeni M. Landis, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1962

AV L



1922–2014 1921–1997

nach **Grad** — $(2,3)$-Bäume

alle Blätter haben dieselbe Tiefe, aber innere Knoten können verschieden viele Kinder haben.

nach **Knotenfarbe** — Rot-Schwarz-Bäume

jeder Knoten ist entw. „gut“ oder „schlecht“; der Anteil schlechter Knoten darf in keinem Teilbaum zu groß sein.

Fotos: The Eugene Dynkin Collection, Cornell University (AV), Konrad Jacobs / wikipedia (L)

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*

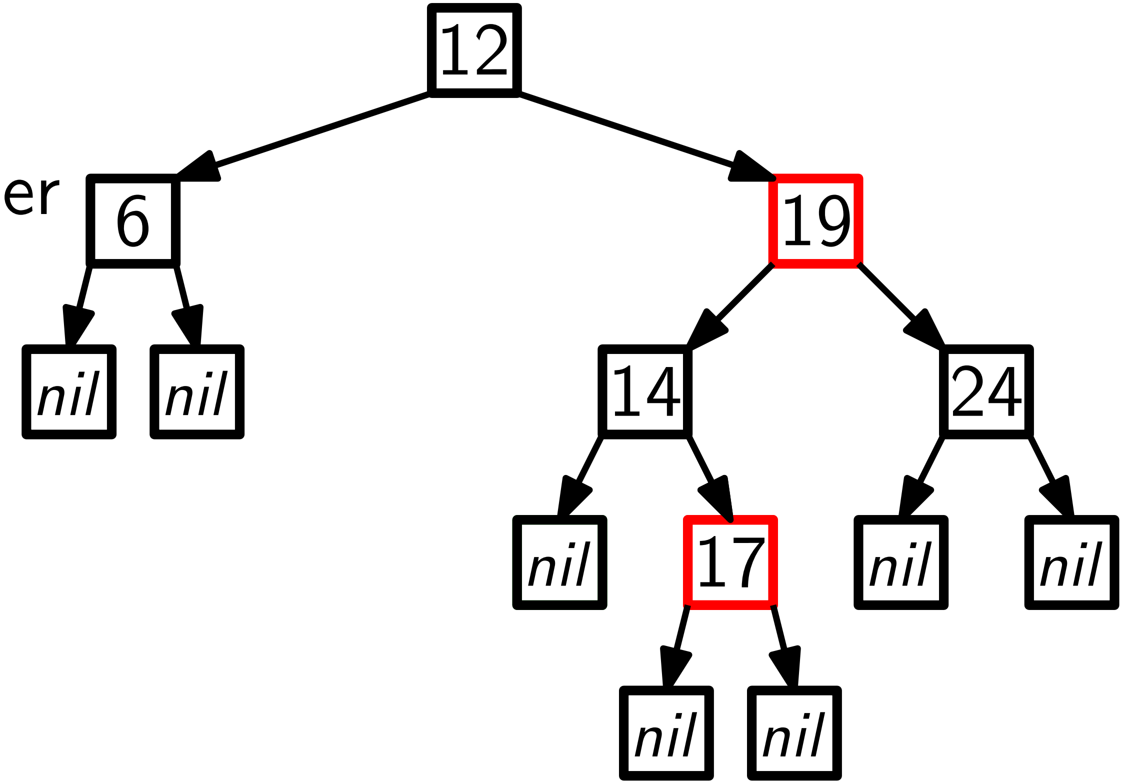
Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*

(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



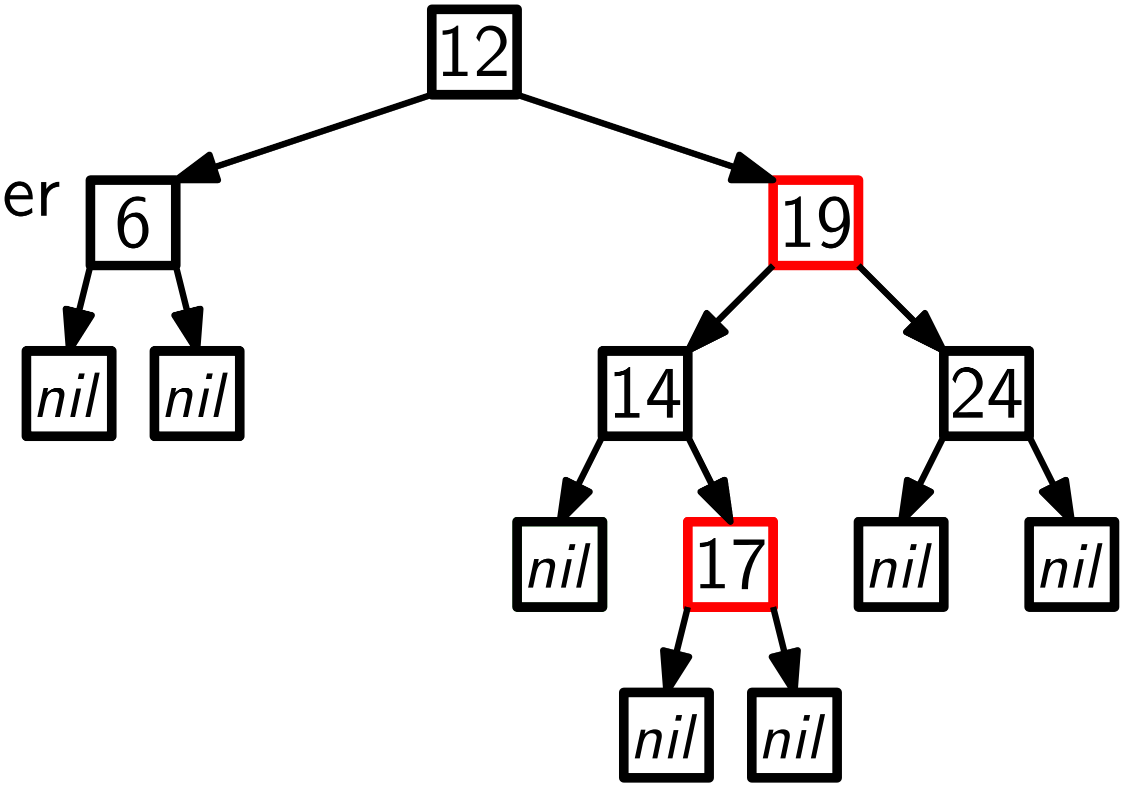
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*

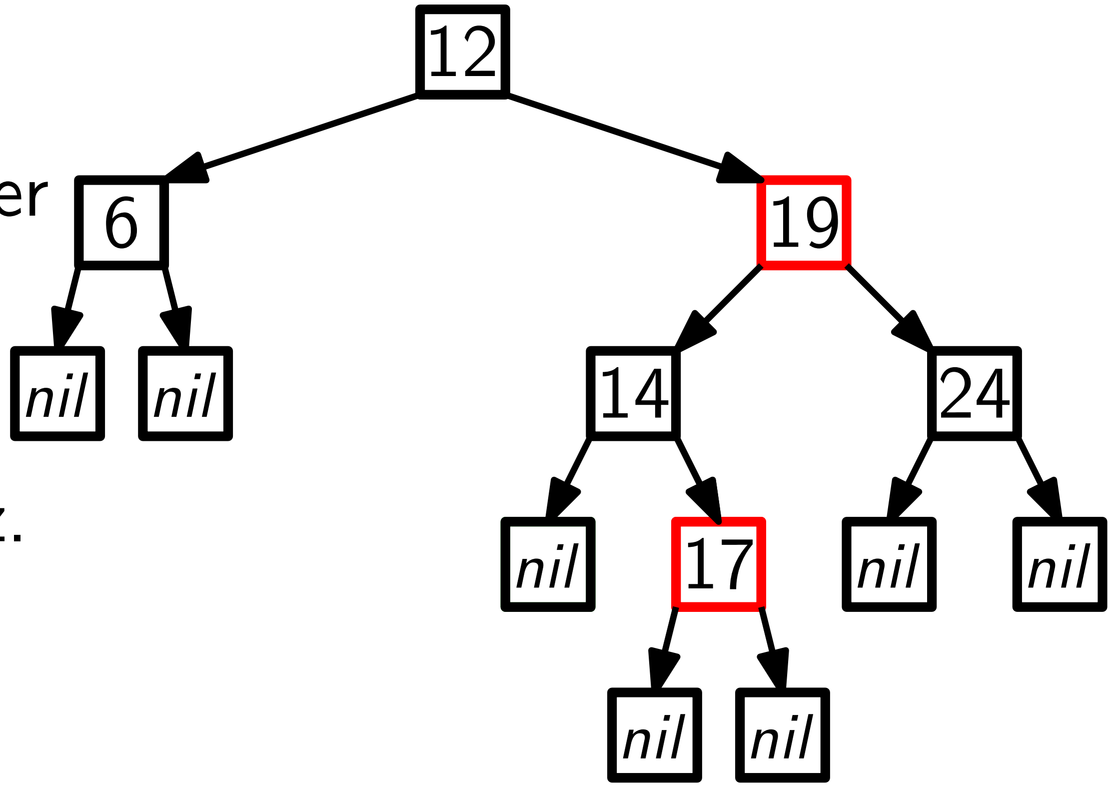
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.



Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



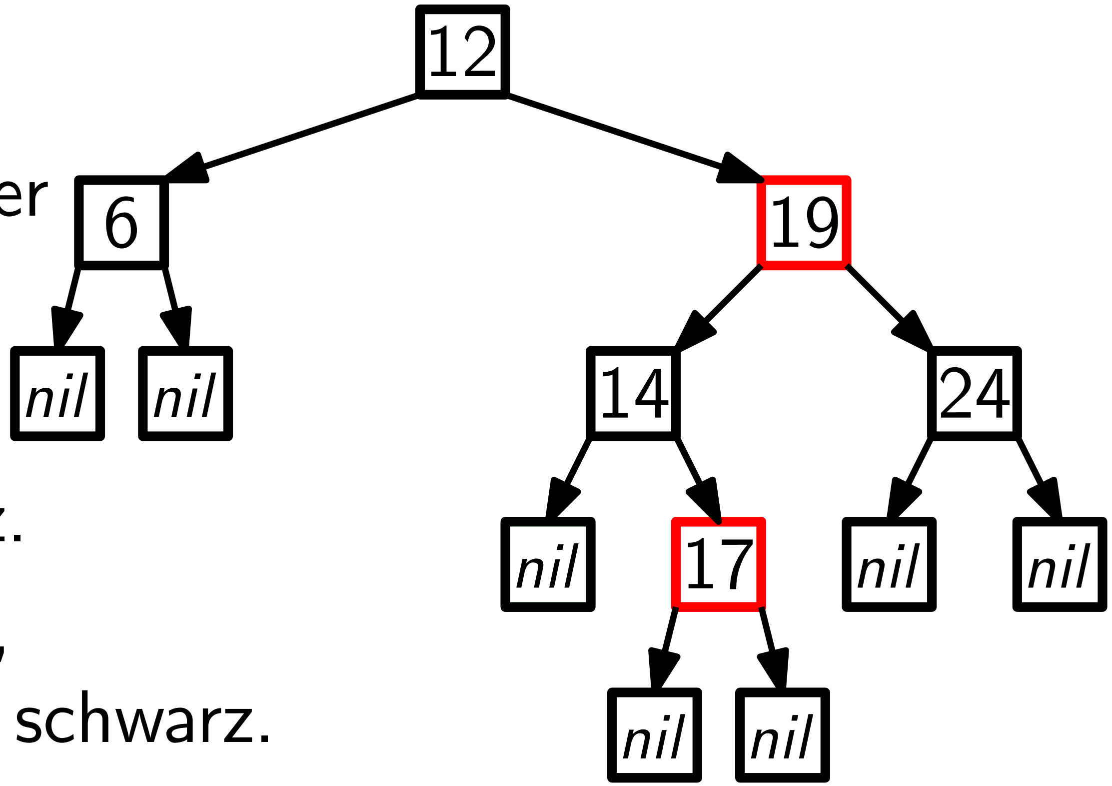
(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle Blätter sind schwarz.

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

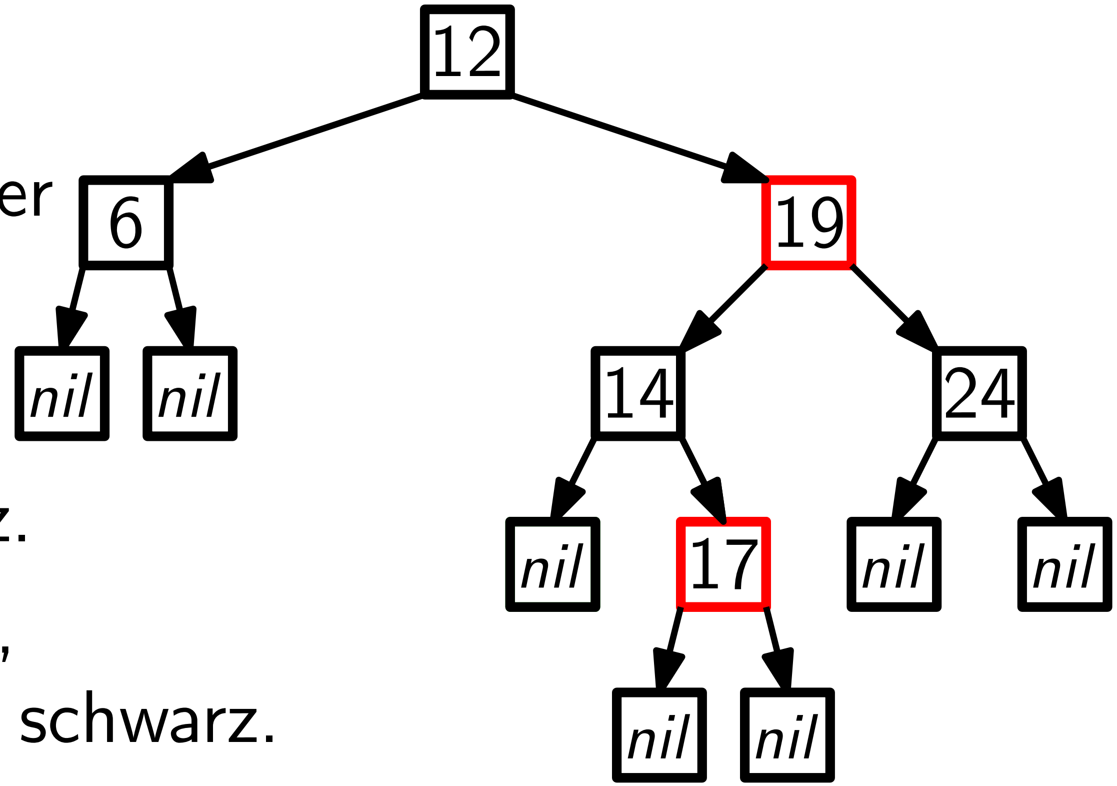
(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle Blätter sind schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

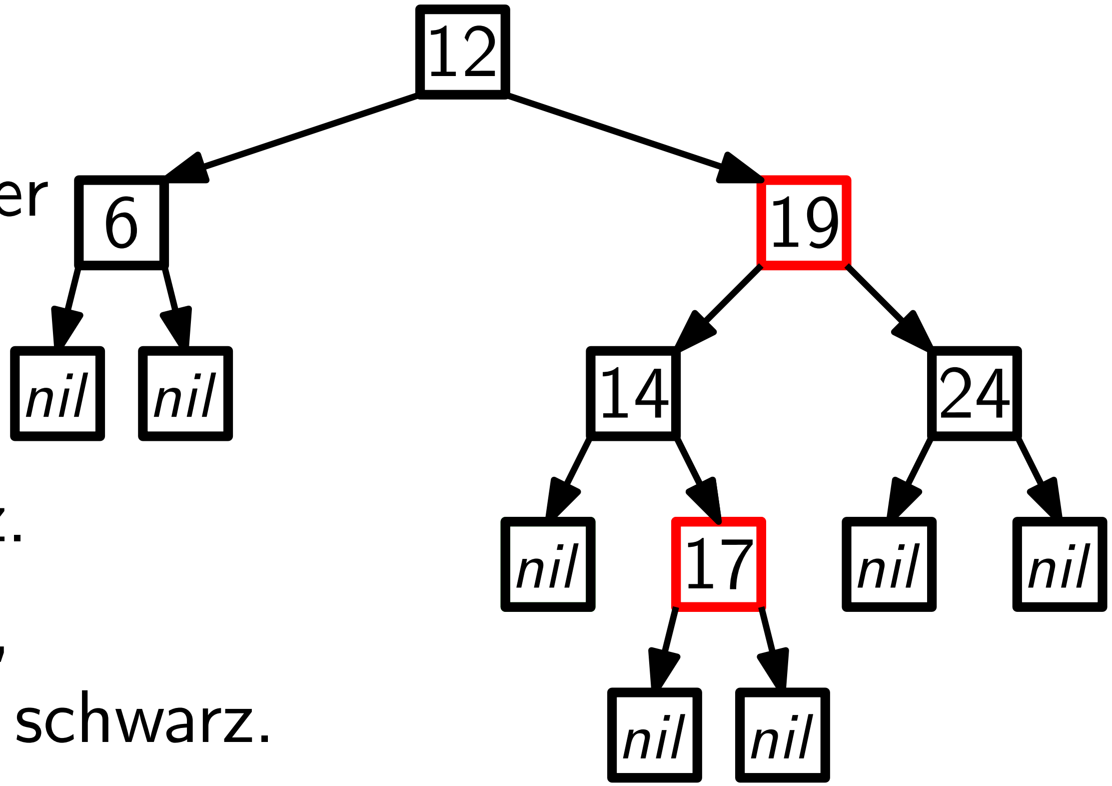
(E3) Alle Blätter sind schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

(E3) Alle Blätter sind schwarz.

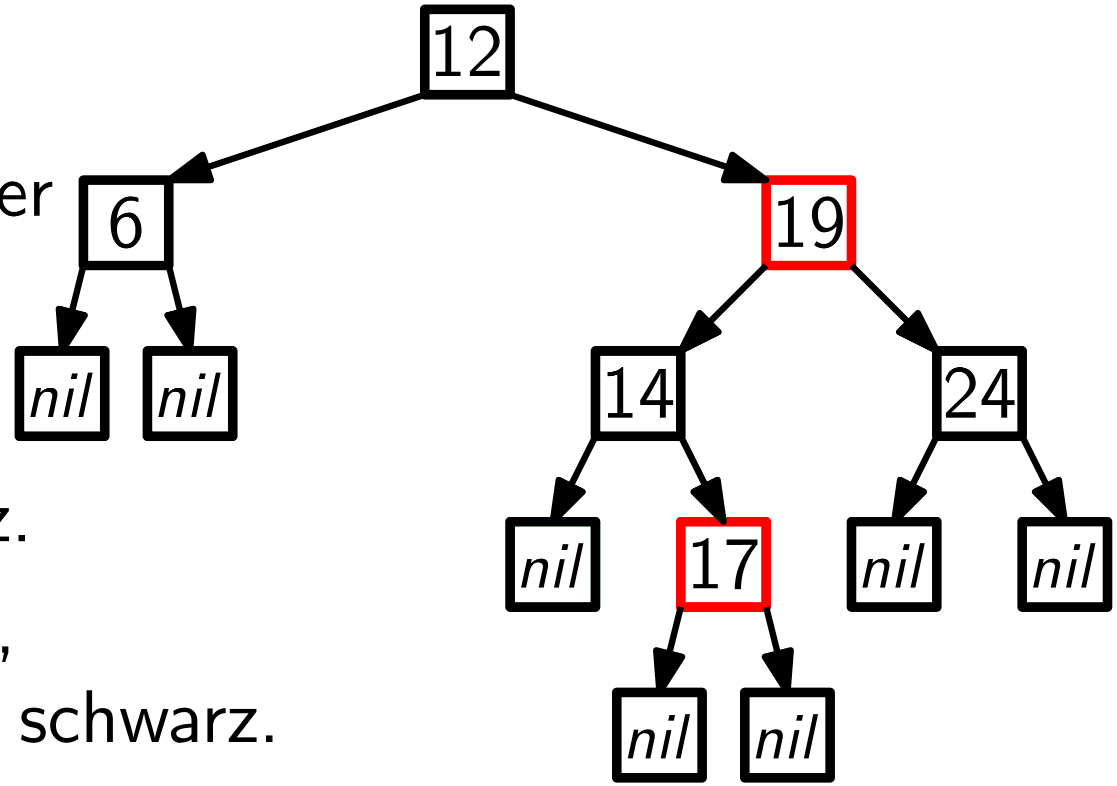
(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

Aus (E4) folgt:

Rot-Schwarz-Bäume: Eigenschaften

Rot-Schwarz-Bäume sind binäre Suchbäume mit folgenden *Rot-Schwarz-Eigenschaften:*



(E1) Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

(E2) Die Wurzel ist schwarz.

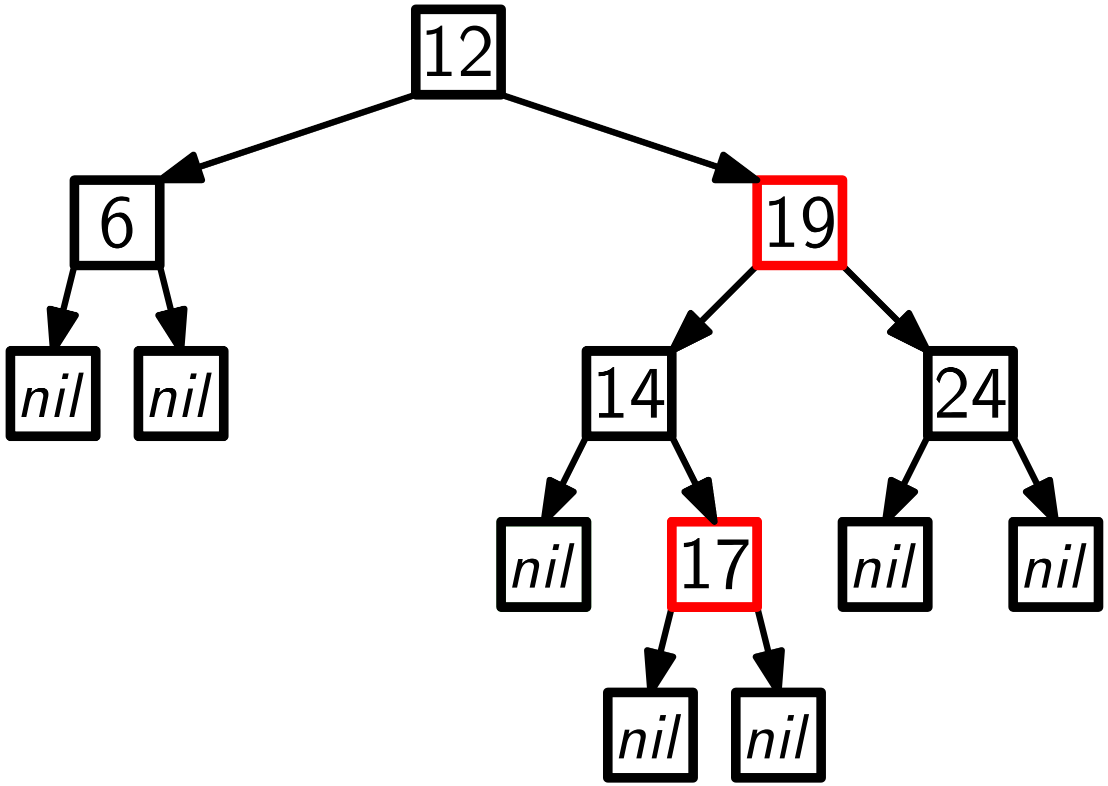
(E3) Alle Blätter sind schwarz.

(E4) Wenn ein Knoten rot ist, sind seine beiden Kinder schwarz.

(E5) Für jeden Teilbaum gilt: alle Wurzel-Blatt-Pfade enthalten dieselbe Anzahl schwarzer Knoten.

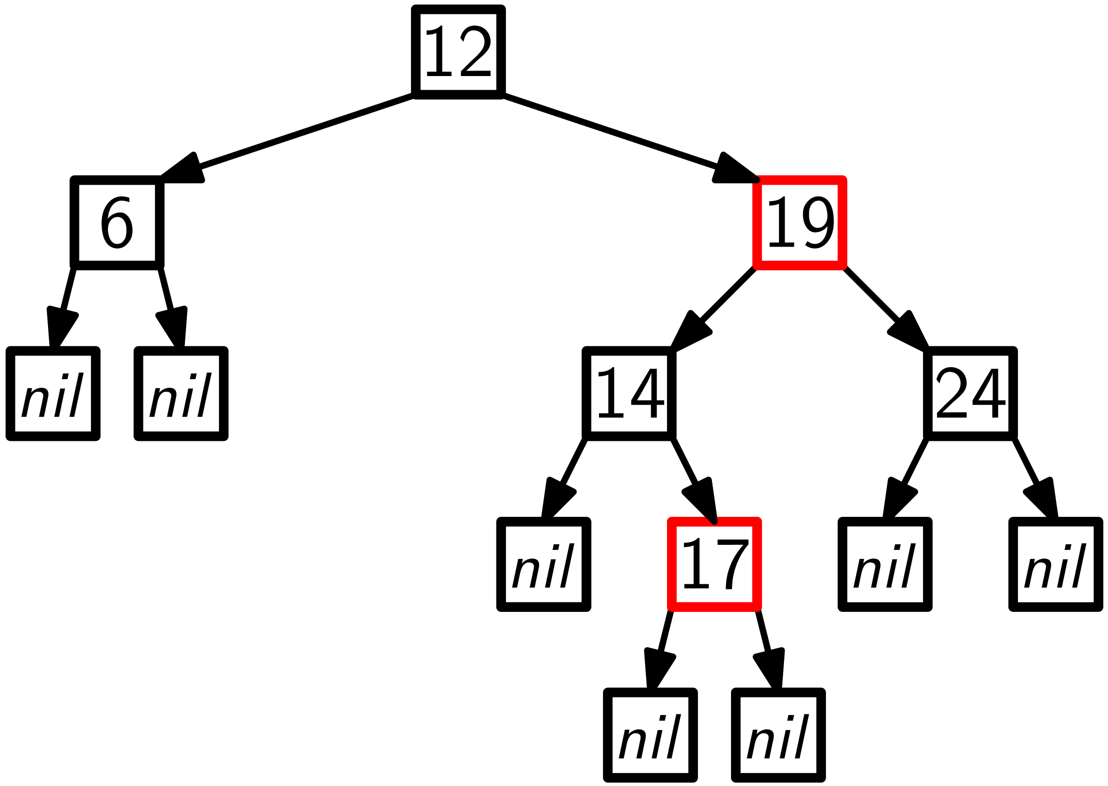
Aus (E4) folgt: Auf keinem Wurzel-Blatt-Pfad folgen zwei rote Knoten direkt auf einander.

Technisches Detail

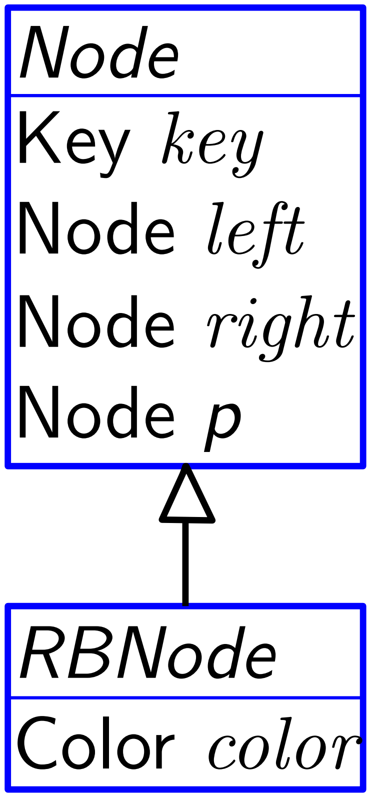


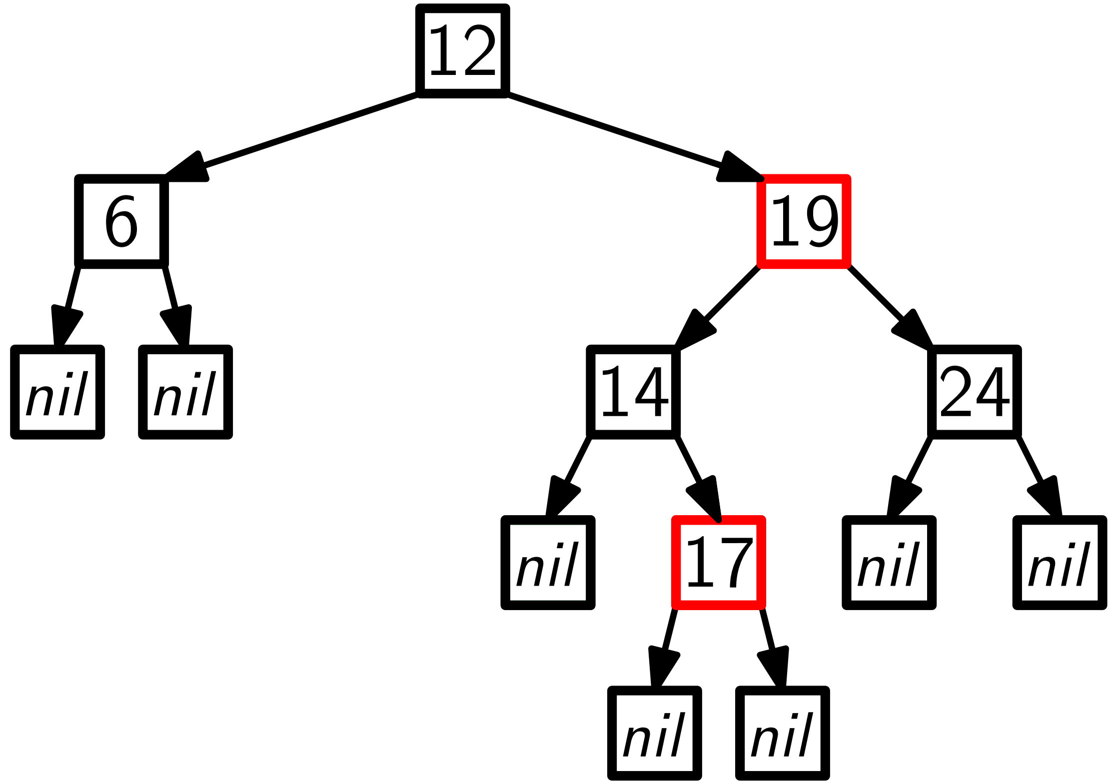
Technisches Detail

Node
Key key
Node $left$
Node $right$
Node *p*

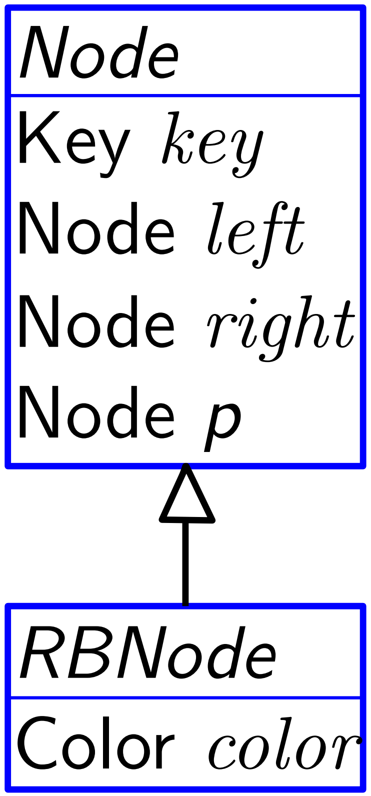


Technisches Detail

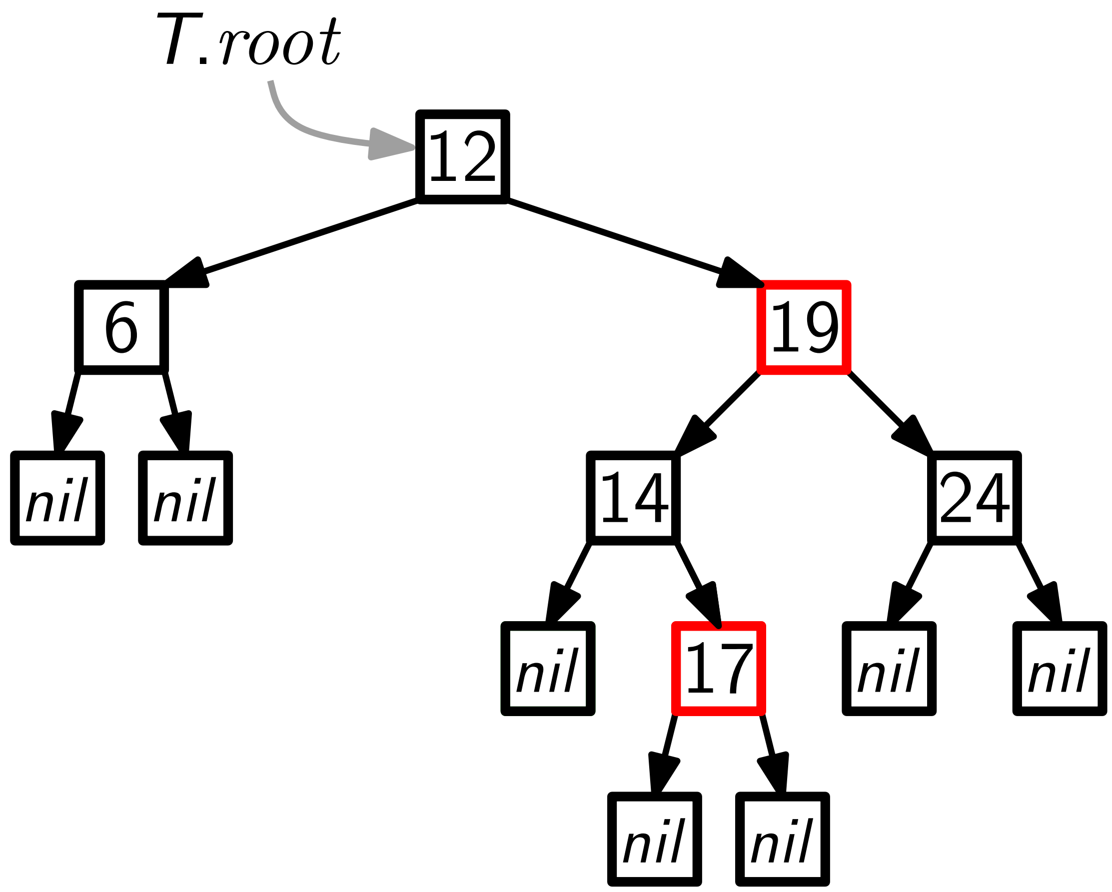




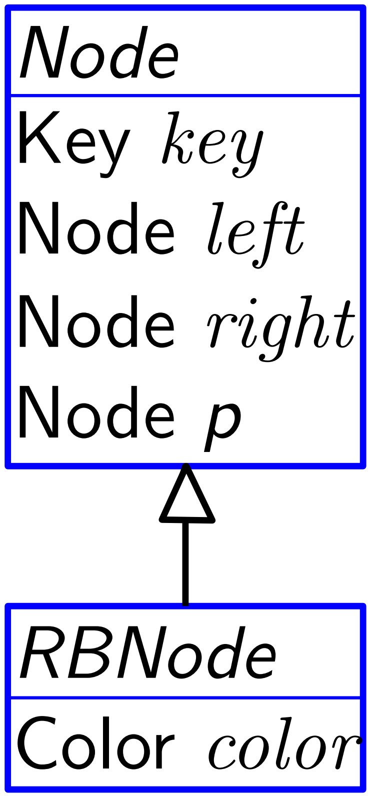
Technisches Detail



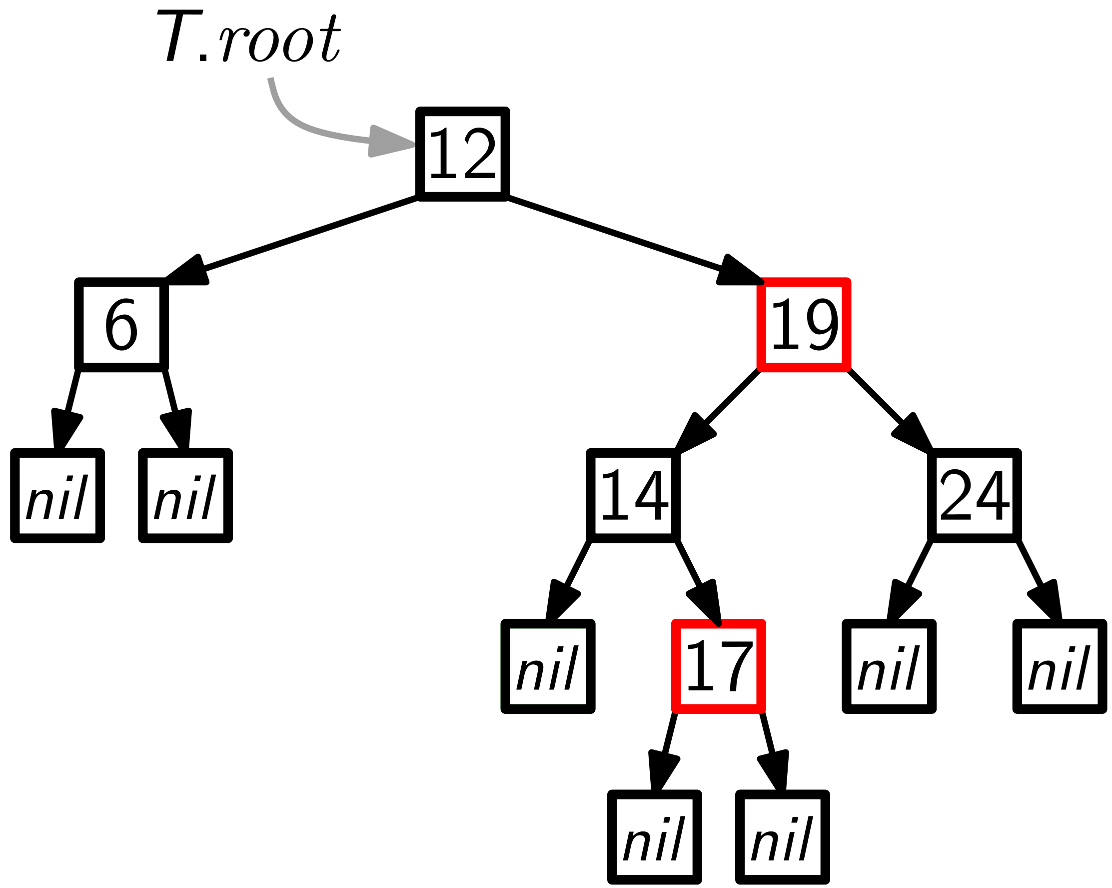
$T.root$



Technisches Detail



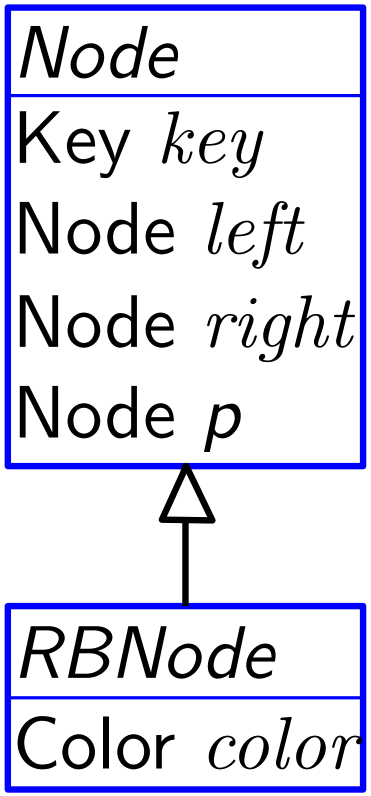
$T.root$, $T.nil$



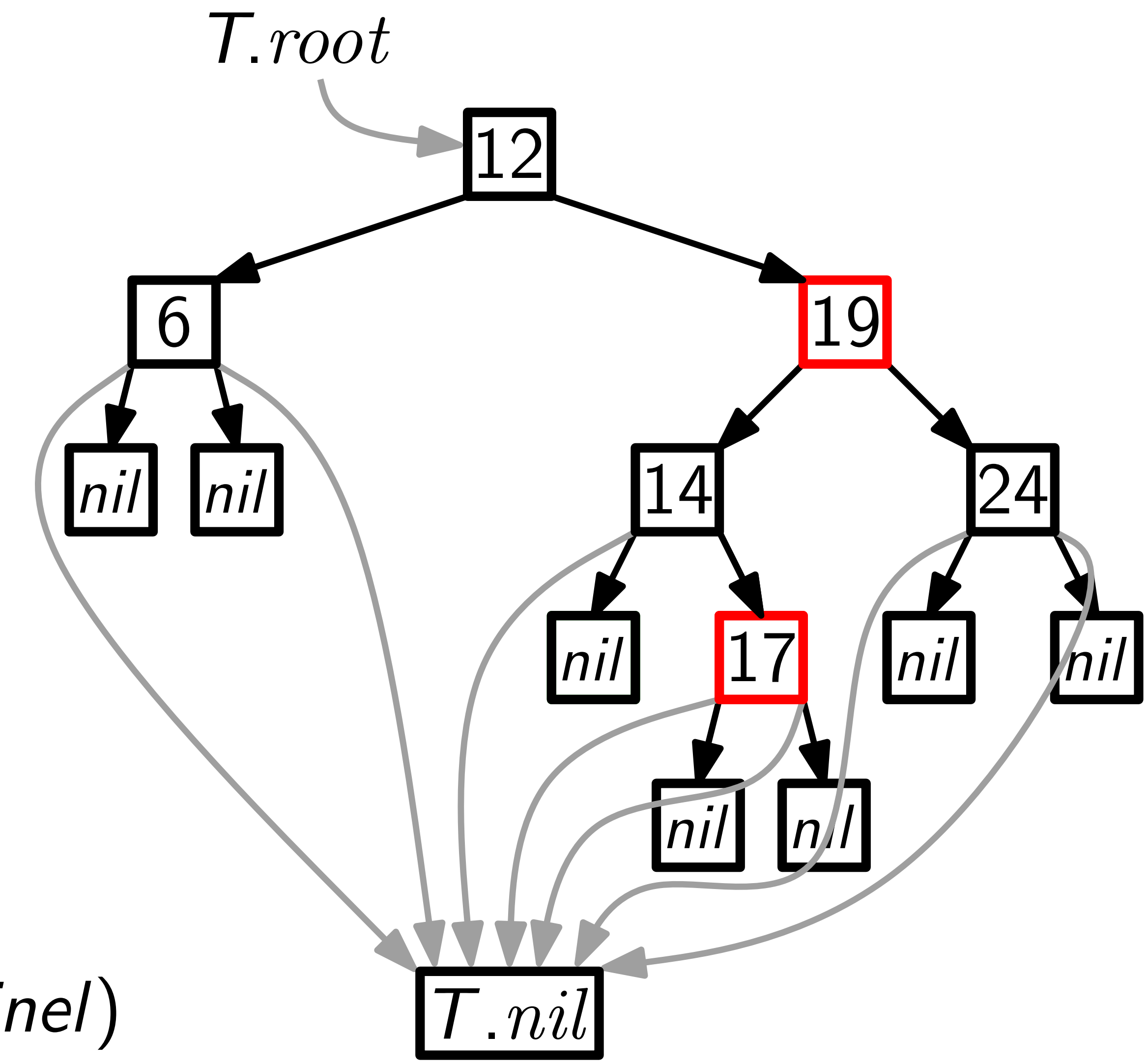
Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

$\boxed{T.nil}$

Technisches Detail

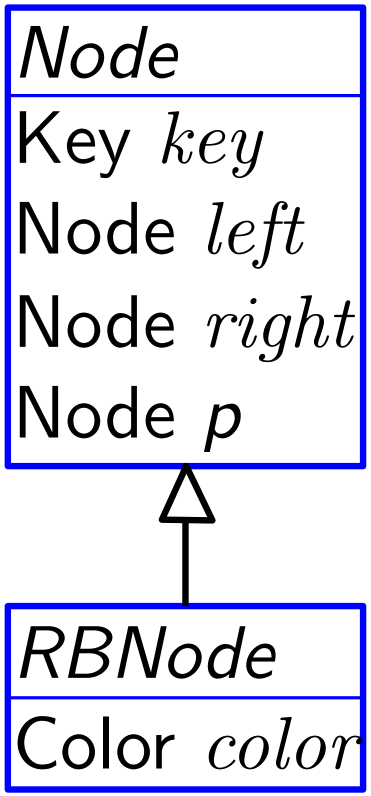


$T.root$, $T.nil$

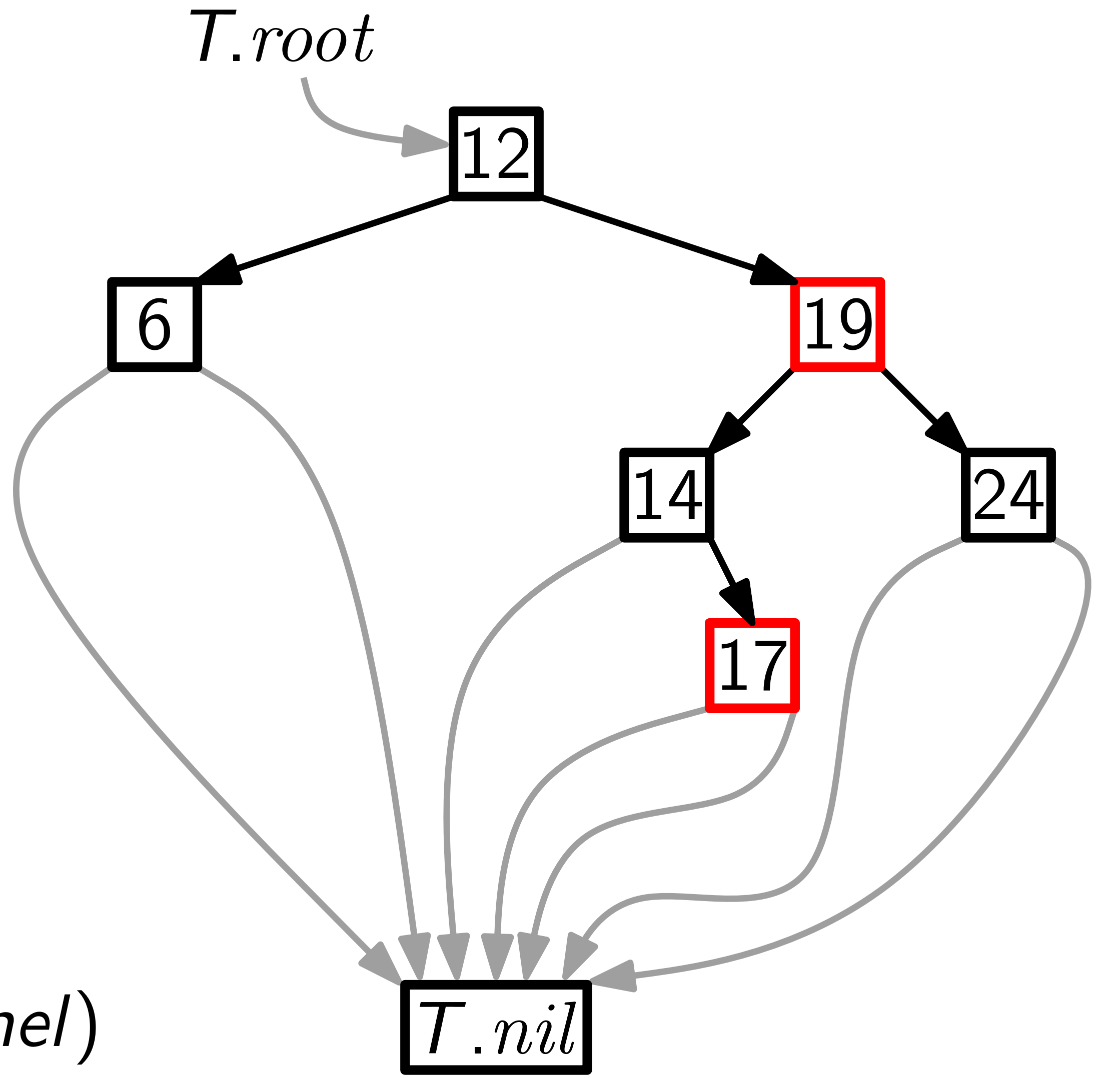


Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

Technisches Detail

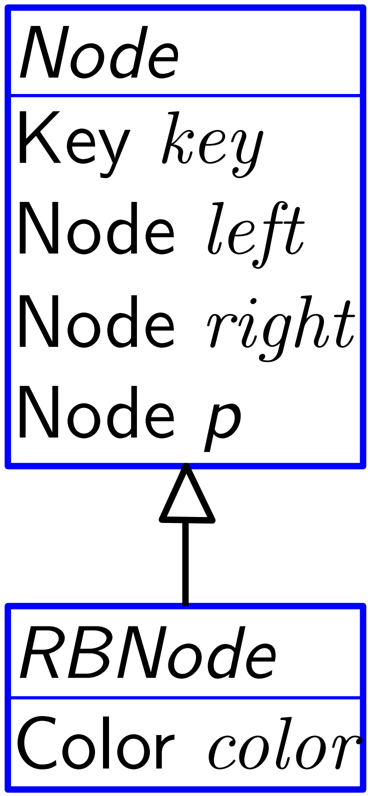


$T.root$, $T.nil$

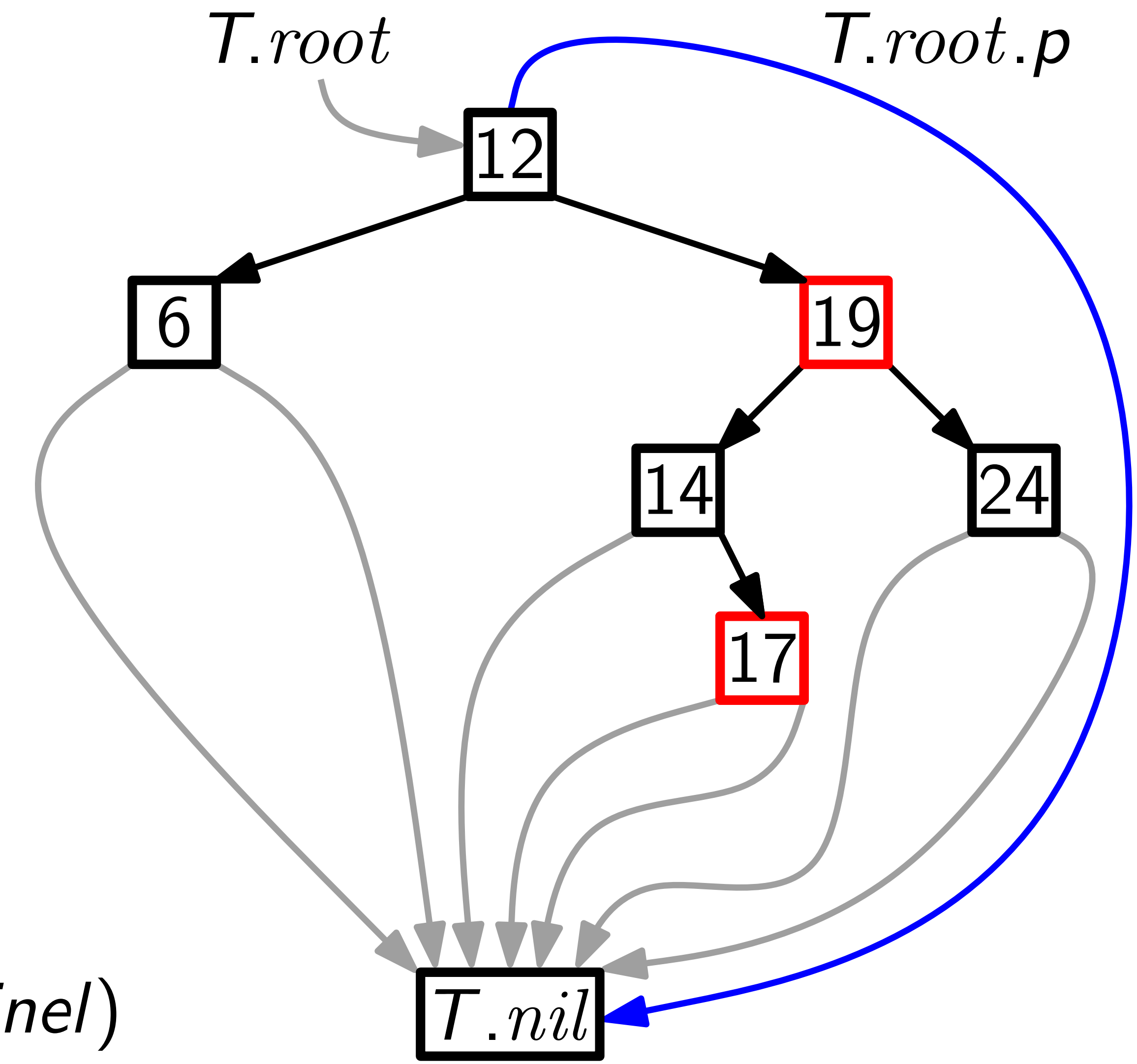


Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

Technisches Detail

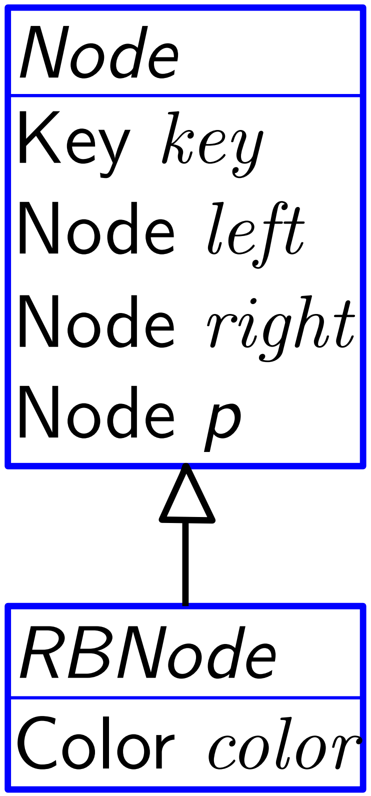


$T.root$, $T.nil$

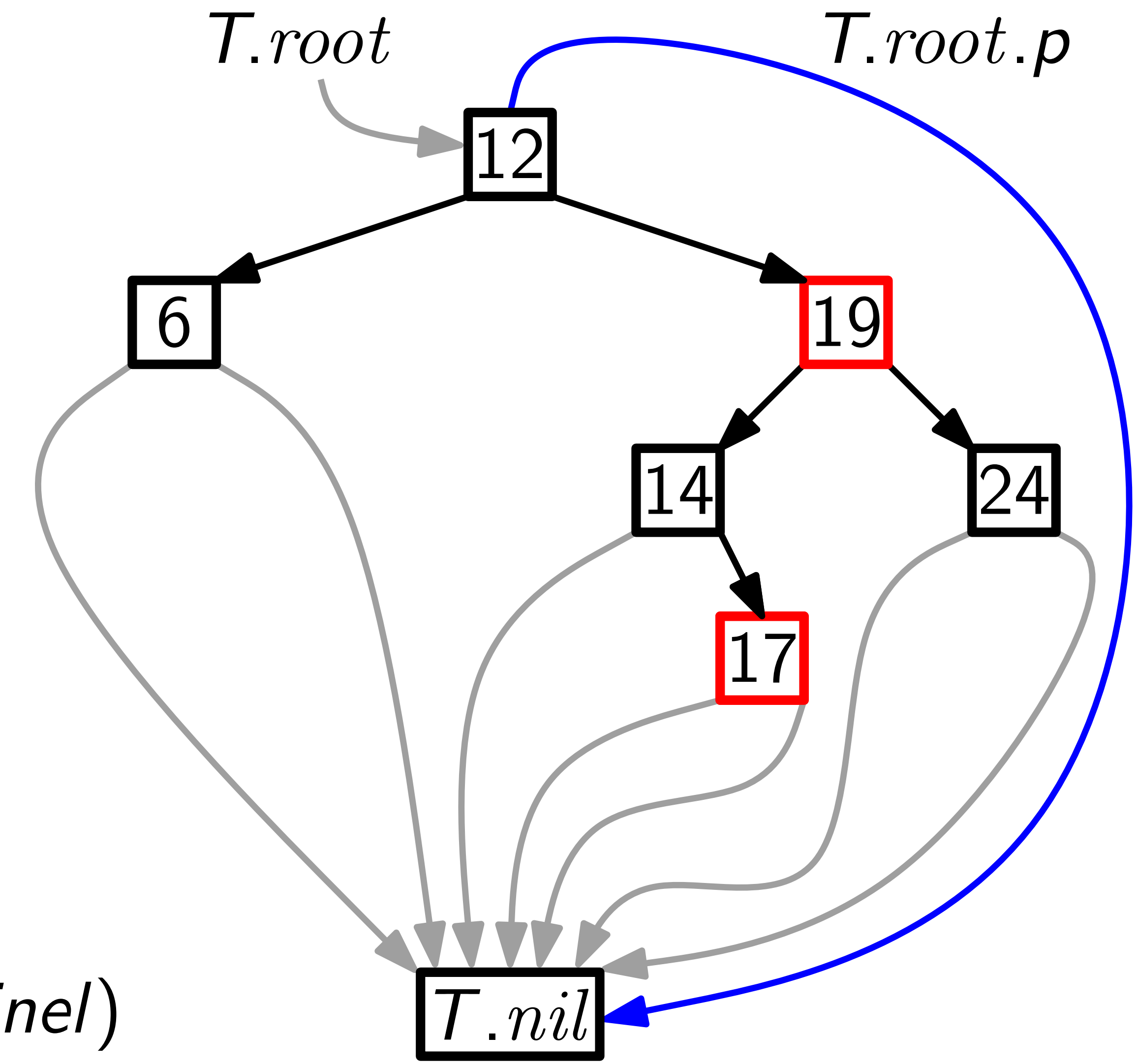


Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

Technisches Detail



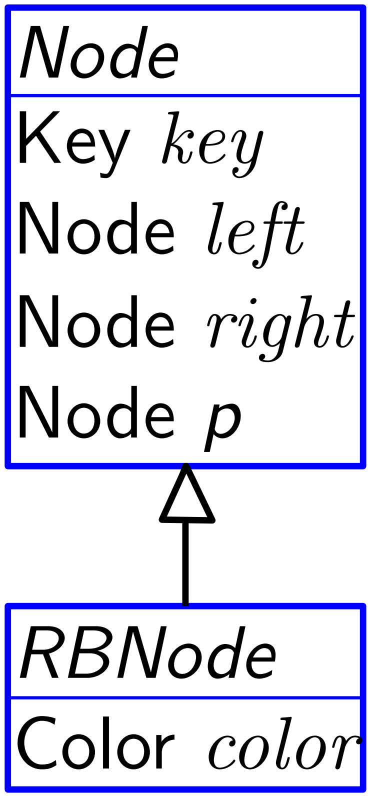
$T.root$, $T.nil$



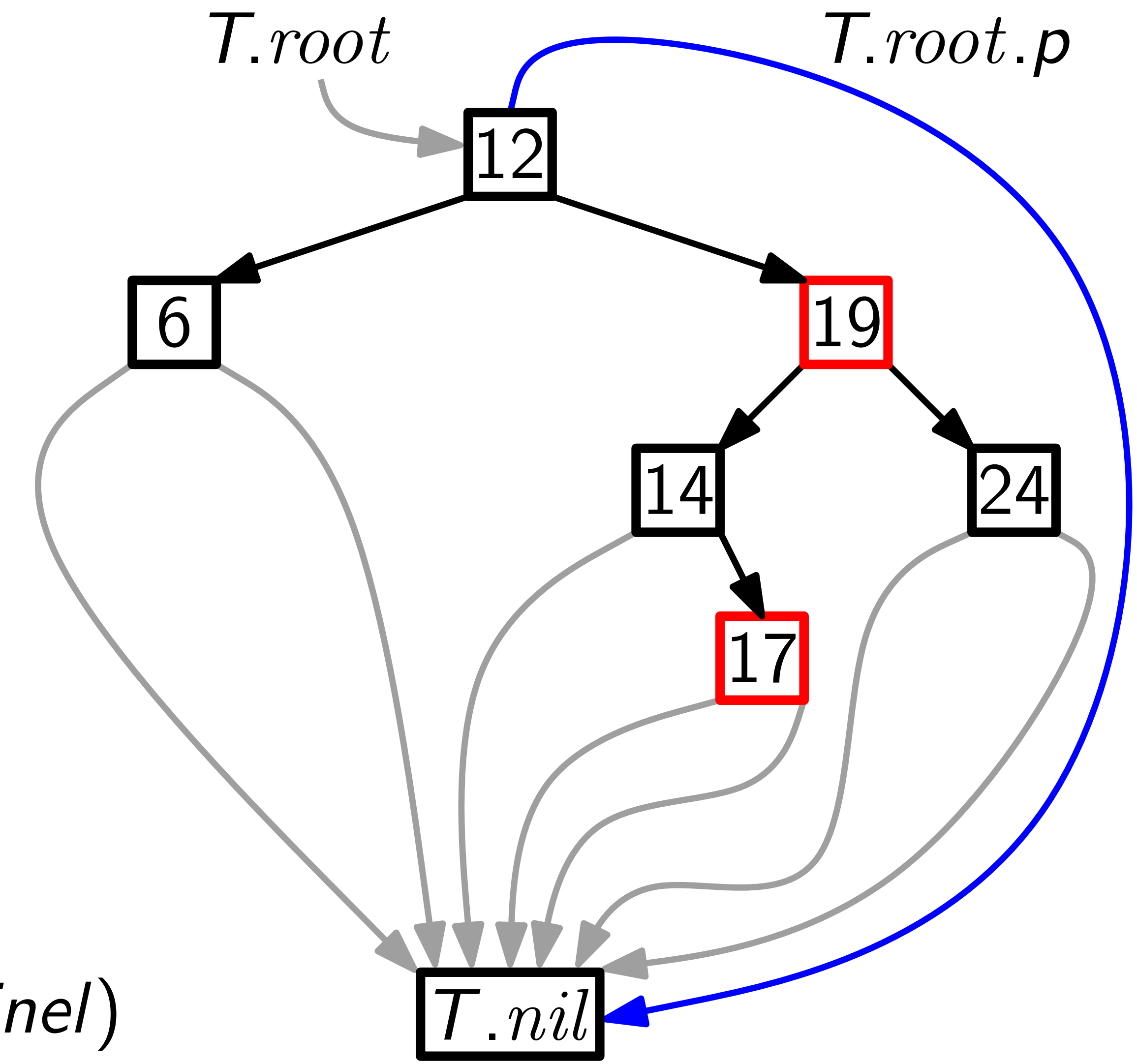
Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können.

Technisches Detail



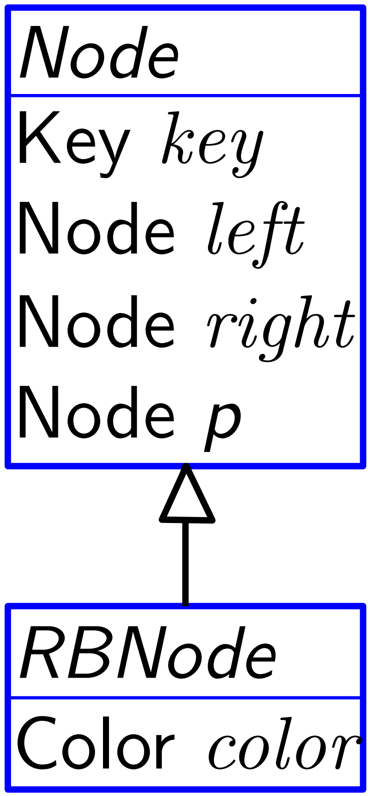
$T.root, \ T.nil$



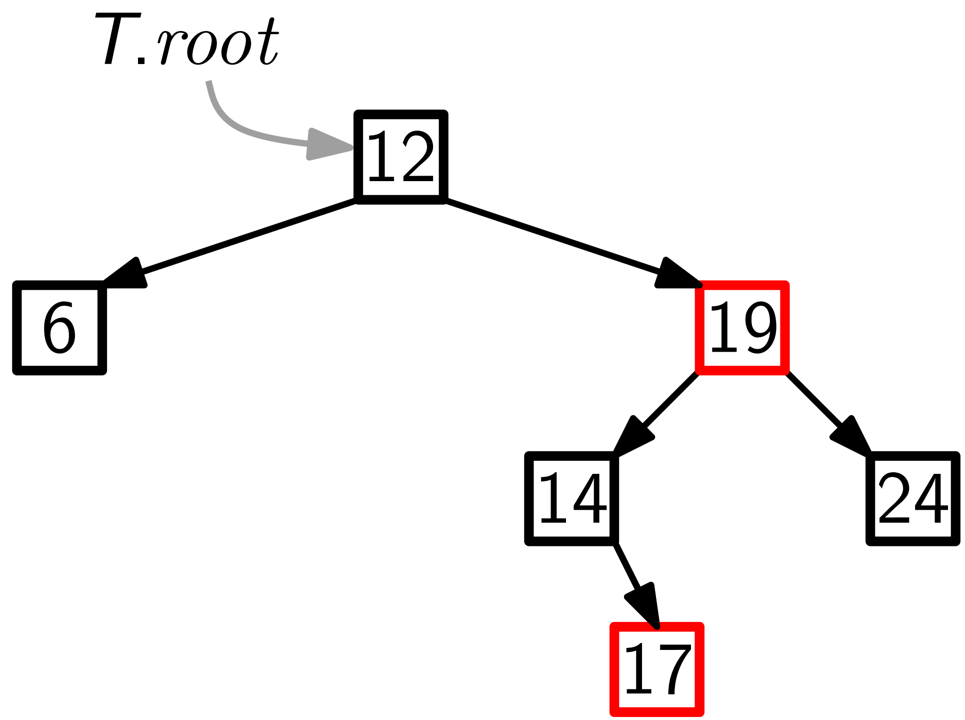
Dummy-Knoten (engl. *sentinel*)

Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können. (Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

Technisches Detail

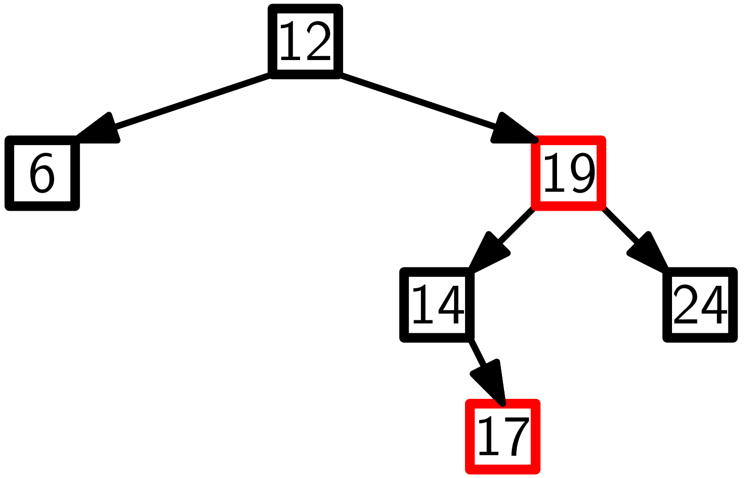


$T.root$, $T.nil$



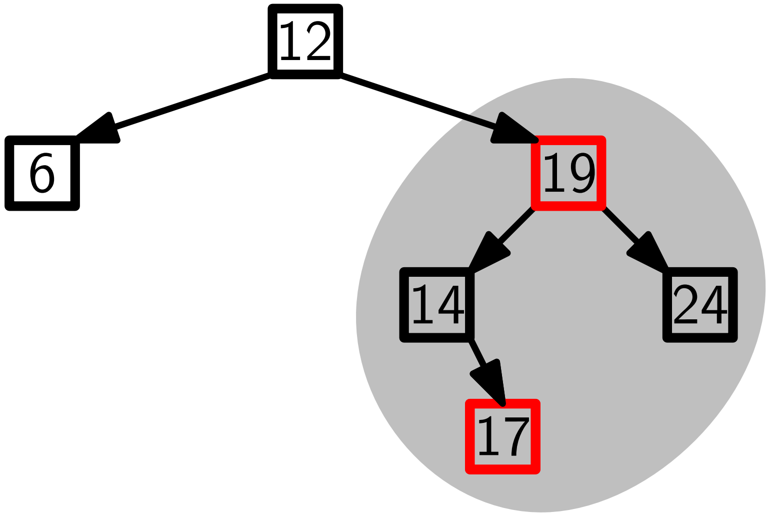
Zweck: um Baum-Operationen prägnanter aufschreiben zu können. (Wir zeichnen den Dummy-Knoten i.A. nicht.)

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

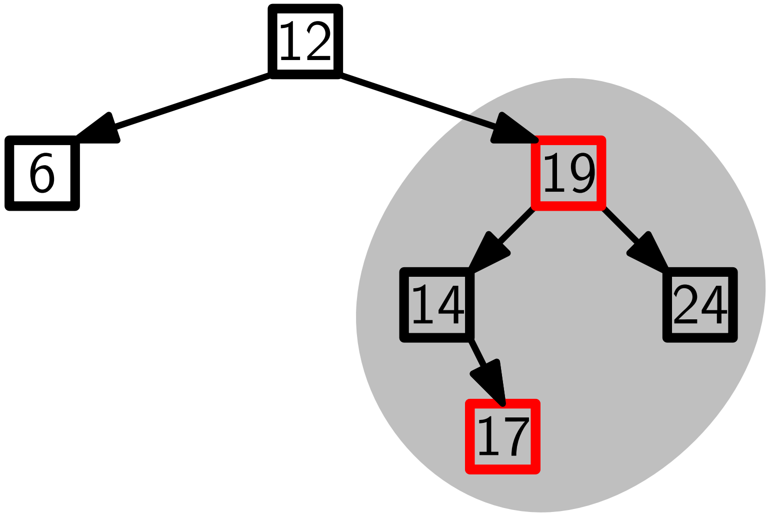
(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

(Schwarz-) Höhe

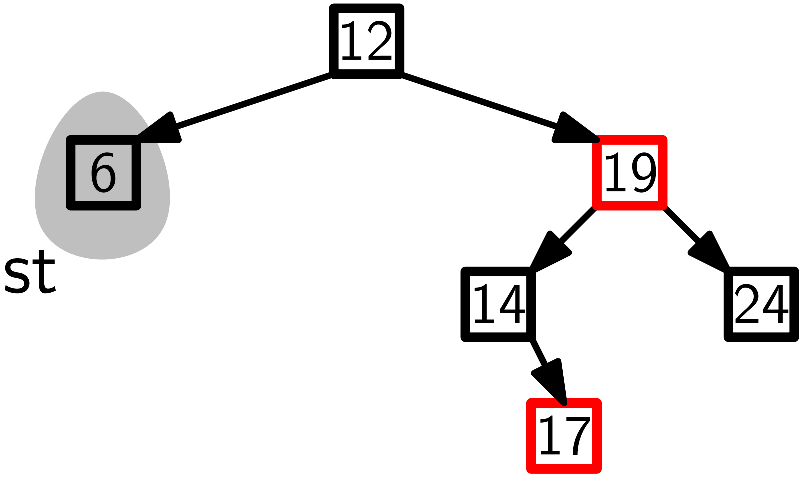


Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“

(Schwarz-) Höhe

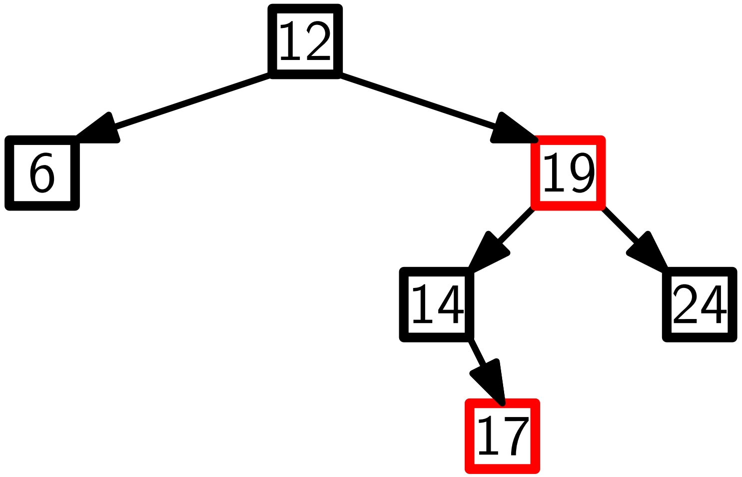


Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

(Schwarz-) Höhe



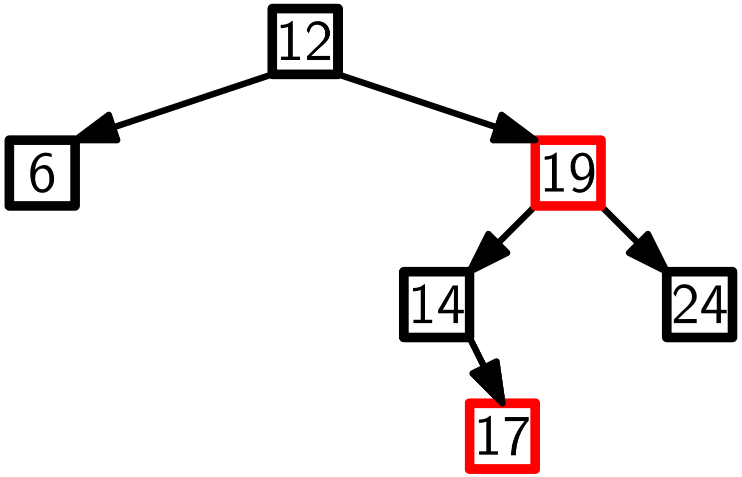
Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

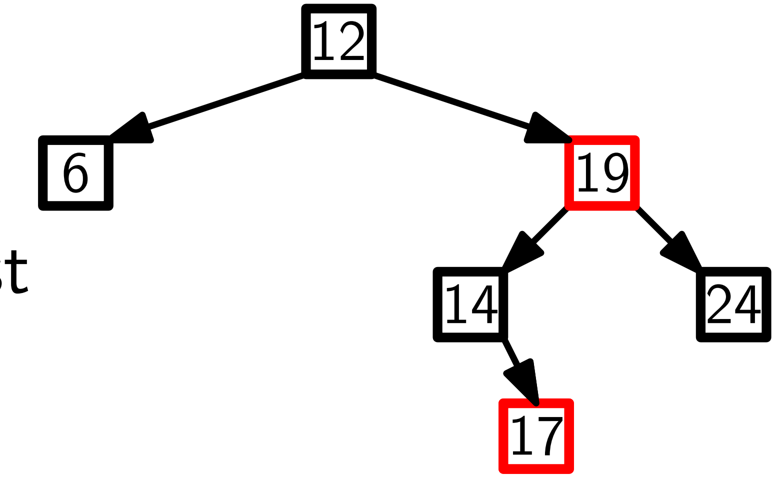
Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition: Die *Höhe* Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten (ohne v) auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

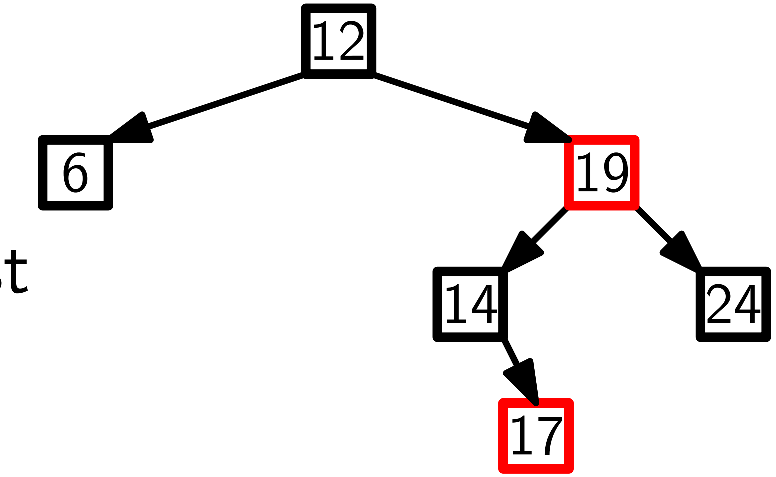
Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition: Die *Höhe* Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten (ohne v) auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

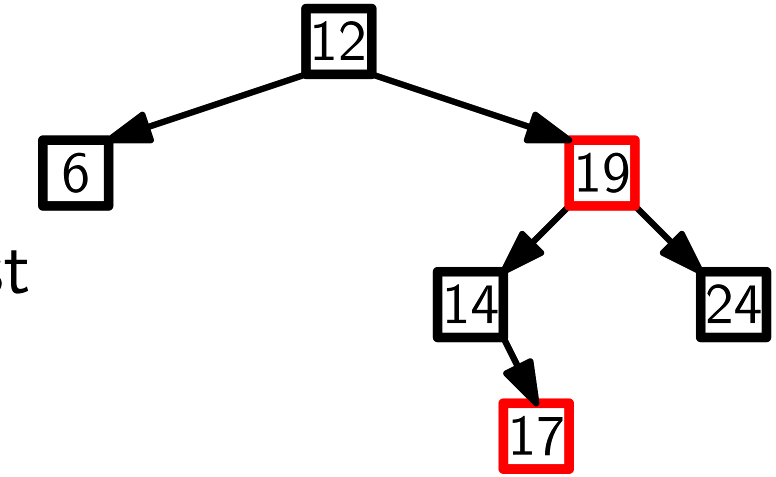
Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition′: Die *Höhe* Höhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der Knoten (ohne v) auf dem längsten Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!)

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

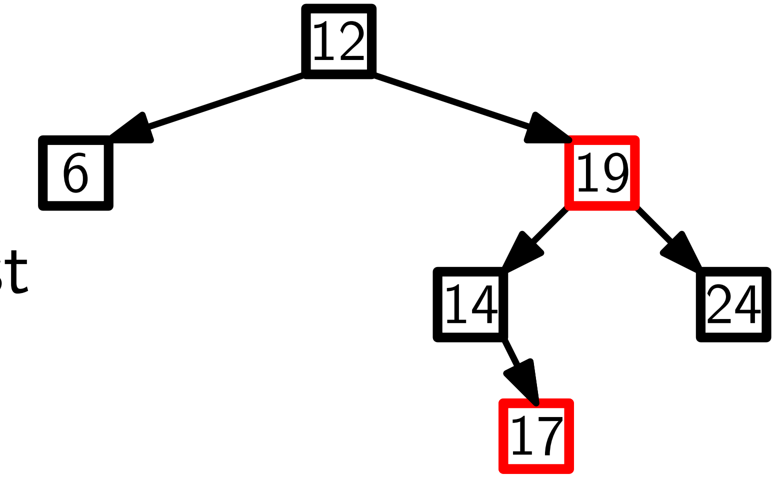
Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!)

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

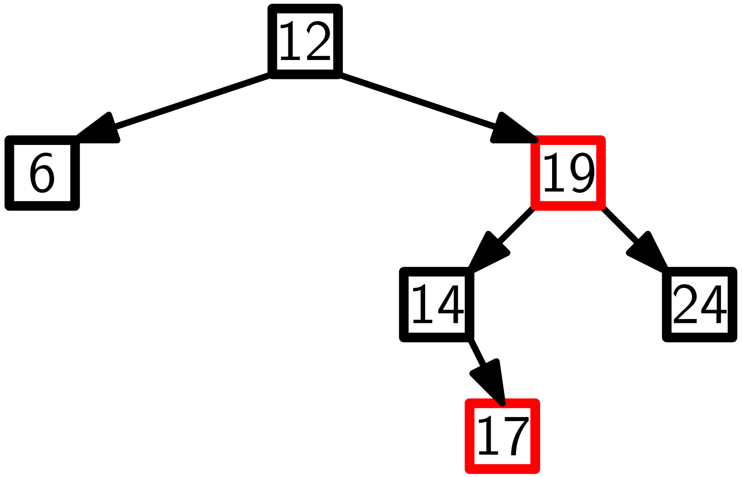
Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!)

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

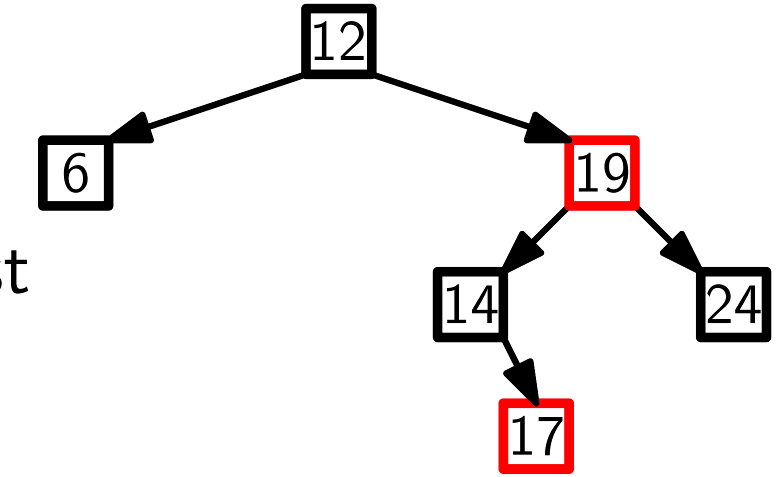
Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

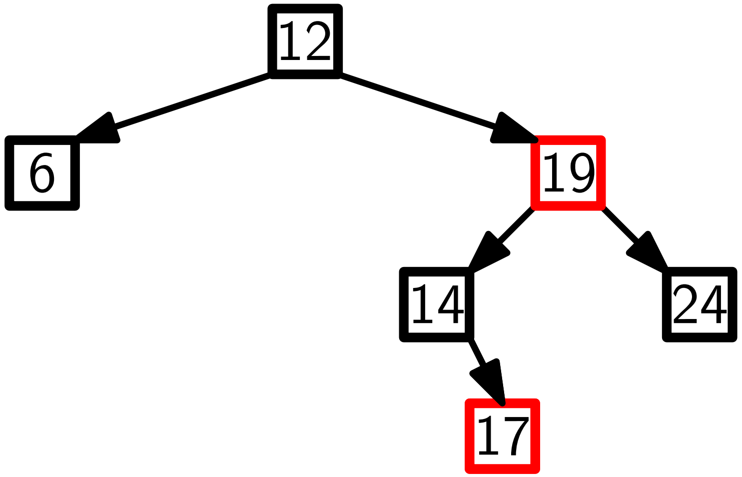
Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

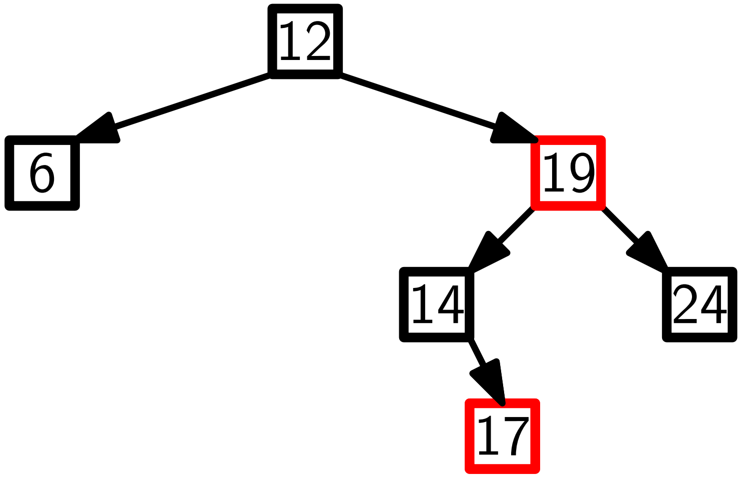
wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

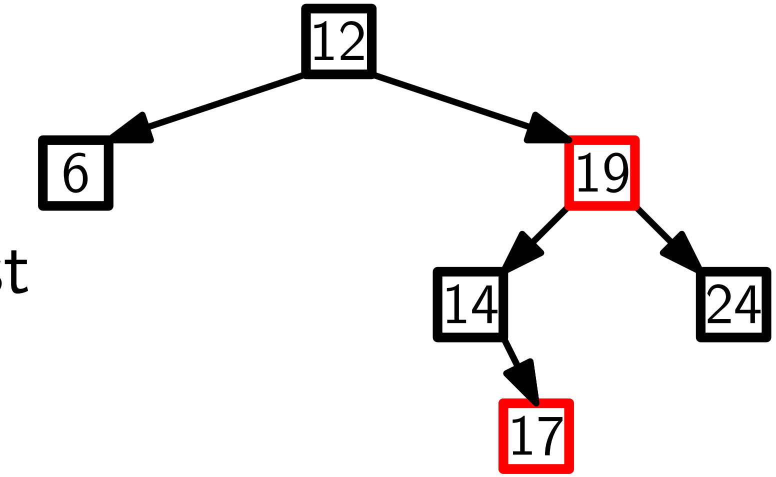
Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

wohl-
definiert
wg. (E5)

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v)

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

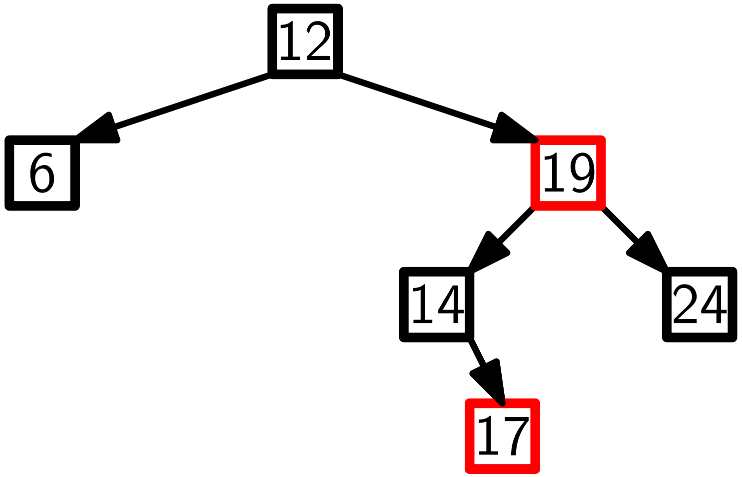
wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v) $\leq$

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17" ist unter „19", „14" ist *nicht* unter „6".

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

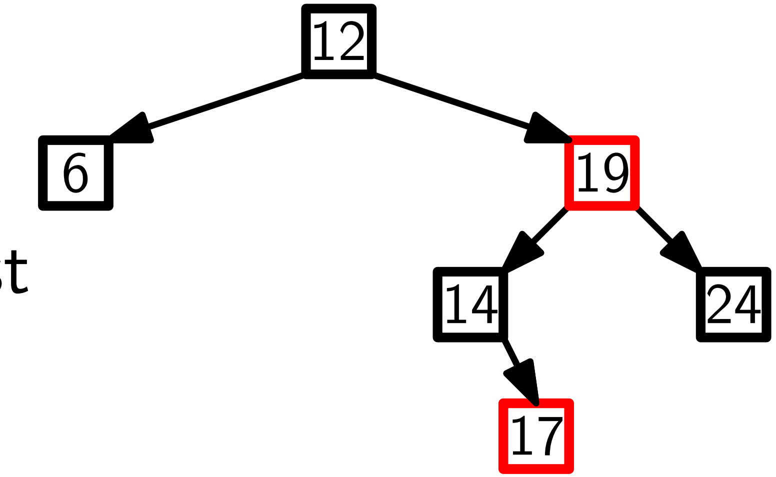
wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12" hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow$ sHöhe(v) $\leq$ Höhe(v) $\leq 2 \cdot$ sHöhe(v).

(Schwarz-) Höhe



Definition: Die *Länge* eines Pfades ist die Anz. seiner Kanten.

Definition: Sei B ein Baum.
Knoten u ist *unter* Knoten v, wenn u in dem Teilbaum B_v von B mit Wurzel v enthalten ist.

Beispiel: „17“ ist unter „19“, „14“ ist *nicht* unter „6“.

Definition: Die *Höhe* eines Knotens v ist die Länge eines längsten Pfads von v zu einem Blatt unter v.

wohl-definiert wg. (E5)

Definition: Die *Schwarz-Höhe* sHöhe(v) eines Knotens v ist die Anz. der schwarzen Knoten (ohne v) auf jedem ~~längsten~~ Pfad zu einem Blatt (inkl. Blatt) in B_v.

Beispiel: „12“ hat Höhe 4 (!) und Schwarz-Höhe 2.

Folgerung: v Knoten $\Rightarrow \text{sHöhe}(v) \leq \text{Höhe}(v) \overset{(E4)}{\leq} 2 \cdot \text{sHöhe}(v)$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

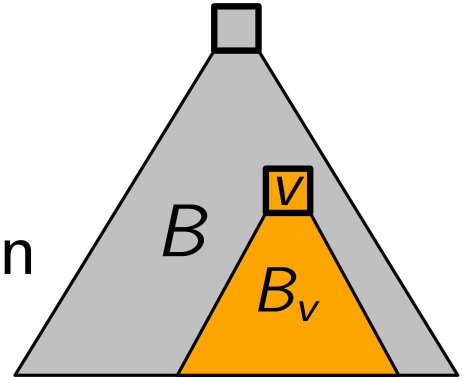
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

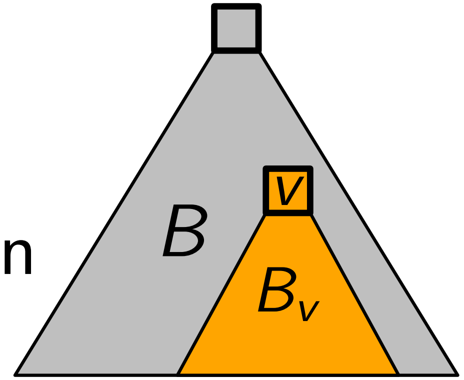
Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

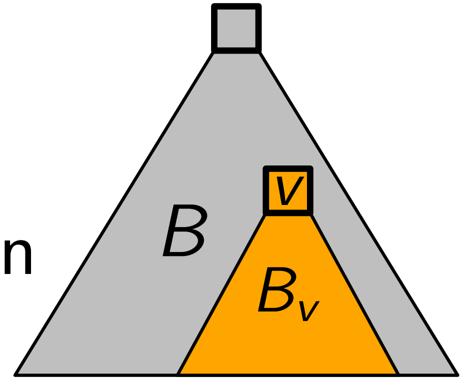


Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2 \log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



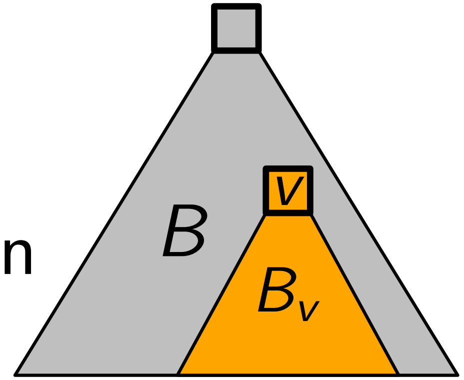
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



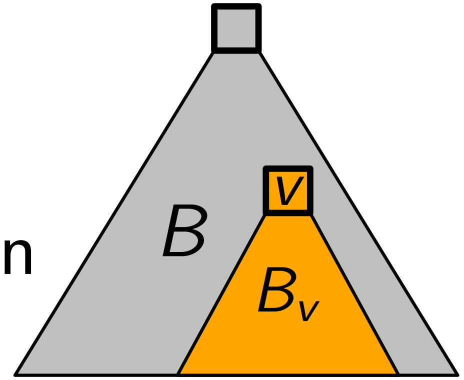
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=0$. Dann $B_v = B.nil$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



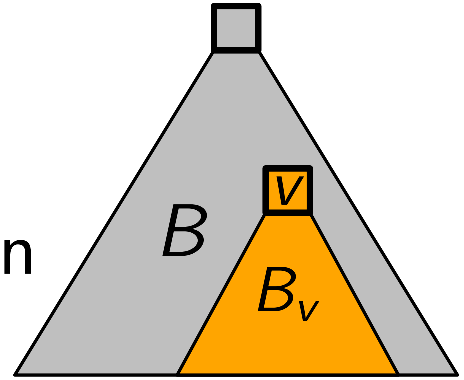
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=$0. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



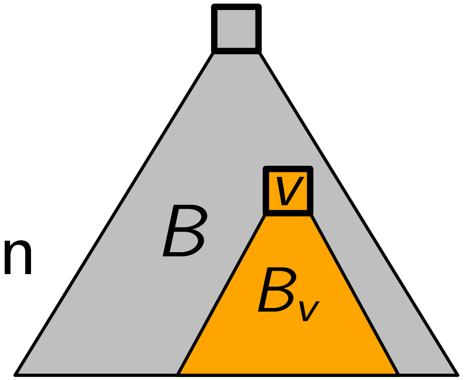
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\mathrm{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v)$=$0. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



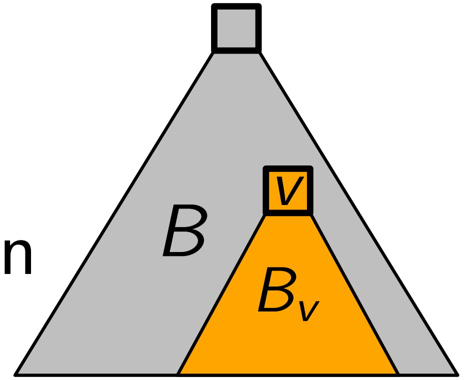
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten. ✓

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

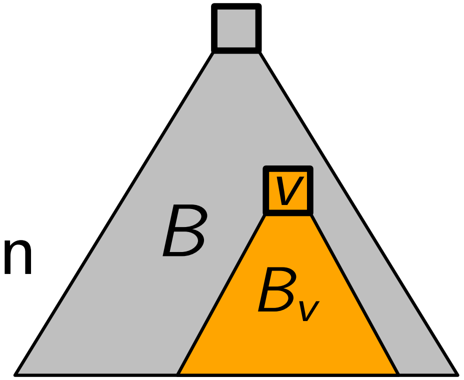
Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten. ✓

Höhe$(v) > 0$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

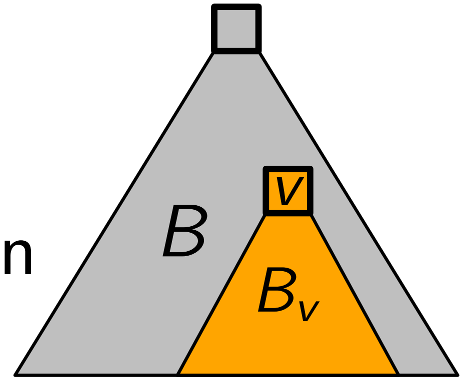
Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten. ✓

Höhe$(v) > 0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

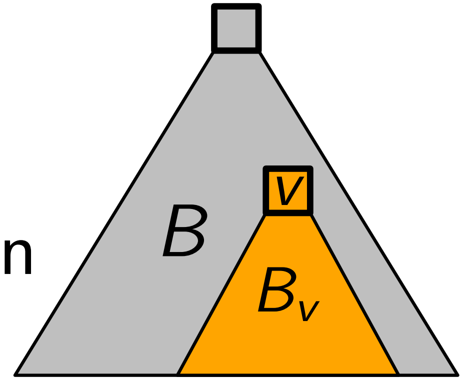
Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten. ✓

Höhe$(v) > 0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

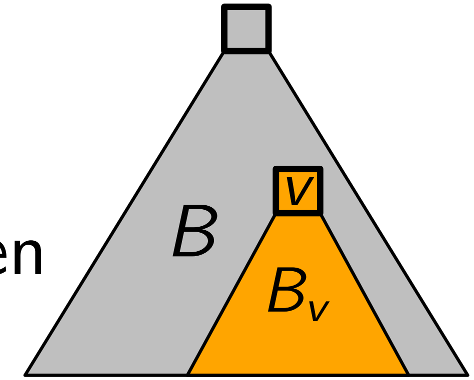
Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe(v) $=0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten. ✓

Höhe(v) >0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.
$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.
$2 \cdot (\qquad\qquad\qquad) + 1 =$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten.

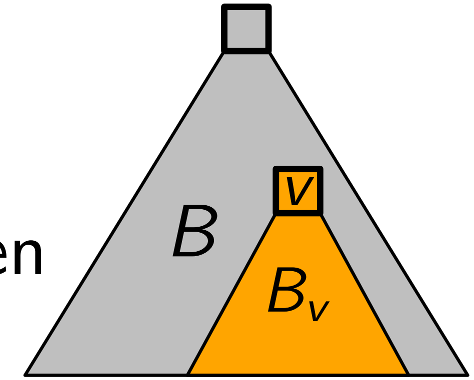
Höhe$(v) > 0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot (\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v}) + 1 =$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

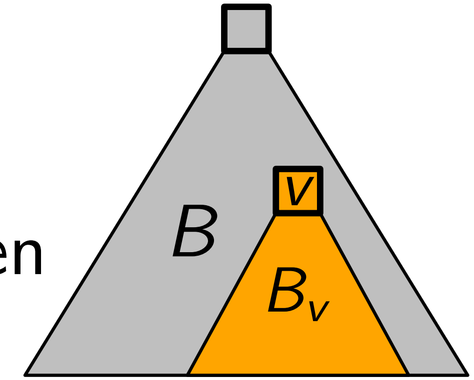
Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten. ✓

Höhe$(v) > 0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.
$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot (\underbrace{2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v}) + 1 =$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\le 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\ge 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

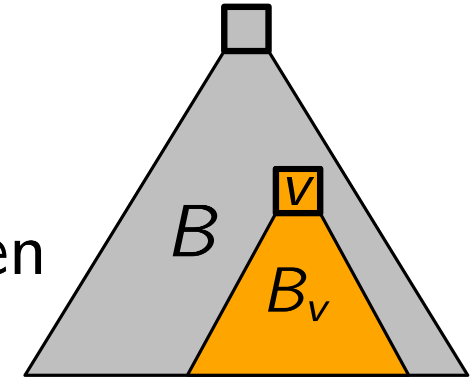
Höhe(v) $=0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten.

Höhe(v) >0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.
$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot (\underbrace{2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v}) + 1 =$$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

Höhe$(v) = 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten.

Höhe$(v) > 0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).

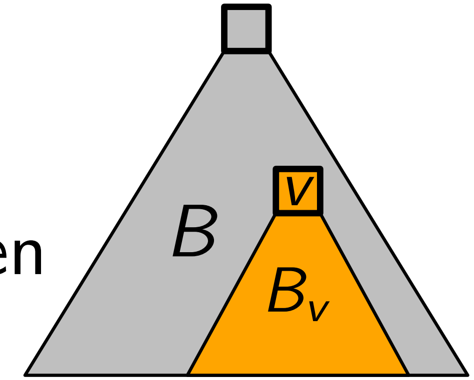
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.

$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot (\underbrace{2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v}) + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1.$$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

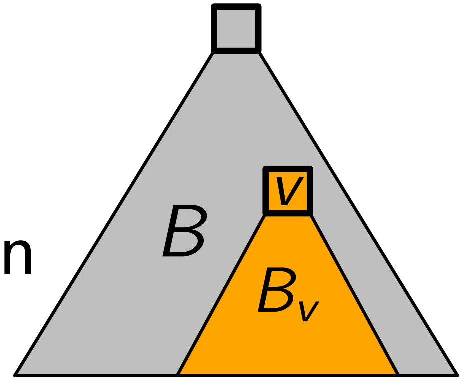
Höhe$(v)=0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe$(v) = 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten.

Höhe$(v)>0$. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.
$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot \underbrace{(2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1)}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v} + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1.$$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Beweis durch vollständige Induktion über Höhe(v).

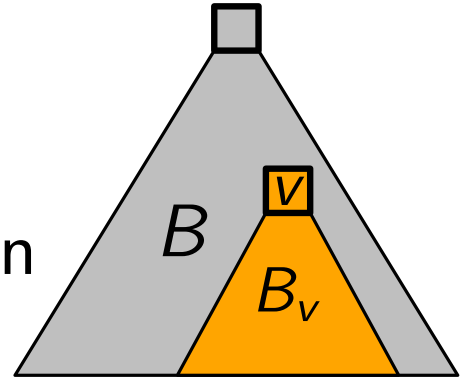
Höhe(v) $= 0$. Dann $B_v = B.nil$ und sHöhe(v) $= 0$.
B_v hat $2^0 - 1 = 0$ innere Knoten.

Höhe(v) > 0. Beide Kinder von v haben Höhe $<$ Höhe(v).
$\Rightarrow$ können Ind.-Annahme anwenden.
$\Rightarrow$ Anz. innere Knoten von B_v ist mind.

$$2 \cdot \underbrace{(2^{\text{sHöhe}(v)-1} - 1)}_{\text{Anz. innerer Knoten unter einem Kind von } v} + 1 = 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1.$$

sHöhe der Kinder von v ist mind.

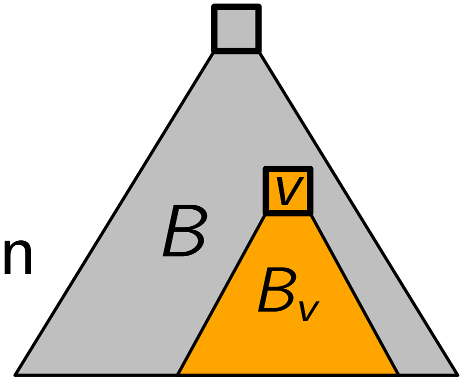
Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

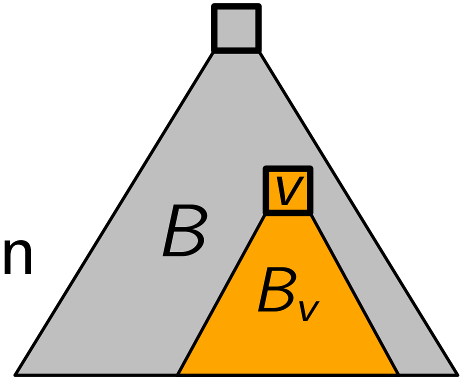


Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\mathrm{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$v := B.root \;\Rightarrow$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



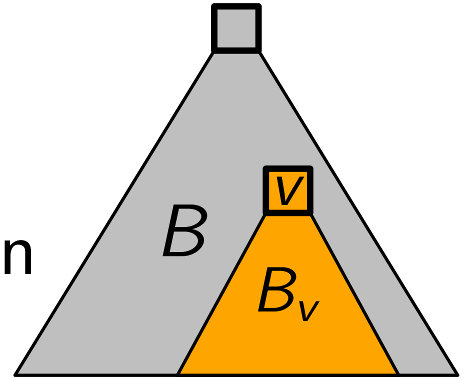
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:

B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$v := B.root \;\Rightarrow\; \#$ innere Knoten$(B) \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1$.

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!

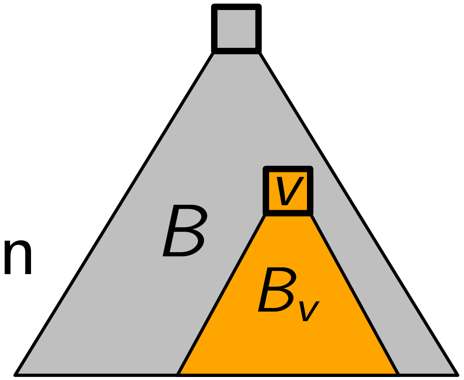


Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



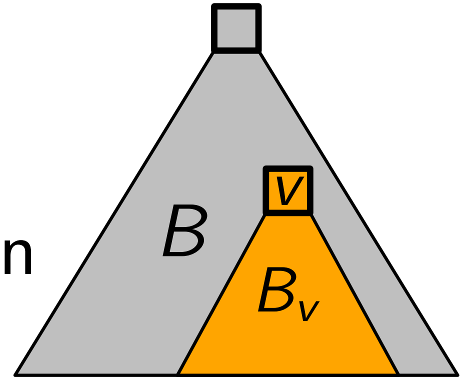
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.\mathit{root} \;\Rightarrow\; \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



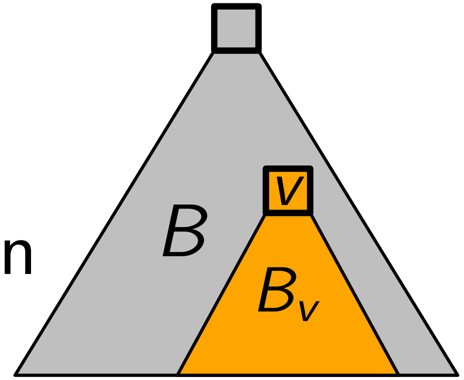
Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

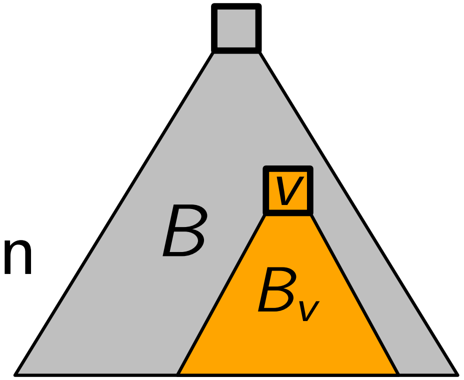
Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt:

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:

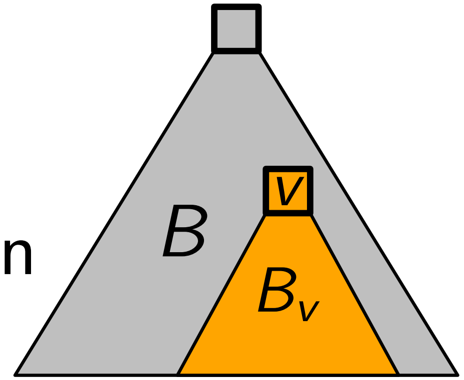
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: Höhe$(B) \leq 2\cdot$ sHöhe(B).

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

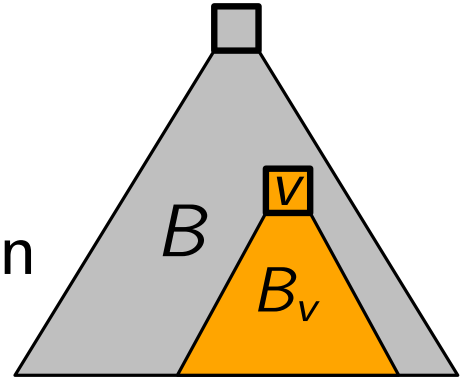
$$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: $\text{Höhe}(B) \leq 2\cdot \text{sHöhe}(B)$.

$\Rightarrow \text{Höhe}(B) \leq 2\log_2(n+1)$ $\square$

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.root \;\Rightarrow\; \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

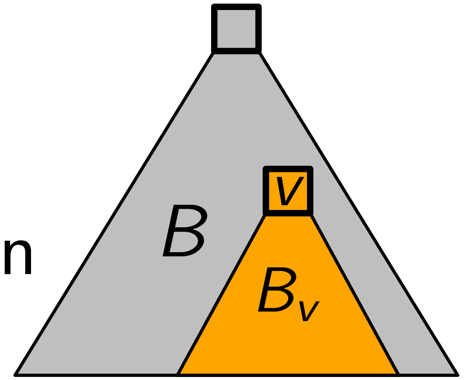
$\Rightarrow$ sHöhe$(B) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: Höhe$(B) \leq 2\cdot$ sHöhe(B).

$\Rightarrow$ Höhe$(B) \leq 2\log_2(n+1)$ $\square$

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind *balanciert*!

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt: B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$v := B.root \;\Rightarrow\; \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$

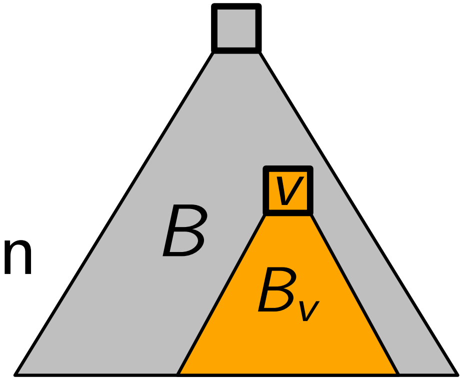
$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: Höhe$(B) \leq 2\cdot$ sHöhe(B).

$\Rightarrow \text{Höhe}(B) \leq 2\log_2(n+1)$ $\square$

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind *balanciert*! Fertig?!

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2\log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$$

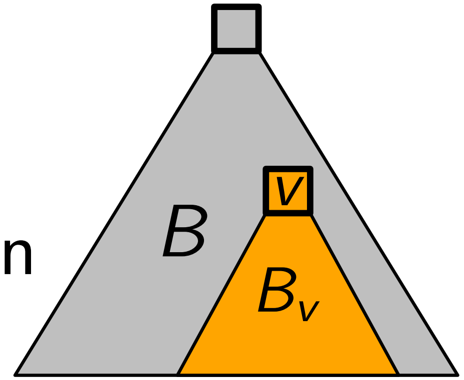
$$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: $\text{Höhe}(B) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(B)$.

$$\Rightarrow \text{Höhe}(B) \leq 2\log_2(n+1)$$ □

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind *balanciert*! Fertig?!
Nee:

Höhe $\in \Theta(\log n)$!!



Lemma. Ein Rot-Schwarz-Baum B mit n inneren Knoten hat Höhe $\leq 2 \log_2(n+1)$.

Beweis. Behauptung: Für jeden Knoten v von B gilt:
B_v hat $\geq 2^{\text{sHöhe}(v)} - 1$ innere Knoten.

$v := B.root \Rightarrow \underbrace{\#\text{ innere Knoten}(B)}_{n} \geq 2^{\text{sHöhe}(B)} - 1.$

$\Rightarrow \text{sHöhe}(B) \leq \log_2(n+1)$

Wegen R-S-Eig. (E4) gilt: $\text{Höhe}(B) \leq 2 \cdot \text{sHöhe}(B)$.

$\Rightarrow \text{Höhe}(B) \leq 2 \log_2(n+1)$ $\square$

Also: Rot-Schwarz-Bäume sind *balanciert*! Fertig?!
Nee: Insert & Delete können R-S-Eig. *verletzen!*

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

  $y = x$

  if $k < x.key$ **then**

    $x = x.left$

  else $x = x.right$

$z =$ new Node(k, y)

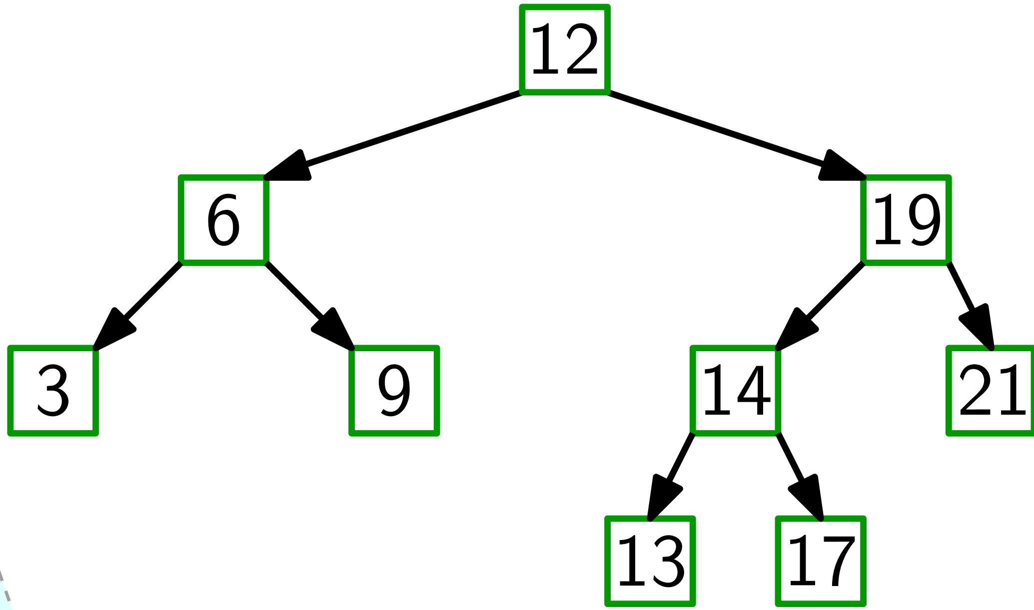
if $y == nil$ **then** $root = z$

else

  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$

  else $y.right = z$

return z

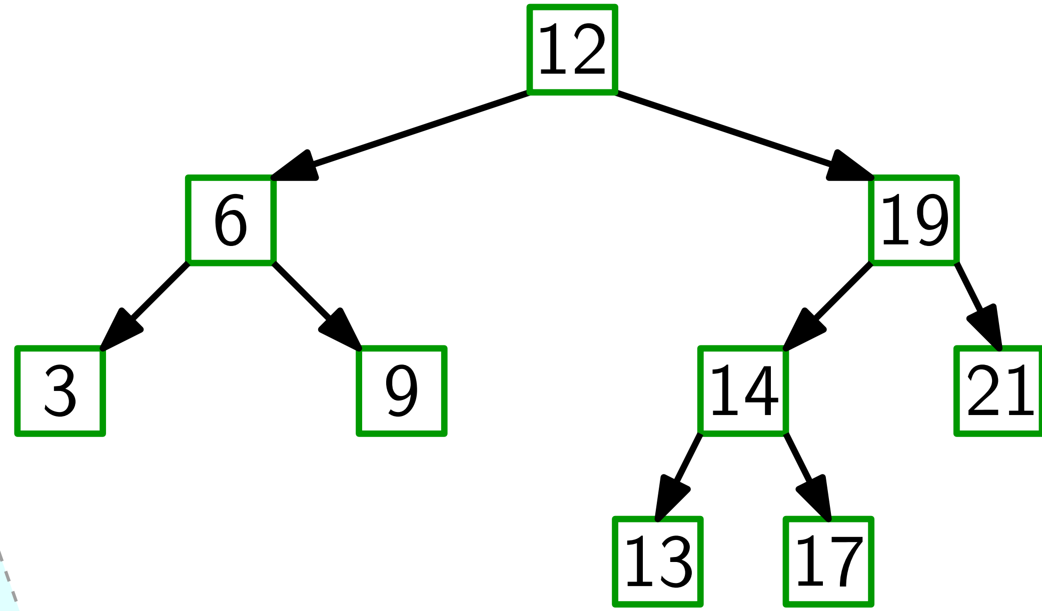


Einfügen

Node Insert(key k)

- $y = nil$
- $x = root$
- **while** $x \neq nil$ **do**
  - $y = x$
  - **if** $k < x.key$ **then**
    - $x = x.left$
  - **else** $x = x.right$
- $z =$ new Node(k, y)
- **if** $y == nil$ **then** $root = z$
- **else**
  - **if** $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  - **else** $y.right = z$
- **return** z

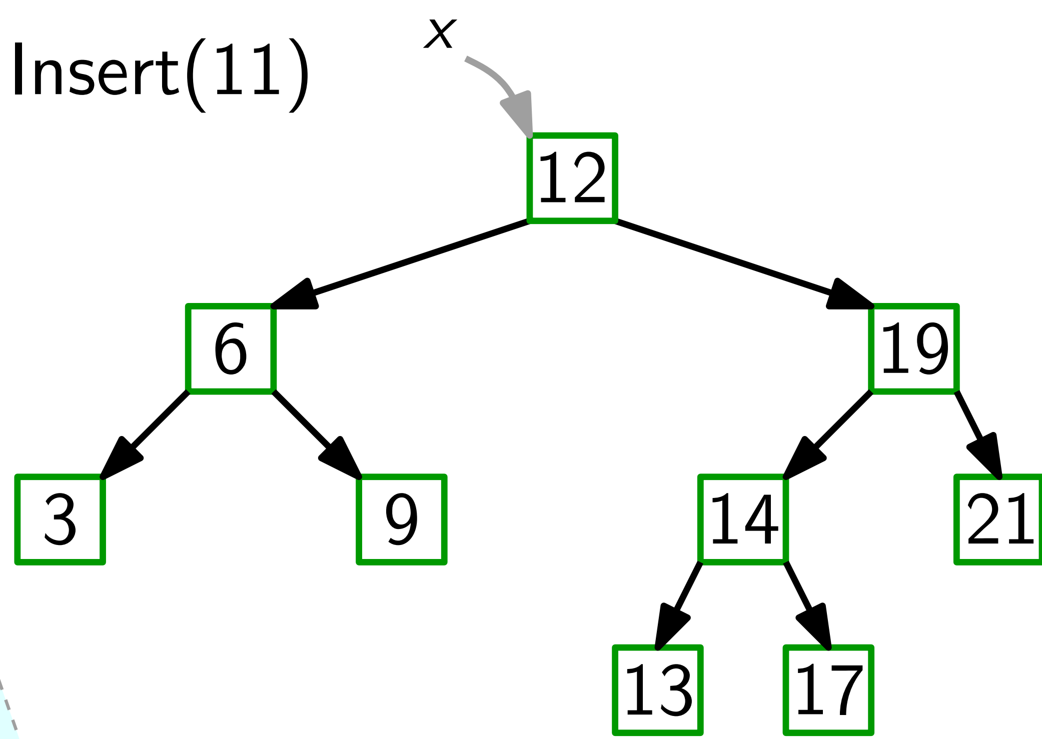
Insert(11)



Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else               y.right = z
    return z
```

Insert(11)



Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

  $y = x$

  if $k < x.key$ **then**

    $x = x.left$

  else $x = x.right$

$z =$ new Node(k, y)

if $y == nil$ **then** $root = z$

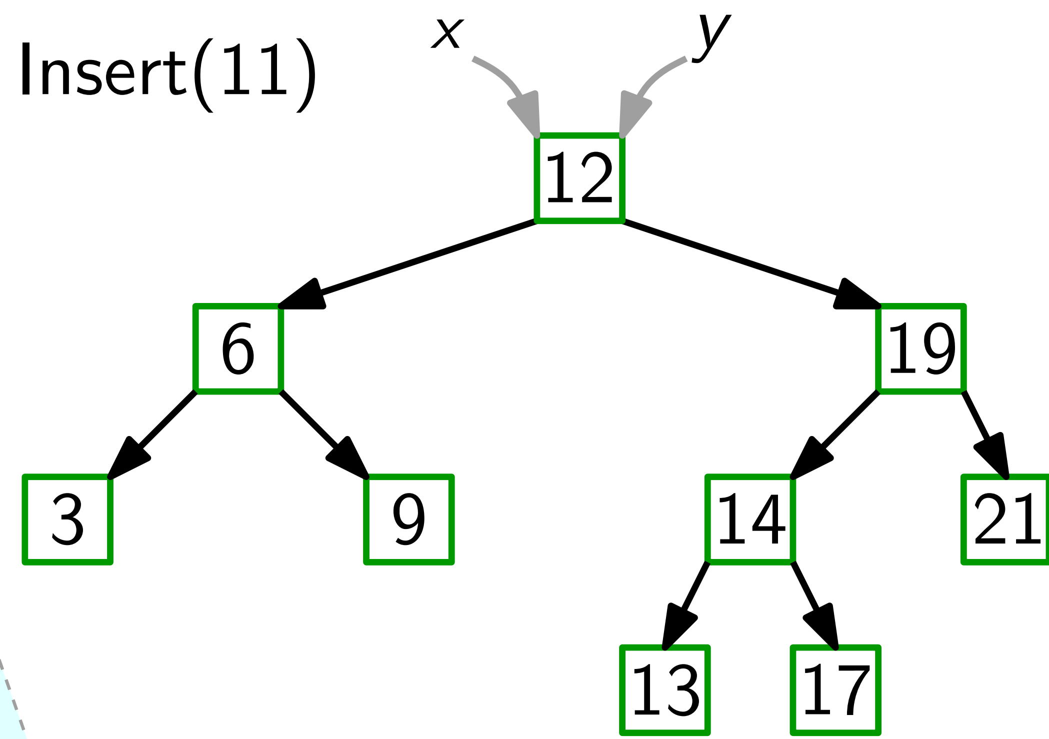
else

  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$

  else $y.right = z$

return z

Insert(11)

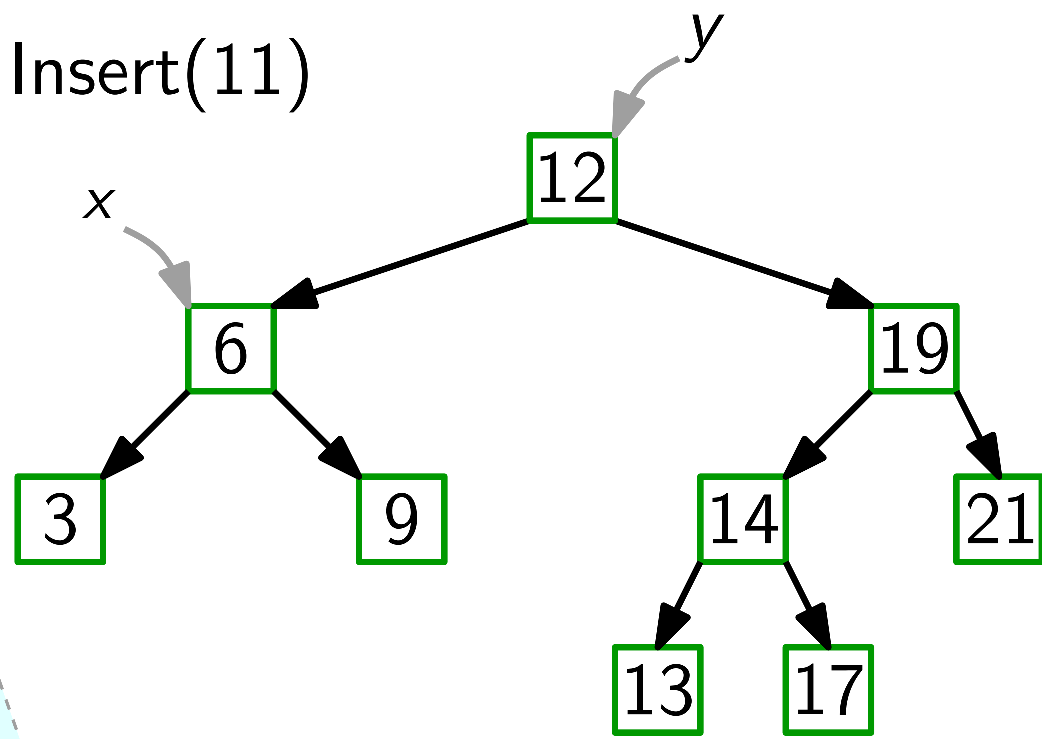


Einfügen

Node Insert(key k)

```
y = nil
x = root
while x ≠ nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else x = x.right
z = new Node(k, y)
if y == nil then root = z
else
    if k < y.key then y.left = z
    else              y.right = z
return z
```

Insert(11)



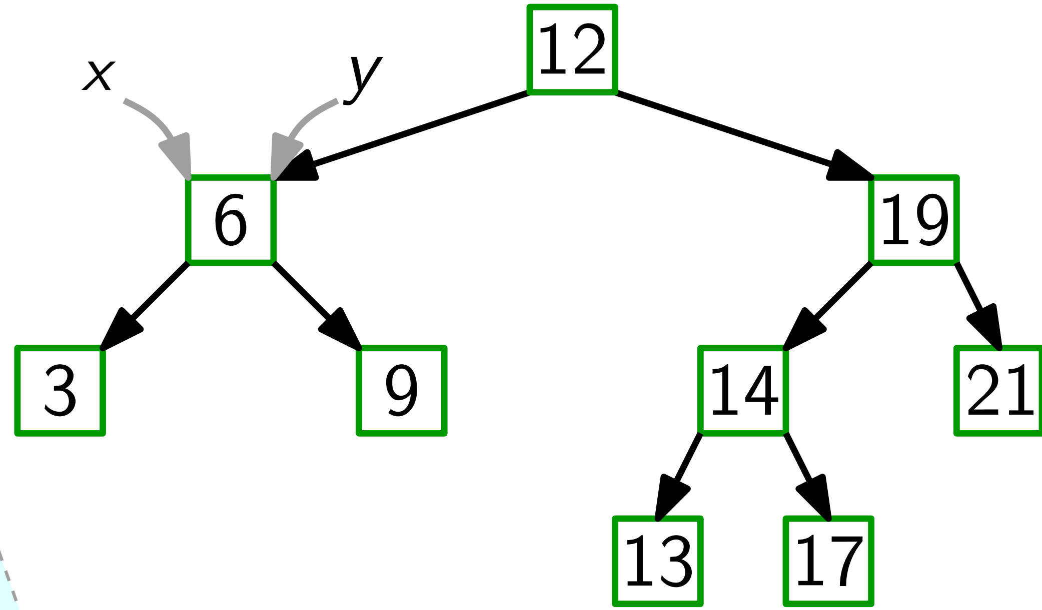
Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$
$x = root$
while $x \neq nil$ **do**
  $y = x$
  if $k < x.key$ **then**
    $x = x.left$
  else $x = x.right$
$z =$ new Node(k, y)
if $y == nil$ **then** $root = z$
else
  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  else $y.right = z$

return z

Insert(11)

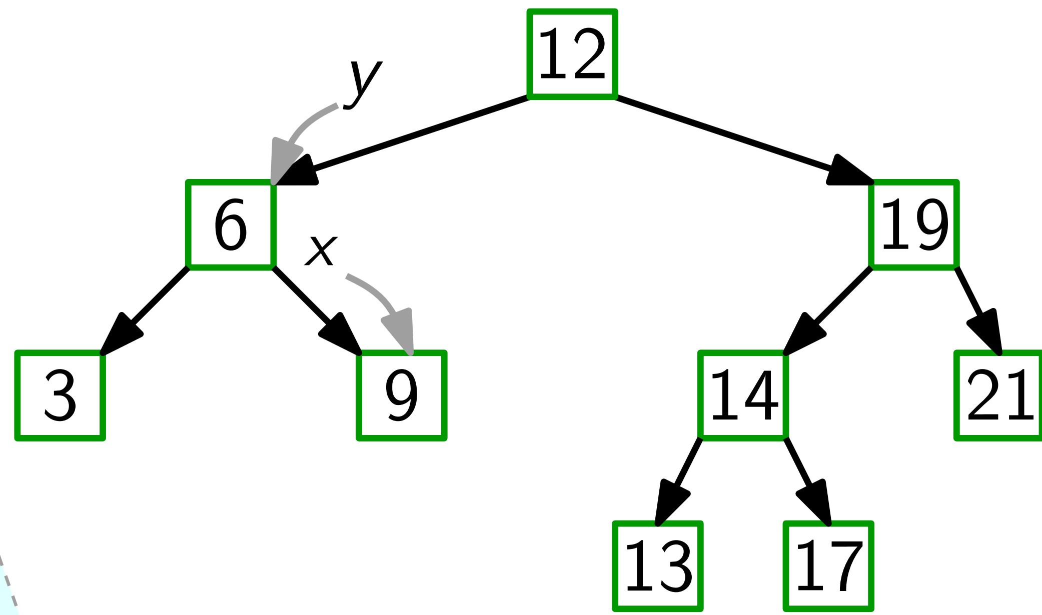


Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$
$x = root$
while $x \neq nil$ **do**
  $y = x$
  if $k < x.key$ **then**
    $x = x.left$
  else $x = x.right$
$z =$ new Node(k, y)
if $y == nil$ **then** $root = z$
else
  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  else $y.right = z$
return z

Insert(11)



Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$

$x = root$

while $x \neq nil$ **do**

  $y = x$

  if $k < x.key$ **then**

    $x = x.left$

  else $x = x.right$

$z =$ new Node(k, y)

if $y == nil$ **then** $root = z$

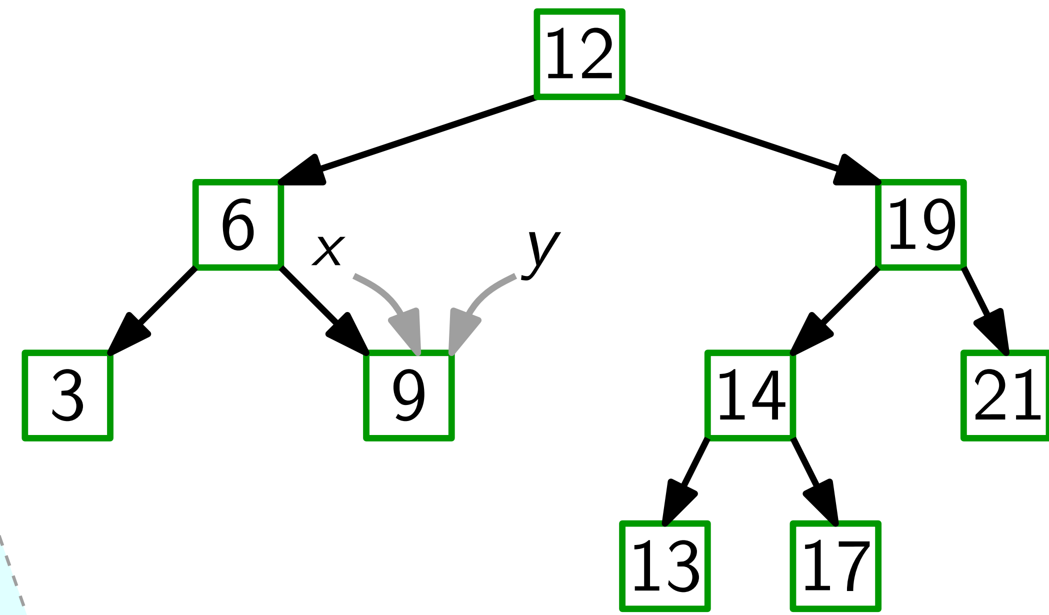
else

  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$

  else $y.right = z$

return z

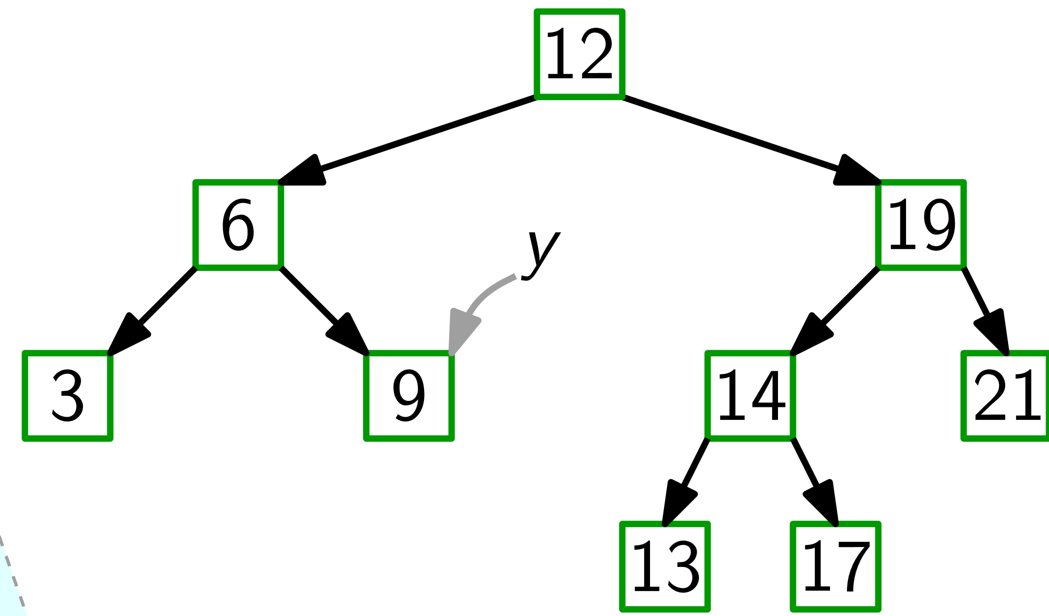
Insert(11)



Einfügen

```
Node Insert(key k)
    y = nil
    x = root
    while x ≠ nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    return z
```

Insert(11) $x == nil$

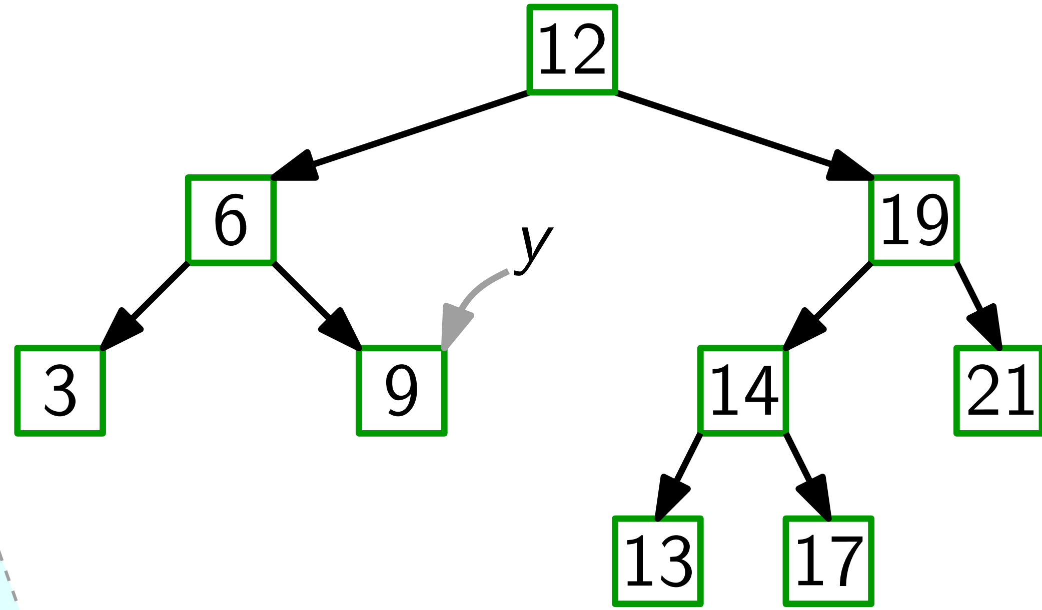


Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$
$x = root$
while $x \neq nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
        $x = x.left$
    else $x = x.right$
$z =$ new Node(k, y)
if $y == nil$ **then** $root = z$
else
    if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
    else $y.right = z$
return z

Insert(11) $x == nil$



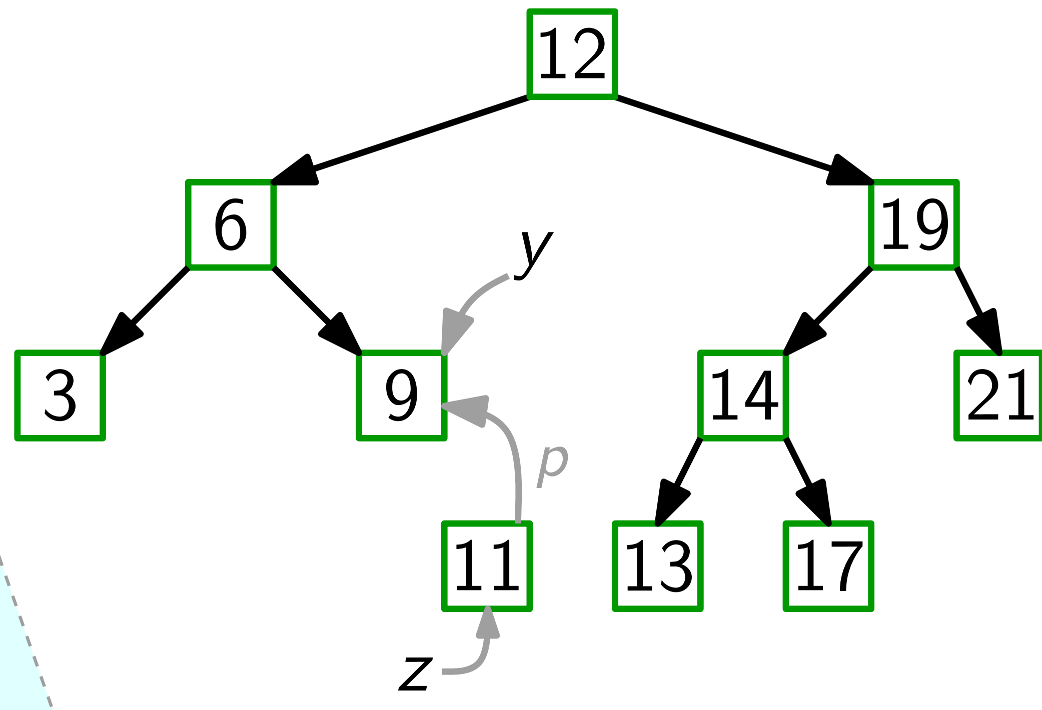
Node(Key k, Node par)
    $key = k$
    $p = par$
    $right = left = nil$

Einfügen

Node Insert(key k)

$y = nil$
$x = root$
while $x \neq nil$ **do**
  $y = x$
  if $k < x.key$ **then**
    $x = x.left$
  else $x = x.right$
$z =$ new Node(k, y)
if $y == nil$ **then** $root = z$
else
  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  else $y.right = z$
return z

Insert(11) $x == nil$

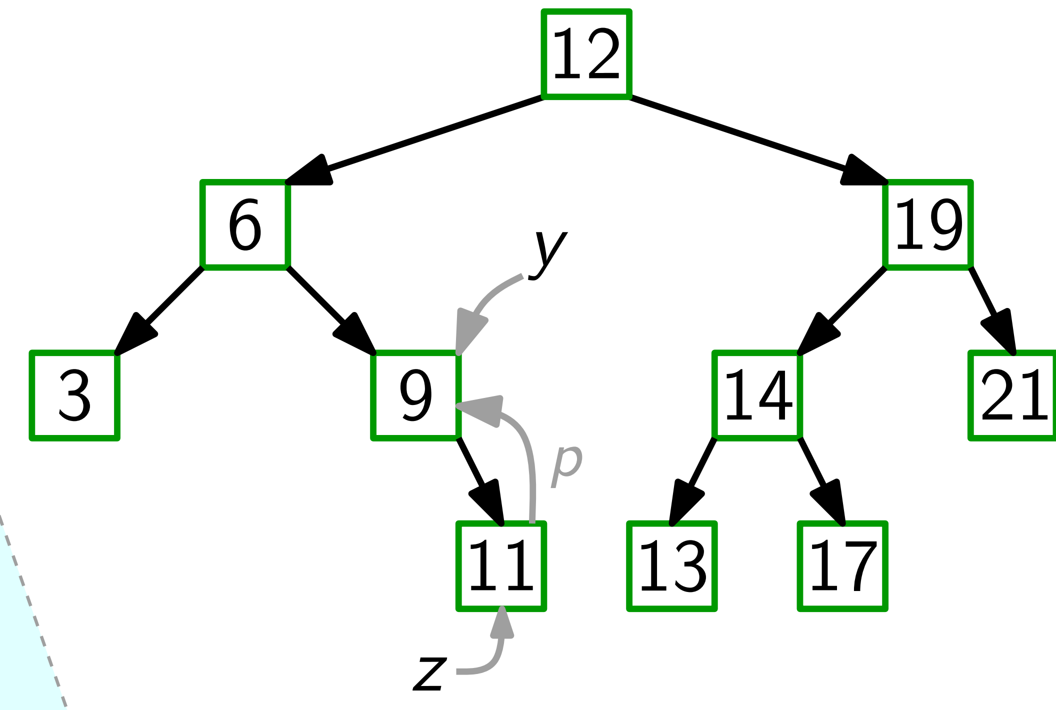


Node(Key k, Node par)
$key = k$
$p = par$
$right = left = nil$

Einfügen

Node Insert(key k)
  $y = nil$
  $x = root$
  while $x \neq nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$
  $z =$ new Node(k, y)
  if $y == nil$ **then** $root = z$
  else
    if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
    else $y.right = z$
  return z

Insert(11) $x == nil$



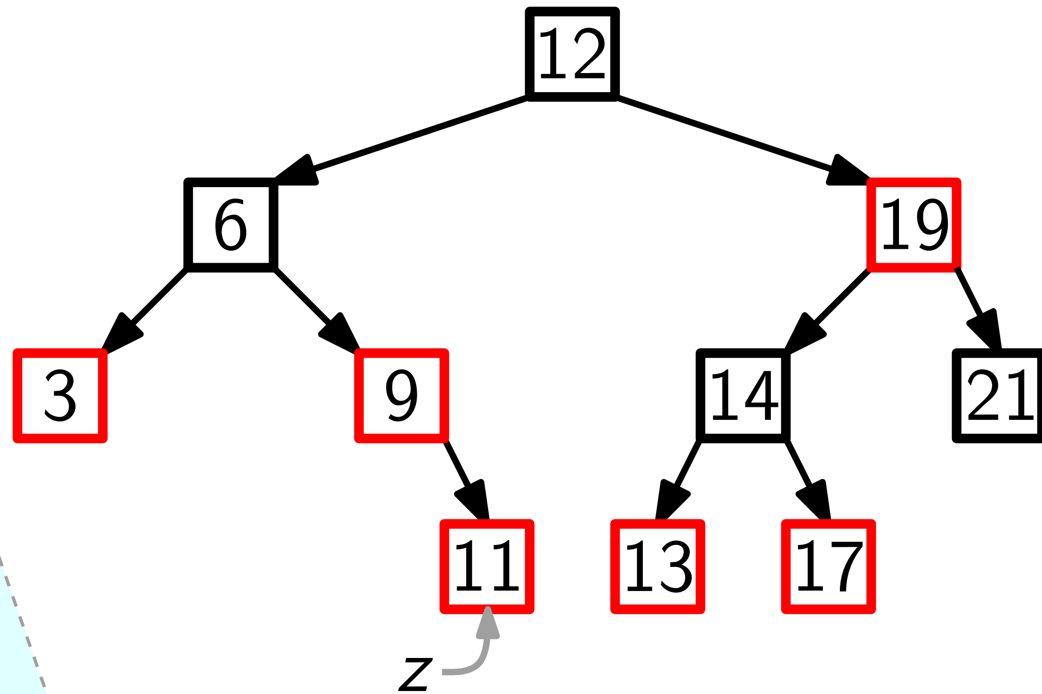
Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = nil$

Einfügen

RB

Node Insert(key k)

$y = nil$
$x = root$
while $x \neq nil$ **do**
  $y = x$
  if $k < x.key$ **then**
    $x = x.left$
  else $x = x.right$
$z =$ new Node(k, y)
if $y == nil$ **then** $root = z$
else
  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  else $y.right = z$
return z

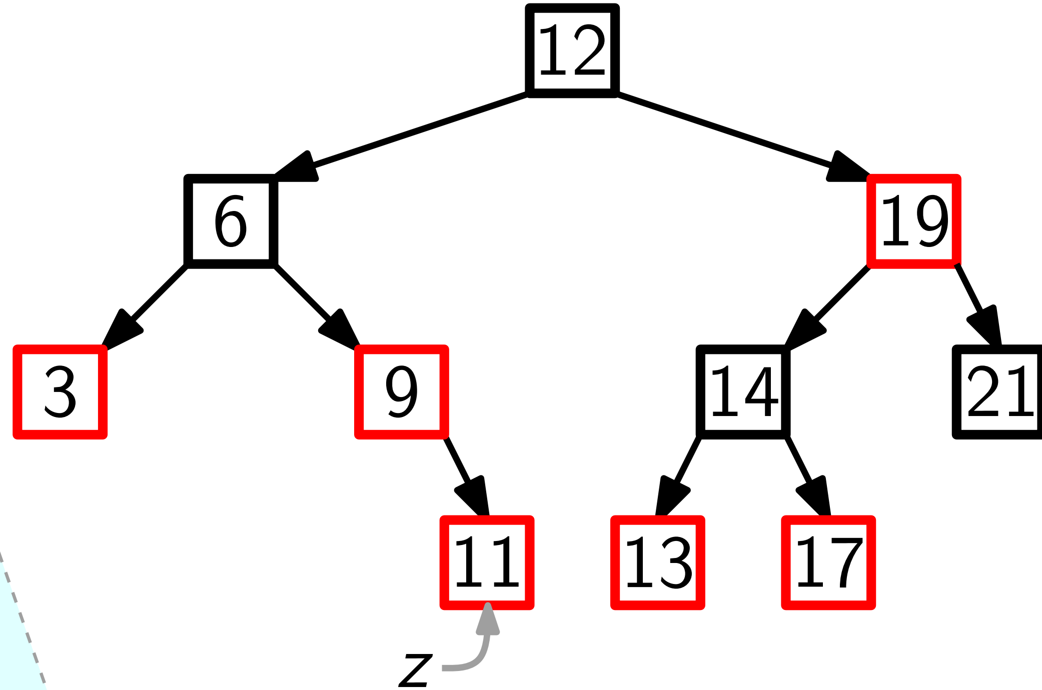


Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = nil$

Einfügen

RB

```
Node Insert(key k)
    y = T.nil
    x = root
    while x ≠ T.nil do
        y = x
        if k < x.key then
            x = x.left
        else x = x.right
    z = new Node(k, y)
    if y == T.nil then root = z
    else
        if k < y.key then y.left = z
        else              y.right = z
    return z
```

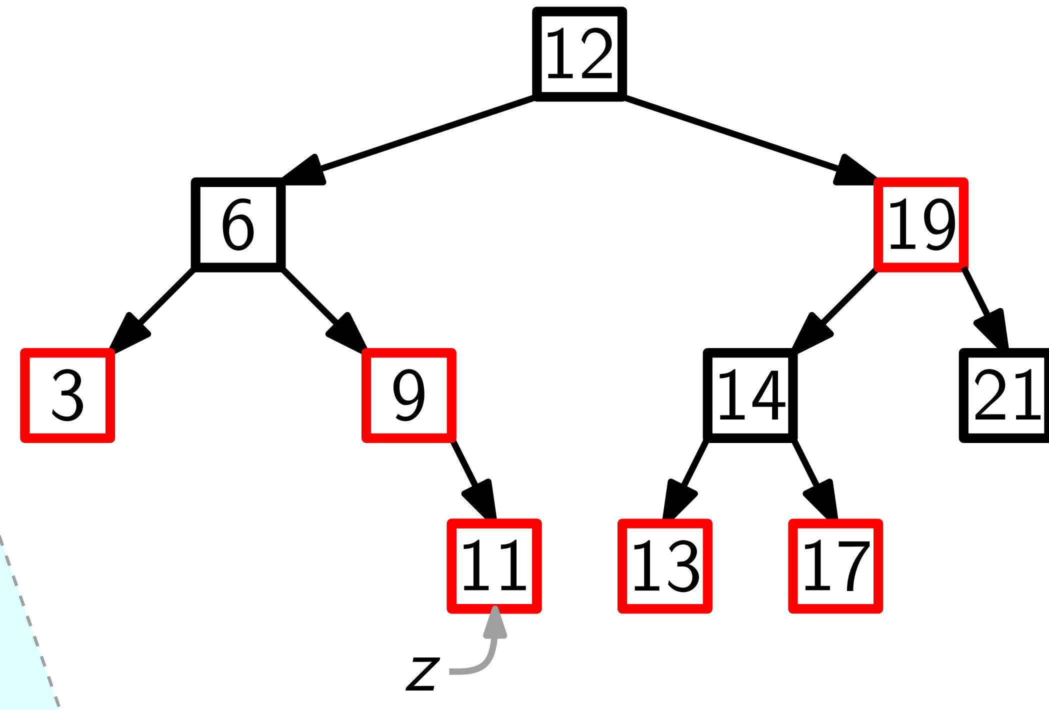


Node(Key k, Node par)
$key = k$
$p = par$
$right = left = T.nil$

Einfügen

RB RB
Node Insert(key k)

$y = T.nil$
$x = root$
while $x \neq T.nil$ **do**
  $y = x$
  if $k < x.key$ **then**
    $x = x.left$
  else $x = x.right$
$z =$ new RBNode(k, y, red)
if $y == T.nil$ **then** $root = z$
else
  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  else $y.right = z$
return z



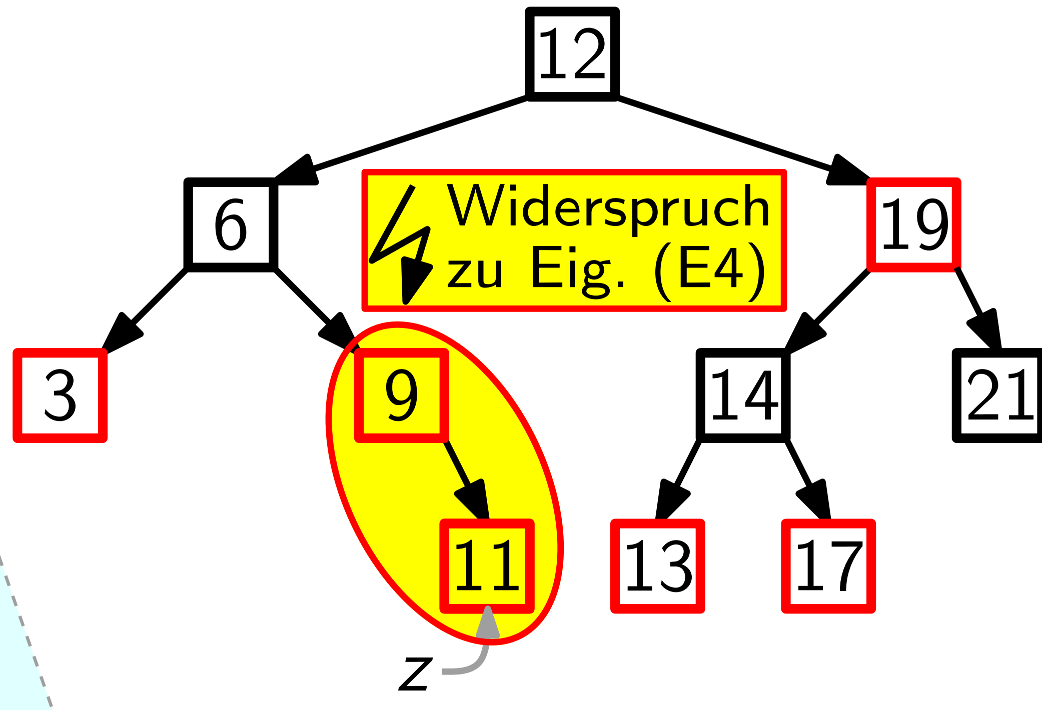
Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = T.nil$

RBNode($\ldots$, Color c)
  super(k, par)
  $color = c$

Einfügen

RB Node RB Insert(key k)

```
y = T.nil
x = root
while x ≠ T.nil do
    y = x
    if k < x.key then
        x = x.left
    else  x = x.right
z = new RB Node(k, y, red)
if y == T.nil then root = z
else
    if k < y.key then  y.left = z
    else               y.right = z
return z
```



Node(Key k, Node par)
$\quad key = k$
$\quad p = par$
$\quad right = left = T.nil$

RBNode($\dots$, Color c)
$\quad$ super(k, par)
$\quad color = c$

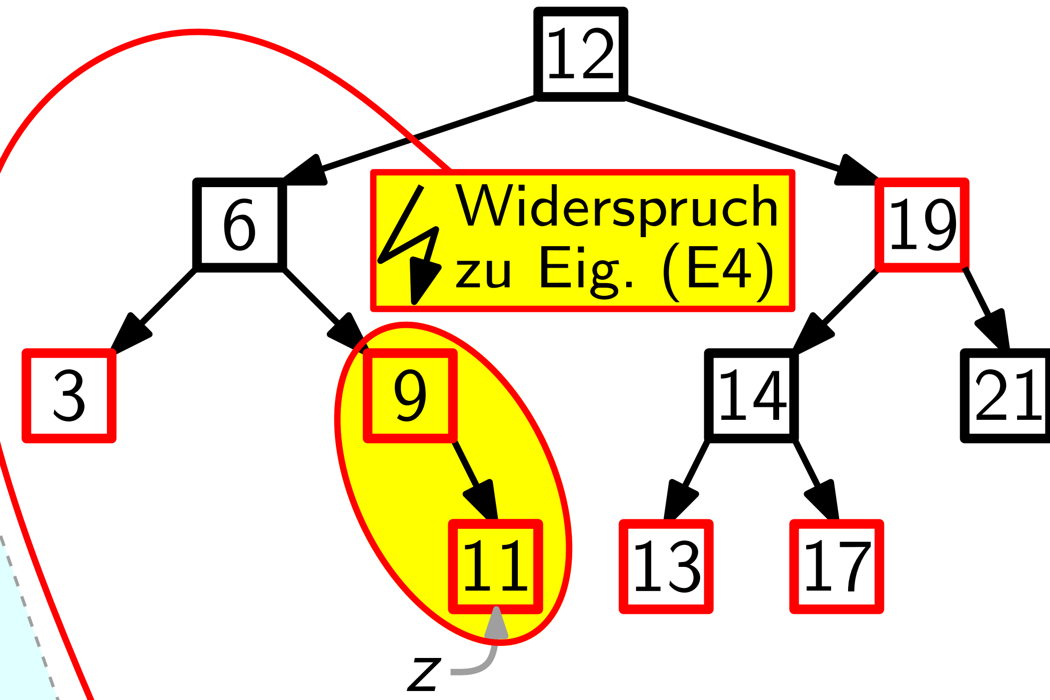
Einfügen

RB RB
Node Insert(key k)

$y = T.nil$
$x = root$
while $x \neq T.nil$ **do**
  $y = x$
  if $k < x.key$ **then**
    $x = x.left$
  else $x = x.right$

RB
$z =$ new Node(k, y, red)
if $y == T.nil$ **then** $root = z$
else
  if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
  else $y.right = z$

RBInsertFixup(z)
return z



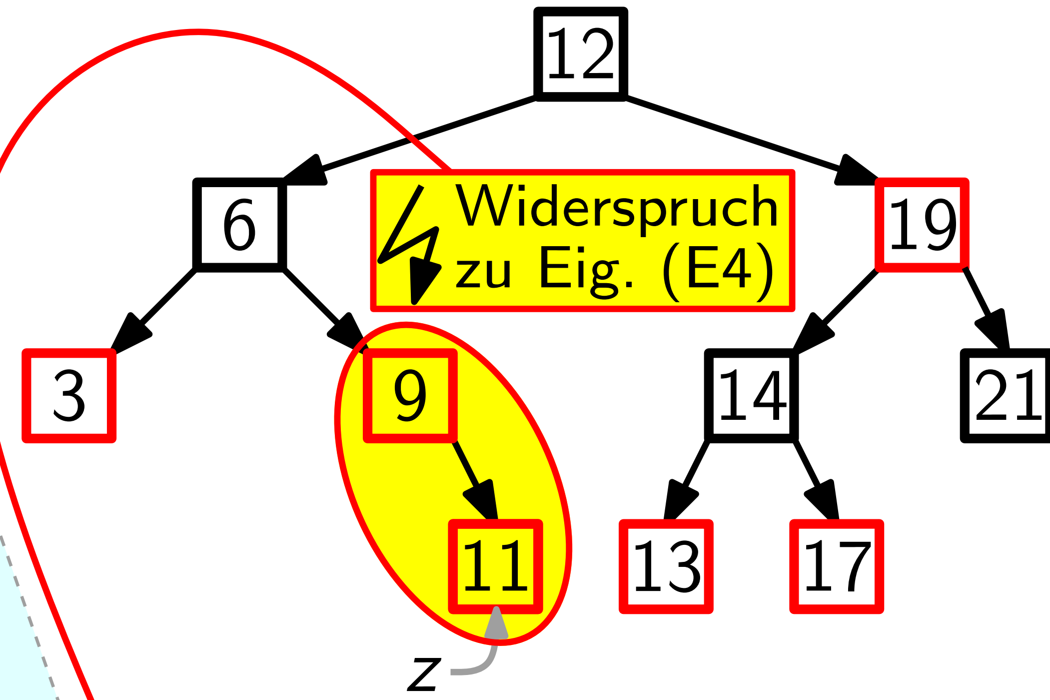
Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = T.nil$

RBNode(. . . , Color c)
  super(k, par)
  $color = c$

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup)

RB RB
Node Insert(key k)
  $y = T.nil$
  $x = root$
  while $x \neq T.nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$
              RB
  $z =$ new Node(k, y, red)
  if $y == T.nil$ **then** $root = z$
  else
    if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
    else $y.right = z$
  RBInsertFixup(z)
  return z



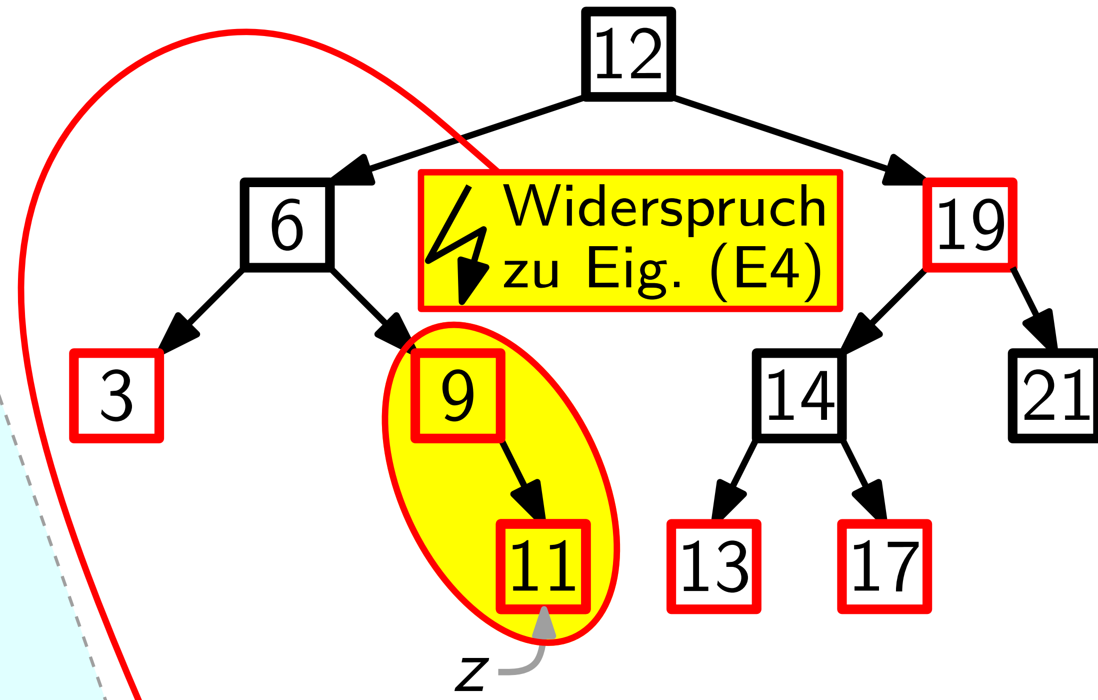
Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = T.nil$

RBNode(..., Color c)
  super(k, par)
  $color = c$

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup) $O(h)$

RB RB
Node Insert(key k)
  $y = T.nil$
  $x = root$
  while $x \neq T.nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$
  RB
  $z =$ new Node(k, y, red)
  if $y == T.nil$ **then** $root = z$
  else
    if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
    else $y.right = z$
  RBInsertFixup(z)
  return z



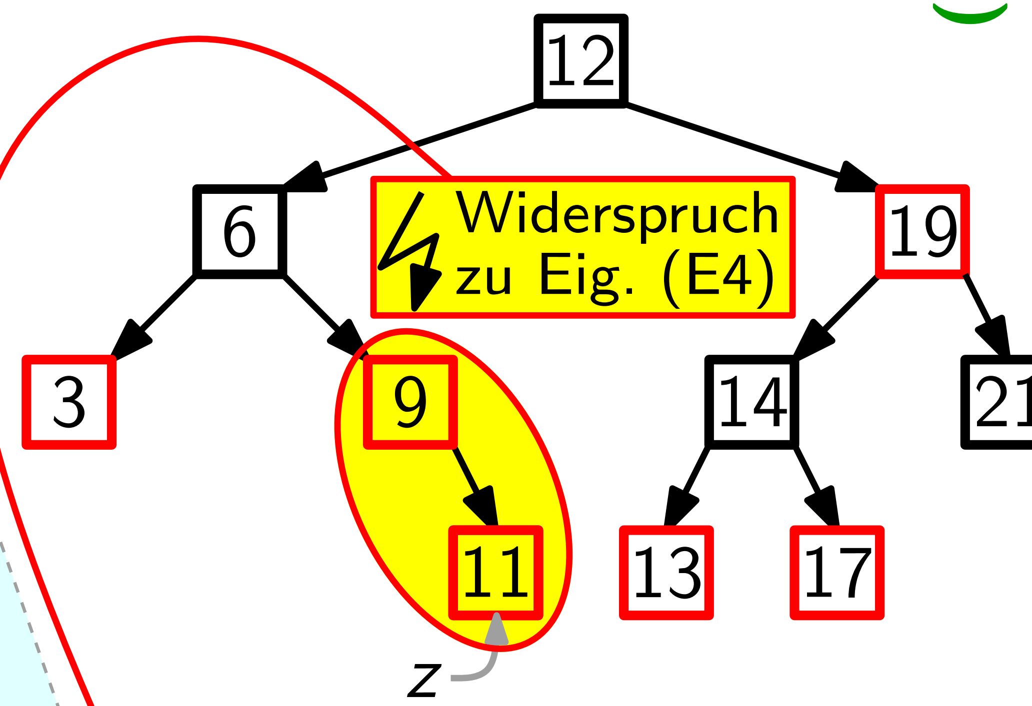
Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = T.nil$

RBNode(…, Color c)
  super(k, par)
  $color = c$

Einfügen

Laufzeit? (ohne RBInsertFixup) $O(h) = O(\log n)$

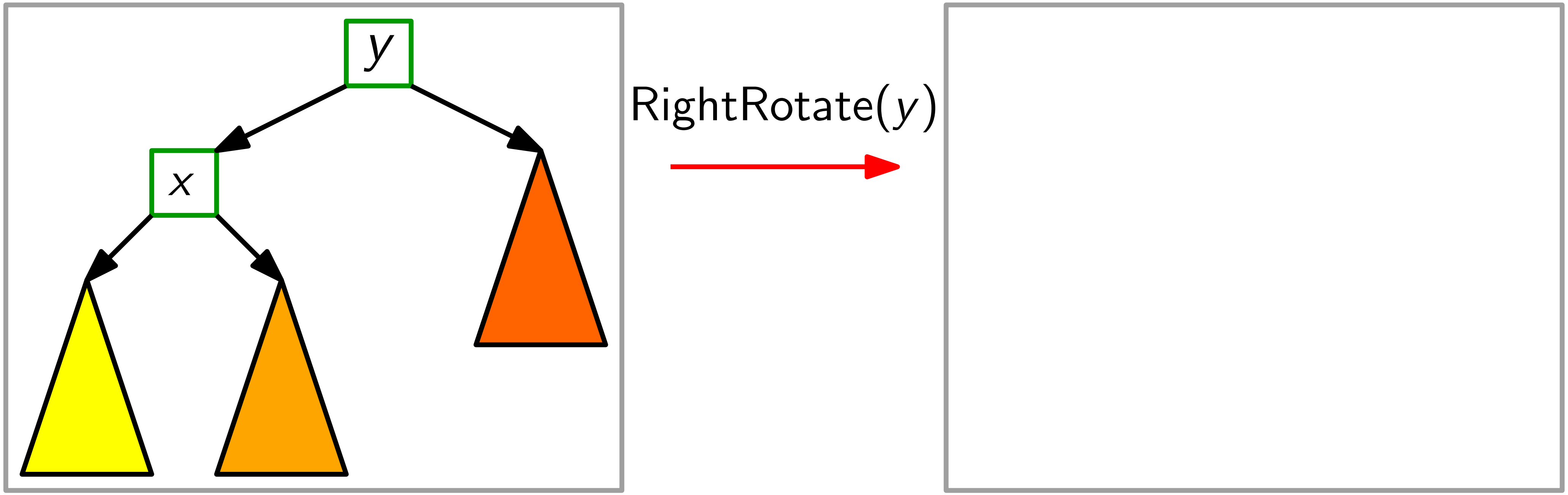
RB RB
Node Insert(key k)
  $y = T.nil$
  $x = root$
  while $x \neq T.nil$ **do**
    $y = x$
    if $k < x.key$ **then**
      $x = x.left$
    else $x = x.right$
  RB
  $z =$ new Node(k, y, red)
  if $y == T.nil$ **then** $root = z$
  else
    if $k < y.key$ **then** $y.left = z$
    else $y.right = z$
  RBInsertFixup(z)
  return z



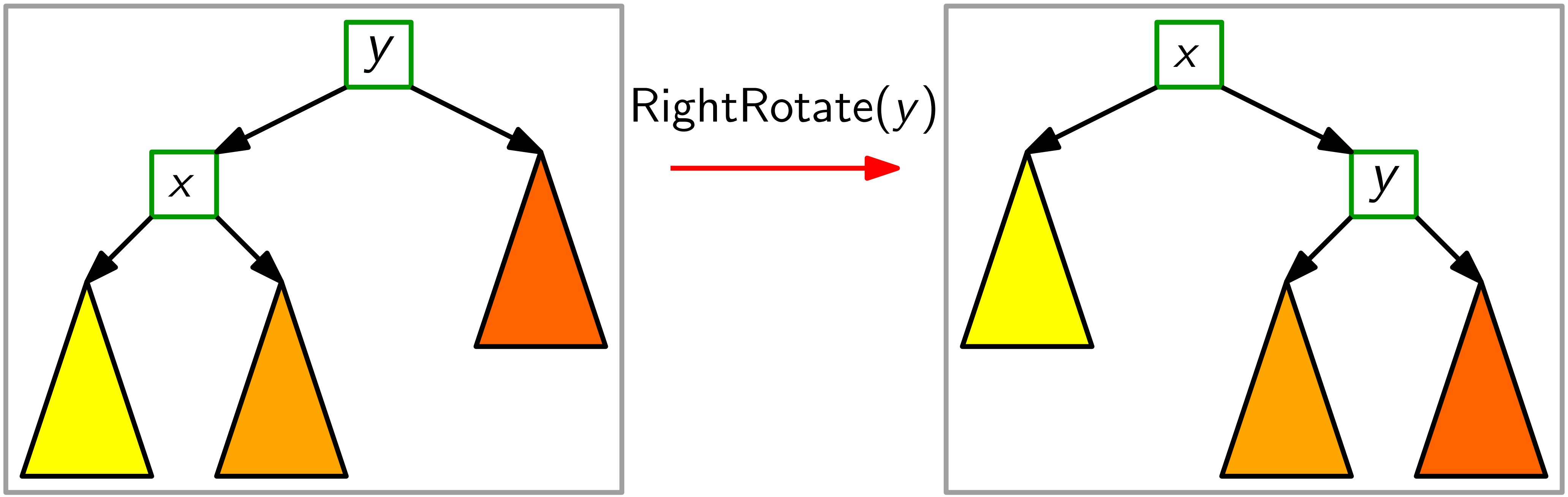
Node(Key k, Node par)
  $key = k$
  $p = par$
  $right = left = T.nil$

RBNode($\ldots$, Color c)
  super(k, par)
  $color = c$

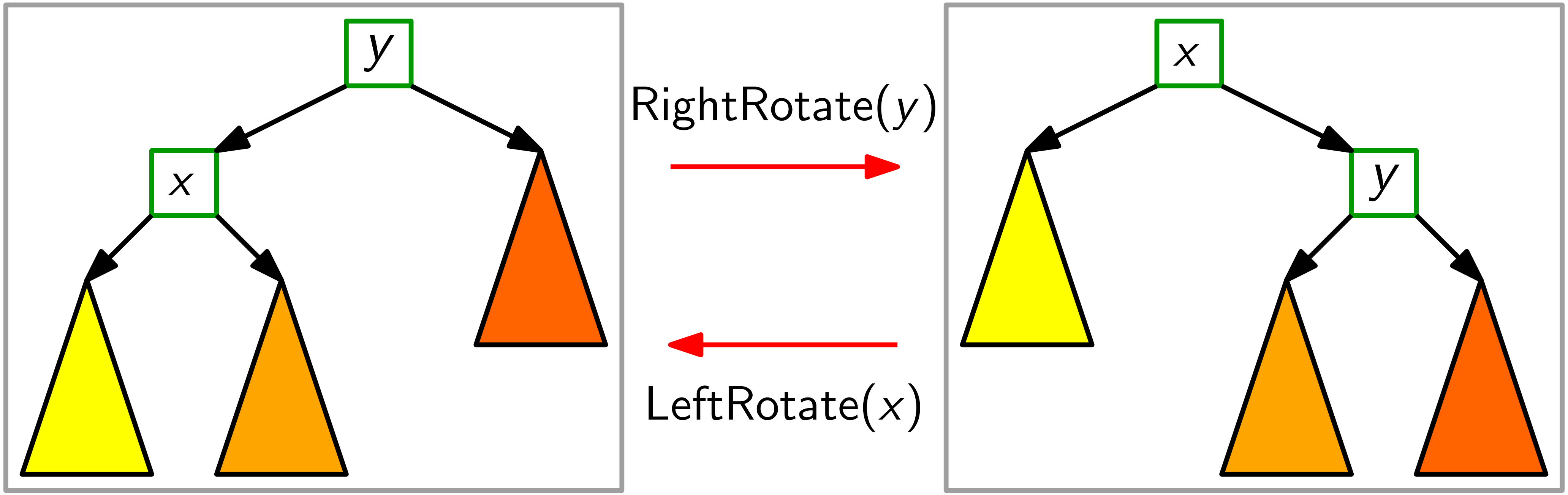
Exkurs: Rotationen



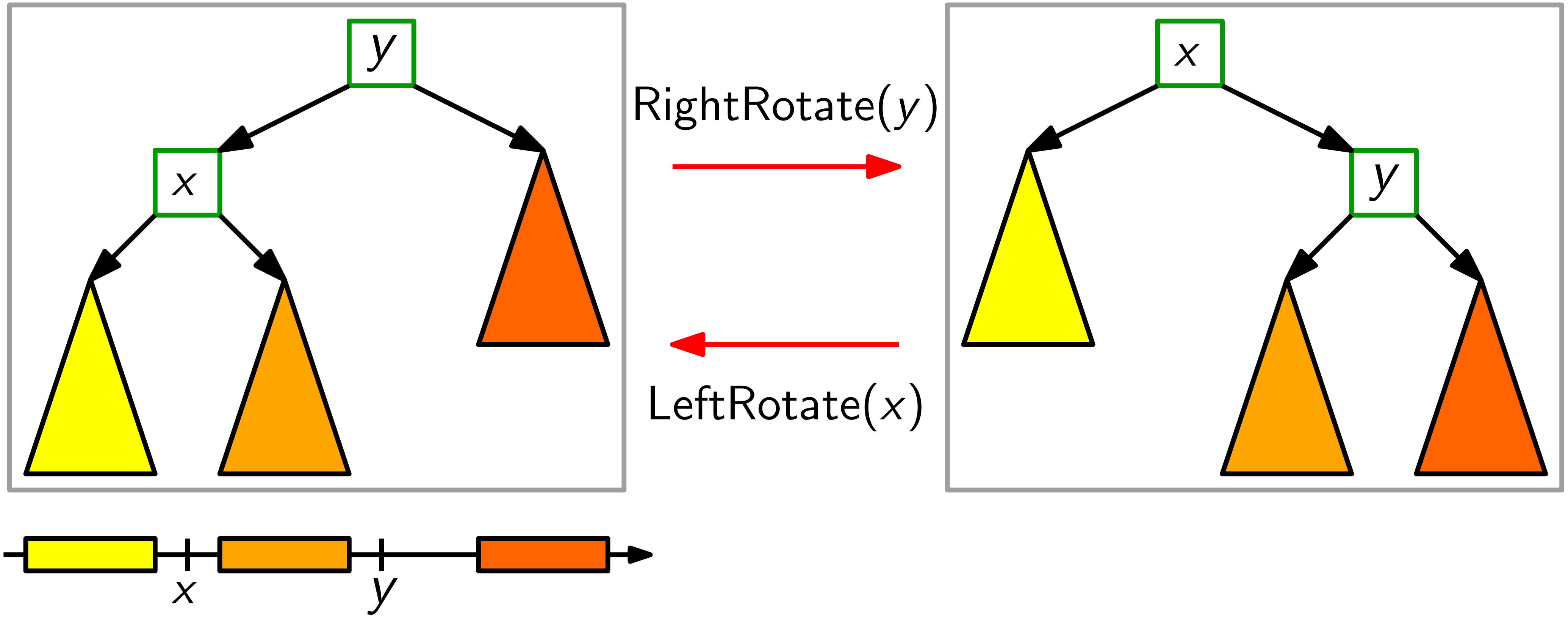
Exkurs: Rotationen



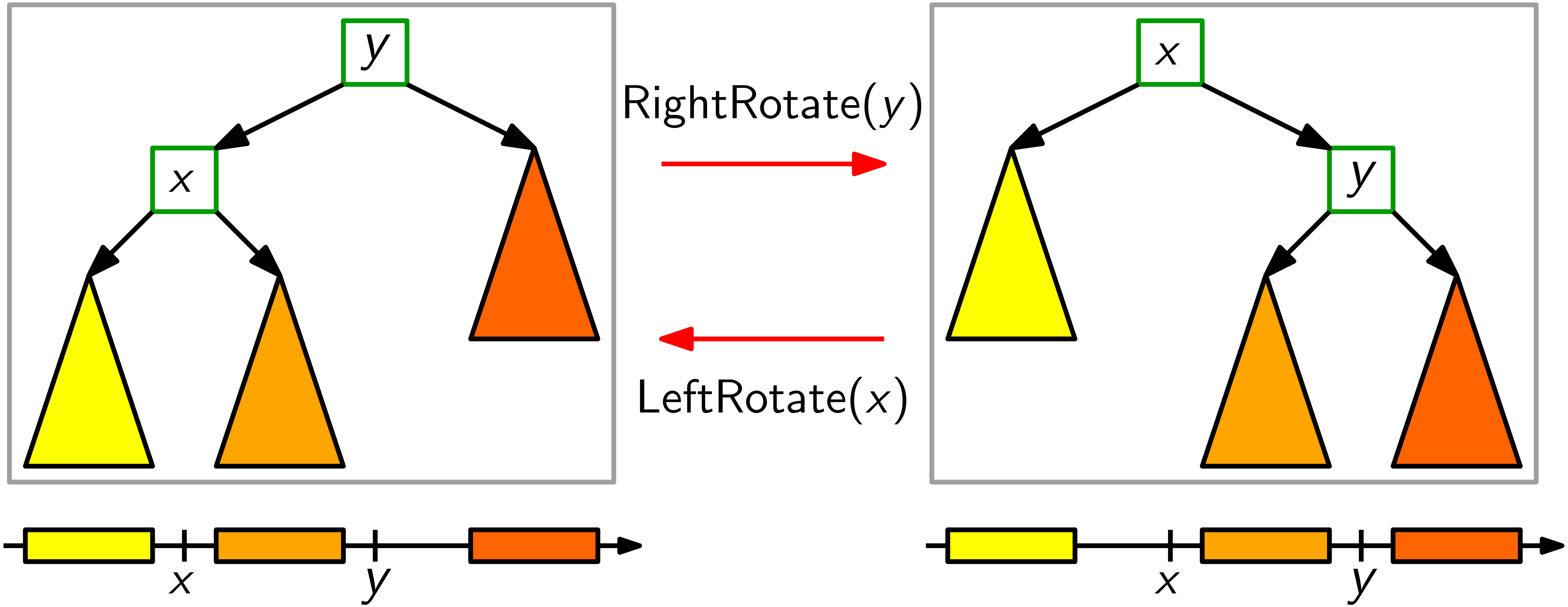
Exkurs: Rotationen



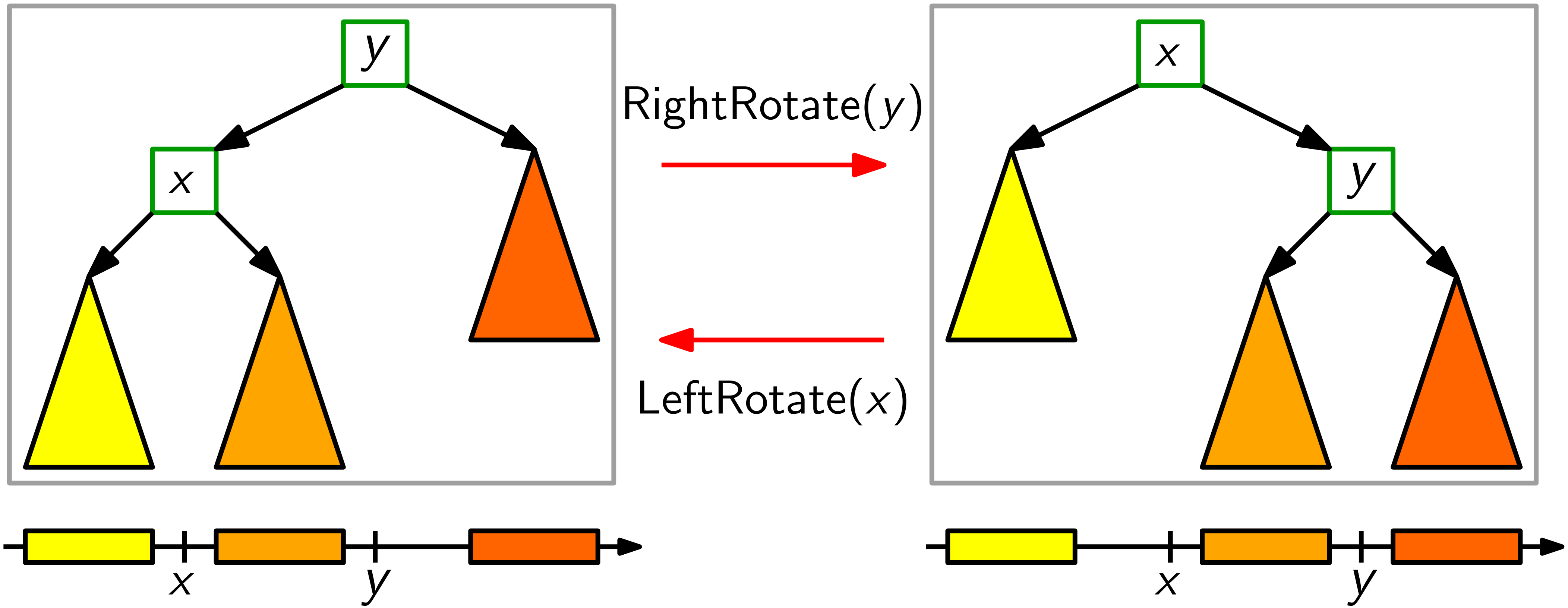
Exkurs: Rotationen



Exkurs: Rotationen

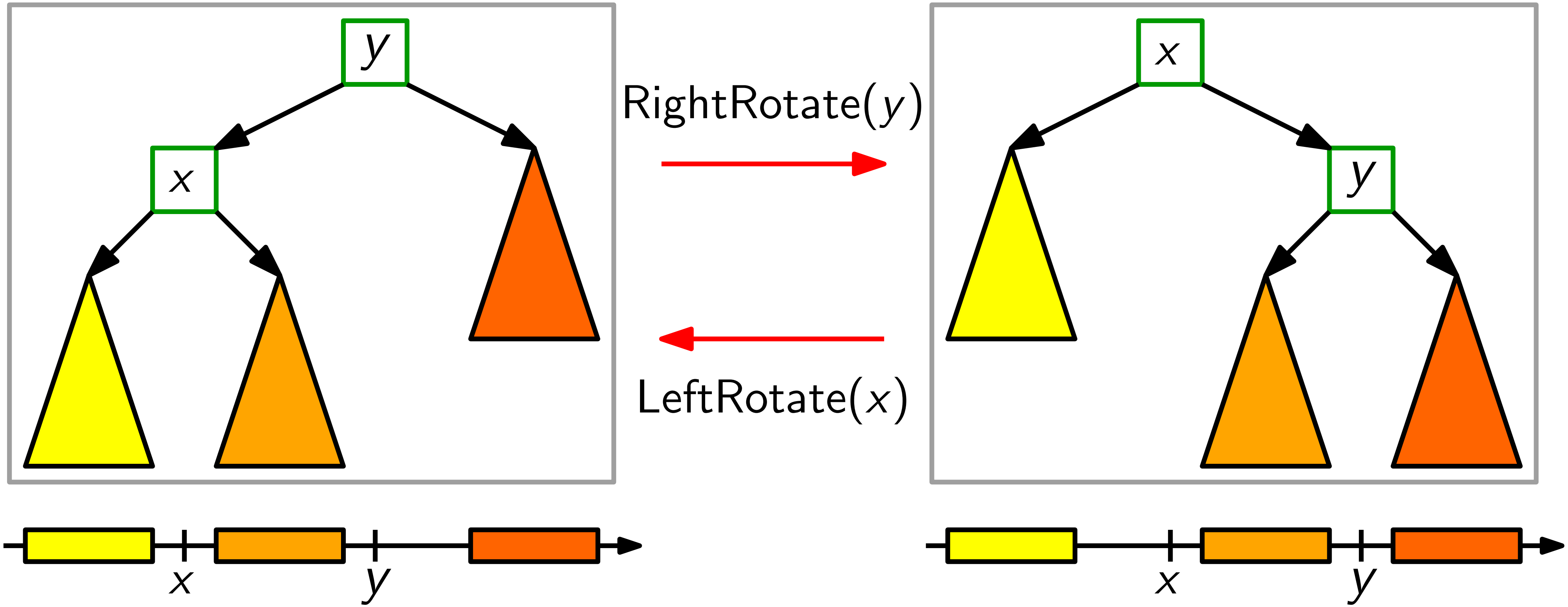


Exkurs: Rotationen



Also: Binärer-Suchbaum-Eig. bleibt beim Rotieren erhalten!

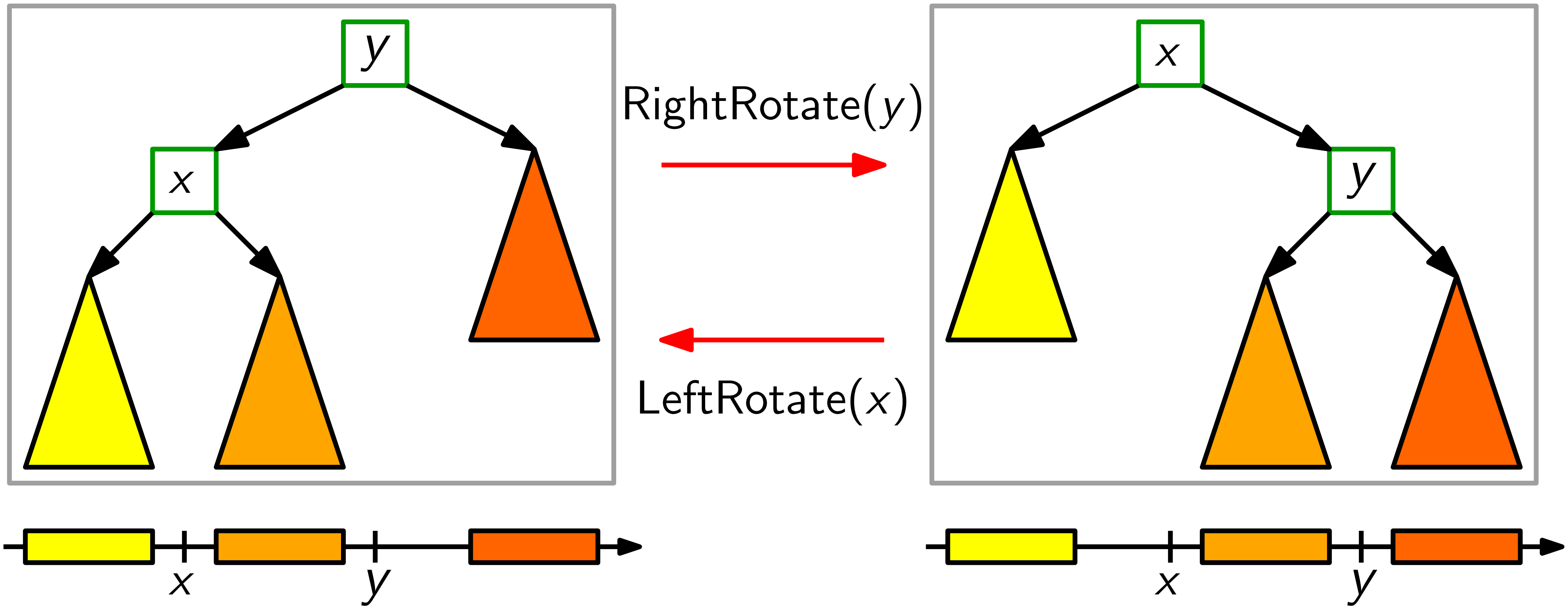
Exkurs: Rotationen



Also: Binärer-Suchbaum-Eig. bleibt beim Rotieren erhalten!

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Exkurs: Rotationen

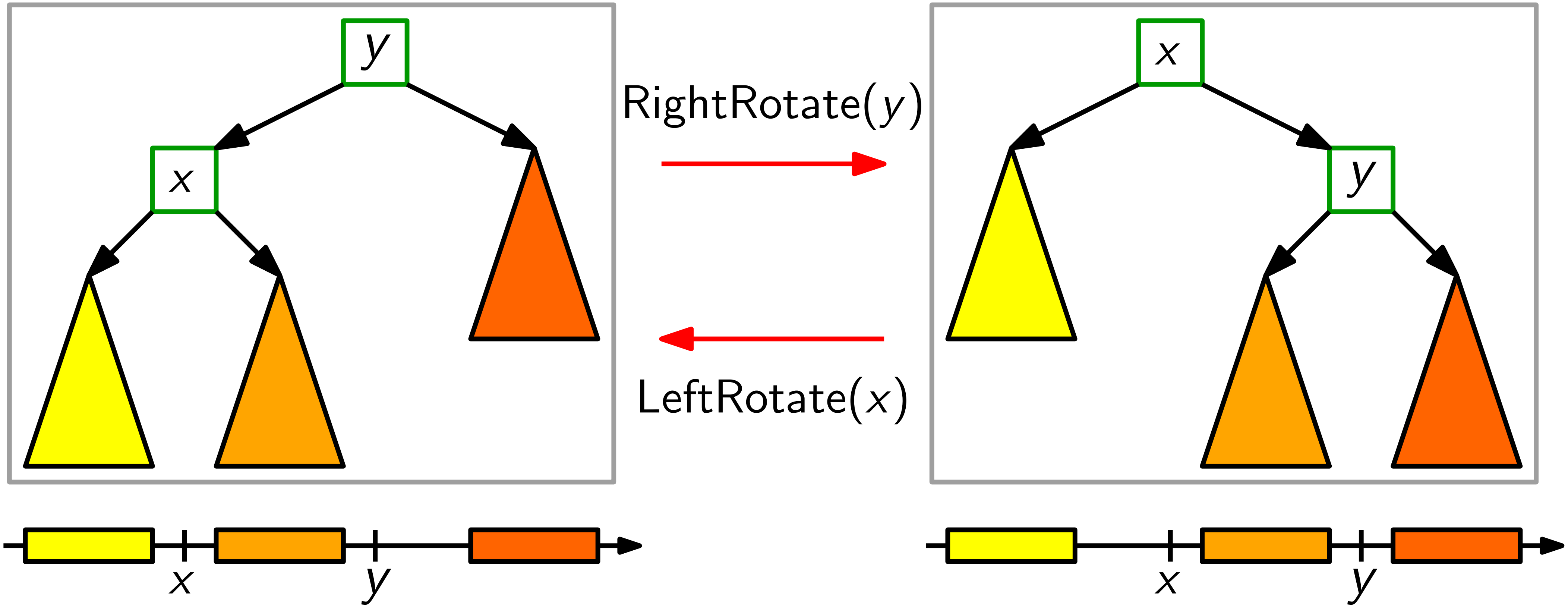


Also: Binärer-Suchbaum-Eig. bleibt beim Rotieren erhalten!

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Laufzeit:

Exkurs: Rotationen



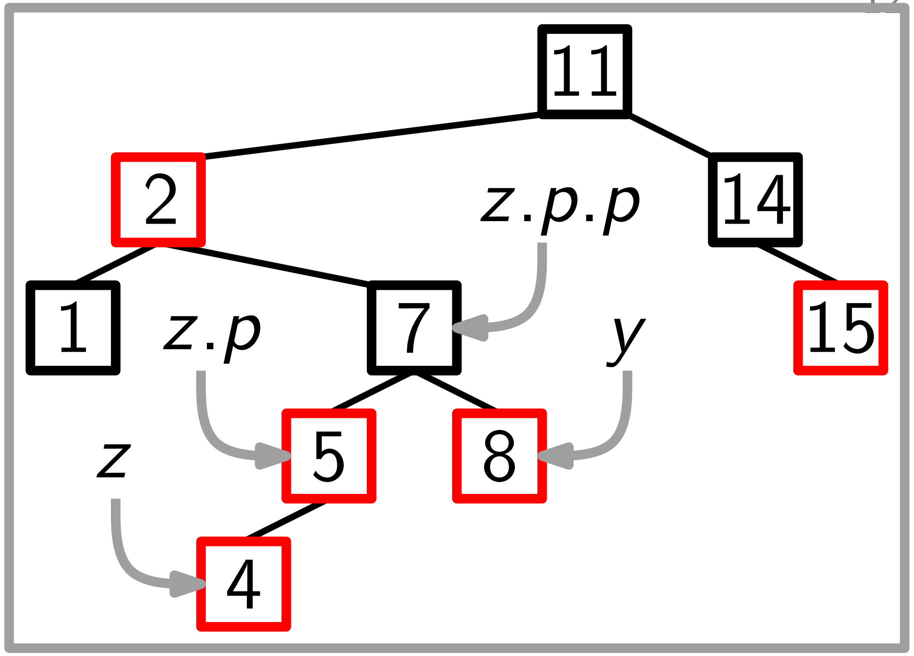
Also: Binärer-Suchbaum-Eig. bleibt beim Rotieren erhalten!

Aufgabe: Schreiben Sie Pseudocode für LeftRotate(x)!

Laufzeit: $O(1)$.

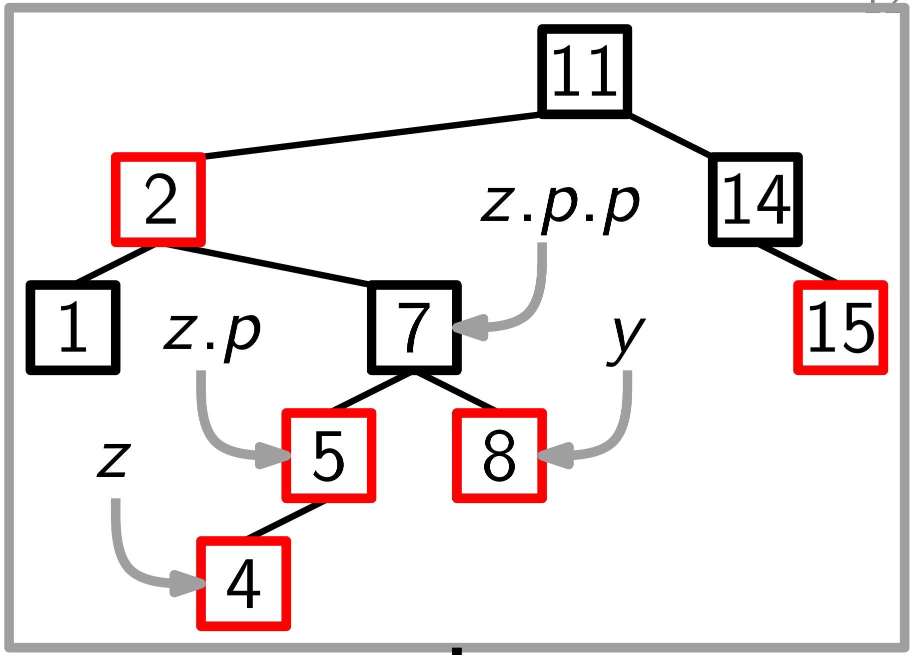
RBInsertFixup(Node z)

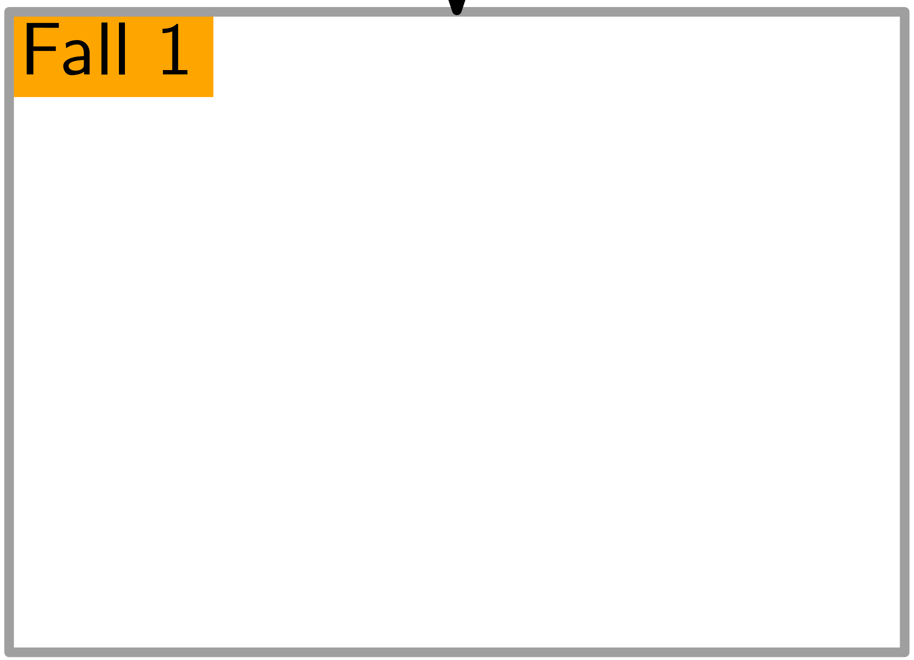
while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$ // Tante von z
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else . . . // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$



RBInsertFixup(Node z)

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$ // Tante von z
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else . . . // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$

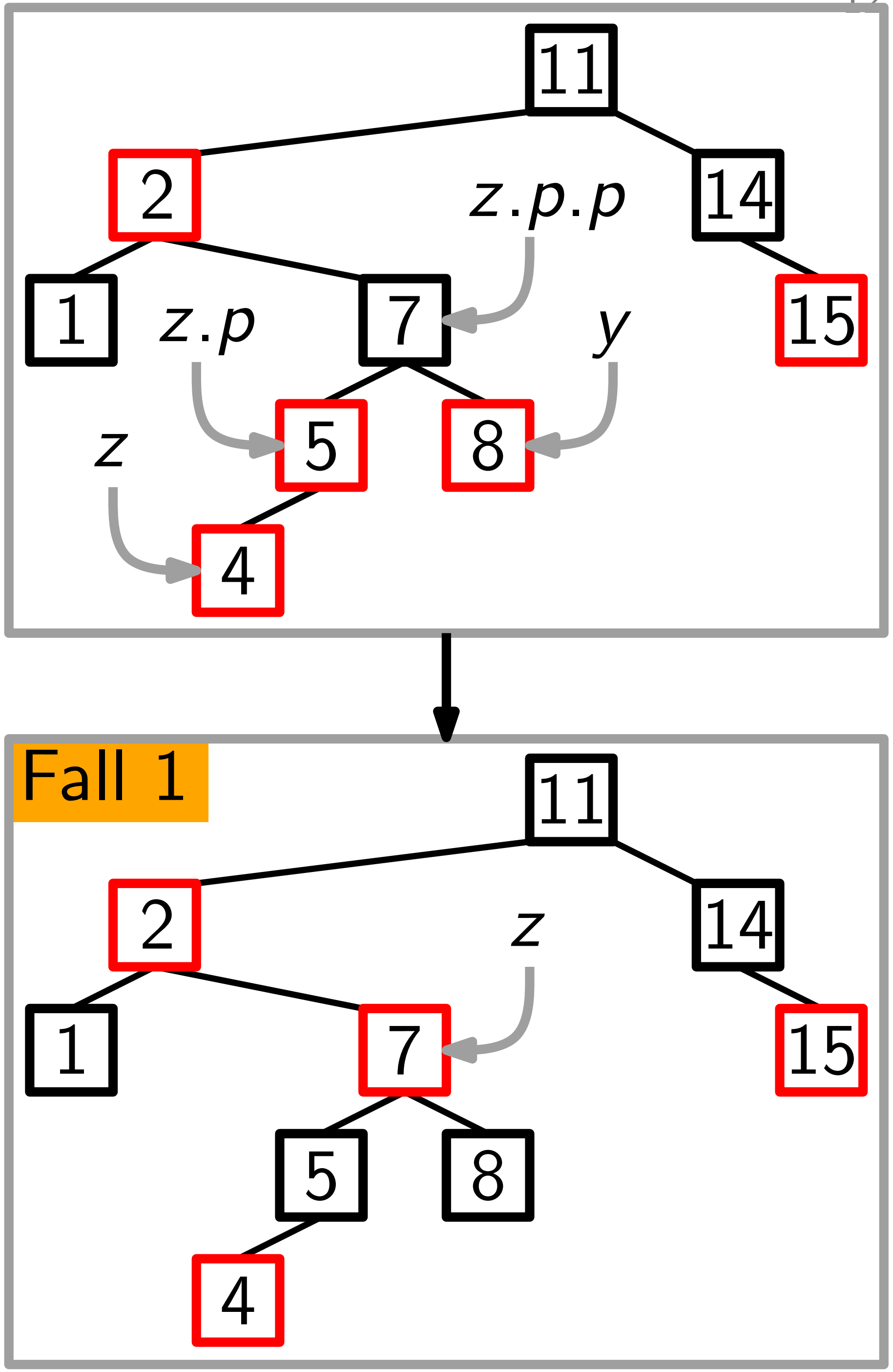




RBInsertFixup(Node z)

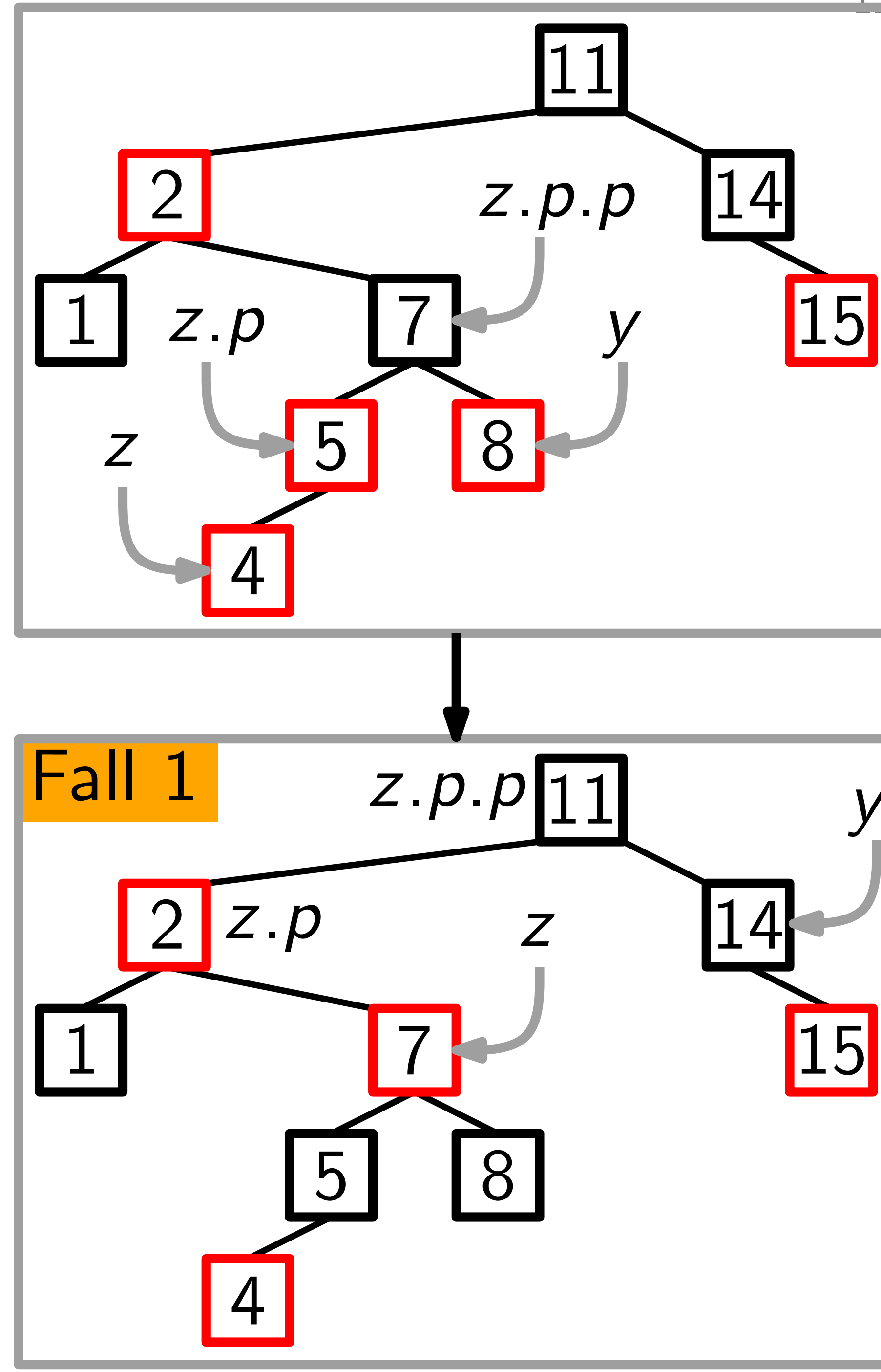
while $z.p.color == red$ **do**
- **if** $z.p == z.p.p.left$ **then**
  - $y = z.p.p.right$ // Tante von z
  - **if** $y.color == red$ **then**
    - $z.p.color = black$
    - $z.p.p.color = red$
    - $y.color = black$
    - $z = z.p.p$
  - **else**
    - **if** $z == z.p.right$ **then**
      - $z = z.p$
      - LeftRotate(z)
    - $z.p.color = black$
    - $z.p.p.color = red$
    - RightRotate($z.p.p$)
- **else** . . . // wie oben, aber re. & li. vertauscht

$root.color = black$



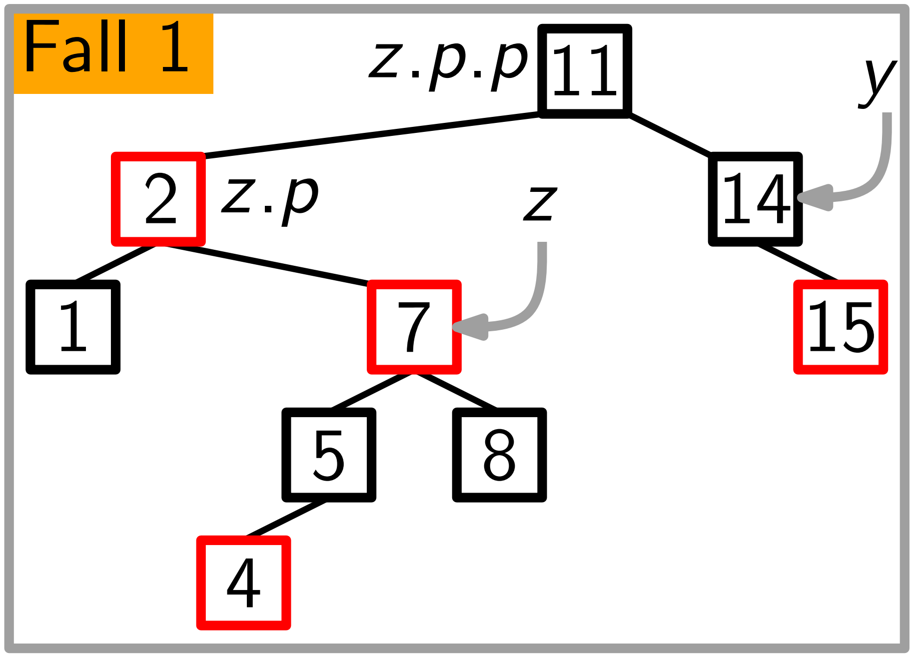
RBInsertFixup(Node z)

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$ // Tante von z
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$



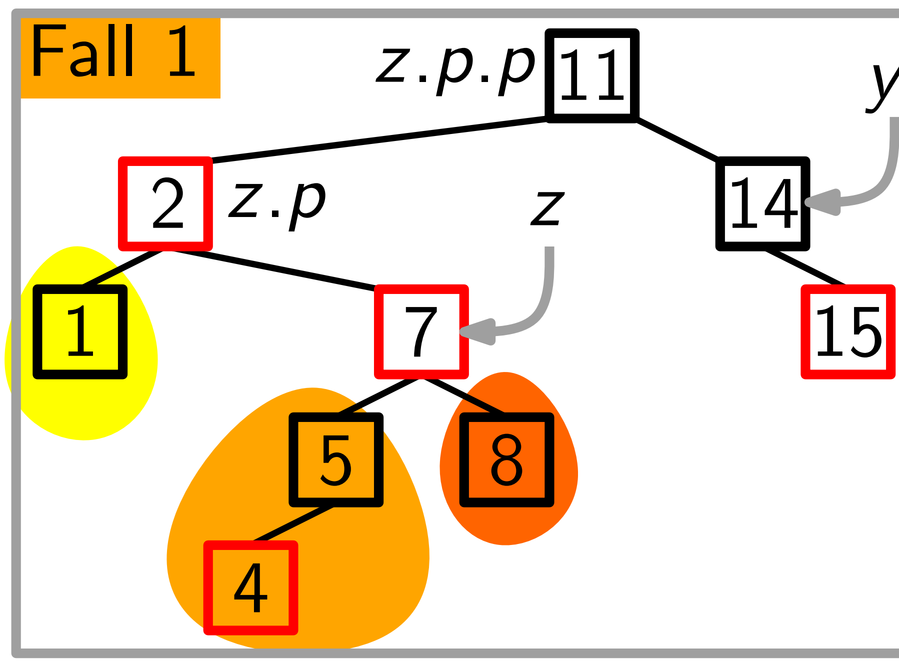
RBInsertFixup(Node z)

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$ // Tante von z
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$



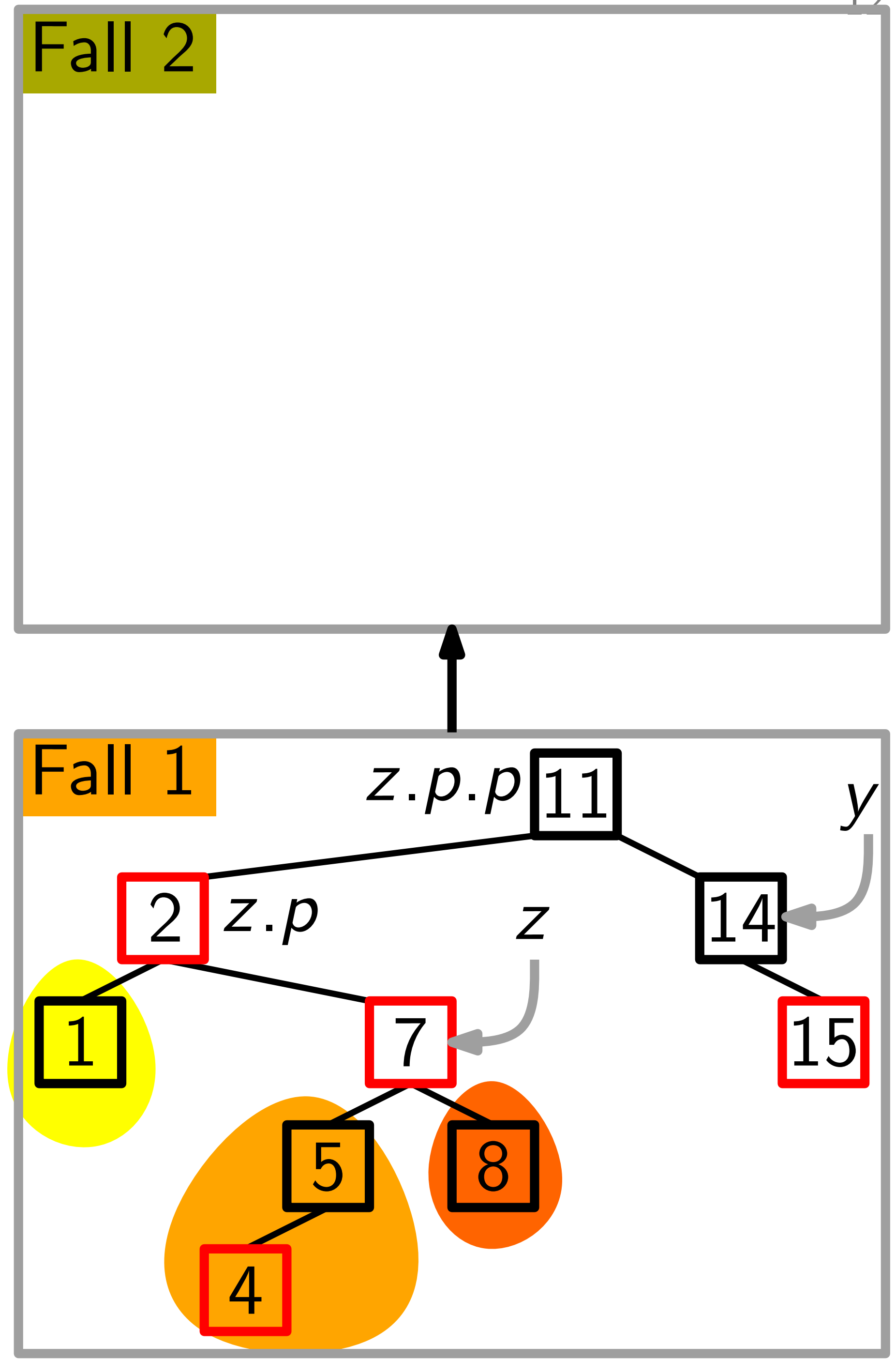
RBInsertFixup(Node z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right        // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



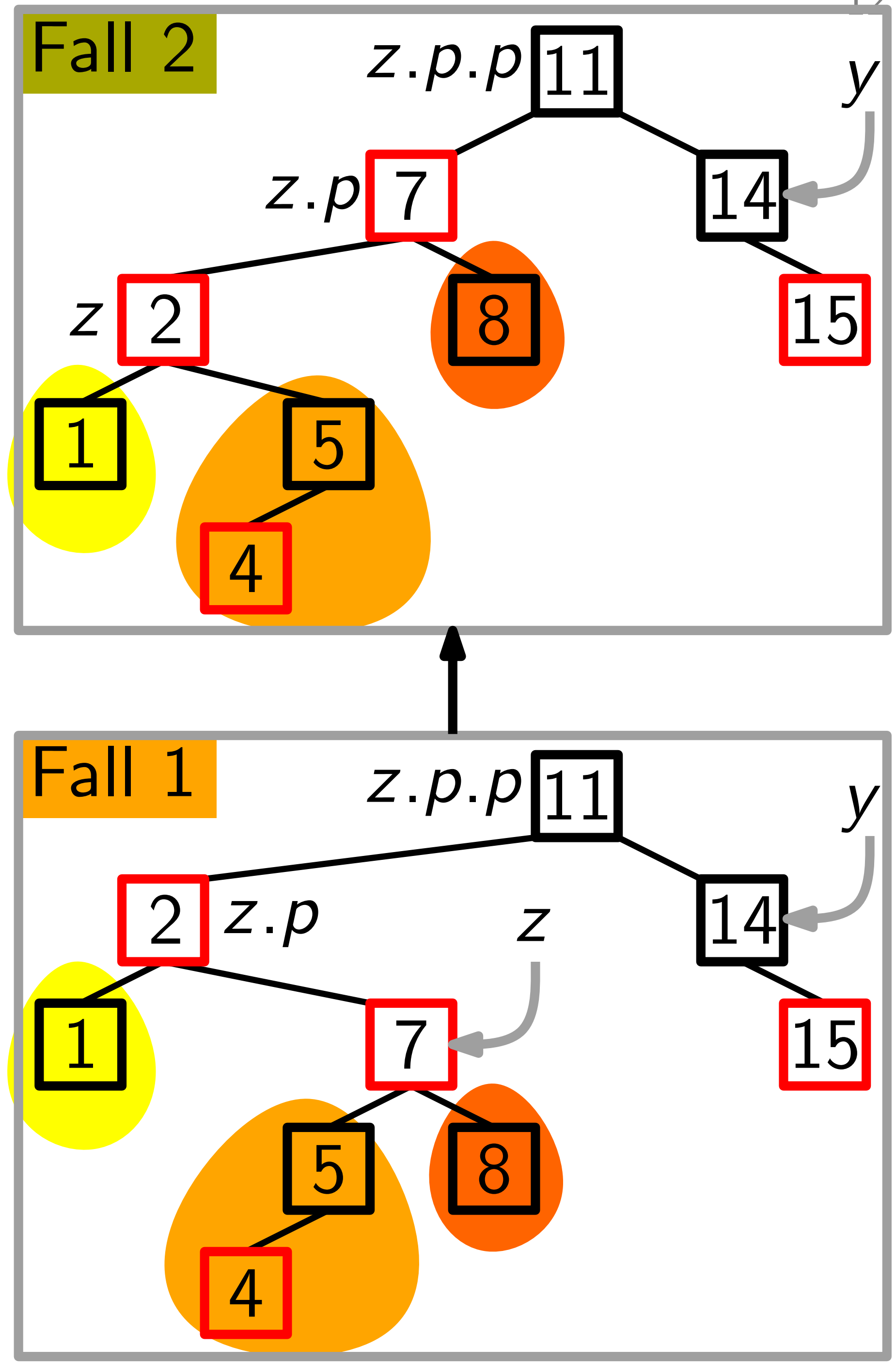
RBInsertFixup(Node z)

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$ // Tante von z
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else … // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$



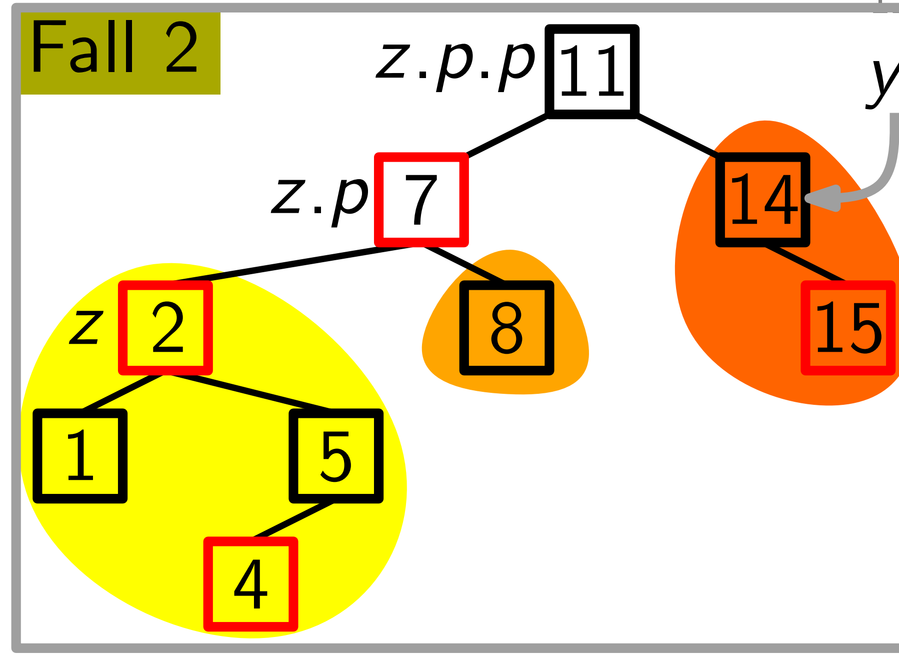
RBInsertFixup(Node z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right      // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



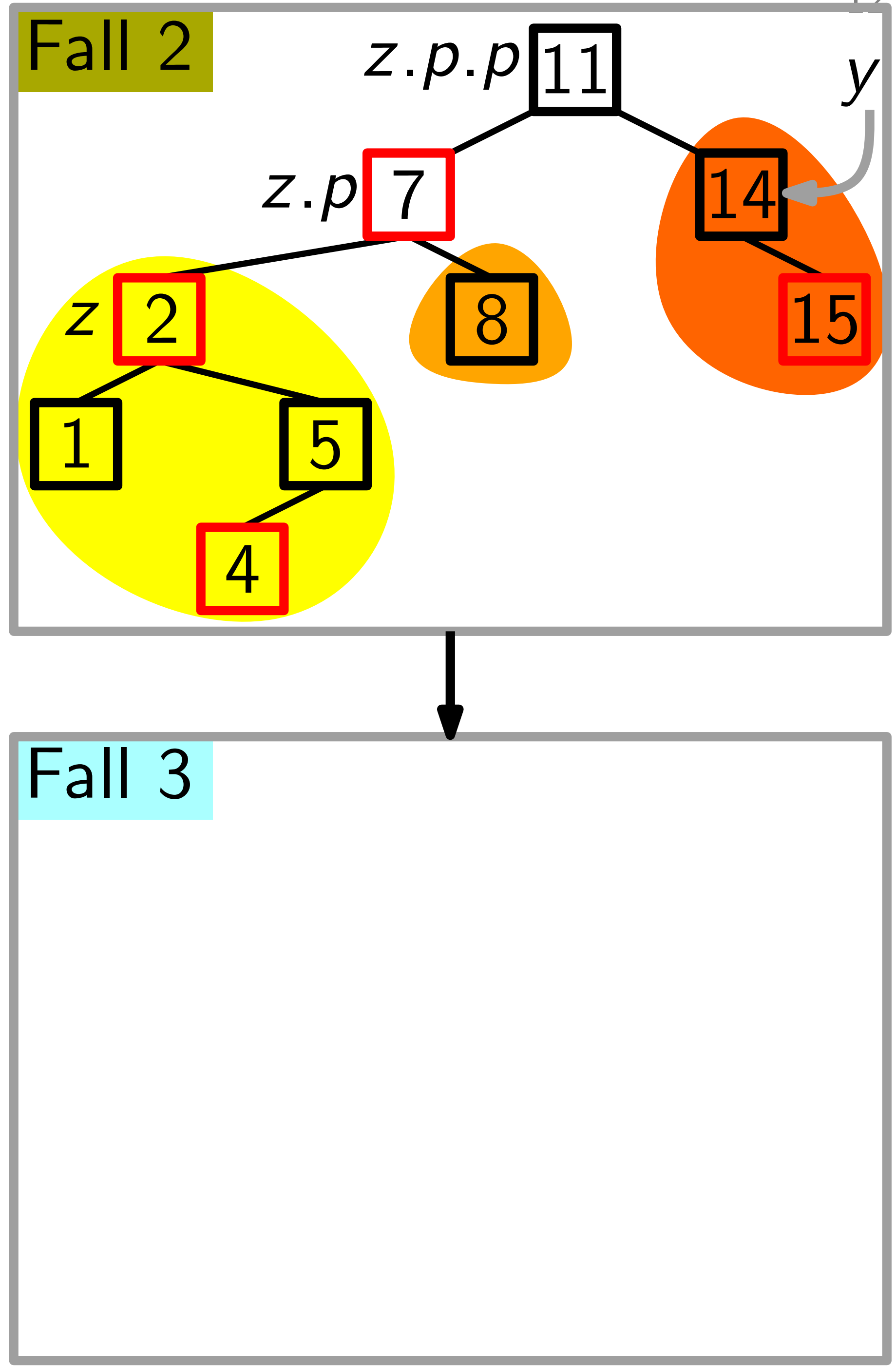
RBInsertFixup(Node z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right        // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



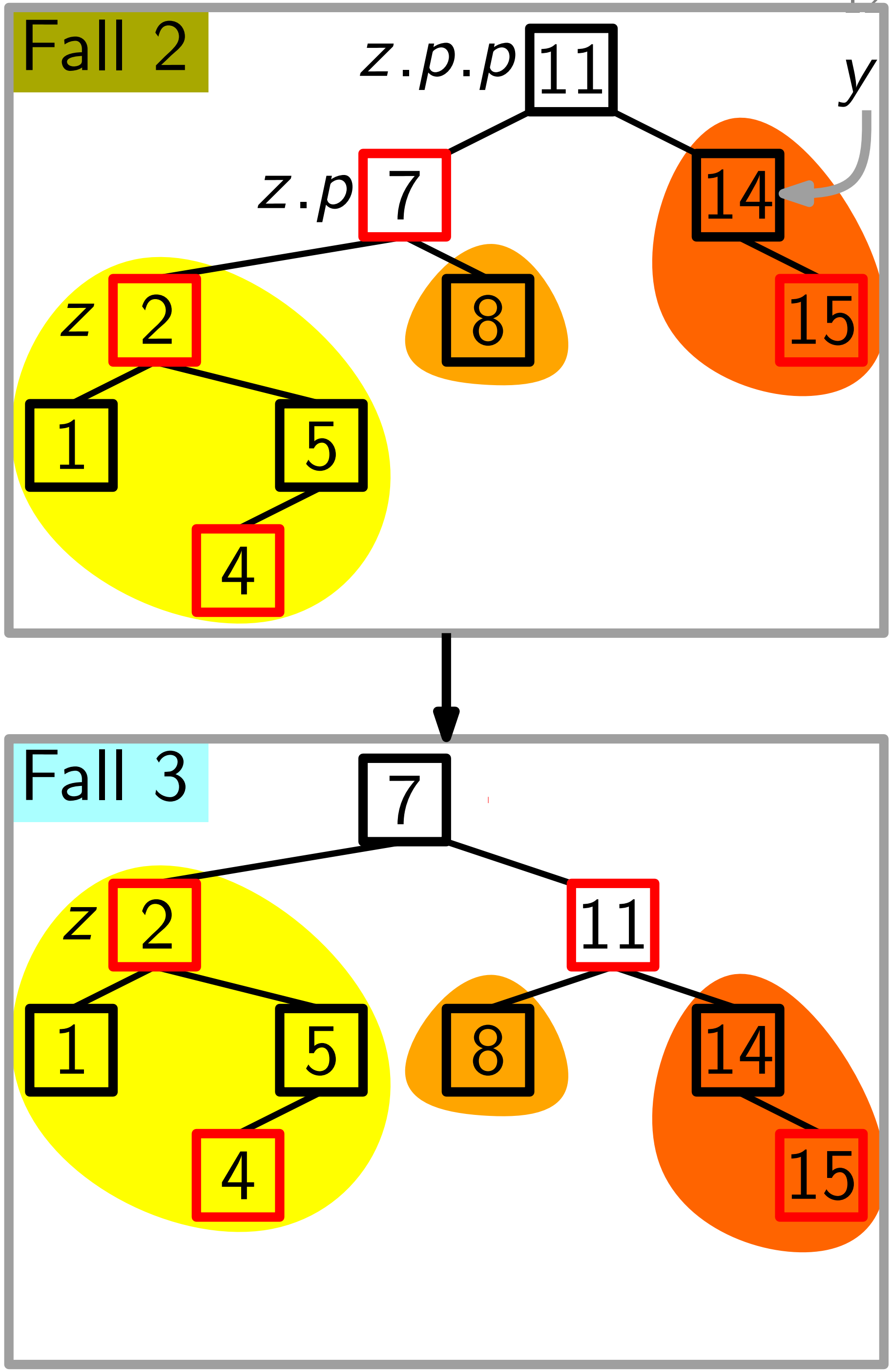
RBInsertFixup(Node z)

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$ // Tante von z
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$



RBInsertFixup(Node z)

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right        // Tante von z
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```



Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder (E2) oder (E4).
  - Falls (E2) verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls (E4) verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder (E2) oder (E4).
  - Falls (E2) verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls (E4) verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Zeige:

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder (E2) oder (E4).
  - Falls (E2) verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls (E4) verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Zeige:
- Initialisierung
- Aufrechterhaltung
- Terminierung

Korrektheit

Zu zeigen: RBInsertFixup stellt R-S-Eigenschaft wieder her.

Schleifeninvariante (gültig am Anfang der while-Schleife)

- z ist rot.
- Falls $z.p$ die Wurzel ist, dann ist $z.p$ schwarz.
- Falls R-S-Eig. verletzt sind, dann entweder (E2) oder (E4).
  - Falls (E2) verletzt ist, dann weil $z = root$ und z rot ist.
  - Falls (E4) verletzt ist, dann weil z und $z.p$ rot sind.

Zeige:
- Initialisierung
- Aufrechterhaltung
- Terminierung

Viel Arbeit! Siehe [CLRS, Kapitel 13.3].

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Laufzeit RBInsertFixup

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

$O(1)$

$O(1)$

$O(1)$

Laufzeit RBInsertFixup

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$

$O(1)$

Klettert im Baum 2 Ebenen nach oben.

$O(1)$

$O(1)$

Laufzeit RBInsertFixup

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$

$O(1)$

Klettert im Baum 2 Ebenen nach oben.

$O(1)$

Führt zum Abbruch der while-Schleife.

$O(1)$

Laufzeit RBInsertFixup

Insgesamt:
- Fall 1 $O(h)$ mal
- Fall 2 ≤ 1 mal
- Fall 3 ≤ 1 mal

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right
        if y.color == red then
            z.p.color = black          ⎫
            z.p.p.color = red          ⎬ O(1)
            y.color = black            ⎪
            z = z.p.p   <—— Klettert im Baum 2 Ebenen nach oben.
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p                ⎫ O(1)
                LeftRotate(z)          ⎭
            z.p.color = black   <—— Führt zum Abbruch der while-Schleife.
            z.p.p.color = red          ⎬ O(1)
            RightRotate(z.p.p)         ⎭
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

Laufzeit RBInsertFixup

Insgesamt:
- Fall 1 $O(h)$ mal
- Fall 2 ≤ 1 mal
- Fall 3 ≤ 1 mal

```
while z.p.color == red do
    if z.p == z.p.p.left then
        y = z.p.p.right
        if y.color == red then
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            y.color = black
            z = z.p.p
        else
            if z == z.p.right then
                z = z.p
                LeftRotate(z)
            z.p.color = black
            z.p.p.color = red
            RightRotate(z.p.p)
    else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
root.color = black
```

$O(1)$

$O(1)$

$O(1)$

Klettert im Baum 2 Ebenen nach oben.

Führt zum Abbruch der while-Schleife.

Laufzeit RBInsertFixup

while $z.p.color == red$ **do**
  if $z.p == z.p.p.left$ **then**
    $y = z.p.p.right$
    if $y.color == red$ **then**
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      $y.color = black$
      $z = z.p.p$
    else
      if $z == z.p.right$ **then**
        $z = z.p$
        LeftRotate(z)
      $z.p.color = black$
      $z.p.p.color = red$
      RightRotate($z.p.p$)
  else ... // wie oben, aber re. & li. vertauscht
$root.color = black$

$O(1)$

$O(1)$

$O(1)$

Klettert im Baum 2 Ebenen nach oben.

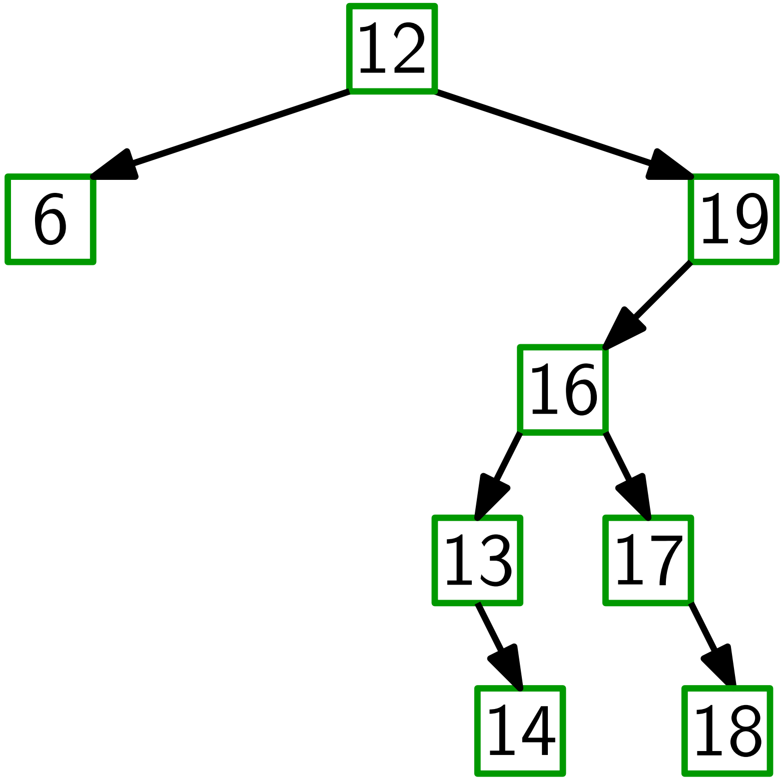
Führt zum Abbruch der while-Schleife.

Insgesamt:
- Fall 1 $O(h)$ mal
- Fall 2 ≤ 1 mal
- Fall 3 ≤ 1 mal

$O(\log n)$ Umfärbungen und ≤ 2 Rotationen

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



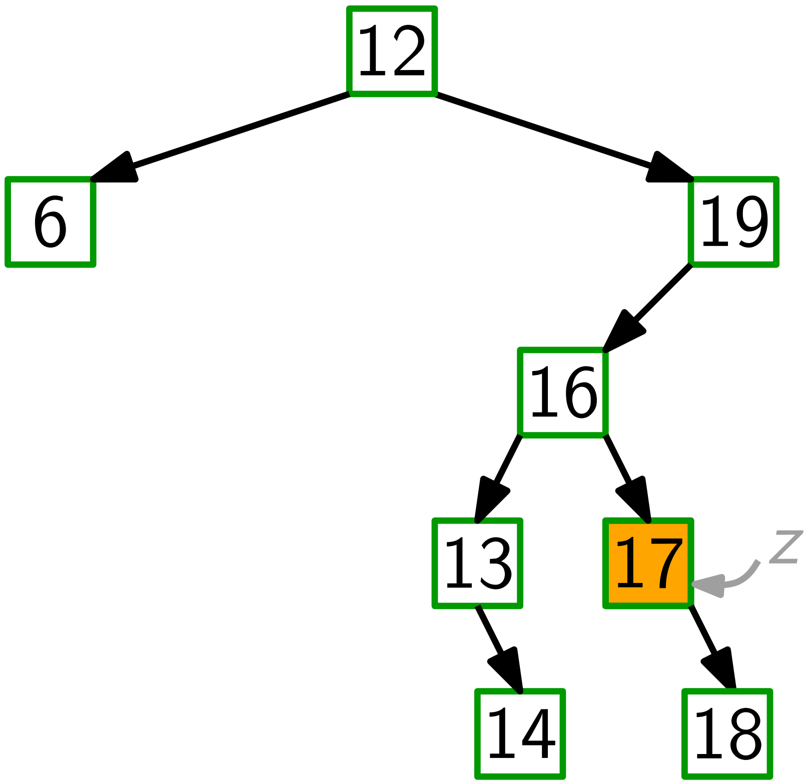
1. z hat kein li. Kind.

2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:



1. z hat kein li. Kind.

2. z hat kein re. Kind.

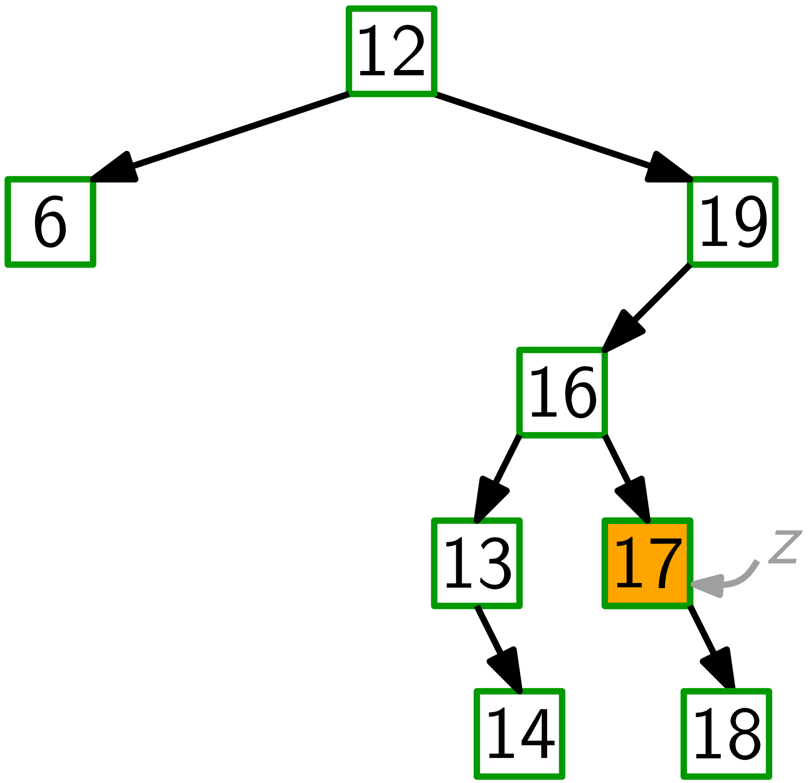
3. z hat zwei Kinder.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

Setze $z.right$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

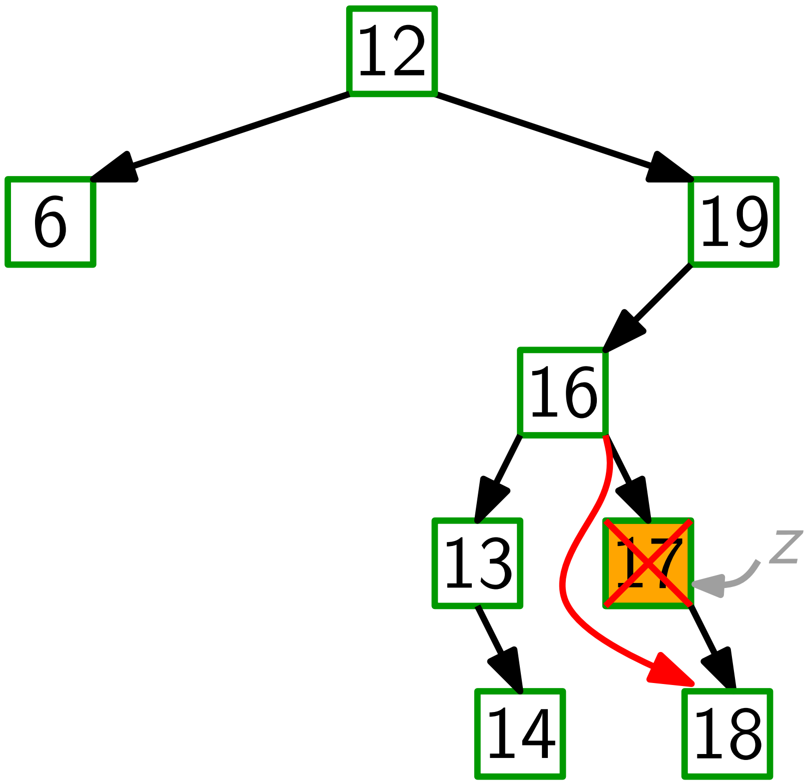
3. z hat zwei Kinder.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

Setze $z.right$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

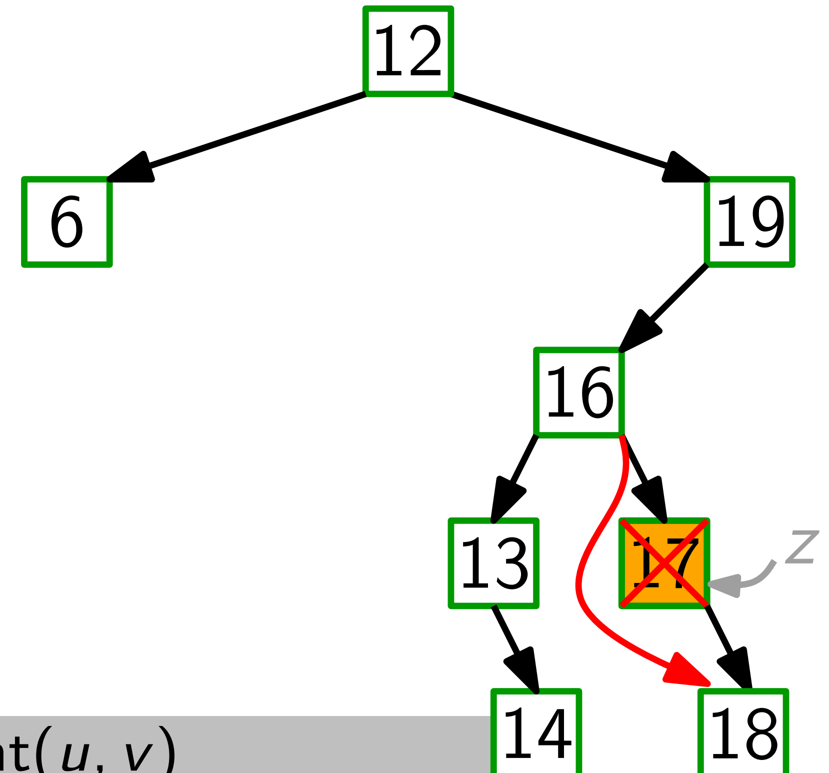
Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.

2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.



Transplant(u, v)

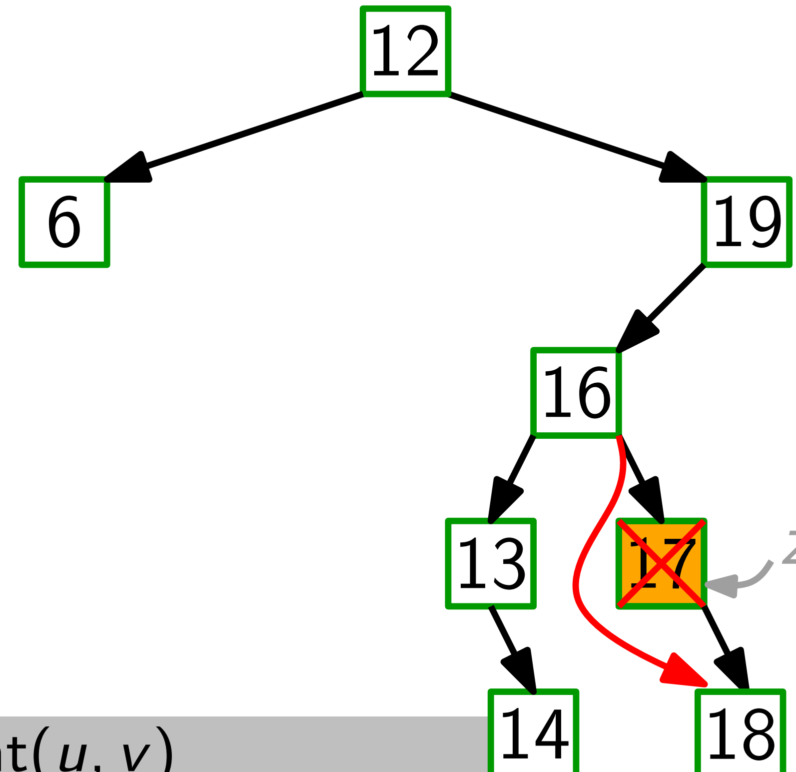
if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
else
  if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
    $u.p.\mathit{left} = v$
  else $u.p.\mathit{right} = v$
if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

Setze $z.right$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
if $u.p == nil$ **then** $root = v$
else
  if $u == u.p.left$ **then**
    $u.p.left = v$
  else $u.p.right = v$
if $v \neq nil$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

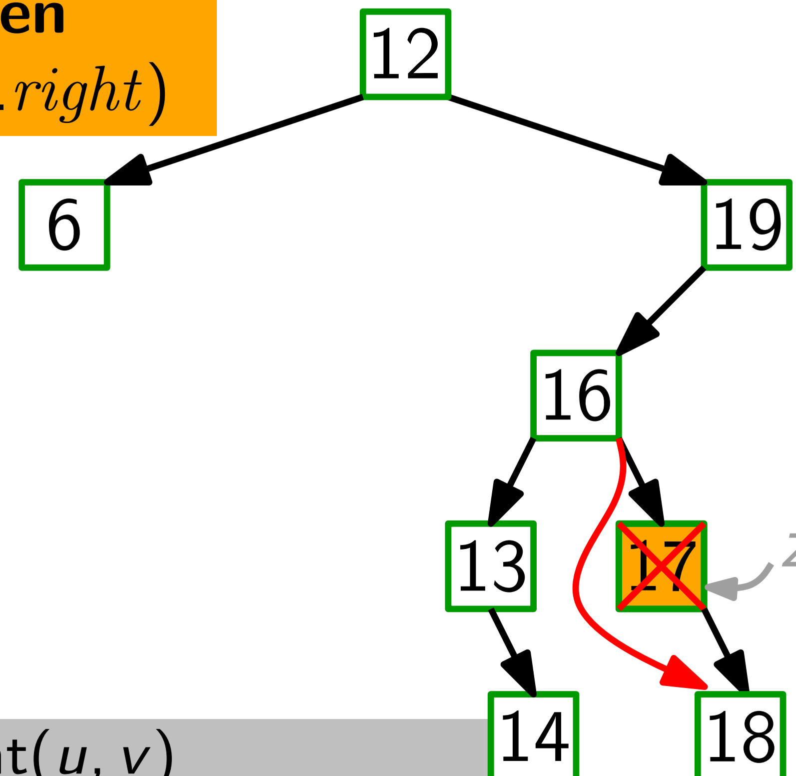
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

if $z.left == nil$ **then**
Transplant$(z, z.right)$

1. z hat kein li. Kind.

Setze $z.right$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
if $u.p == nil$ **then** $root = v$
else
if $u == u.p.left$ **then**
$u.p.left = v$
else $u.p.right = v$
if $v \neq nil$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

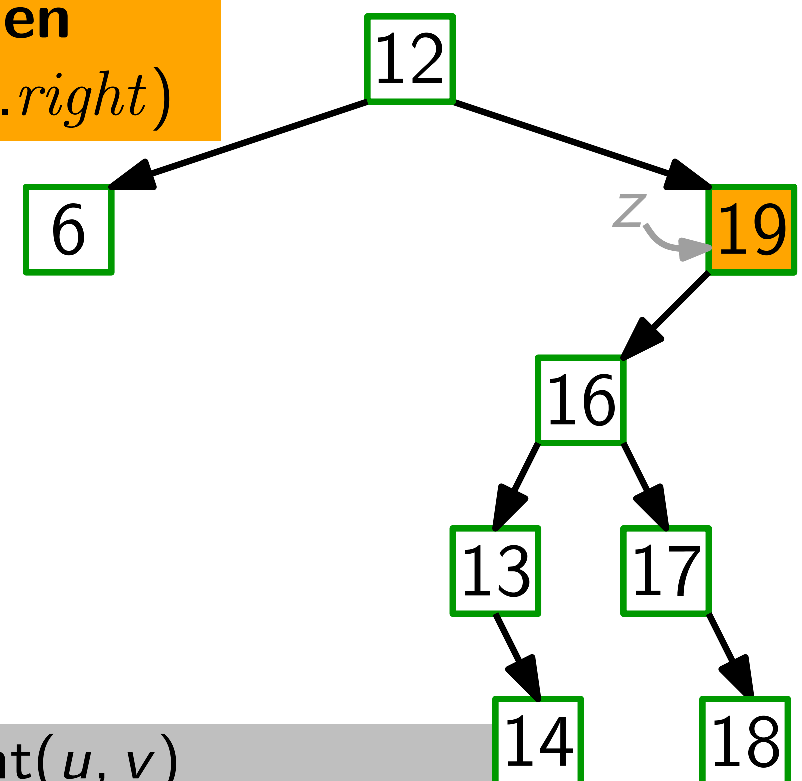
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

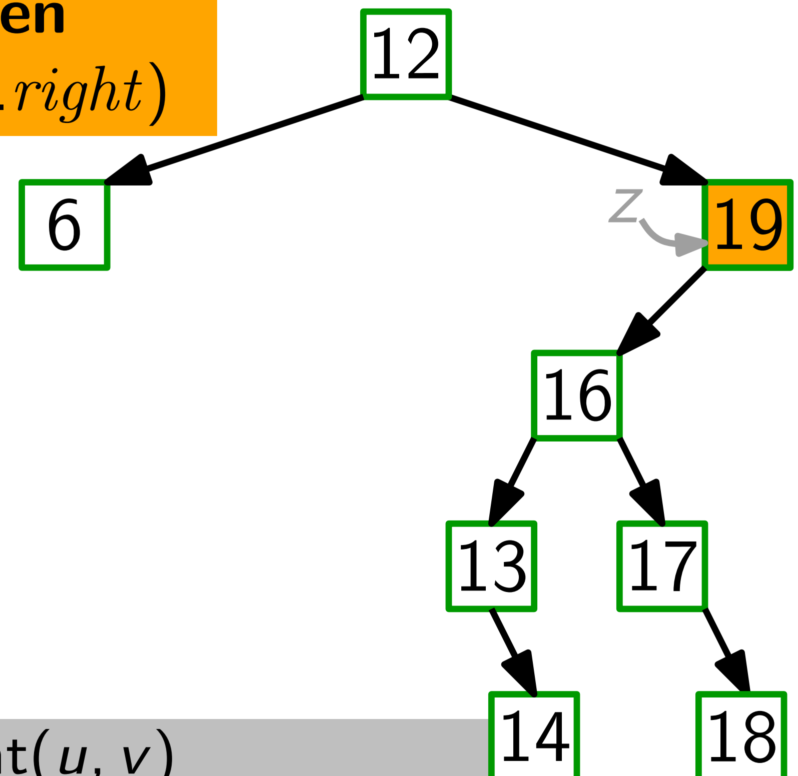
if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.

2. z hat kein re. Kind.

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.




```
Transplant(u, v)
  if u.p == nil then root = v
  else
    if u == u.p.left then
      u.p.left = v
    else u.p.right = v
  if v ≠ nil then v.p = u.p
```

Setze v an die Stelle von u.

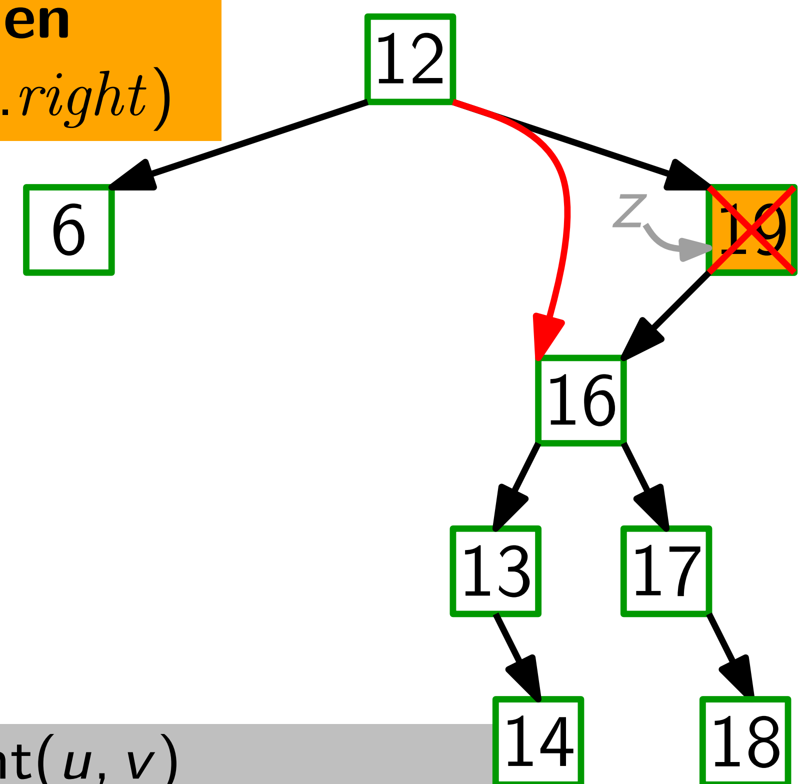
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{right}$)

1. z hat kein li. Kind.

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

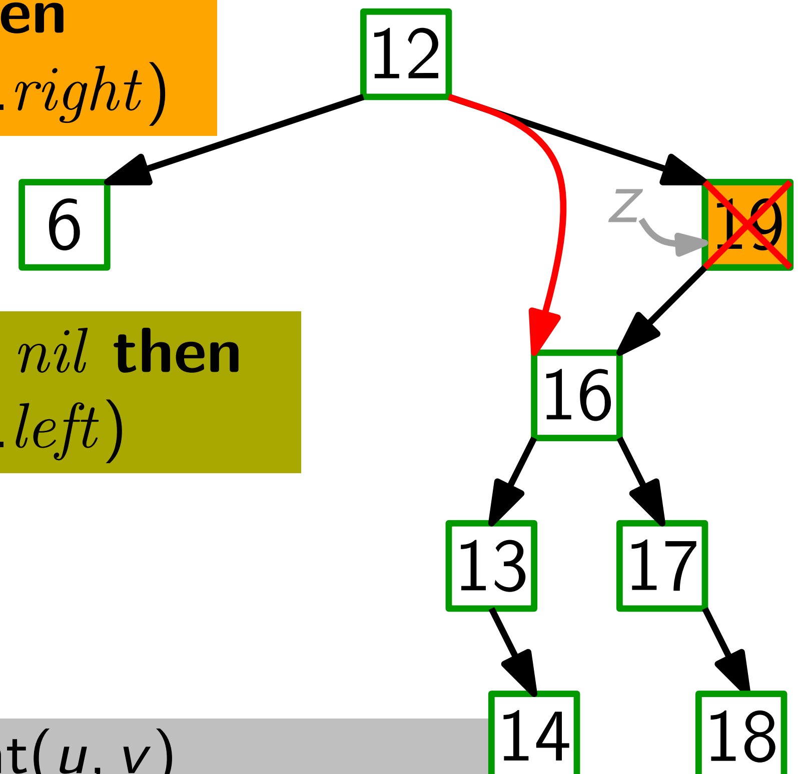
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

else if $z.\mathit{right} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{left}$)

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

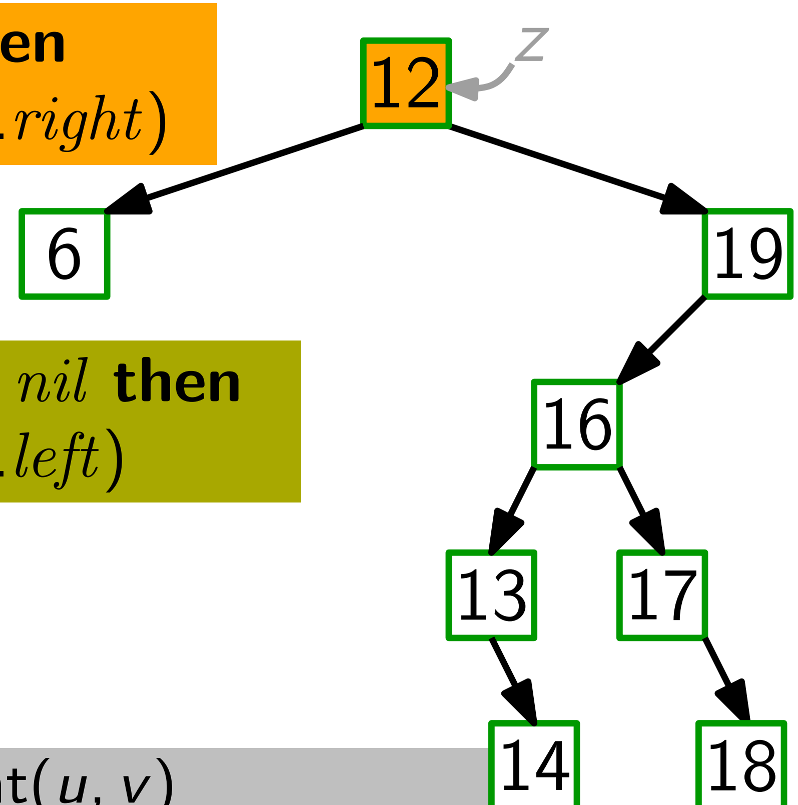
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

else if $z.\mathit{right} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{left}$)

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

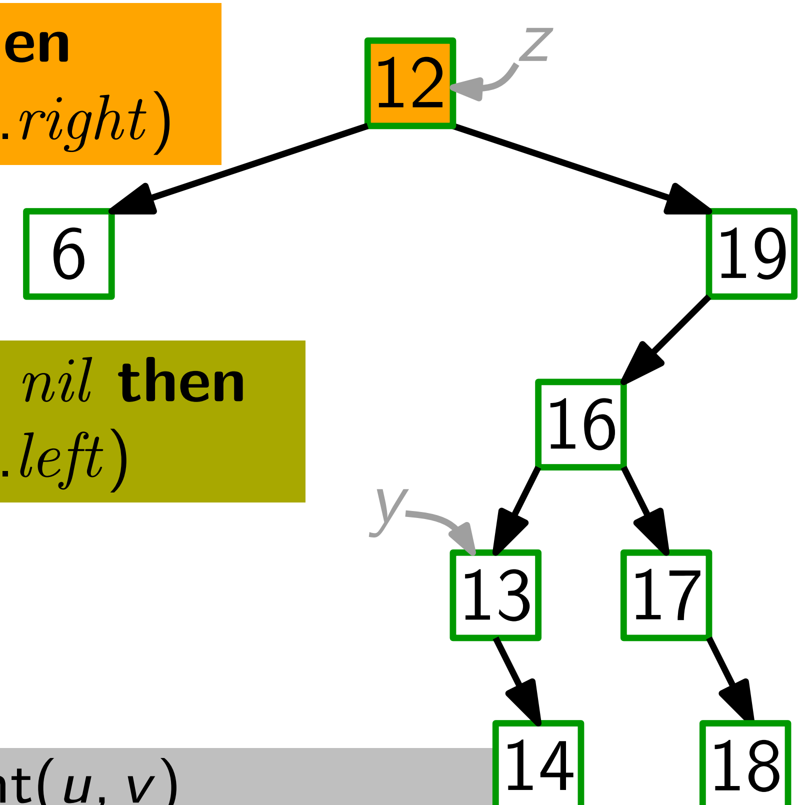
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant$(z, z.\mathit{right})$

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

else if $z.\mathit{right} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant$(z, z.\mathit{left})$

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y =$ Successor(z)
Falls $y.p \neq z$, setze $y.\mathit{right}$
  an die Stelle von y.
Setze y an die Stelle von z

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

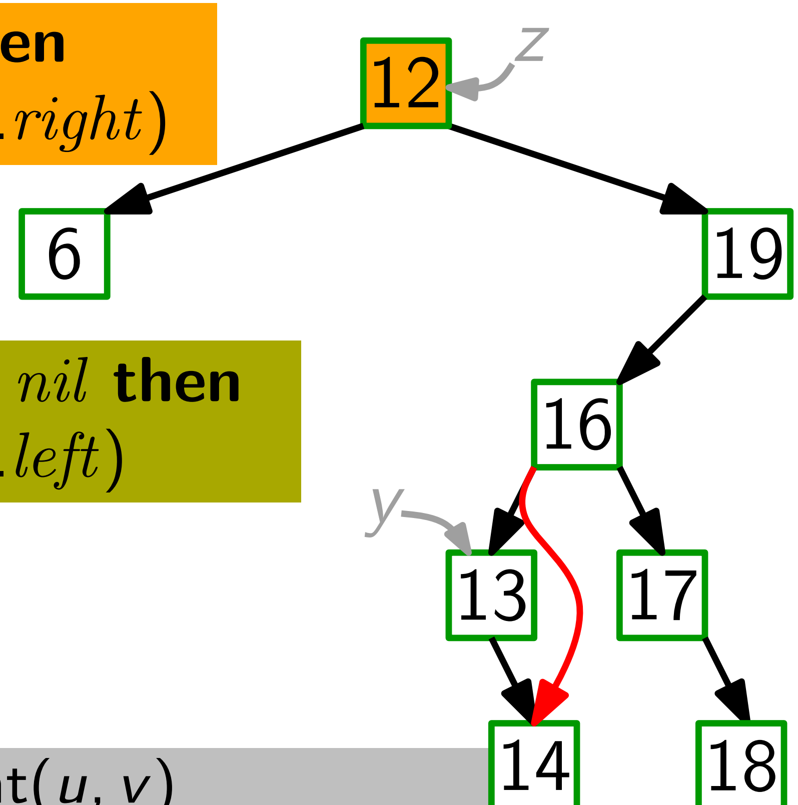
if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant(z, $z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.

2. z hat kein re. Kind.

else if $z.\mathit{right} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant(z, $z.\mathit{left}$)

symmetrisch!



3. z hat zwei Kinder.

Setze $y = $ Successor(z)
Falls $y.p \neq z$, setze $y.\mathit{right}$
  an die Stelle von y.
Setze y an die Stelle von z

Transplant(u, v)
  if $u.p == \mathit{nil}$ **then** $\mathit{root} = v$
  else
    if $u == u.p.\mathit{left}$ **then**
      $u.p.\mathit{left} = v$
    else $u.p.\mathit{right} = v$
  if $v \neq \mathit{nil}$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.left == nil$ **then**
  Transplant($z, z.right$)

Setze $z.right$ an die Stelle von z.
Lösche z.

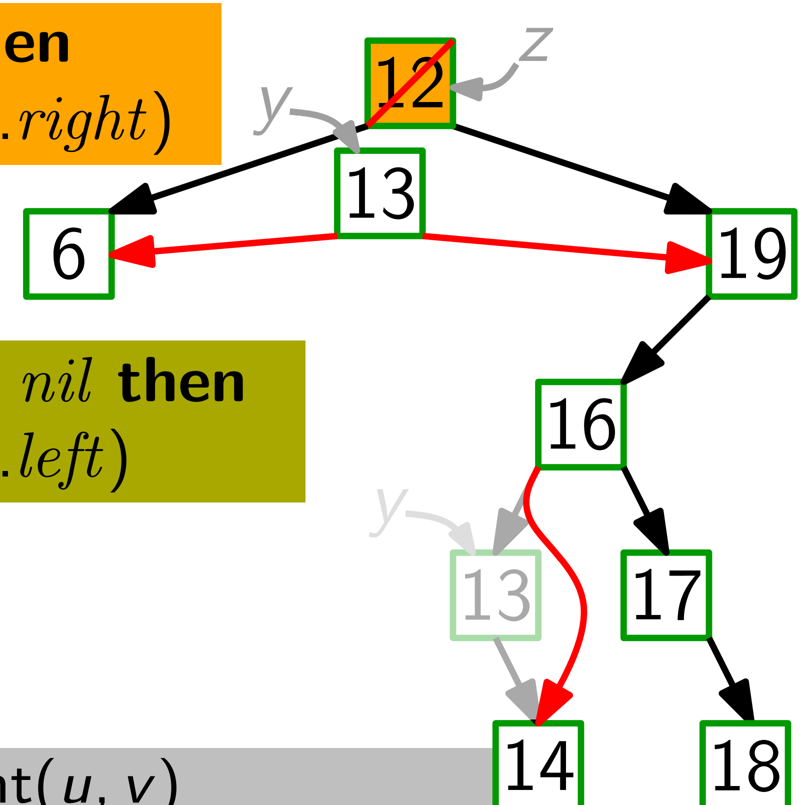
2. z hat kein re. Kind.

else if $z.right == nil$ **then**
  Transplant($z, z.left$)

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y =$ Successor(z)
Falls $y.p \neq z$, setze $y.right$
  an die Stelle von y.
Setze y an die Stelle von z



Transplant(u, v)
  if $u.p == nil$ **then** $root = v$
  else
    if $u == u.p.left$ **then**
      $u.p.left = v$
    else $u.p.right = v$
  if $v \neq nil$ **then** $v.p = u.p$

Setze v an die Stelle von u.

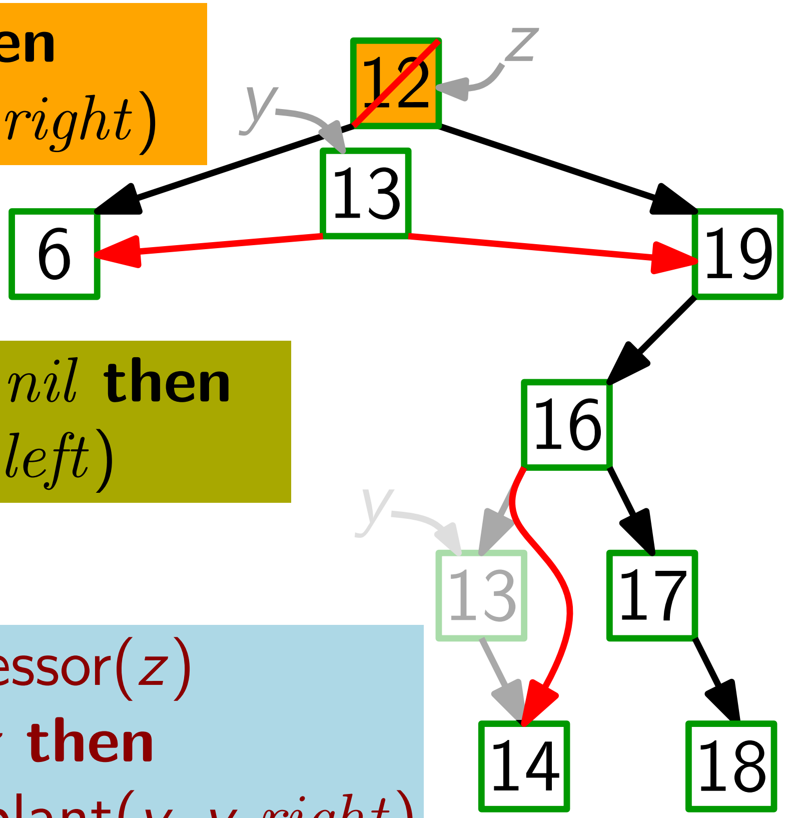
Löschen in (farblosen) binären Suchbäumen

Sei z der zu löschende Knoten. Wir betrachten drei Fälle:

1. z hat kein li. Kind.

if $z.\mathit{left} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{right}$)

Setze $z.\mathit{right}$ an die Stelle von z.
Lösche z.



2. z hat kein re. Kind.

else if $z.\mathit{right} == \mathit{nil}$ **then**
  Transplant($z, z.\mathit{left}$)

symmetrisch!

3. z hat zwei Kinder.

Setze $y = \text{Successor}(z)$
Falls $y.p \neq z$, setze $y.\mathit{right}$
  an die Stelle von y.
Setze y an die Stelle von z

$y = \text{Successor}(z)$
if $y.p \neq z$ **then**
  Transplant($y, y.\mathit{right}$)
  $y.\mathit{right} = z.\mathit{right}$
  $y.\mathit{right}.p = y$
Transplant(z, y)
$y.\mathit{left} = z.\mathit{left}$
$y.\mathit{left}.p = y$

Löschen (Übersicht)

Delete(Node z)

```
if z.left == nil then                    // kein linkes Kind
|   Transplant(z, z.right)
else
|   if z.right == nil then               // kein rechtes Kind
|   |   Transplant(z, z.left)
|   else                                 // zwei Kinder
|   |   y = Successor(z)
|   |   if y.p ≠ z then
|   |   |   Transplant(y, y.right)
|   |   |   y.right = z.right
|   |   |   y.right.p = y
|   |   Transplant(z, y)
|   |   y.left = z.left
|   |   y.left.p = y
```

```
RBDelete(Node z)

if z.left == T.nil then
    RBTransplant(z, z.right)
else
    if z.right == T.nil then
        RBTransplant(z, z.left)
    else
        y = Successor(z)


        if y.p == z then
        else
            RBTransplant(y, y.right)
            y.right = z.right
            y.right.p = y
        RBTransplant(z, y)
        y.left = z.left
        y.left.p = y
```

```
RBTransplant(u, v)

if u.p == T.nil then root = v
else
    if u == u.p.left then
        u.p.left = v
    else u.p.right = v
~~if v ≠ nil then~~ v.p = u.p
```

```
RBDelete(Node z)

if z.left == T.nil then
    RBTransplant(z, z.right)
else
    if z.right == T.nil then
        RBTransplant(z, z.left)
    else
        y = Successor(z)

        if y.p == z then
        else
            RBTransplant(y, y.right)
            y.right = z.right
            y.right.p = y
        RBTransplant(z, y)
        y.left = z.left
        y.left.p = y
```

```
RBTransplant(u, v)
  if u.p == T.nil then root = v
  else
      if u == u.p.left then
          u.p.left = v
      else u.p.right = v
  if v ≠ nil then v.p = u.p
```

Achtung – Trick!
Das kann dazu führen, dass manchmal der Elternzeiger von $T.nil$ temporär auf den Elternknoten von u gesetzt wird.

RBDelete(Node z)

if $z.left == T.nil$ **then**

    RBTransplant($z, z.right$)

else

    if $z.right == T.nil$ **then**

        RBTransplant($z, z.left$)

    else

        $y =$ Successor(z)

        if $y.p == z$ **then**

        else

            RBTransplant($y, y.right$)

            $y.right = z.right$

            $y.right.p = y$

        RBTransplant(z, y)

        $y.left = z.left$

        $y.left.p = y$

RBTransplant(u, v)

if $u.p == T.nil$ **then** $root = v$

else

    if $u == u.p.left$ **then**

        $u.p.left = v$

    else $u.p.right = v$

~~**if** $v \neq nil$ **then**~~ $v.p = u.p$

```
RBDelete(Node z)
y = z; origcolor = y.color
if z.left == T.nil then
    x = z.right
    RBTransplant(z, z.right)
else
    if z.right == T.nil then
        x = z.left
        RBTransplant(z, z.left)
    else
        y = Successor(z)
        origcolor = y.color
        x = y.right
        if y.p == z then x.p = y
        else
            RBTransplant(y, y.right)
            y.right = z.right
            y.right.p = y
        RBTransplant(z, y)
        y.left = z.left
        y.left.p = y; y.color = z.color
if origcolor == black then RBDeleteFixup(x)
```

- **y** zeigt auf den Knoten, der entweder gelöscht oder verschoben wird.
- **x** zeigt auf den Knoten, der die Stelle von y einnimmt –

  das ist entweder das einzige Kind von y oder $T.nil$.

```
RBDelete(Node z)
y = z; origcolor = y.color
if z.left == T.nil then
    x = z.right
    RBTransplant(z, z.right)
else
    if z.right == T.nil then
        x = z.left
        RBTransplant(z, z.left)
    else
        y = Successor(z)
        origcolor = y.color
        x = y.right
        if y.p == z then x.p = y
        else
            RBTransplant(y, y.right)
            y.right = z.right
            y.right.p = y
        RBTransplant(z, y)
        y.left = z.left
        y.left.p = y; y.color = z.color
if origcolor == black then RBDeleteFixup(x)
```

y zeigt auf den Knoten, der entweder gelöscht oder verschoben wird.

x zeigt auf den Knoten, der die Stelle von y einnimmt –

das ist entweder das einzige Kind von y oder $T.nil$.

Falls y ursprünglich *rot* war, bleiben alle R-S-Eig. erhalten:

- Keine Schwarzhöhe hat sich verändert.
- Keine zwei roten Knoten sind Nachbarn geworden.
- y rot $\Rightarrow$ $y \neq$ Wurzel $\Rightarrow$ Wurzel bleibt schwarz.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz *war?*

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz *war?*

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz *war?*

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz *war?*

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade,
die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz war?

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade, die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

„Repariere“ (E5): Knoten x zählt eine schwarze Einheit extra (ist also „rot-schwarz“ oder „doppelt schwarz“)

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz *war?*

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade, die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

„Repariere“ (E5): Knoten x zählt eine schwarze Einheit extra (ist also „rot-schwarz“ oder „doppelt schwarz“)

Ziel: Schiebe die überzählige schwarze Einheit nach oben, bis:

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz war?

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade,
die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

„Repariere" (E5): Knoten x zählt eine schwarze Einheit extra
(ist also „rot-schwarz" oder „doppelt schwarz")

Ziel: Schiebe die überzählige schwarze Einheit nach oben, bis:

– x ist rot-schwarz $\Rightarrow$ mach x schwarz.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz war?

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade, die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

„Repariere“ (E5): Knoten x zählt eine schwarze Einheit extra (ist also „rot-schwarz“ oder „doppelt schwarz“)

Ziel: Schiebe die überzählige schwarze Einheit nach oben, bis:

– x ist rot-schwarz $\Rightarrow$ mach x schwarz.

– x ist Wurzel $\Rightarrow$ schwarze Extra-Einheit verfällt.

RBDeleteFixup

Was kann schief gehen, wenn y schwarz war?

(E2) y war Wurzel, und ein rotes Kind von y wurde Wurzel.

(E4) x und $x.p$ sind rot.

(E5) Falls y verschoben wurde, haben jetzt alle Pfade, die vorher y enthielten, einen schwarzen Knoten zu wenig.

„Repariere" (E5): Knoten x zählt eine schwarze Einheit extra (ist also „rot-schwarz" oder „doppelt schwarz")

Ziel: Schiebe die überzählige schwarze Einheit nach oben, bis:

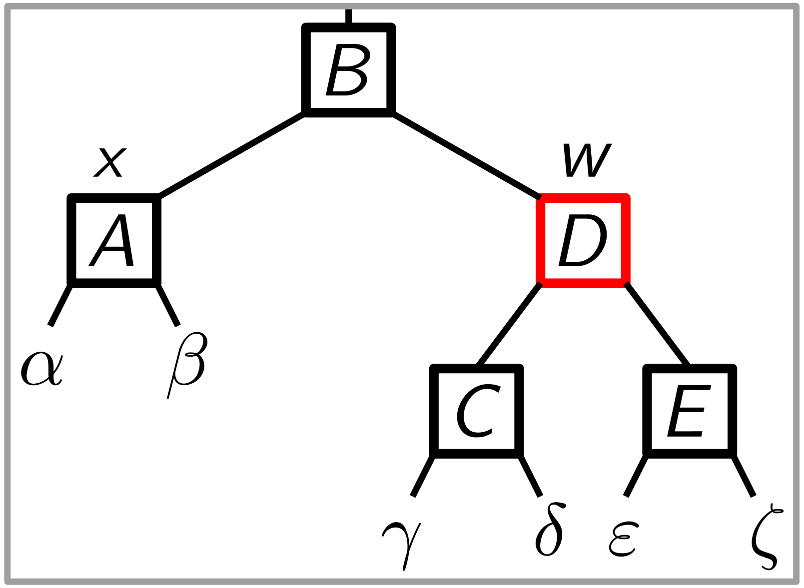
– x ist rot-schwarz $\Rightarrow$ mach x schwarz.

– x ist Wurzel $\Rightarrow$ schwarze Extra-Einheit verfällt.

– Problem wird lokal durch Umfärben & Rotieren gelöst.

RBDeleteFixup(RBNode x)

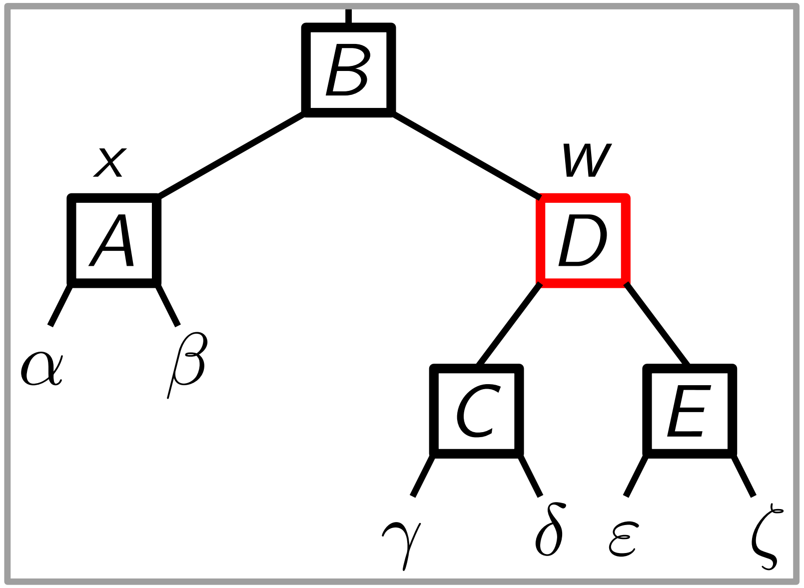
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Schwester von x
        if w.color == red then
            w.color = black
            x.p.color = red
            LeftRotate(x.p)
            w = x.p.right
        if w.left.color  == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else // kommt gleich!!
    else // wie oben; nur left ↔ right
x.color = black
```



RBDeleteFixup(RBNode x)

while $x \neq root$ **and** $x.color == black$ **do**
  if $x == x.p.left$ **then**
    $w = x.p.right$ // Schwester von x
    if $w.color == red$ **then**
      $w.color = black$
      $x.p.color = red$
      LeftRotate($x.p$)
      $w = x.p.right$
    if $w.left.color == black$ **and**
      $w.right.color == black$ **then**
      $w.color = red$
      $x = x.p$
    else // kommt gleich!!
  else // wie oben; nur $left \leftrightarrow right$
$x.color = black$

Ziel:
$w \rightarrow$ schwarz
ohne R-S-Eig.
zu verletzen.

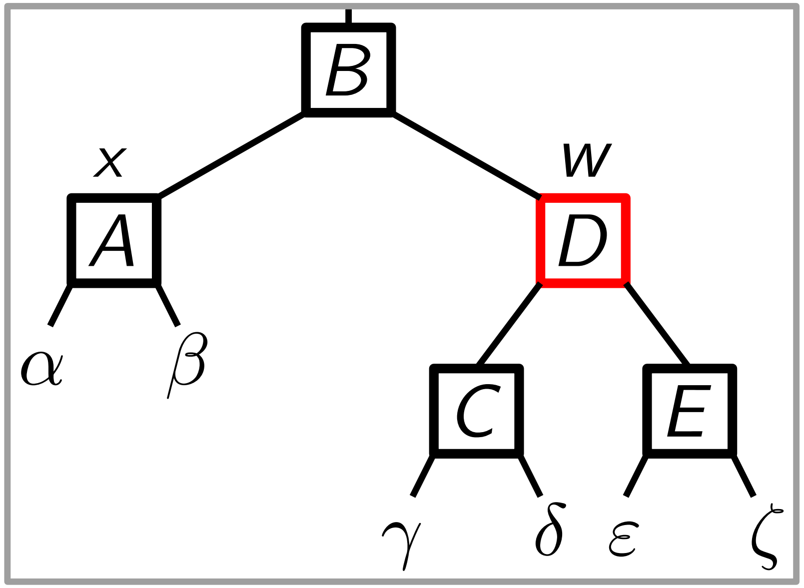


Fall 1

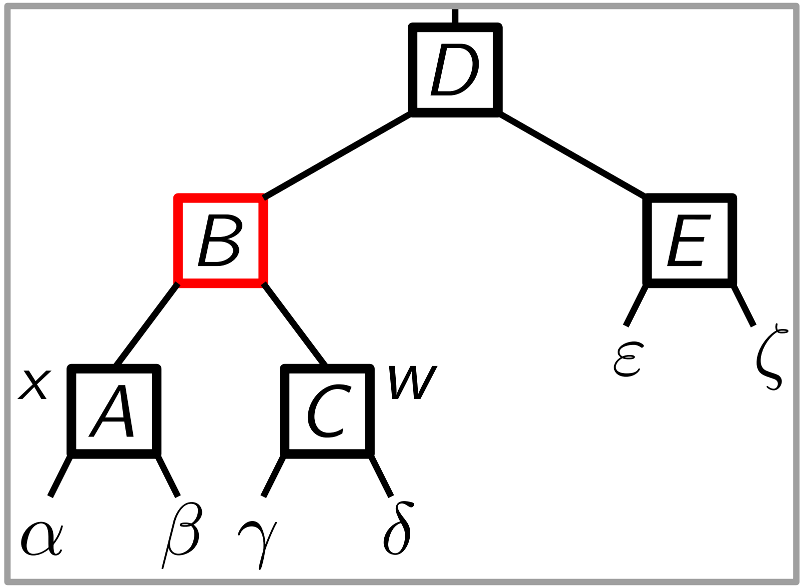
RBDeleteFixup(RBNode x)

```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Schwester von x
        if w.color == red then
            w.color = black
            x.p.color = red
            LeftRotate(x.p)
            w = x.p.right
        if w.left.color == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else // kommt gleich!!
    else // wie oben; nur left ↔ right
x.color = black
```

Ziel:
$w \to$ schwarz
ohne R-S-Eig.
zu verletzen.



Fall 1



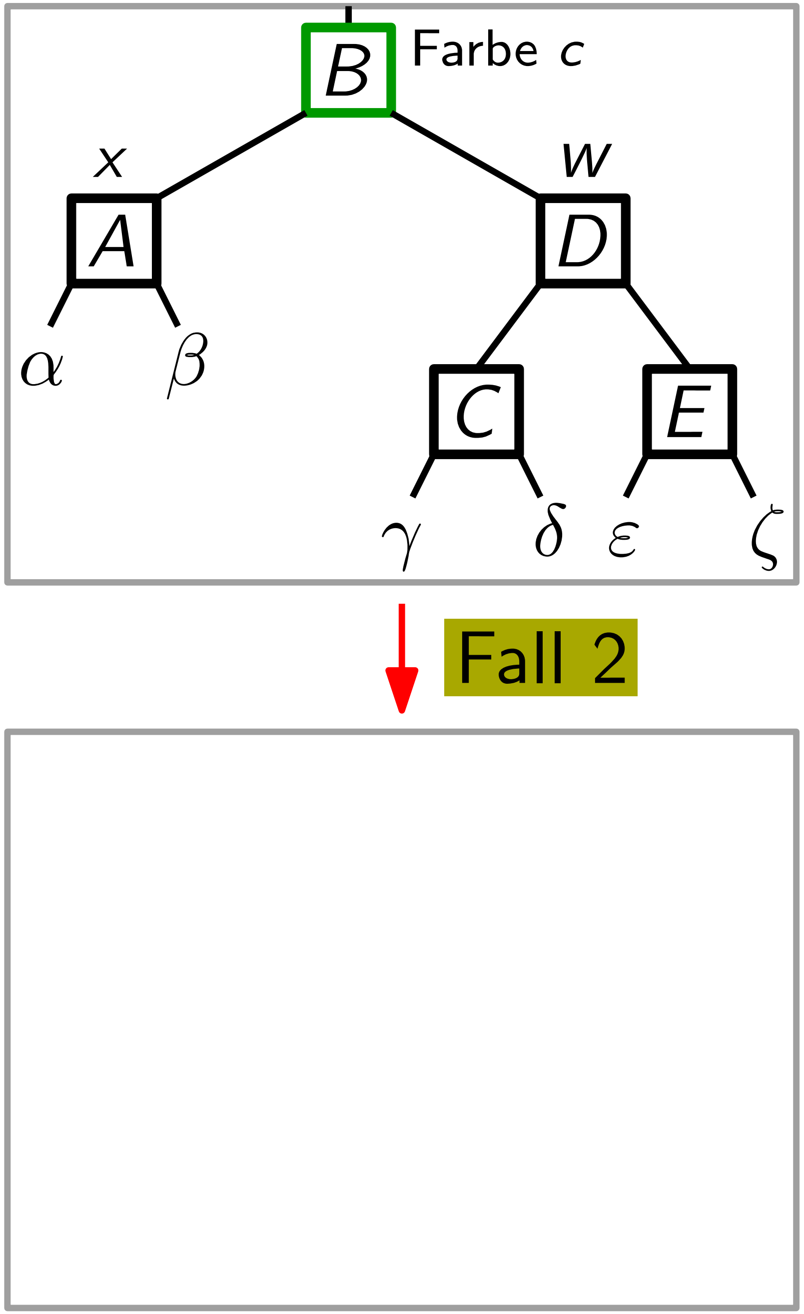
RBDeleteFixup(RBNode x)

while $x \neq root$ **and** $x.color == black$ **do**
- **if** $x == x.p.left$ **then**
  - $w = x.p.right$ // Schwester von x
  - **if** $w.color == red$ **then**
    - $w.color = black$
    - $x.p.color = red$
    - LeftRotate($x.p$)
    - $w = x.p.right$

    Ziel: $w \to$ schwarz ohne R-S-Eig. zu verletzen.
  - **if** $w.left.color == black$ **and** $w.right.color == black$ **then**
    - $w.color = red$
    - $x = x.p$

    Schw. Einheit raufschieben.
  - **else** // kommt gleich!!
- **else** // wie oben; nur $left \leftrightarrow right$

$x.color = black$

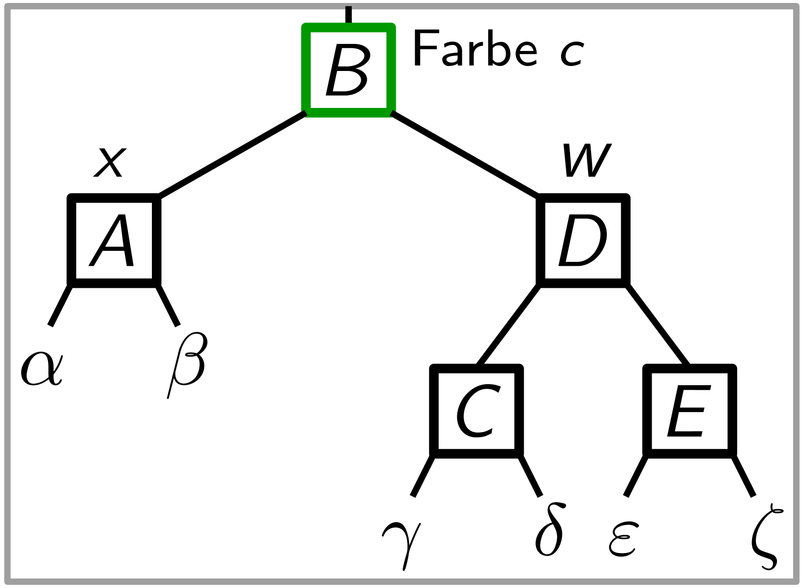


RBDeleteFixup(RBNode x)

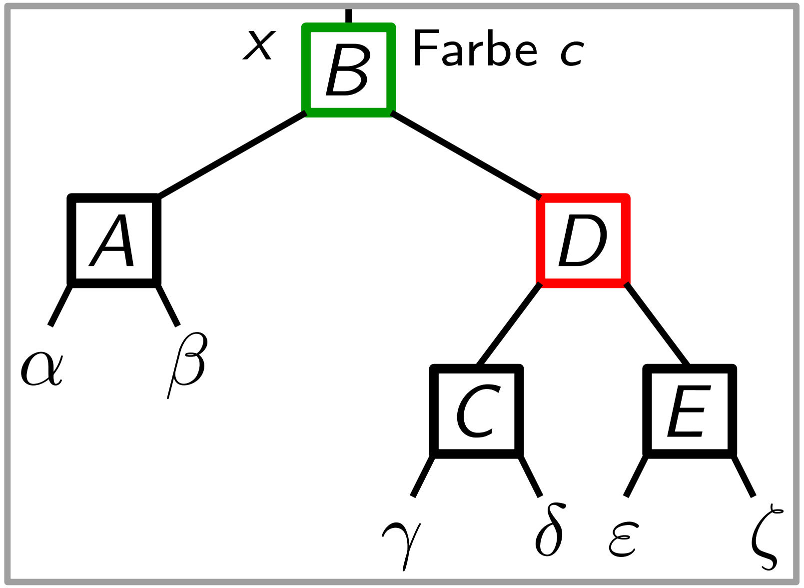
```
while x ≠ root and x.color == black do
    if x == x.p.left then
        w = x.p.right        // Schwester von x
        if w.color == red then
            w.color = black
            x.p.color = red
            LeftRotate(x.p)
            w = x.p.right
        if w.left.color == black and
           w.right.color == black then
            w.color = red
            x = x.p
        else // kommt gleich!!
    else // wie oben; nur left ↔ right
x.color = black
```

Ziel:
$w \to$ schwarz
ohne R-S-Eig.
zu verletzen.

Schw. Einheit
raufschieben.



Fall 2



RBDeleteFixup(RBNode x)

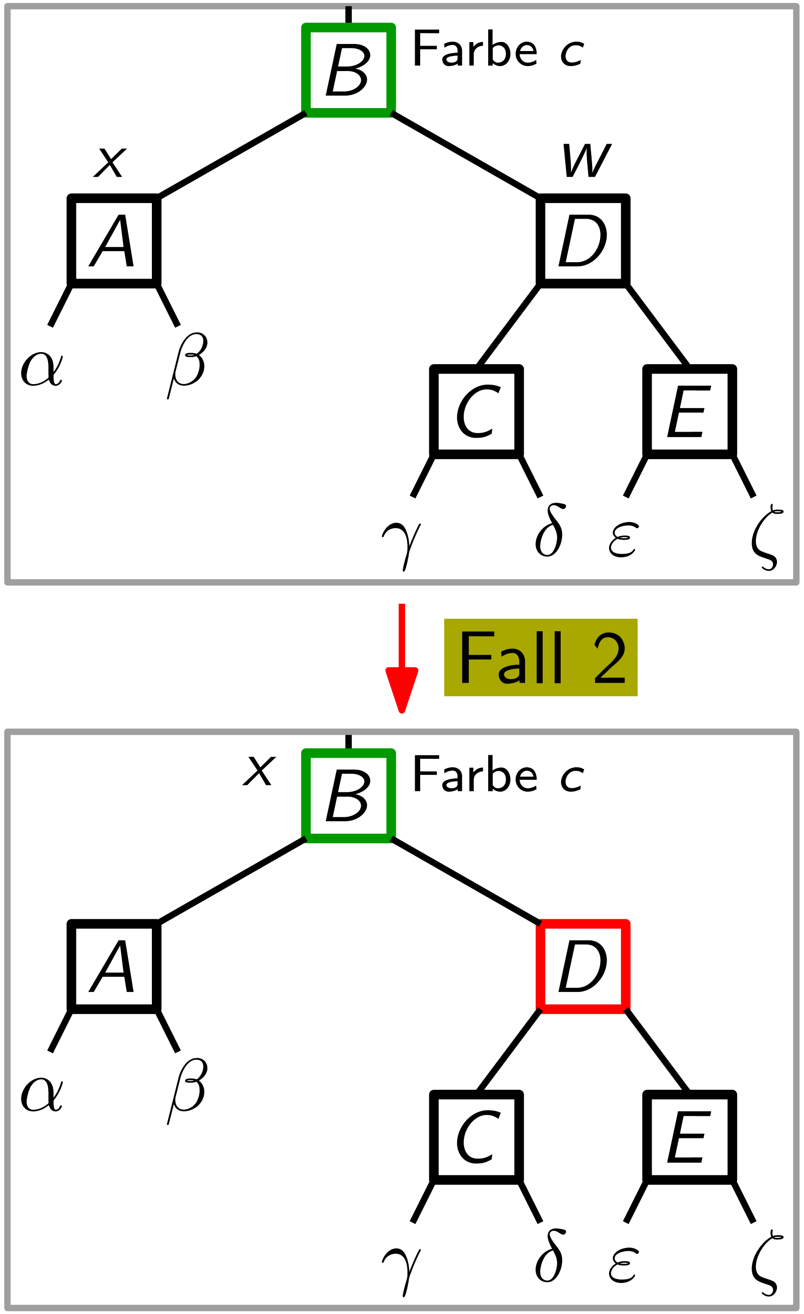
while $x \neq root$ **and** $x.color == black$ **do**
  if $x == x.p.left$ **then**
    $w = x.p.right$ // Schwester von x
    if $w.color == red$ **then**
      $w.color = black$
      $x.p.color = red$
      LeftRotate($x.p$)
      $w = x.p.right$

Ziel:
$w \rightarrow$ schwarz
ohne R-S-Eig.
zu verletzen.

    if $w.left.color == black$ **and**
      $w.right.color == black$ **then**
      $w.color = red$
      $x = x.p$

Schw. Einheit
raufschieben.

    else // kommt gleich!!
  else // wie oben; nur $left \leftrightarrow right$
$x.color = black$



Bem.: Anz. der schw. Knoten (inkl. Extra-Einh. bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!

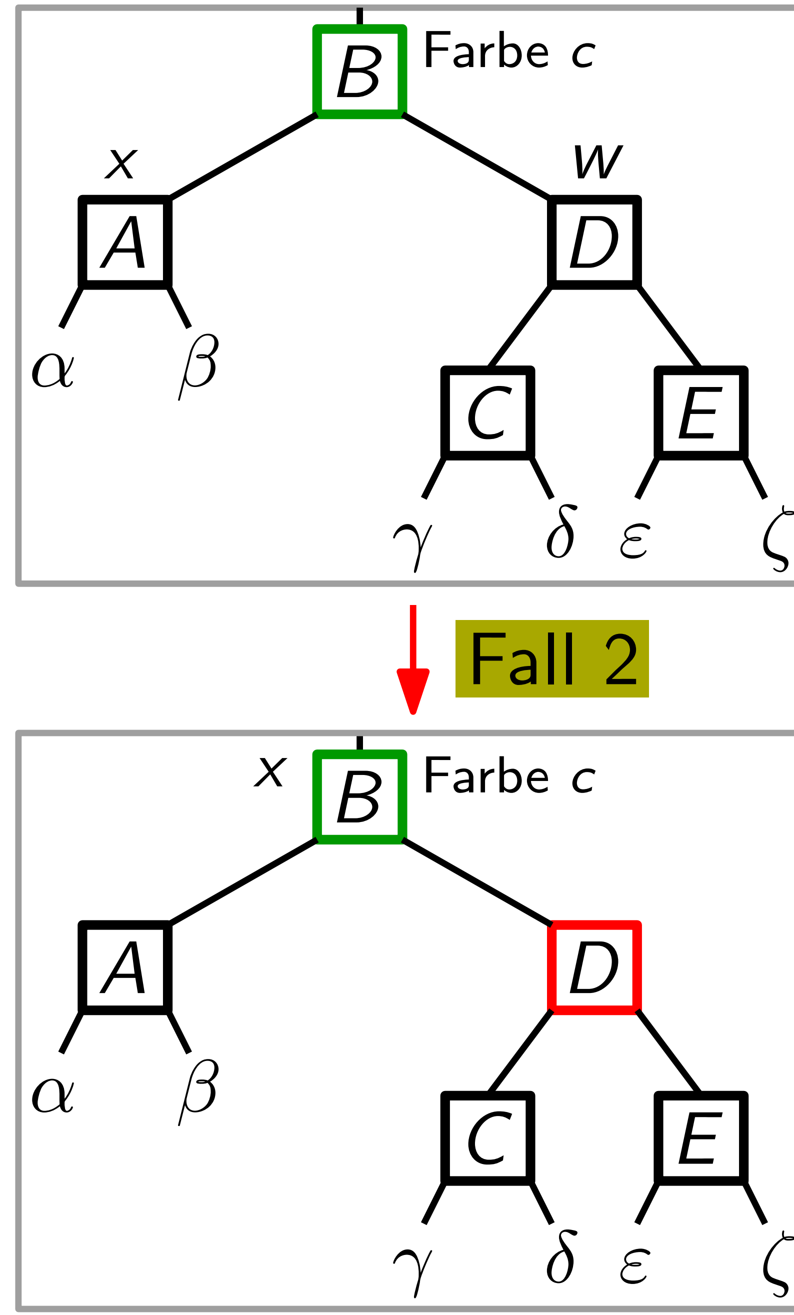
RBDeleteFixup(RBNode x)

while $x \neq \mathit{root}$ **and** $x.\mathit{color} == \mathit{black}$ **do**
- **if** $x == x.p.\mathit{left}$ **then**
  - $w = x.p.\mathit{right}$ // Schwester von x
  - **if** $w.\mathit{color} == \mathit{red}$ **then**
    - $w.\mathit{color} = \mathit{black}$
    - $x.p.\mathit{color} = \mathit{red}$
    - LeftRotate($x.p$)
    - $w = x.p.\mathit{right}$

    Ziel: $w \rightarrow$ schwarz ohne R-S-Eig. zu verletzen.
  - **if** $w.\mathit{left}.\mathit{color} == \mathit{black}$ **and** $w.\mathit{right}.\mathit{color} == \mathit{black}$ **then**
    - $w.\mathit{color} = \mathit{red}$
    - $x = x.p$

    Schw. Einheit raufschieben.
  - **else** // kommt gleich!!
- **else** // wie oben; nur $\mathit{left} \leftrightarrow \mathit{right}$

$x.\mathit{color} = \mathit{black}$



Bem.: Anz. der schw. Knoten (inkl. Extra-Einh. bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!

RBDeleteFixup (Forts.)

else

  if $w.right.color == black$ **then**

    $w.left.color = black$

    $w.color = red$

    RightRotate(w)

    $w = x.p.right$

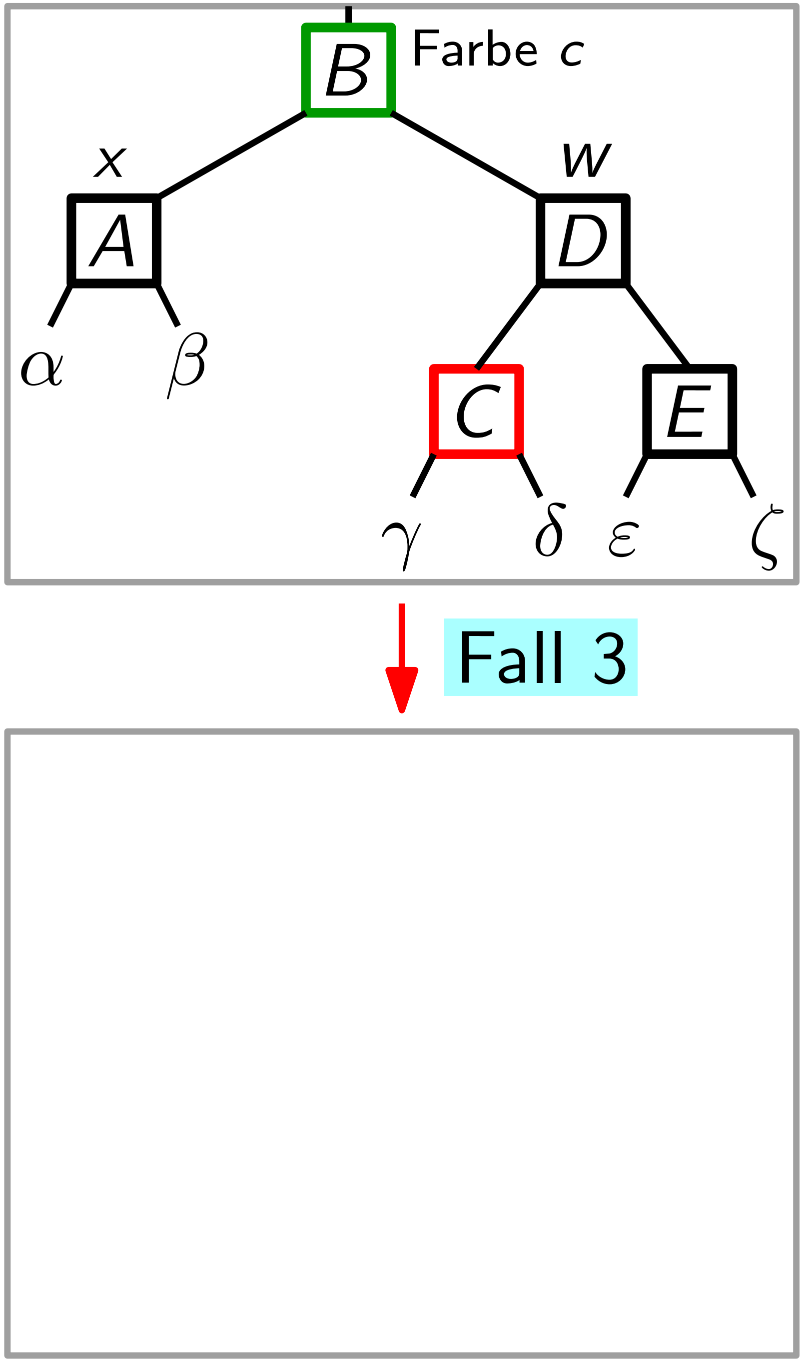
  $w.color = x.p.color$

  $x.p.color = black$

  $w.right.color = black$

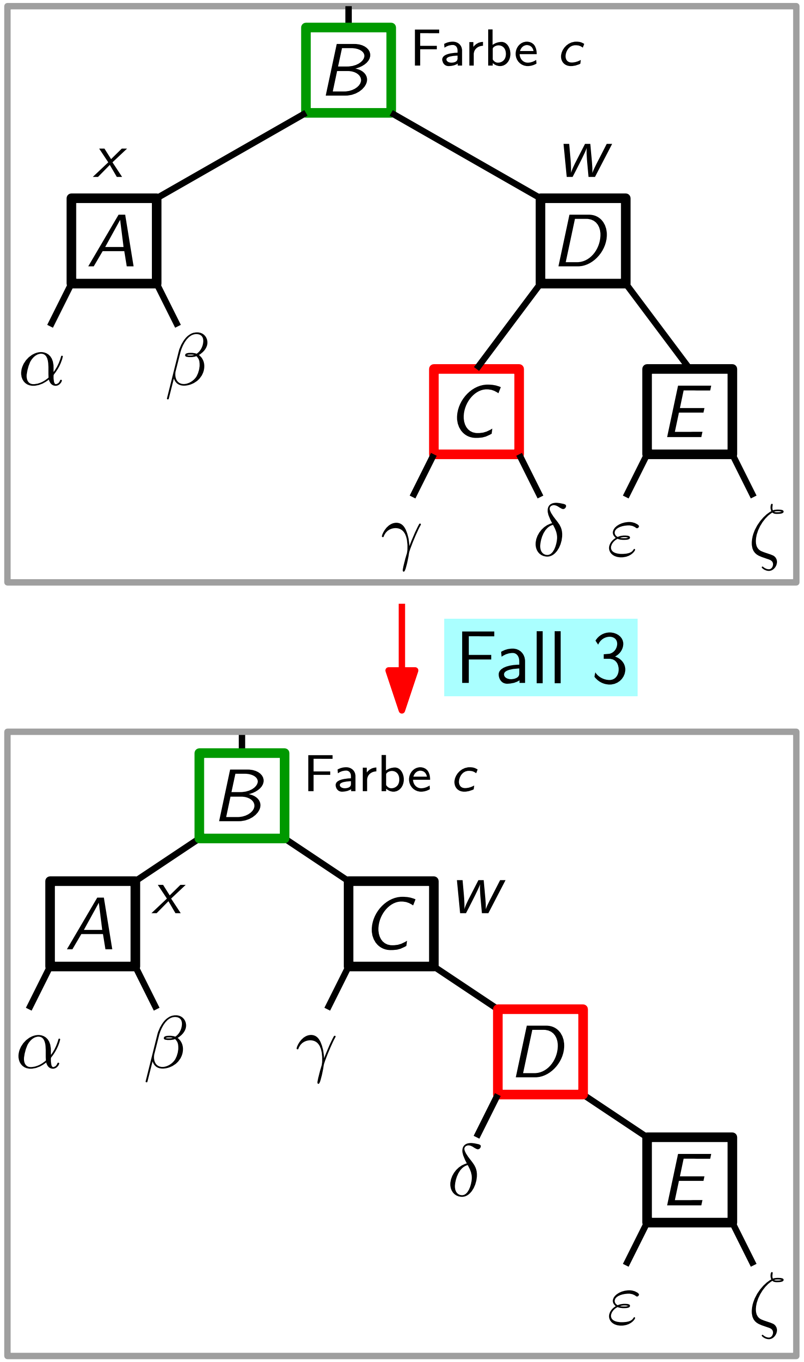
  LeftRotate($x.p$)

  $x = root$



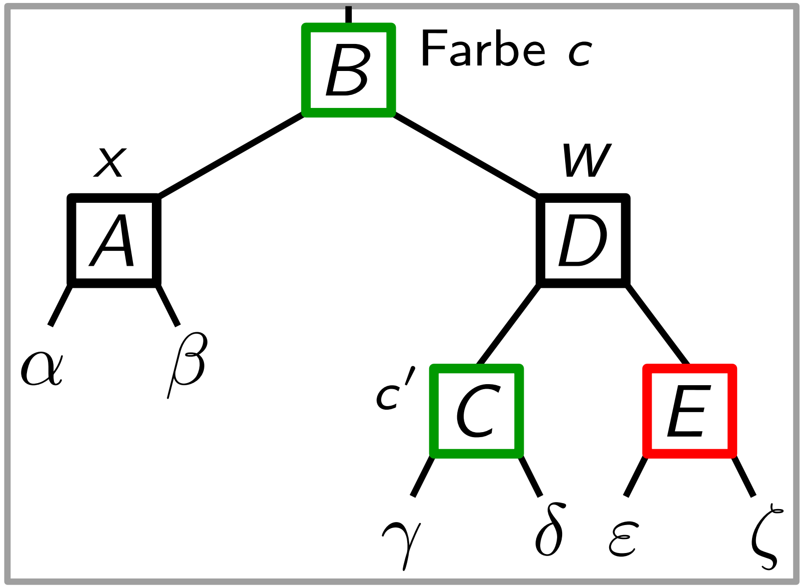
RBDeleteFixup (Forts.)

else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$



RBDeleteFixup (Forts.)

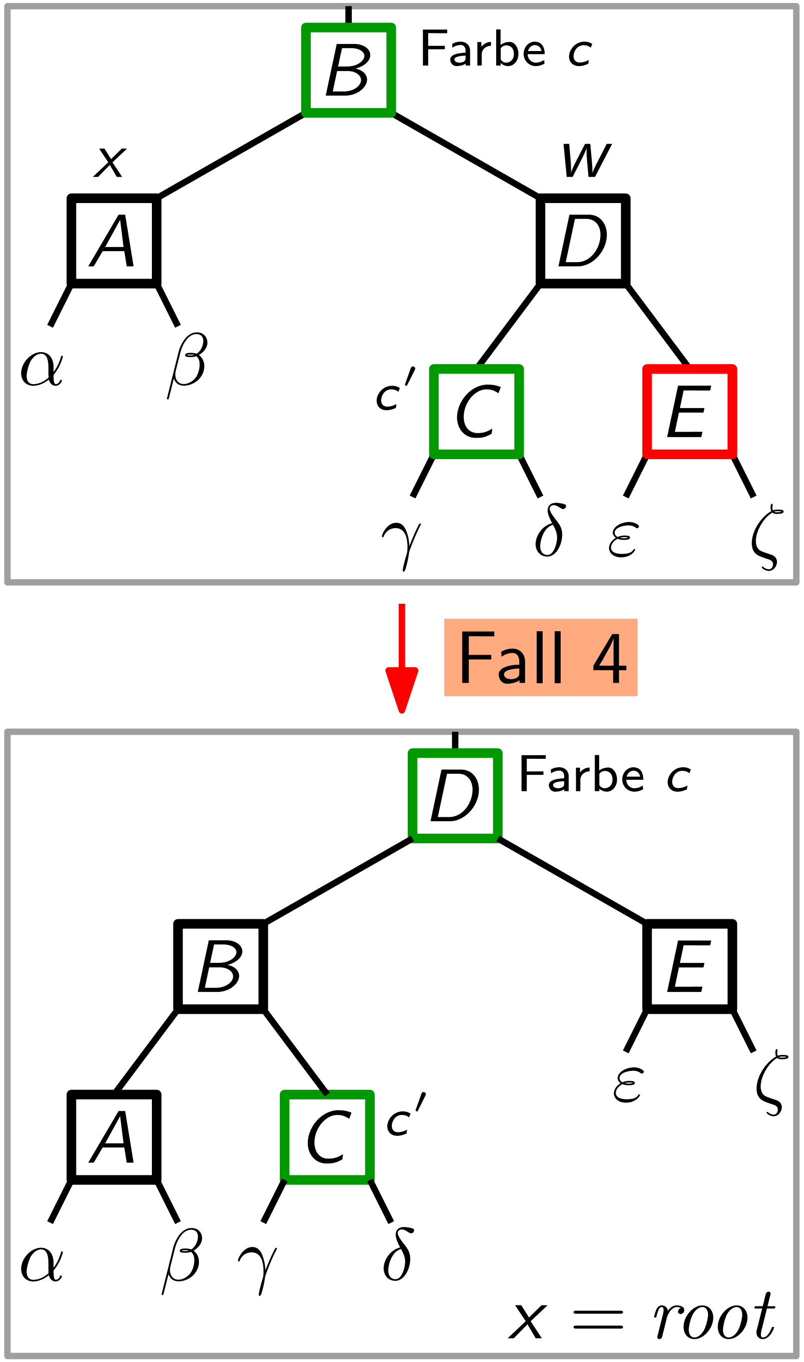
else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$



Fall 4

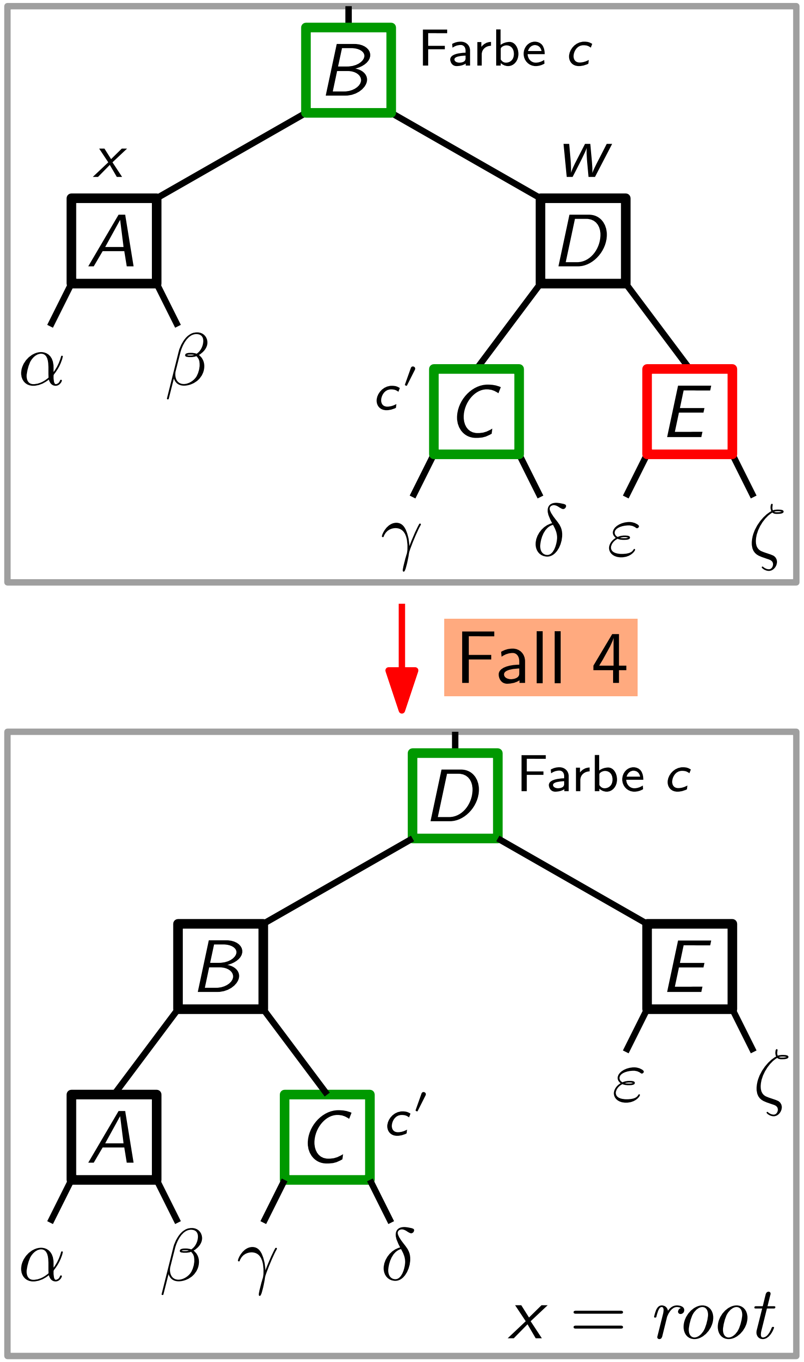
RBDeleteFixup (Forts.)

else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$



RBDeleteFixup (Forts.)

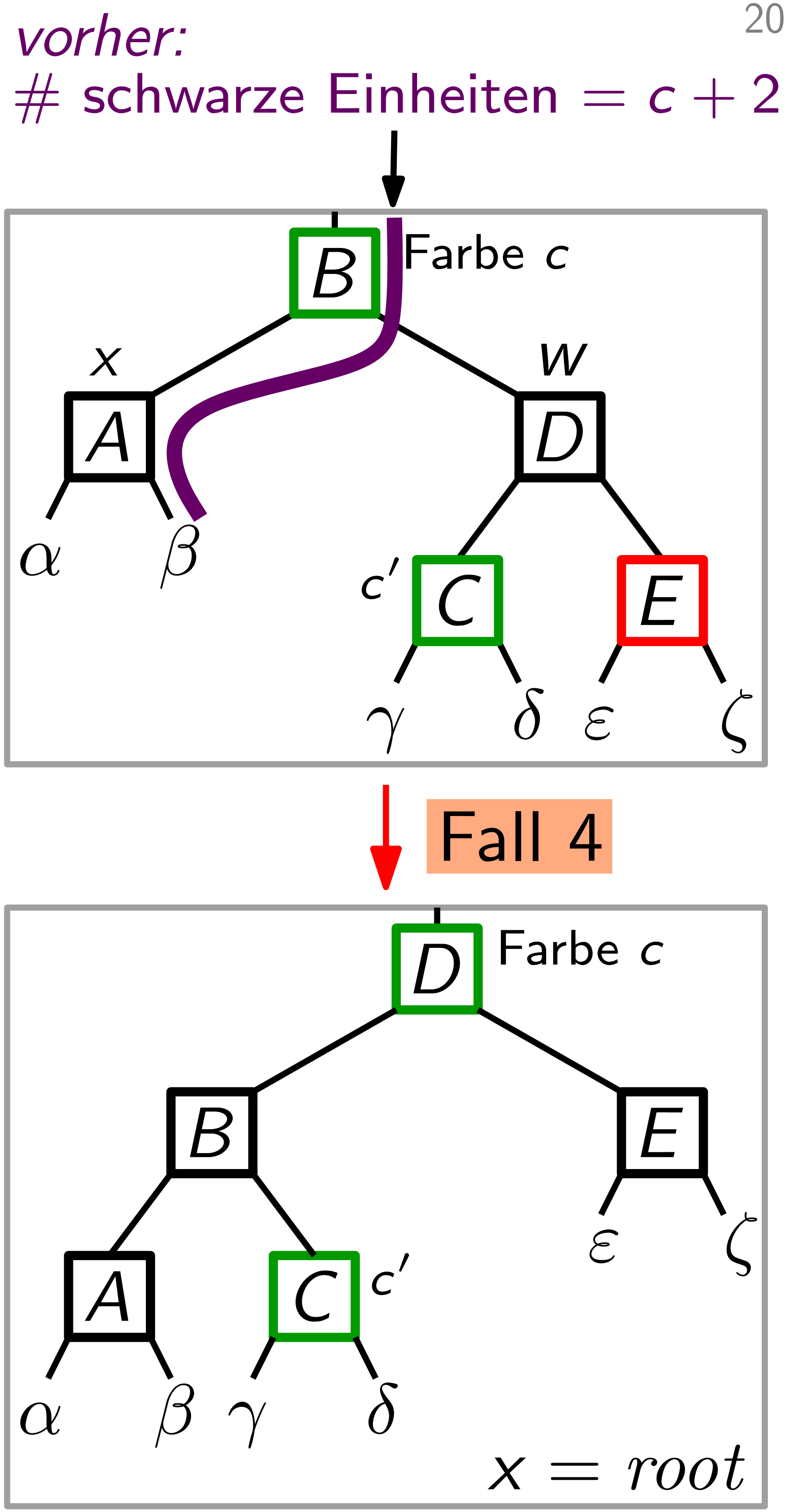
else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$



Bem.: Anz. der schwarzen Knoten (inkl. der Extra-Einheit bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!

RBDeleteFixup (Forts.)

else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$



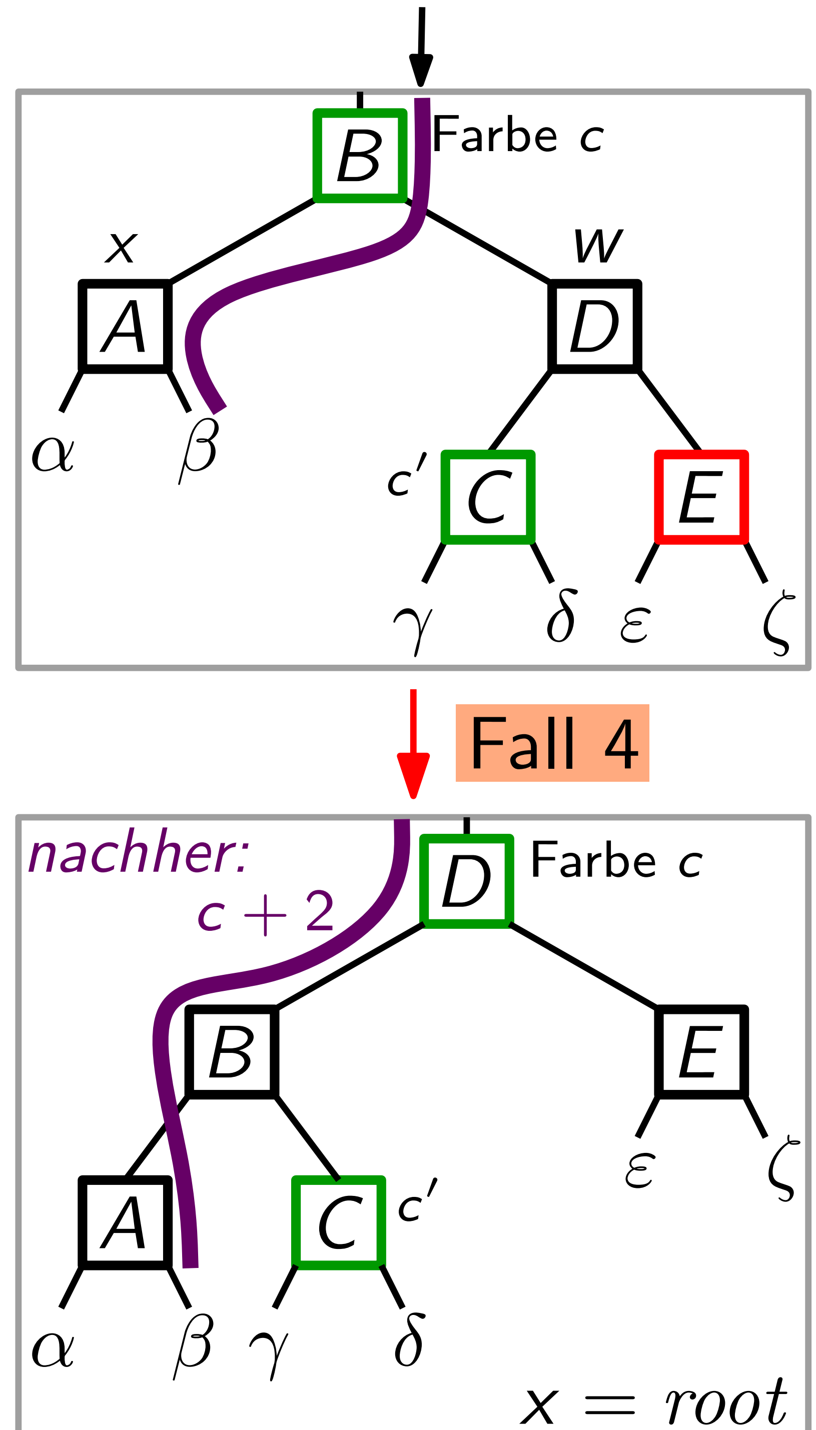
Bem.: Anz. der schwarzen Knoten (inkl. der Extra-Einheit bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!

RBDeleteFixup (Forts.)

else
- **if** $w.right.color == black$ **then**
  - $w.left.color = black$
  - $w.color = red$
  - RightRotate(w)
  - $w = x.p.right$
- $w.color = x.p.color$
- $x.p.color = black$
- $w.right.color = black$
- LeftRotate($x.p$)
- $x = root$

Bem.: Anz. der schwarzen Knoten (inkl. der Extra-Einheit bei x) bleibt auf allen Pfaden gleich!

vorher:
\# schwarze Einheiten $= c + 2$



RBDeleteFixup (Forts.)

else

  if $w.right.color == black$ **then**

    $w.left.color = black$

    $w.color = red$

    RightRotate(w)

    $w = x.p.right$

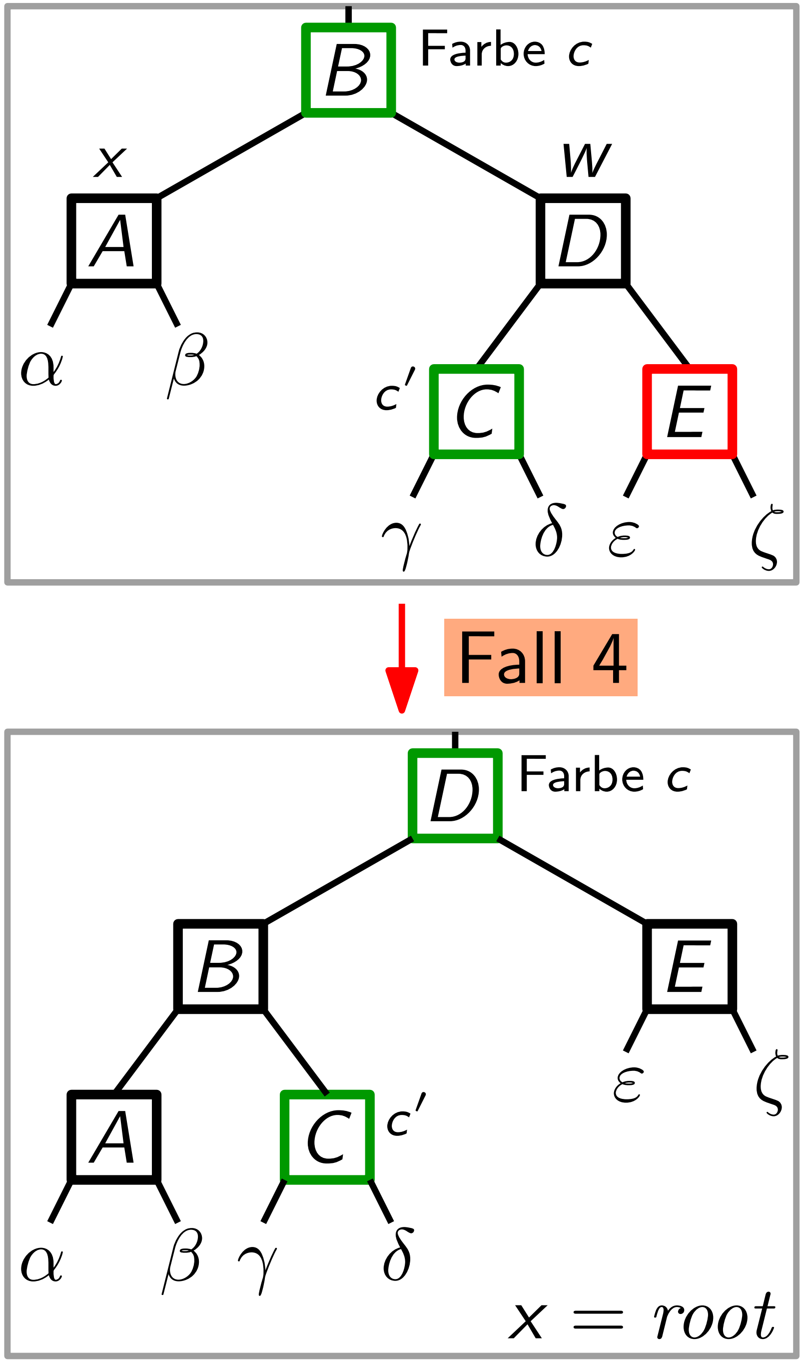
  $w.color = x.p.color$

  $x.p.color = black$

  $w.right.color = black$

  LeftRotate($x.p$)

  $x = root$

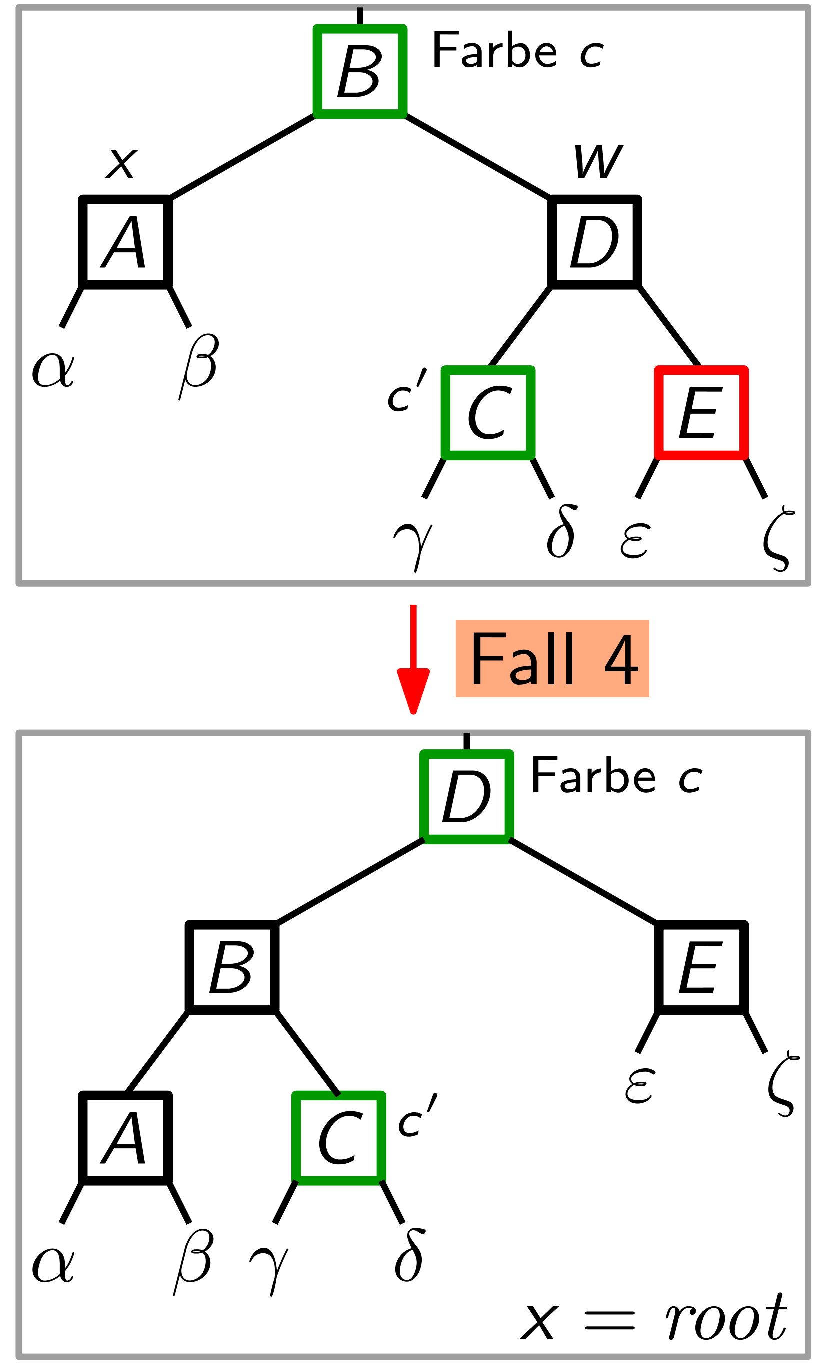


Laufzeit?

Fall 1:
Fall 2:
Fall 3:
Fall 4:

RBDeleteFixup (Forts.)

else
    if $w.right.color == black$ **then**
        $w.left.color = black$
        $w.color = red$
        RightRotate(w)
        $w = x.p.right$
    $w.color = x.p.color$
    $x.p.color = black$
    $w.right.color = black$
    LeftRotate($x.p$)
    $x = root$

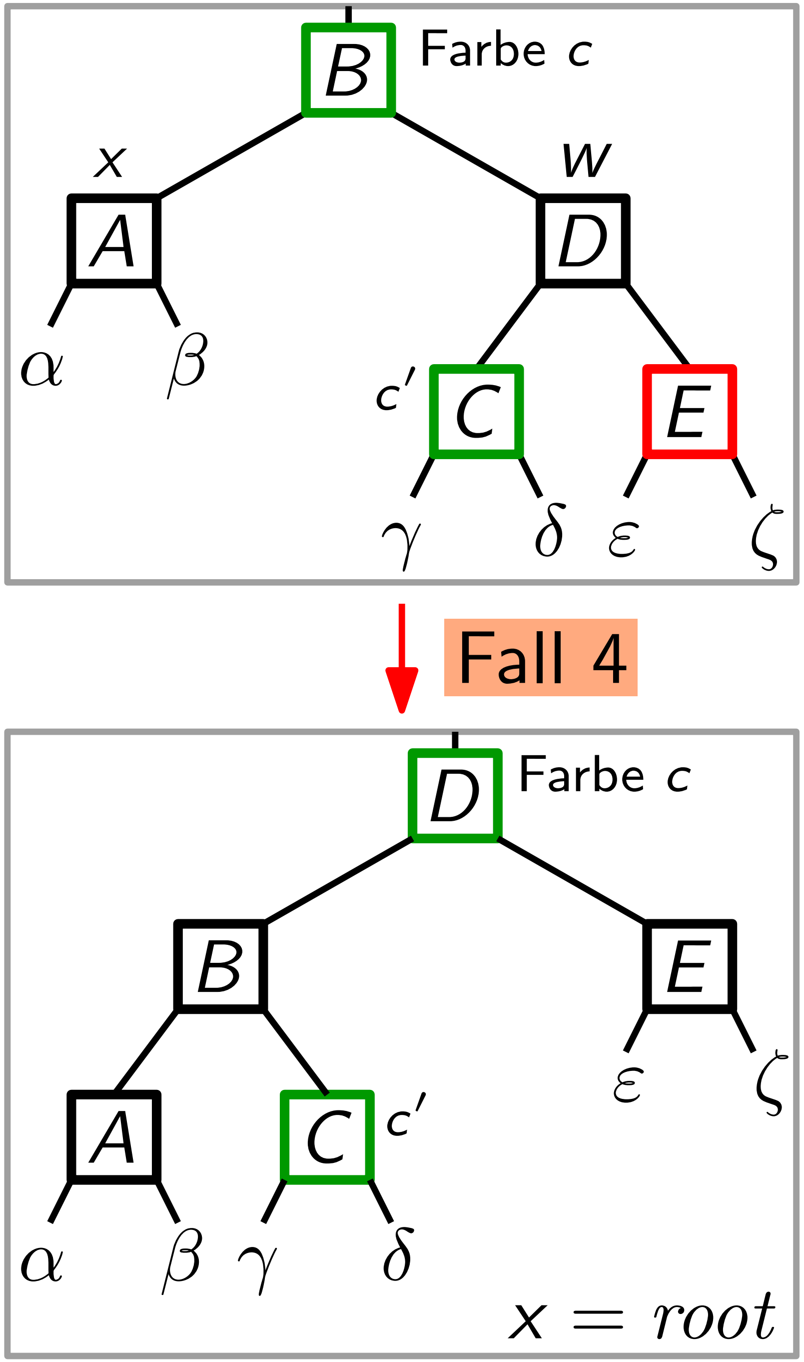


Laufzeit?

Fall 1: $O(h)$ Umfärbungen
Fall 2:
Fall 3:
Fall 4:

RBDeleteFixup (Forts.)

else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$

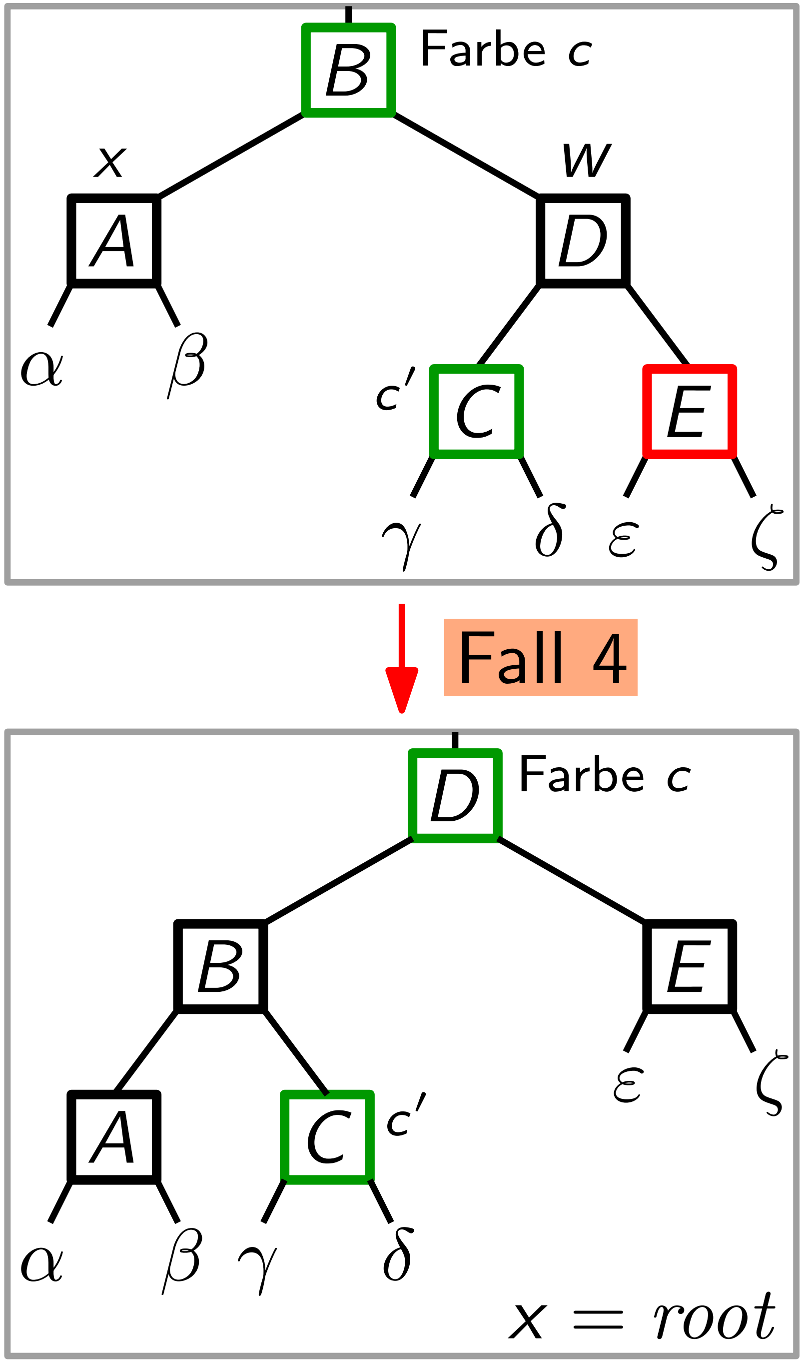


Laufzeit?

Fall 1: $O(h)$ Umfärbungen
Fall 2: 1 Rotation $+ O(1)$
Fall 3:
Fall 4:

RBDeleteFixup (Forts.)

else
  if $w.right.color == black$ **then**
    $w.left.color = black$
    $w.color = red$
    RightRotate(w)
    $w = x.p.right$
  $w.color = x.p.color$
  $x.p.color = black$
  $w.right.color = black$
  LeftRotate($x.p$)
  $x = root$



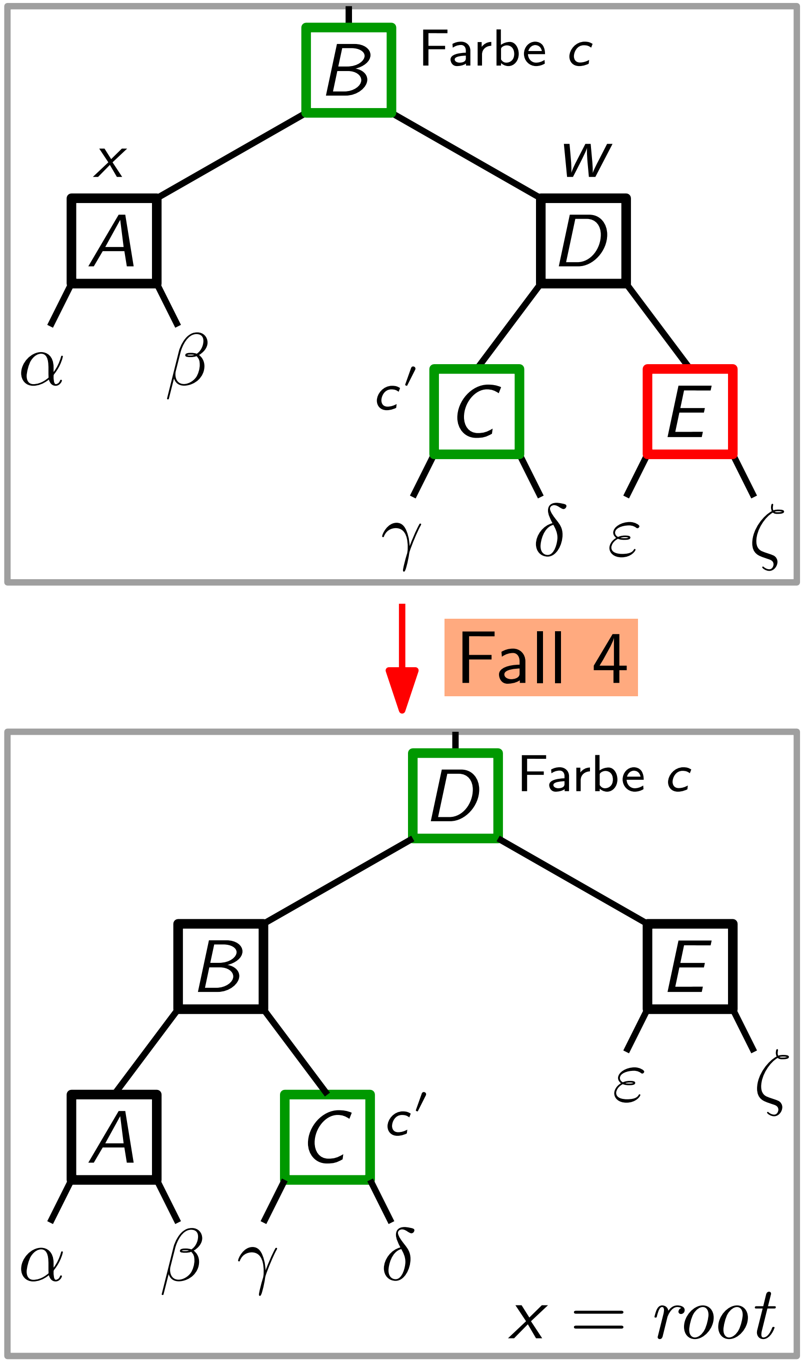
Laufzeit?

Fall 1: $O(h)$ Umfärbungen
Fall 2: 1 Rotation + $O(1)$
Fall 3: 1 Rotation + $O(1)$
Fall 4:

RBDeleteFixup (Forts.)

else

- **if** $w.right.color == black$ **then**
  - $w.left.color = black$
  - $w.color = red$
  - RightRotate(w)
  - $w = x.p.right$
- $w.color = x.p.color$
- $x.p.color = black$
- $w.right.color = black$
- LeftRotate($x.p$)
- $x = root$



Laufzeit?

Fall 1:	$O(h)$ Umfärbungen
Fall 2:	1 Rotation + $O(1)$
Fall 3:	1 Rotation + $O(1)$
Fall 4:	1 Rotation + $O(1)$

Zusammenfassung

Laufzeit RBDelete $\in$

Zusammenfassung

Laufzeit RBDelete $\in O(h)$ + Laufzeit RBDeleteFixup

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)}$$

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in \; O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Also gilt (siehe Lemma): $h \in O(\log n)$

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in \ O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} \ = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Also gilt (siehe Lemma): $\quad h \in O(\log n)$

$$\Downarrow$$

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Also gilt (siehe Lemma): $h \in O(\log n)$

$$\Downarrow$$

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(\log n)$$

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Also gilt (siehe Lemma): $h \in O(\log n)$

$$\Downarrow$$

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(\log n)$$

Satz. Rot-Schwarz-Bäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(\log n)$ Zeit, wobei n die momentane Anz. der Schlüssel ist.

Zusammenfassung

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(h) + \underbrace{\text{Laufzeit RBDeleteFixup}}_{O(h)} = O(h)$$

RBDelete erhält die Rot-Schwarz-Eigenschaften.

Also gilt (siehe Lemma): $h \in O(\log n)$

$$\Downarrow$$

$$\text{Laufzeit RBDelete} \in O(\log n)$$

Satz. Rot-Schwarz-Bäume implementieren alle dynamische-Menge-Operationen in $O(\log n)$ Zeit, wobei n die momentane Anz. der Schlüssel ist.