Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2021/22
9. Vorlesung

Sortieren in Linearzeit

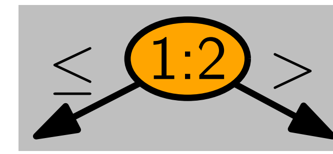
Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

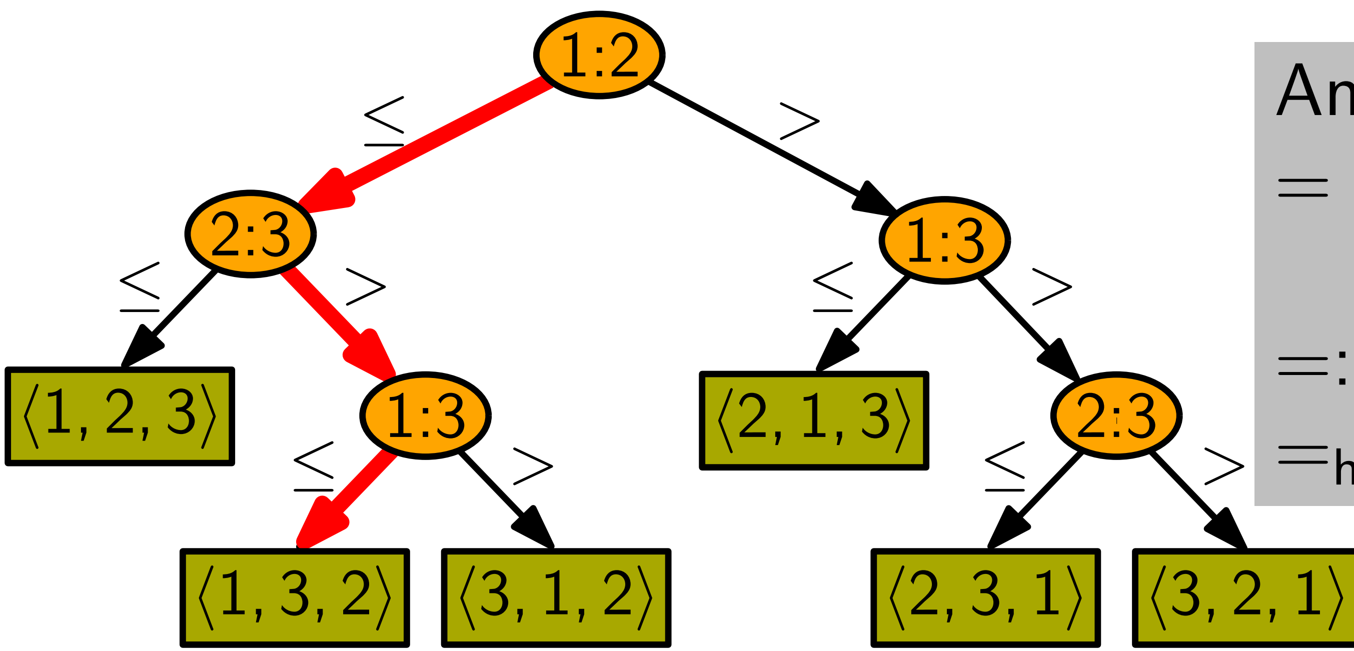
Sortieren durch Vergleichen

Eingabefolge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \xrightarrow[\textit{Schlüsselvergleiche}]{\text{Sortieralg.}}$ Ausgabe: sortierte Eingabe

Für festes n ist ein *vergleichsbasierter* Sortieralg. charakterisiert durch seinen *Entscheidungsbaum*:



- innere Knoten = Vergleiche (o.B.d.A. immer $\leq$, z.B. „$a_1 \leq a_2$?“)
- Blätter = sortierte Permutationen der Eingabe
- Kanten = Ergebnisse ($\leq$/$>$) eines Vergleichs



Entscheidungsbaum für InsertionSort und $n = 3$ [CLRS]

Anz. Vgl. im *worst case*
= Länge eines *längsten* Wurzel-Blatt-Pfads
=: Höhe des Baums
$=_{\text{hier}}$ 3

Eine untere Schranke

Frage: Wie viele Vergleiche braucht *jeder* vergleichsbasierte Sortieralg. im worst case um n *verschiedene* Objekte zu sortieren?

M.a.W. Gegeben
– ein beliebiger vergleichsbasierter Sortieralgorithmus,
– eine Zahl n von verschiedenen Objekten, die man sortieren soll,
welche Höhe hat der Entscheidungsbaum *mindestens*?

Beob.: Die Höhe ist eine Funktion der Blätteranzahl.

Anz. Blätter $=$ Anz. Permutationen von n Obj. $= n!$
Höhe Binärbaum mit B Blättern $\geq \lceil \log_2 B \rceil$

Höhe Entscheidungsbaum $\geq \log_2 n! = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

$$\geq \int_1^n \log_2 x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n \ln x \, dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^n 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(x \cdot \ln x \,\Big|_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{(n \ln n - 0) - (n-1)}{\ln 2}$$

$$\in \Omega(n \log n)$$

partielle Integration

$\int u' v = uv - \int u v'$

Resultat

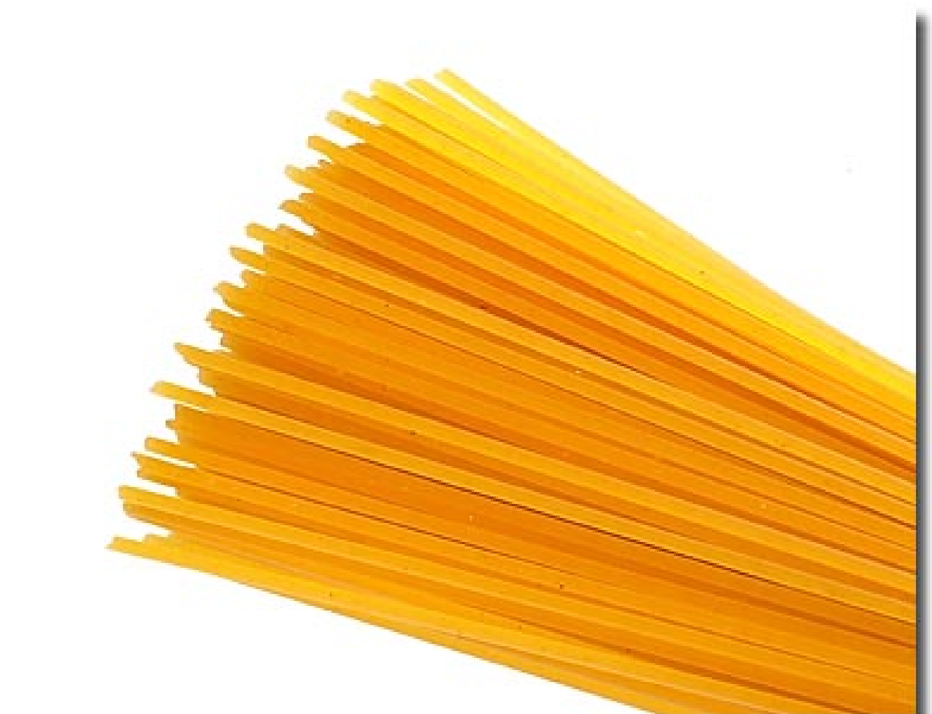
Satz. Jeder vergleichsbasierte Sortieralg. benötigt im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche um n Objekte zu sortieren.

Korollar. MergeSort und HeapSort sind *asymptotisch worst-case optimale* vergleichsbasierte Sortieralg.

Wir durchbrechen die Schallmauer

(• SpaghettiSort — sortiert Spaghetti nach Länge ;-)

- CountingSort — sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$
- RadixSort — sortiert s-stellige b-adische Zahlen
- BucketSort — sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen



aus: www.marions-kochbuch.de

By Eduard Marmet, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5810282

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld		C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld		k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

C	1	3			
	0	1	2	3	4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld		C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld		k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \dots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	1	3	3	5	~~8~~

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B								4

CountingSort

Idee: 1) für jedes x in der Eingabe: zähle die Anzahl der Zahlen $\leq x$

2) benütze diese Information um x im Ausgabefeld direkt an die richtige Position zu schreiben

Variable:

A	Eingabefeld	C	Rechenfeld
B	Ausgabefeld	k	begrenzt das *Universum:* $\{0, \ldots, k\}$

Bsp: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	3	0	4	1	3	4	1	4

$\Rightarrow$

	0	1	2	3	4
C	1	2	0	2	3

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

	0	1	2	3	4
C	0	1	3	3	5

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	1	1	3	3	4	4	4

CountingSort ist *stabil!*

CountingSort

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld
Ausgabefeld
beschränkt Universum $\{0, \ldots, k\}$

CountingSort(int[ ] A, int[ ] B, int k)
  sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ ein neues Feld
  for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** // (1a)
  // $C[i]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich i in A
  for $i = 1$ **to** k **do** // (1b)
  // $C[i]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq i$ in A
  for $j = A.length$ **downto** 1 **do**
    // (2)

Aufgabe:

Fülle die Felder mit Code, der obige Idee umsetzt!

CountingSort

Laufzeit: $O(n + k)$

Plan: 1a) Für jedes x in A, zähle die Anz. der Zahlen gleich x

1b) Für jedes x in A, berechne die Anz. der Zahlen $\leq x$

2) Schreibe jedes x in A direkt an die richtige Position in B

Eingabefeld
Ausgabefeld
beschränkt Universum $\{0, \dots, k\}$

CountingSort(int[ ] A, int[ ] B, int k)
  sei $C[0..k] = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ ein neues Feld
  for $j = 1$ **to** $A.length$ **do** $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ // (1a)
  // $C[i]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. gleich i in A
  for $i = 1$ **to** k **do** $C[i] = C[i] + C[i-1]$ // (1b)
  // $C[i]$ enthält jetzt die Anz. der Elem. $\leq i$ in A
  for $j = A.length$ **downto** 1 **do**
    $B[C[A[j]]] = A[j]$
    $C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ // (2)

RadixSort

(Jahr, Monat, Tag)

Frage: Gegeben Liste von Menschen mit deren Geburtstagen.
Wie würden Sie die Liste nach Alter sortieren?

Drei (?) Lösungen:

- Geburtstage in Anz. Tage seit 1.1.1970 umrechnen, dann vergleichsbasiertes Sortierverfahren verwenden.
- Spezielle Vergleichsroutine schreiben und in vergleichsbasiertes Sortierverfahren einbauen.
- Liste $3\times$ sortieren: je $1\times$ nach Jahr, Monat, Tag.
  Aber in welcher Reihenfolge??

RadixSort(A, s) Anz. Stellen (hier: 3) **Laufzeit?**

for $i = 1$ **to** s **do** [1 = Index der *niederwertigsten (!)* Stelle]
 sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

z.B. mit CountingSort

Beispiel

Sortiere $A = \langle 25, 13, 31, 23, 11, 37, 15 \rangle$:

Gemäß RadixSort erst nach Einern, dann (stabil) nach Zehnern.

$$A_1 = \langle 31, 11, 13, 23, 25, 15, 37 \rangle$$

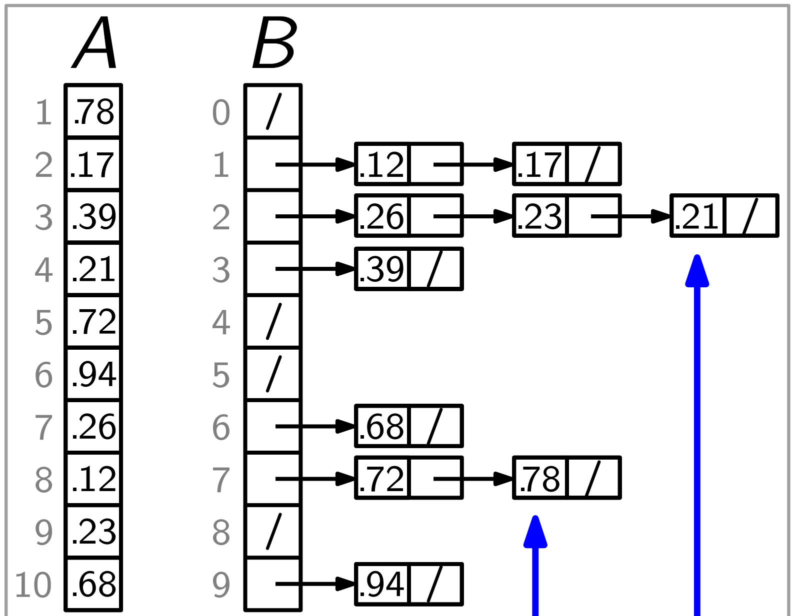
$$A_2 = \langle 11, 13, 15, 23, 25, 31, 37 \rangle \quad \checkmark$$

RadixSort(A, s)

for $i = 1$ **to** s **do**
  sortiere A *stabil* nach der i-ten Stelle

BucketSort

[CLRS]



(c) www.seafish.org

„Eimerinhalt“: *Verkettete Liste* von Elementen aus A.

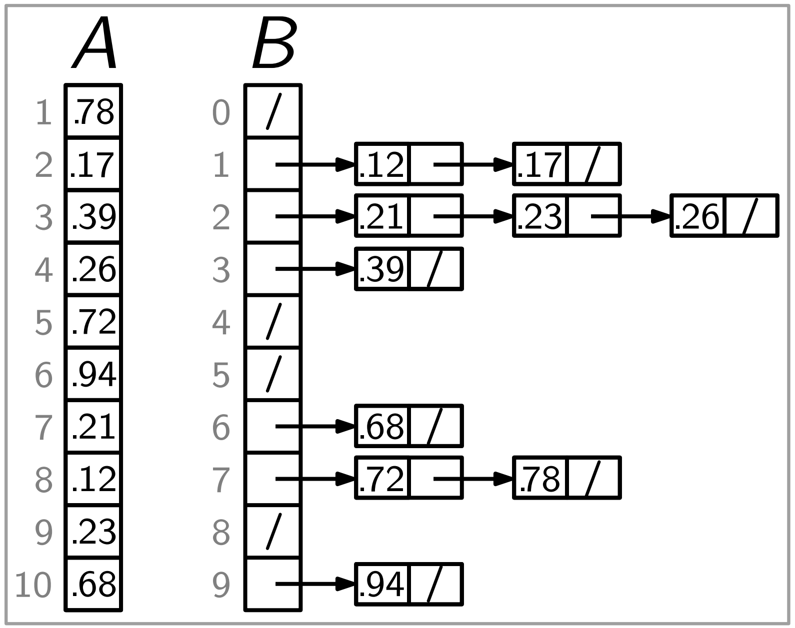
Hilfsfeld $B[0..n-1]$;
jeder Eintrag entspricht einem „Eimer“ der Weite $1/n$

Eingabefeld $A[1..n]$ enthält Zahlen,
zufällig und gleichverteilt aus $[0,1)$ gezogen

[Im Bsp. auf 2 Nachkommastellen gerundet!]

BucketSort

[CLRS]



BucketSort(Feld A von Zahlen in $[0,1)$)

$n = A.\mathit{length}$
lege Feld $B[0..n-1]$ von Listen an
for $j = 1$ **to** n **do**
  füge $A[j]$ in Liste $B[\lfloor n \cdot A[j] \rfloor]$ ein
for $i = 0$ **to** $n-1$ **do** $\Downarrow$
  sortiere Liste $B[i]$ $= [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}) \cap A$
hänge $B[0], \dots, B[n-1]$ aneinander
kopiere das Ergebnis nach $A[1..n]$

Korrektheit? 2 Fälle:
– $A[i]$ und $A[j]$ in der gleichen Liste
– $A[i]$ und $A[j]$ in verschiedenen Listen

Laufzeit?
– *erwartet*, hängt von den zufälligen Zahlen in A ab
– hängt vom Sortieralgorithmus in Zeile 6 ab;
wir nehmen InsertionSort: schnell auf kurzen Listen!

Erwartete Laufzeit von BucketSort

$$T_{\mathrm{BS}}(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T_{\mathrm{IS}}(n_i) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$\begin{aligned} E[T_{\mathrm{BS}}(n)] &= E[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} E[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(E[n_i^2]) = \Theta(n) \end{aligned}$$

Behauptung: $E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

fest!

Beweis. Def. Indikator-ZV $X_j := 1$, falls $A[j]$ in Eimer i fällt.

$$\Rightarrow n_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E[X_j] = \Pr[X_j = 1] = 1/n$$

$$\Rightarrow n_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$$

Erwartete Laufzeit von BucketSort

Behauptung:
$E[n_i^2] \leq 2 - \frac{1}{n}$

Es gilt $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} X_j X_k$

$$\Rightarrow E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$

Behandle die beiden Typen von Erwartungswerten getrennt:

unabhängig von j!

$$E[X_j^2] = 1 \cdot \Pr[X_j^2 = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j^2 = 0]$$
$$= 1 \cdot \Pr[X_j = 1] + 0 \cdot \Pr[X_j = 0] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}$$

$$E[X_j X_k] = E[X_j] \cdot E[X_k] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

unabh. von j und k!

für $j \neq k$ sind X_j und X_k *unabhängig*

Fasse die Zwischenergebnisse zusammen:

$$E[n_i^2] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j} E[X_j X_k]$$
$$= n \cdot \frac{1}{n} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \qquad \square$$

Zusammenfassung

- Jedes *vergleichsbasierte* Sortierverfahren braucht im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ Vergleiche für n Zahlen.

- CountingSort sortiert Zahlen in $\{0, \ldots, k\}$ (*stabil!*)
  Laufzeit für n Zahlen: $O(n + k)$

- RadixSort sortiert s-stellige b-adische Zahlen
  Laufzeit für n Zahlen: $O(s \cdot (n + b))$

- BucketSort sortiert gleichverteilte zufällige Zahlen
  erwartete Laufzeit für n Zahlen: $O(n)$

Bem. Die Idee mit den (gleichgroßen) Eimern ist natürlich nicht nur auf Zufallszahlen beschränkt, aber hier lässt sie sich hübsch analysieren.