

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2022/23

6. Vorlesung

## Prioritäten setzen

# Heute: Wir „bauen“ eine Datenstruktur

## Datenstruktur:

Konzept, mit dem man Daten speichert und anordnet, so dass man sie schnell finden und ändern kann.

## Abstrakter Datentyp

beschreibt die „Schnittstelle“ einer Datenstruktur – welche Operationen werden unterstützt?

## Implementierung

wie wird die gewünschte Funktionalität realisiert:

- wie sind die Daten gespeichert (Feld, Liste, ...)?
- welche Algorithmen implementieren die Operationen?

# Anwendung: Prozesssteuerung

**Anwendung:** steuere System durch Verwaltung von unterschiedlich wichtigen Prozessen

**Anforderung:**

- Prozesse (mit ihrer Priorität) einfügen
- Prozess mit höchster Priorität finden/löschen
- Priorität von Prozessen erhöhen

*modelliere*



**Abstrakter Datentyp:** **Prioritätsschlange**

verwaltet Elemente einer Menge  $M$ ,  
wobei jedes Element  $x \in M$  eine Priorität  $x.key$  hat.

# Prioritätsschlange

## Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge  $M$ ,  
wobei jedes Element  $x \in M$  eine Priorität  $x.key$  hat.

| <i>Operation</i>   | <i>Funktionalität</i>   |
|--|---|
| <code>Insert</code> (element $x$ )                         | $M = M \cup \{x\}$  |
| element <code>FindMax</code> ()                            | liefere $x \in M$ mit<br>$x.key = \max\{y.key \mid y \in M\}$ |
| element <code>ExtractMax</code> ()                         | $x = \text{FindMax}(); M = M \setminus \{x\};$<br>liefere $x$ |
| <code>IncreaseKey</code><br>(element $x$ , priorität $p$ ) | $x.key = p$   |

# Implementation

**Aufgabe:** Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn:

- Wie würden Sie die Methoden einer Prioritätsschlange implementieren?
- Welche Laufzeiten liefert Ihre Implementierung im schlechtesten Fall?

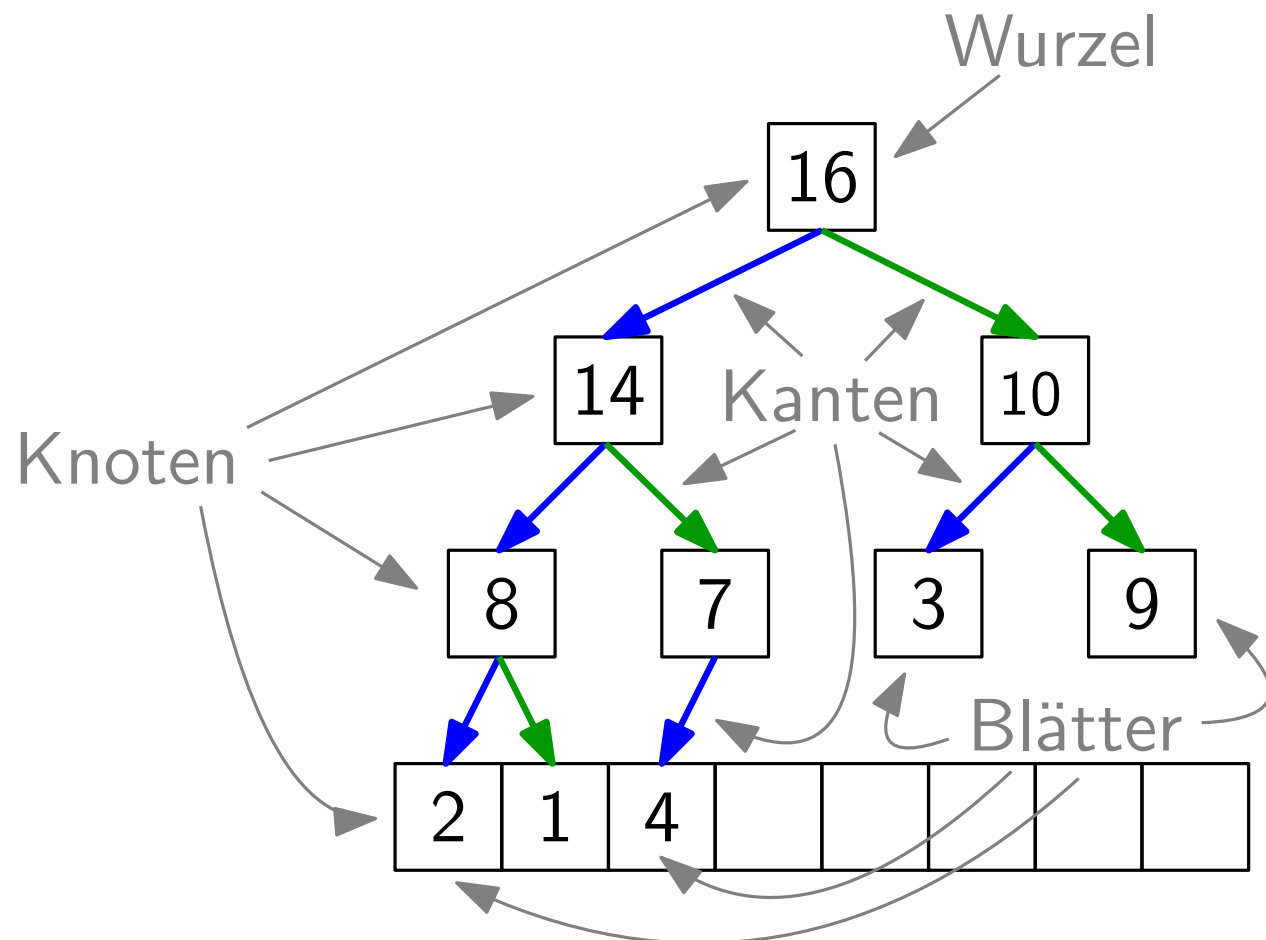
|   | Insert           | FindMax     | ExtractMax       | IncreaseKey      |
|---|------------------|-------------|------------------|------------------|
| W-C-Laufzeiten meiner Implement.*           | $\Theta(1)$      | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$      | $\Theta(1)$      |
| heute:<br>Implementierung als Heap (Haufen) | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(1)$ | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |

*Das ist exponentiell besser!*

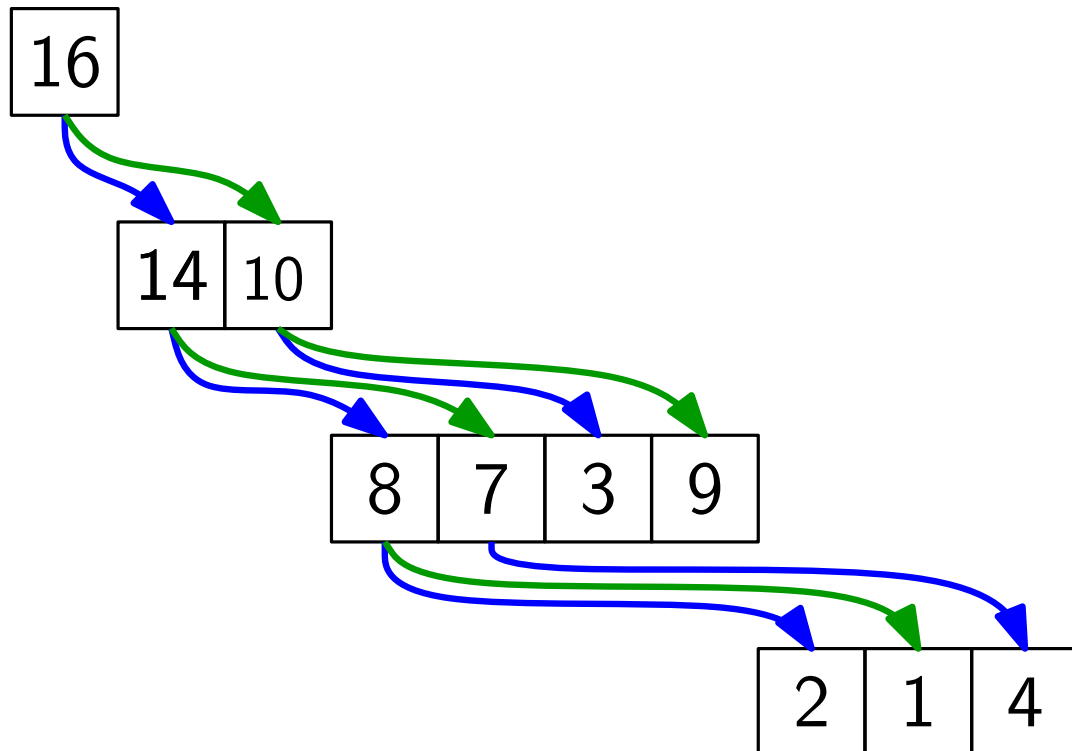
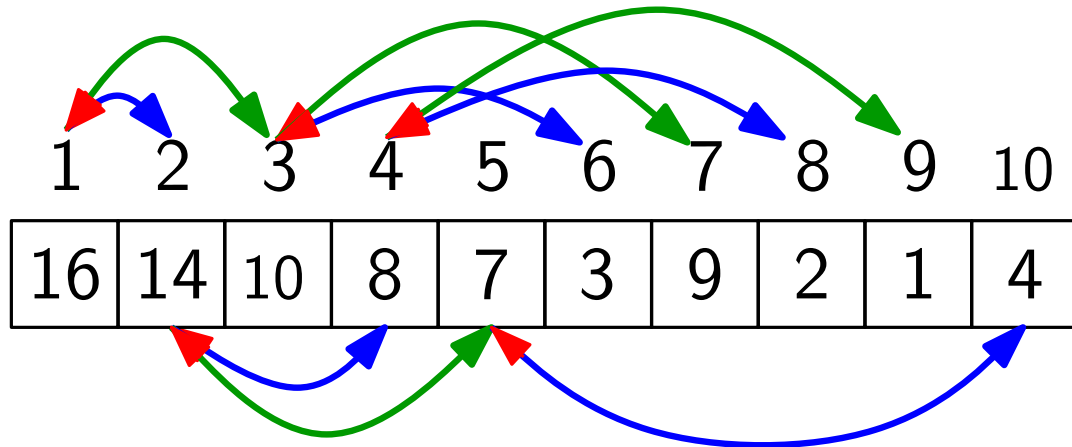
- \* {
- Daten werden in einem Feld gespeichert.
  - Neue Elemente werden hinten angehängt (unsortiert).
  - Maximum wird immer aufrechterhalten.
  - Bei IncreaseKey gehe ich von Direktzugriff (via Index) aus.

Achtung: Das Feld bekommt bei einer naiven Implementierung durch ExtractMax im Laufe der Zeit Lücken. Wie kann man das verhindern, ohne Elemente zu verschieben?

# Bäume, gut gepackt



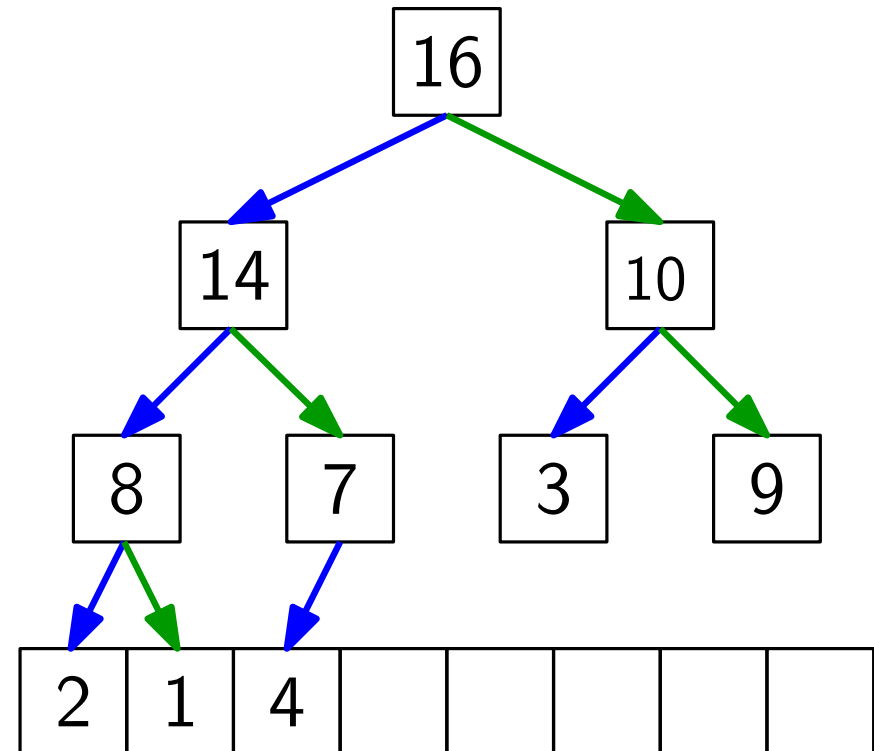
# Bäume, gut gepackt



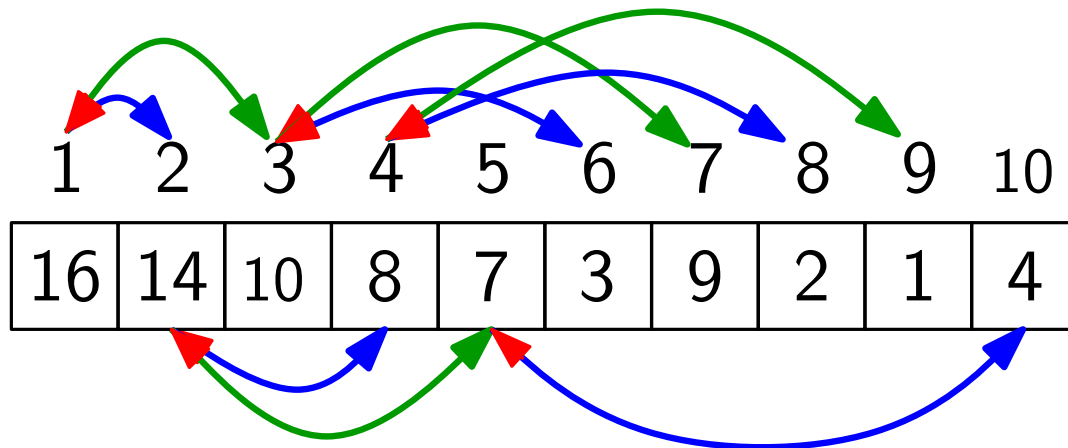
sehr schnelle Rechenoperationen!

*Pfeile implementieren:*

$\text{left}(\text{index } i)$     **return**  $2i$   
 $\text{right}(\text{index } i)$     **return**  $2i + 1$   
 $\text{parent}(\text{index } i)$     **return**  $\lfloor i/2 \rfloor$



# Bäume, gut gepackt



## Definition:

Ein *Heap* ist ein Feld, das einem **binären** Baum entspricht, bei dem

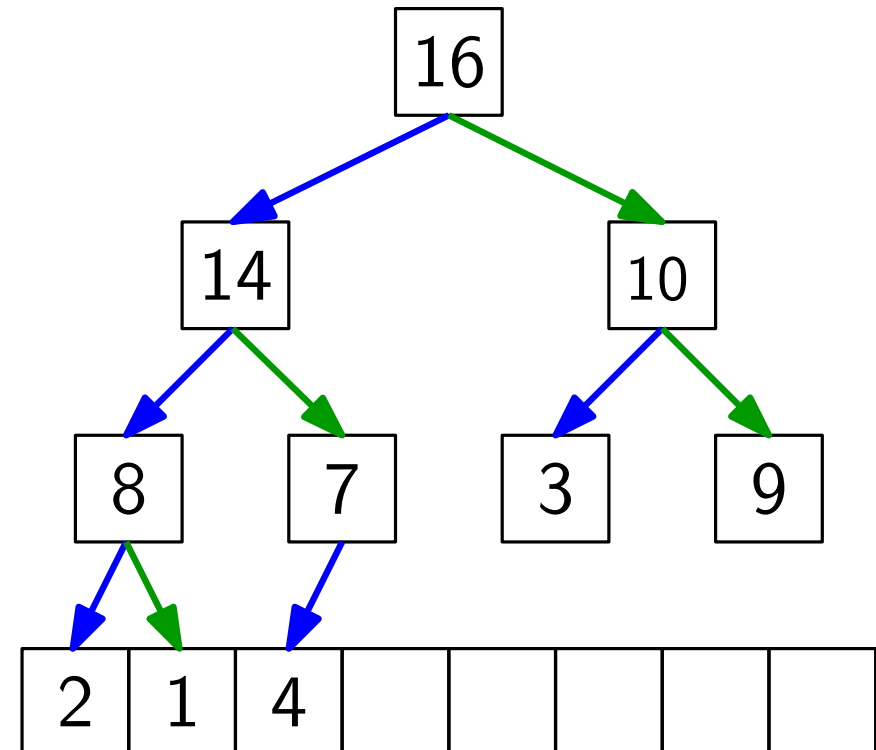
- alle Ebenen außer der letzten voll sind,
- die letzte Ebene v.l.n.r. gefüllt ist und
- die *Heap-Eigenschaft* gilt.

sehr schnelle Rechenoperationen!

*Pfeile implementieren:*

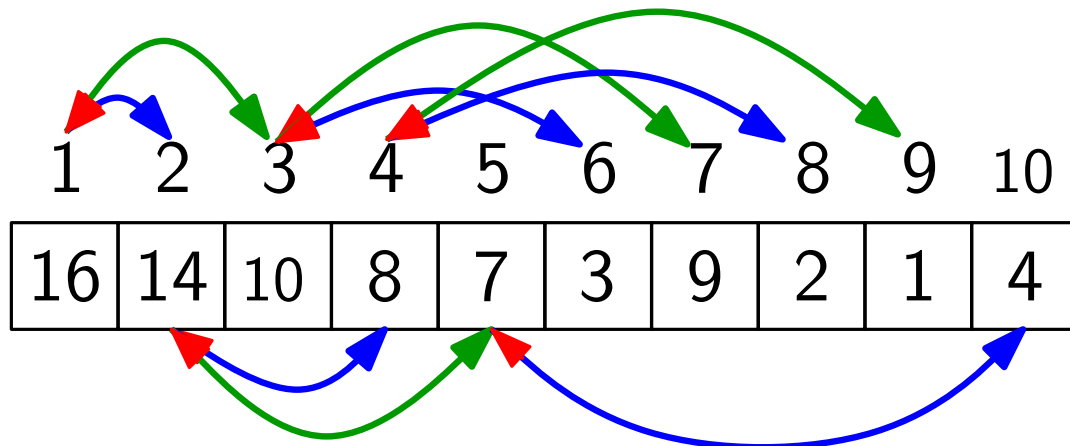
```

left(index  $i$ )    return  $2i$ 
right(index  $i$ )   return  $2i + 1$ 
parent(index  $i$ ) return  $\lfloor i/2 \rfloor$ 
  
```





# Bäume, gut gepackt



## Definition:

Ein Heap hat die

*Max-Heap-Eigenschaft*,

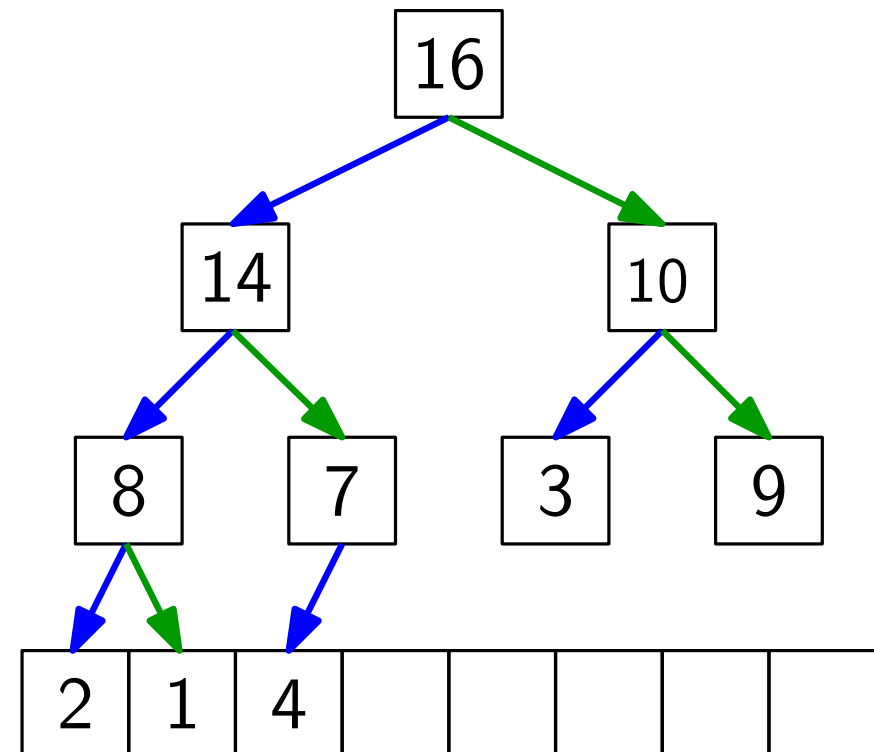
wenn für jeden Knoten  $i > 1$  gilt:  
 $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$ .

So ein Heap heißt *Max-Heap*.

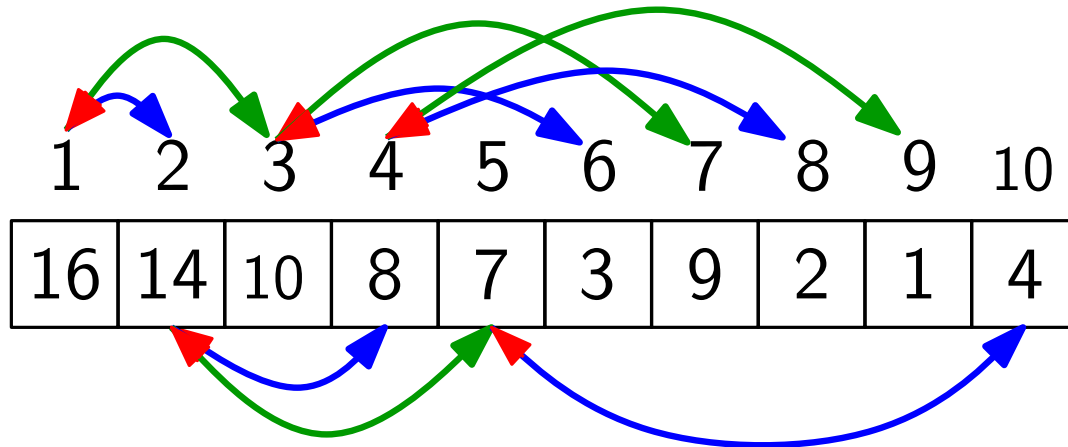
sehr schnelle Rechenoperationen!

*Pfeile implementieren:*

$\text{left}(\text{index } i)$     **return**  $2i$   
 $\text{right}(\text{index } i)$     **return**  $2i + 1$   
 $\text{parent}(\text{index } i)$     **return**  $\lfloor i/2 \rfloor$



# Bäume, gut gepackt



## Definition:

Ein Heap hat die

~~Min~~ ~~Max~~-Heap-Eigenschaft,  
wenn für jeden Knoten  $i > 1$  gilt:  
 $A[\text{parent}(i)] \not\leq A[i]$ .

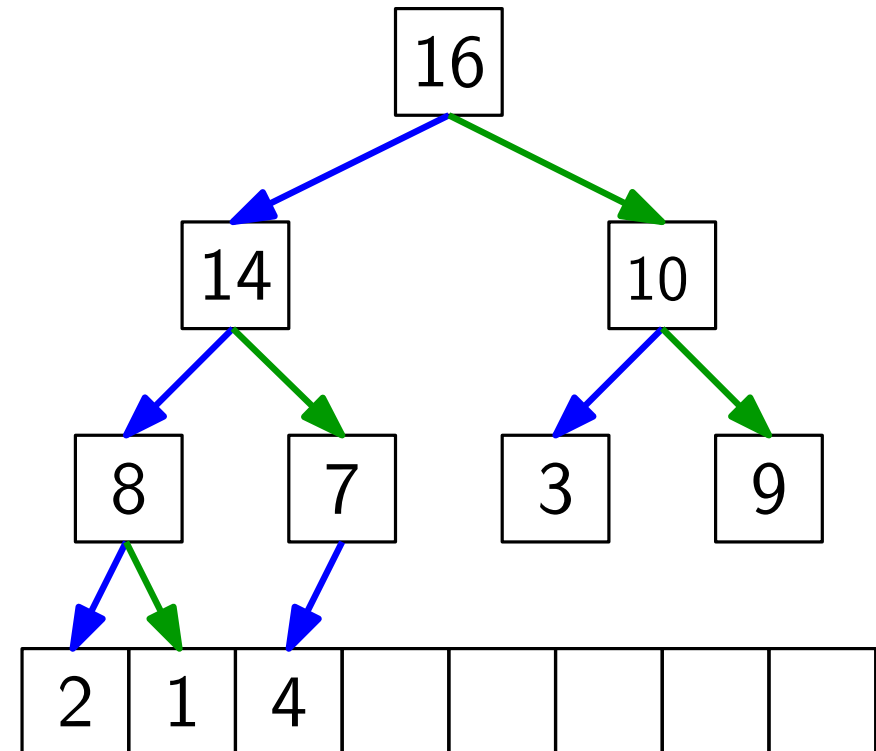
So ein Heap heißt ~~Max~~-Heap.

sehr schnelle Rechenoperationen!

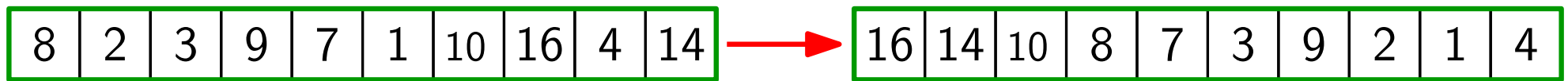
Pfeile implementieren:

```

left(index  $i$ )    return  $2i$ 
right(index  $i$ )   return  $2i + 1$ 
parent(index  $i$ ) return  $\lfloor i/2 \rfloor$ 
  
```



# Baustelle

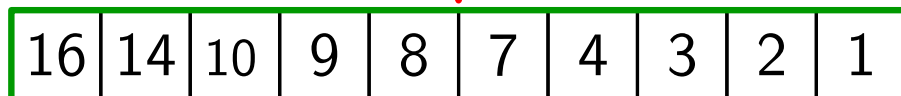


„totales Chaos“

Max-Heap-Eigenschaft

**Aufgabe:** Berechnen Sie in  $O(n \log n)$  Zeit einen Max-Heap!

*Nimm MergeSort!*

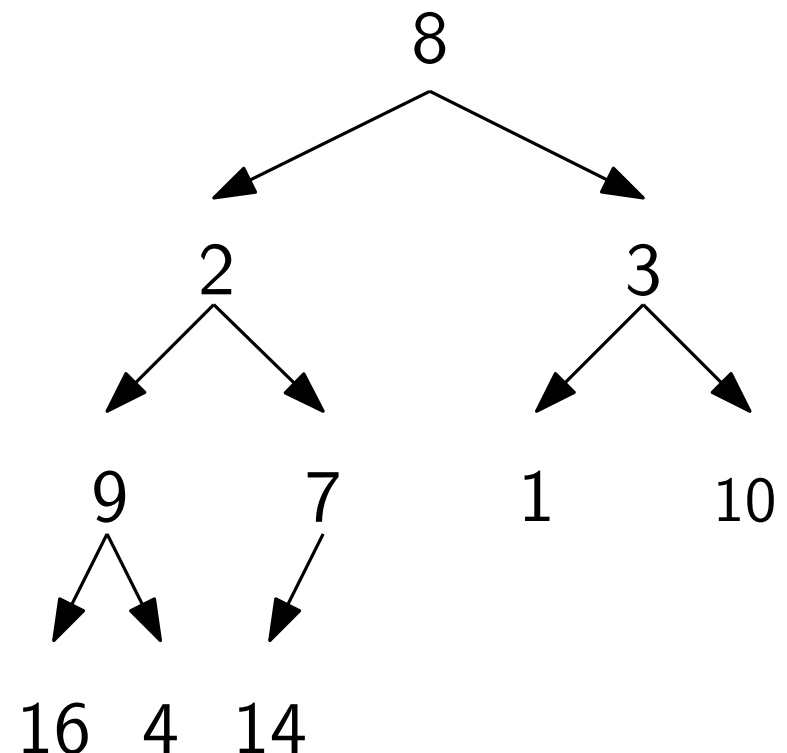


Absteigende Sortierung

**Fertig?** Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

**Hoffen:** Schnellere Berechnung!

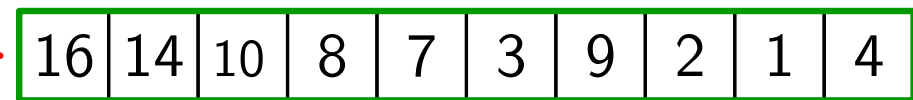
**Idee:** Nutze Baumstruktur!  
Arbeite *bottom-up*:  
Erst die Blätter...



# Baustelle



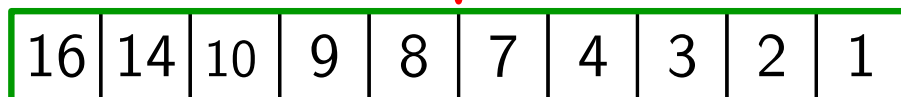
„totales Chaos“



Max-Heap-Eigenschaft

**Aufgabe:** Berechnen Sie in  $O(n \log n)$  Zeit einen Max-Heap!

*Nimm MergeSort!*

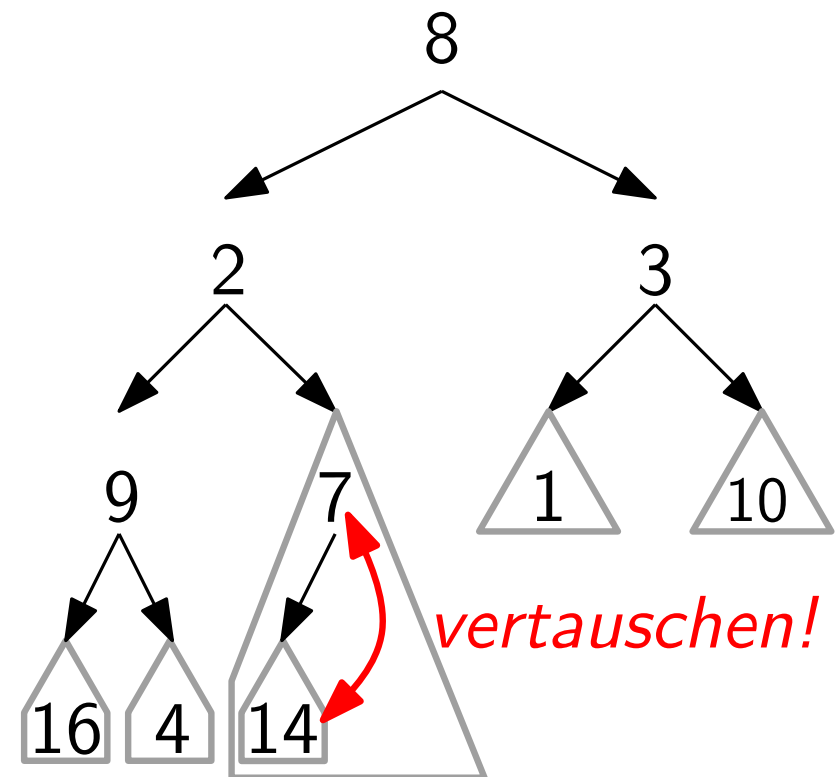


Absteigende Sortierung

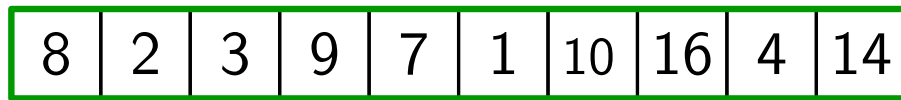
**Fertig?** Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

**Hoffen:** Schnellere Berechnung!

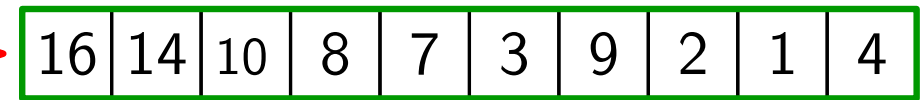
**Idee:** Nutze Baumstruktur!  
Arbeite *bottom-up*:  
Erst die Blätter...



# Baustelle



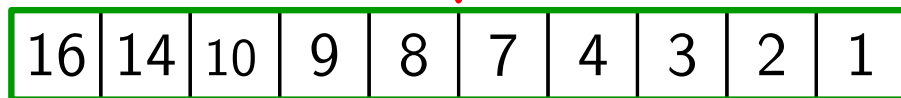
„**totales Chaos**“



**Max-Heap-Eigenschaft**

**Aufgabe:** Berechnen Sie in  $O(n \log n)$  Zeit einen Max-Heap!

*Nimm MergeSort!*

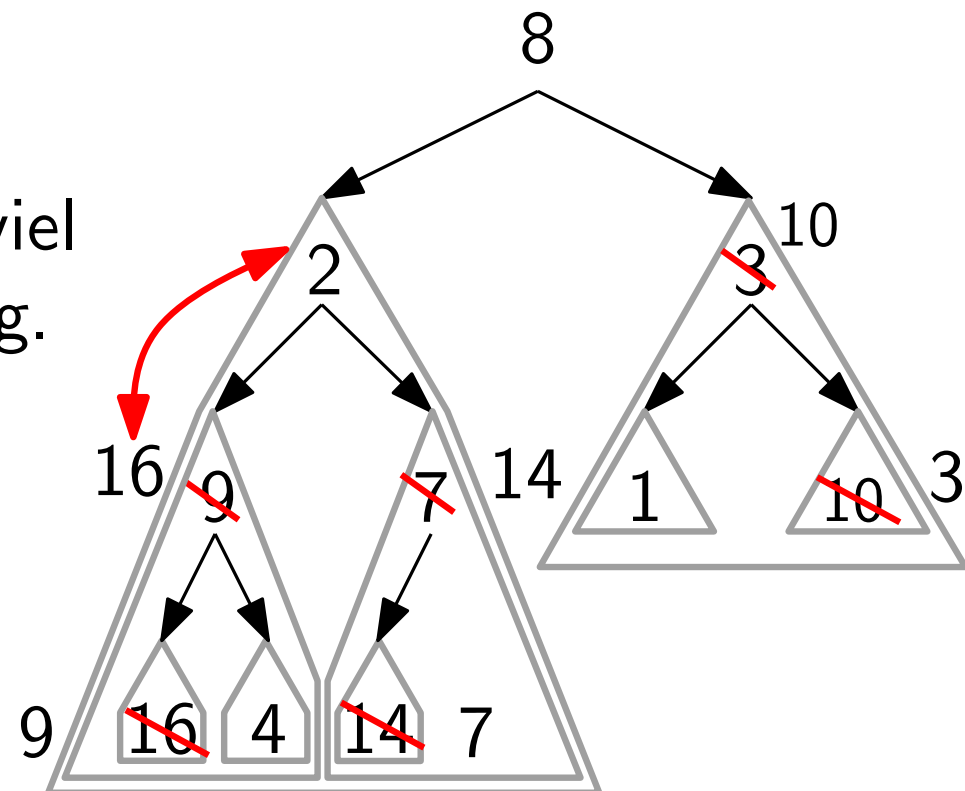


Absteigende Sortierung

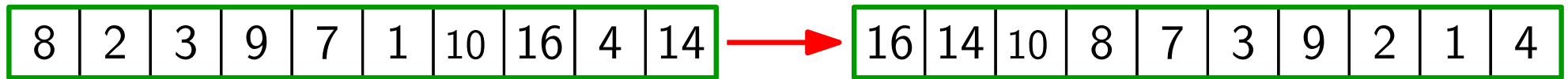
**Fertig?** Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

**Hoffen:** Schnellere Berechnung!

**Idee:** Nutze Baumstruktur!  
Arbeite *bottom-up*:  
Erst die Blätter...



# Baustelle



„**totales Chaos**“

**Max-Heap-Eigenschaft**

**Aufgabe:** Berechnen Sie in  $O(n \log n)$  Zeit einen Max-Heap!

*Nimm MergeSort!*

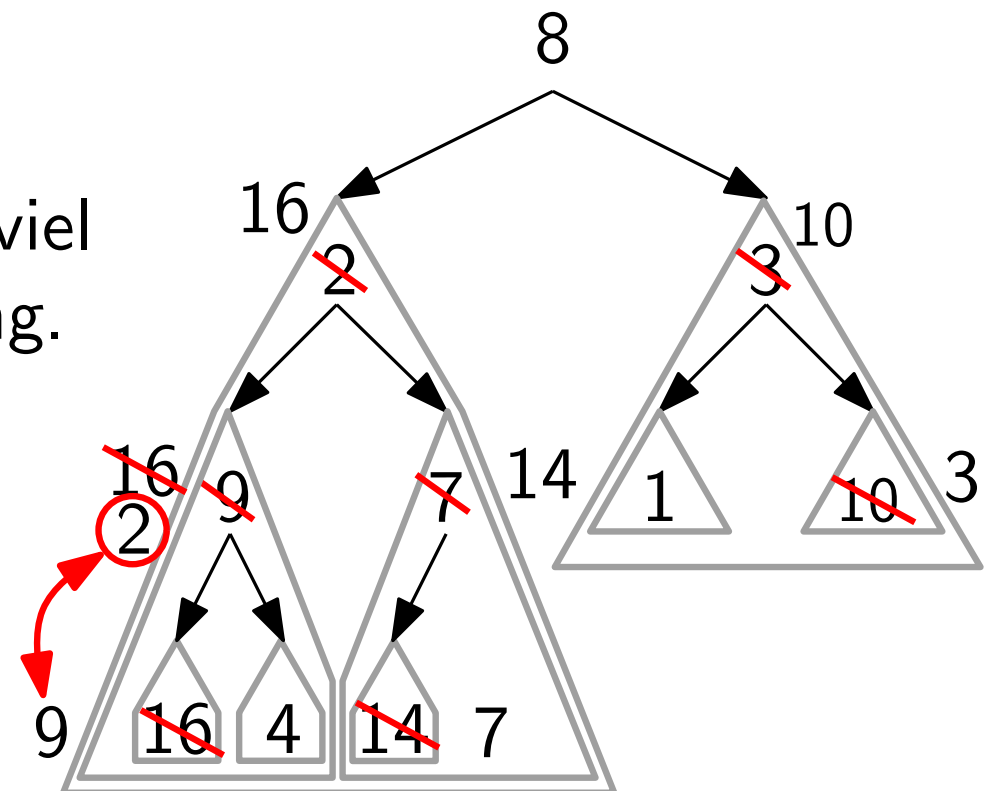


Absteigende Sortierung

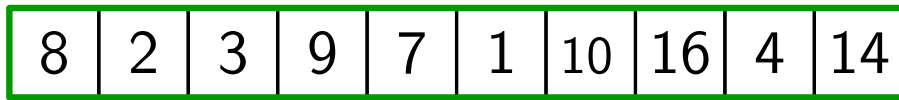
**Fertig?** Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

**Hoffen:** Schnellere Berechnung!

**Idee:** Nutze Baumstruktur!  
Arbeite *bottom-up*:  
Erst die Blätter...



# Baustelle



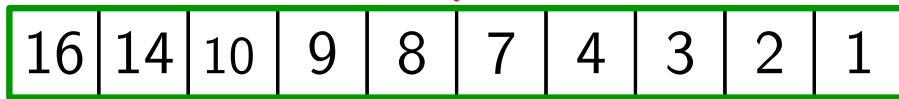
„totales Chaos“



Max-Heap-Eigenschaft

**Aufgabe:** Berechnen Sie in  $O(n \log n)$  Zeit einen Max-Heap!

*Nimm MergeSort!*



Absteigende Sortierung

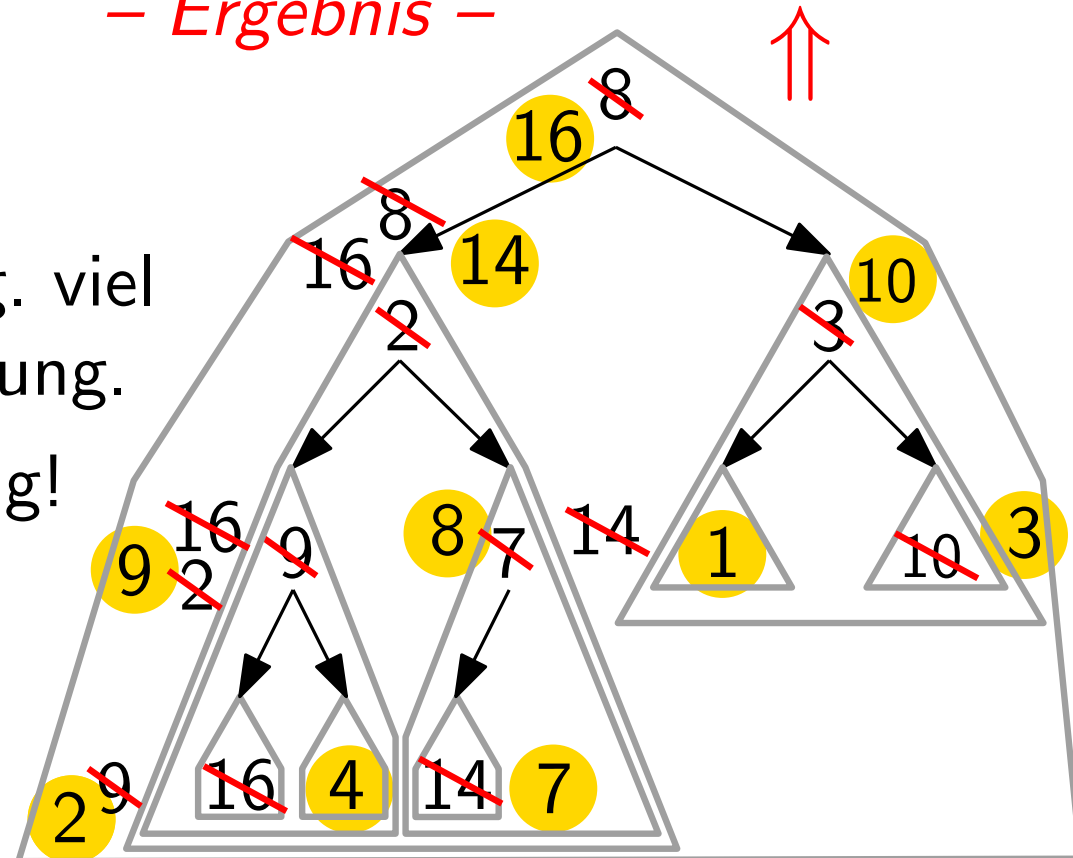


- Ergebnis -

**Fertig?** Nicht ganz: Heap-Eig. viel schwächer als Sortierung.

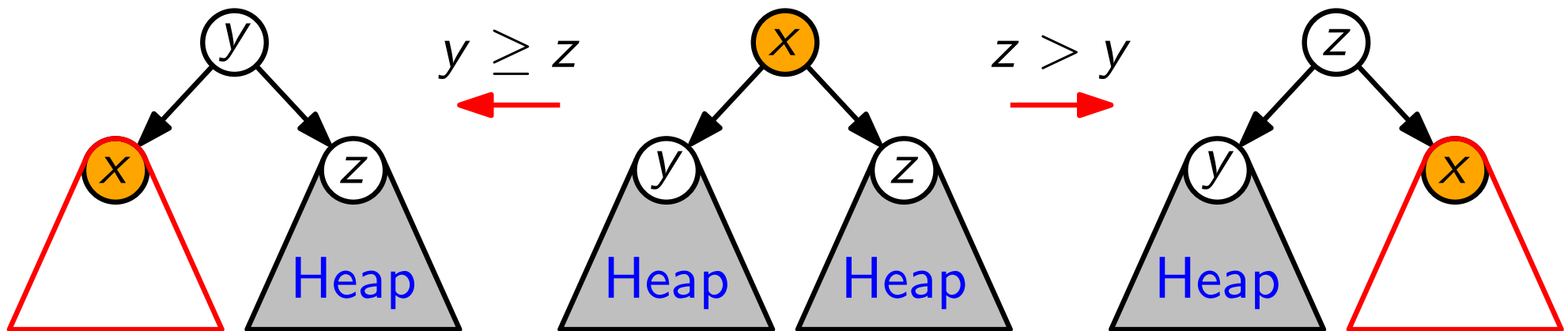
**Hoffen:** Schnellere Berechnung!

**Idee:** Nutze Baumstruktur!  
 Arbeite *bottom-up*:  
 Erst die Blätter...



# Elementaroperation

„Versickere“  $x$ , falls  $x$  zu klein, d.h. falls  $x < \max(y, z)$



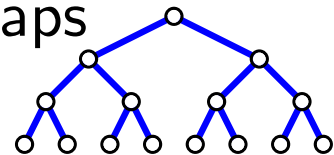
```

MaxHeapify(int A[], index i)
  l = left(i); r = right(i)
  if l ≤ A.heap-size and A[l] > A[i] then
    largest = l
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
  
```

Lokale Strategie: *top-down*

Laufzeit?  $T_{MH}(n, i)$

- := Anzahl der Swaps
- ≤ Länge des Weges von Knoten  $i$  zu einem Blatt
- ≤ Höhe von  $i$  im Heap
- ≤ Höhe des Heaps
- ≤  $\lfloor \log_2 n \rfloor$





# Das große Ganze

**Lokale Strategie:** *top-down*

Laufzeit:  $T_{MH}(n, i) \leq$  Höhe von Knoten  $i$  im Heap der Größe  $n$

**Globale Strategie:** *bottom-up*

```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1
    do MaxHeapify(A, i)
```

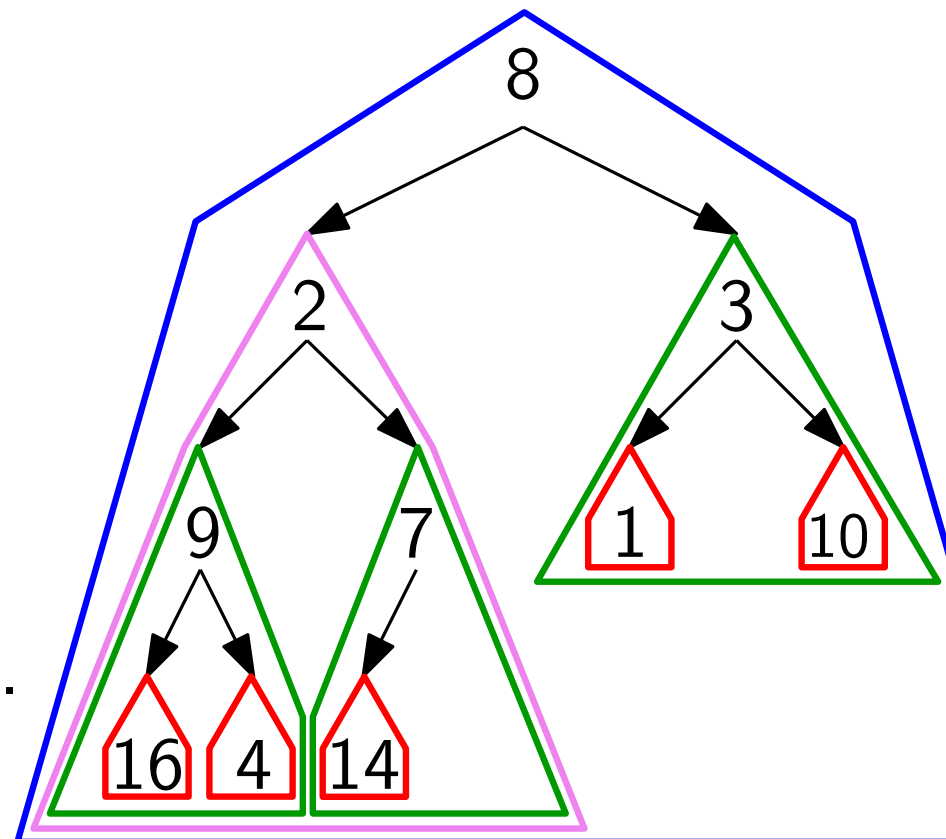
Laufzeit. grob:  $O(n \log n)$

genauer:  $T_{BMH}(n) =$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} T_{MH}(n, i)$$

$$\approx \frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{4} \cdot 1 + \frac{n}{8} \cdot 2 + \frac{n}{16} \cdot 3 + \dots$$

$$= n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot i = ?$$



# Forts. Laufzeitanalyse

$$T_{\text{BMH}}(n) \approx n \sum_{i=1}^{\lfloor \log n \rfloor} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

Vgl. geometrische Reihe:  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$  (falls  $|x| < 1$ )

*ableiten!*

*ableiten!*

Wir hätten gerne:  $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Quotientenregel:  
 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g f' - g' f}{g^2}$

$$\Rightarrow T_{\text{BMH}}(n) \leq \frac{n}{4} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = n$$

**Satz.** Ein Heap von  $n$  Elementen kann in  $\Theta(n)$  Zeit berechnet werden.

# Übung Heap-Aufbau

**Aufgabe:** Bauen Sie einen Heap mit BuildMaxHeap!



```
BuildMaxHeap(int A[])
  A.heap-size = A.length
  for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1 do
    MaxHeapify(A, i)
```

```
MaxHeapify(int A[], index i)
  ℓ = left(i); r = right(i)
  if ℓ ≤ A.heap-size and A[ℓ] > A[i] then
    largest = ℓ
  else largest = i
  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest]
    largest = r
  if largest ≠ i then
    swap(A, i, largest)
    MaxHeapify(A, largest)
```

# Zurück zu Prioritätsschlangen

## Abstrakter Datentyp: Prioritätsschlange

verwaltet Elemente einer Menge,  
wobei jedes Element der Menge eine Priorität hat.

FindMax()  $O(\quad)$   
return A[1]

Laufzeiten?

ExtractMax()  $O(\quad)$   
if  $A.heap-size < 1$  then  
  error "Heap underflow"  
 $max = A[1]$   
 $A[1] = A[A.heap-size]$   
 $A.heap-size --$   
MaxHeapify(A, 1)  
return  $max$

IncreaseKey(index  $i$ , prio.  $p$ )  $O(\quad)$   
if  $p < A[i]$  then error "prio. too small"  
 $A[i] = p$   
while  $i > 1$  and  $A[parent(i)] < A[i]$   
  swap( $A, i, parent(i)$ )  
   $i = parent(i)$

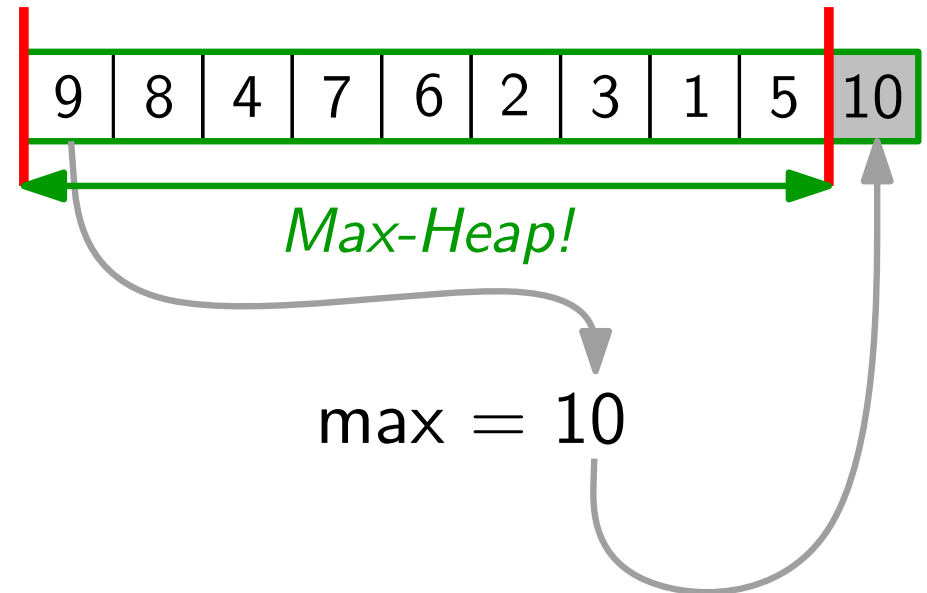
Insert(priorität  $p$ )  $O(\quad)$   
 $A.heap-size ++$   
if  $A.heap-size > A.length$  then error...  
 $A[A.heap-size] = -\infty$   
IncreaseKey( $A.heap-size, p$ )

# Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
  - Speichere dort das extrahierte Maximum.

HeapSort(int[] A)

Schreiben Sie den Pseudocode.  
Verwenden Sie BuildMaxHeap  
und ExtractMax.

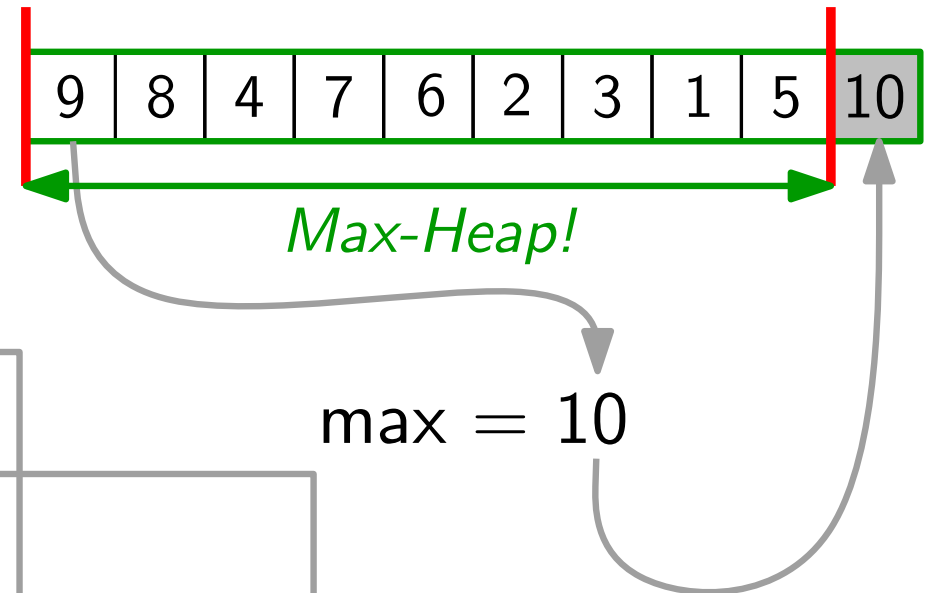


# Vom Heap zur Sortierung

- Idee:**
- ExtractMax() gibt rechtestes Heap-Element frei.
  - Speichere dort das extrahierte Maximum.

```

HeapSort(int[] A)
  BuildMaxHeap(A)
  for i = A.length downto 2 do
    A[i] = ExtractMax()
  
```



**Laufzeit:**  $T_{HS}(n) \in O(n) + (n - 1) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

**Satz.** HeapSort sortiert  $n$  Schlüssel in  $O(n \log n)$  Zeit.

# Zusammenfassung Sortierverfahren

|   | InsertionSort                  | MergeSort          | HeapSort           |
|---|--------------------------------|--------------------|--------------------|
| Worst-Case-Laufzeit                         | $\Theta(n^2)$                  | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n \log n)$ |
| Avg.-Case-Laufzeit                          | $\Theta(n^2)$<br><i>Warum?</i> | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n \log n)$ |
| Best-Case-Laufzeit                          | $\Theta(n)$                    | $\Theta(n \log n)$ | $\Theta(n \log n)$ |
| in situ <sup>1</sup><br>( <i>in place</i> ) | ✓                              | ✗                  | ✓                  |
| stabil <sup>2</sup>                         | ✓                              | ✓                  | ✗                  |

<sup>1</sup>) Ein *in-situ*-Algorithmus benötigt nur  $O(1)$  extra Speicher.

<sup>2</sup>) Sortieralg. *stabil*, wenn er gleiche Schlüssel in Ursprungsreihenf. belässt.