Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2022/23

5. Vorlesung

Rekursionsgleichungen

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Lösen von Rekursions(un)gleichungen

Frage: Gilt für $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (mit $T(1) = 0$)
auch $T \in O(n \log n)$ **?**

Behauptung: Es gibt ein $c > 0$, so dass $T(n) \leq cn \log_2 n$.

Beweis. Durch Induktion über n. Ind.-Anfang: $T(1) \leq 0$ ✓
Induktionsannahme: $\boxed{T(k) \leq ck \log_2 k}$ gilt für alle $k < n$.
Wir wissen: $T(n) = 2T(n/2) + 4n$

$$\begin{aligned}
&\leq 2c\tfrac{n}{2} \log_2 \tfrac{n}{2} + 4n \quad \text{(wegen IA)} \\
&= cn \cdot (\log_2 n - \log_2 2) + 4n \\
&= cn \log_2 n - cn + 4n \\
&= cn \log_2 n + (4 - c)n \\
&\leq cn \log_2 n \quad \text{falls } c \geq 4.
\end{aligned}$$

Substitutionsmethode:

1. Lösung von Rekursion raten
2. Mit Induktion beweisen

$\Rightarrow$ Behauptung wahr (es gibt ein $c > 0$...) $\Rightarrow T \in O(n \log n)$**!**

Streng genommen haben wir die Behauptung nur für $n =$ Zweierpotenz bewiesen. Auf der nächsten Folie sind wir genauer.

I) Substitutionsmethode

Noch'n Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Behauptung: $T \in O(n)$ (mit $T(1) = 0$)

Also zeigen wir: $T(n) \leq cn$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Induktion über n.

IA: $T(k) \leq ck$ für alle $k < n$

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1 \quad \text{wg. IA} \\ &\leq c \cdot (\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Noch'n Versuch

Noch'n Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Behauptung: $T \in O(n)$ (mit $T(1) = 0$)

Also zeigen wir: $T(n) \leq cn + 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Beweis. Induktion über n.

IA: $T(k) \leq ck + 1$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1) + (c \cdot \lceil n/2 \rceil + 1) + 1 \\ &\leq c \cdot n + 3 \end{aligned}$$

Nicht verzagen!

Selbes Beispiel: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$

Behauptung: $T \in O(n)$ ✓ (mit $T(1) = 0$)

Nun probieren wir: $T(n) \leq cn - d$ für Konstanten $c, d > 0$. ✓

D.h. wir machen unsere Aussage *schärfer!!*

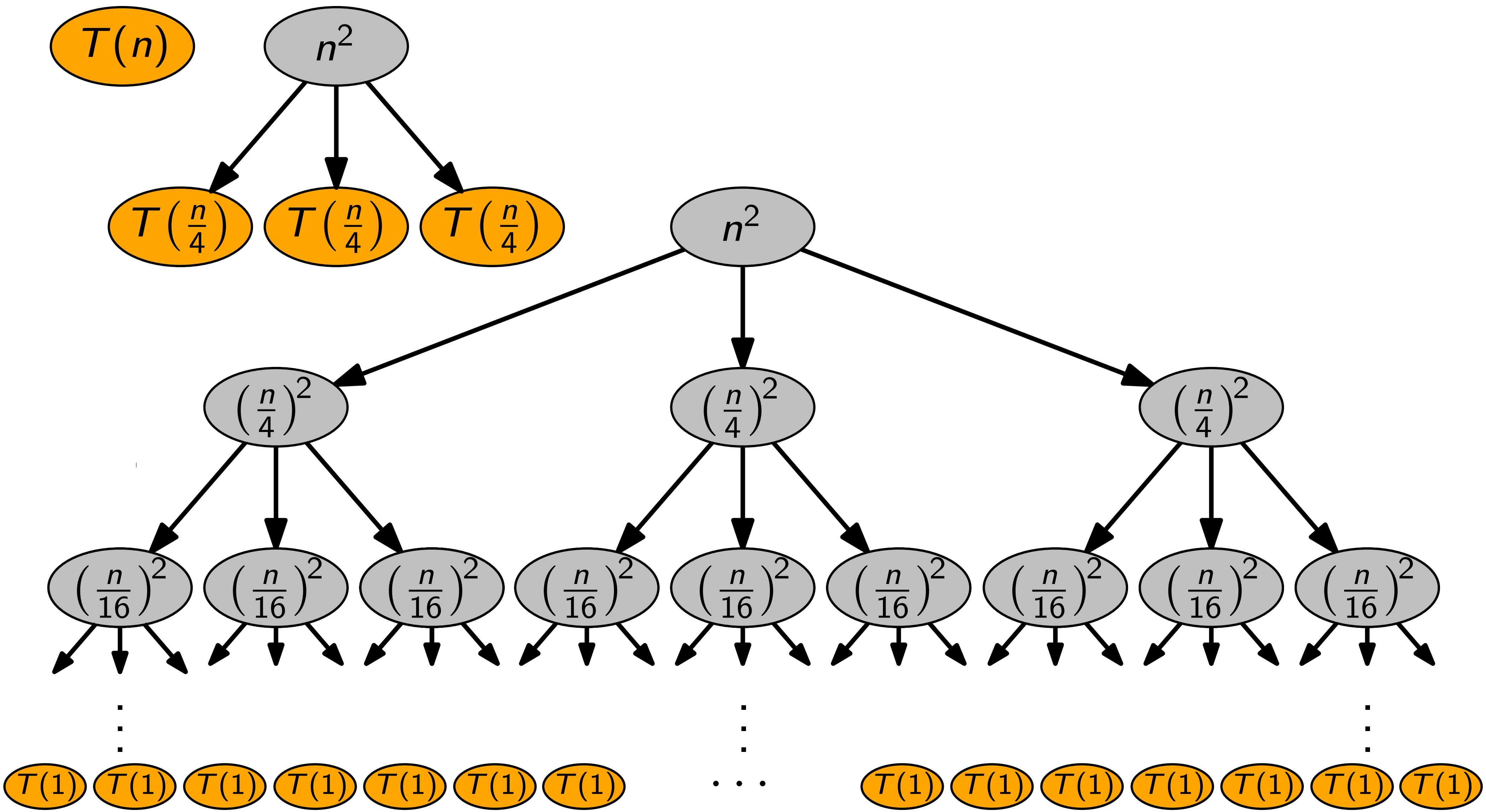
Beweis. Induktion über n.

IA: $T(k) \leq ck - d$ für alle $k < n$.

Wissen:
$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq (c\lfloor n/2 \rfloor - d) + (c\lceil n/2 \rceil - d) + 1 \\ &\leq c \cdot \big(\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil\big) - d - d + 1 \\ &\leq cn - d + (1 - d) \\ &\leq cn - d \quad \text{falls } d \geq 1. \end{aligned}$$
✓

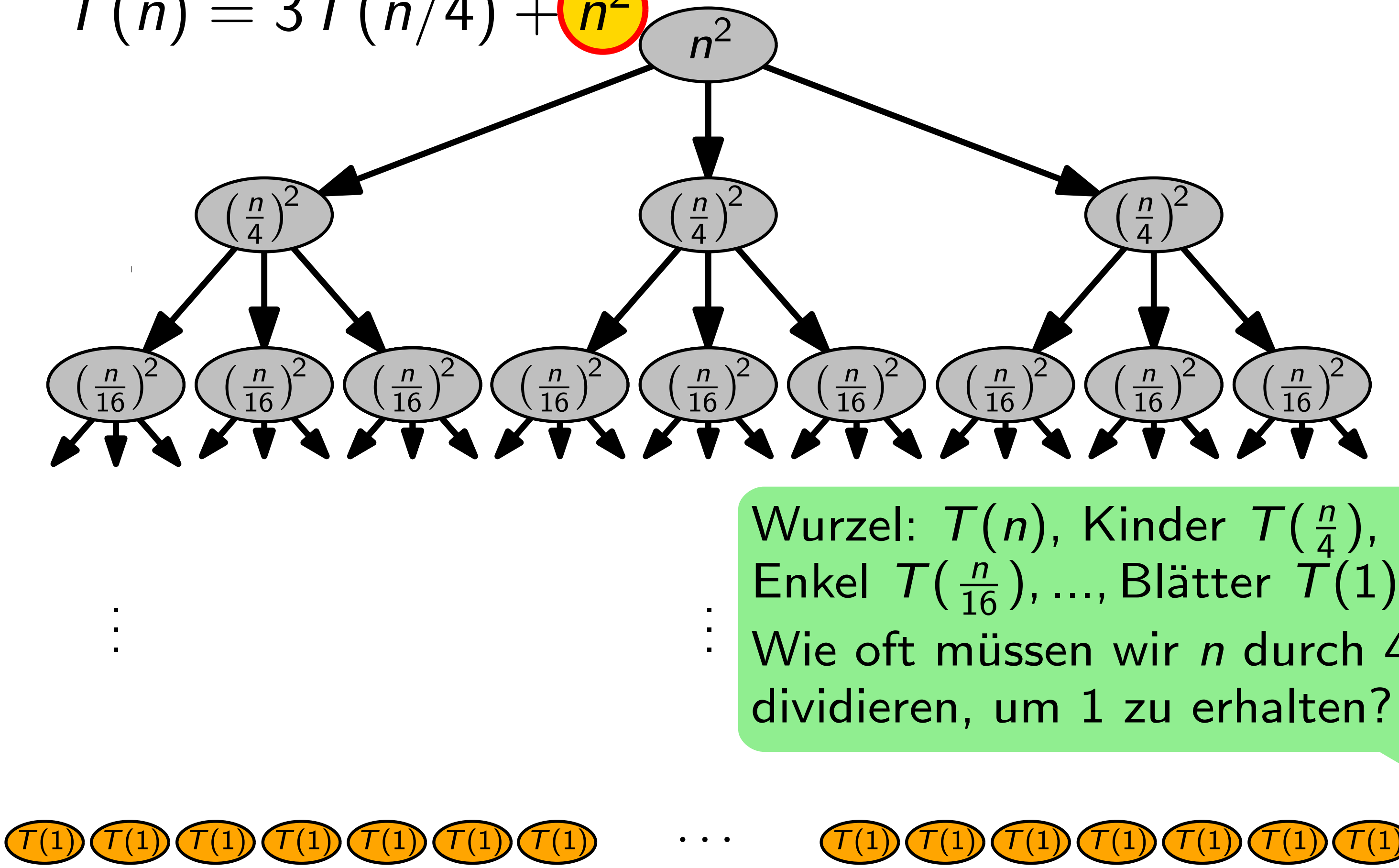
II) Rekursionsbaummethode

Beispiel: $T(n) = \boxed{3T(n/4)} + \boxed{n^2}$ $(*)$ $(\text{mit } T(1) = 1)$



II) Rekursionsbaummethode

$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



Wurzel: $T(n)$, Kinder $T(\frac{n}{4})$, Enkel $T(\frac{n}{16})$, ..., Blätter $T(1)$.
Wie oft müssen wir n durch 4 dividieren, um 1 zu erhalten?

lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	1	n^2
1	3	$\frac{3}{16} n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i} n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

0. Summand schon $1n^2$!

unterste Ebene andere Ebenen

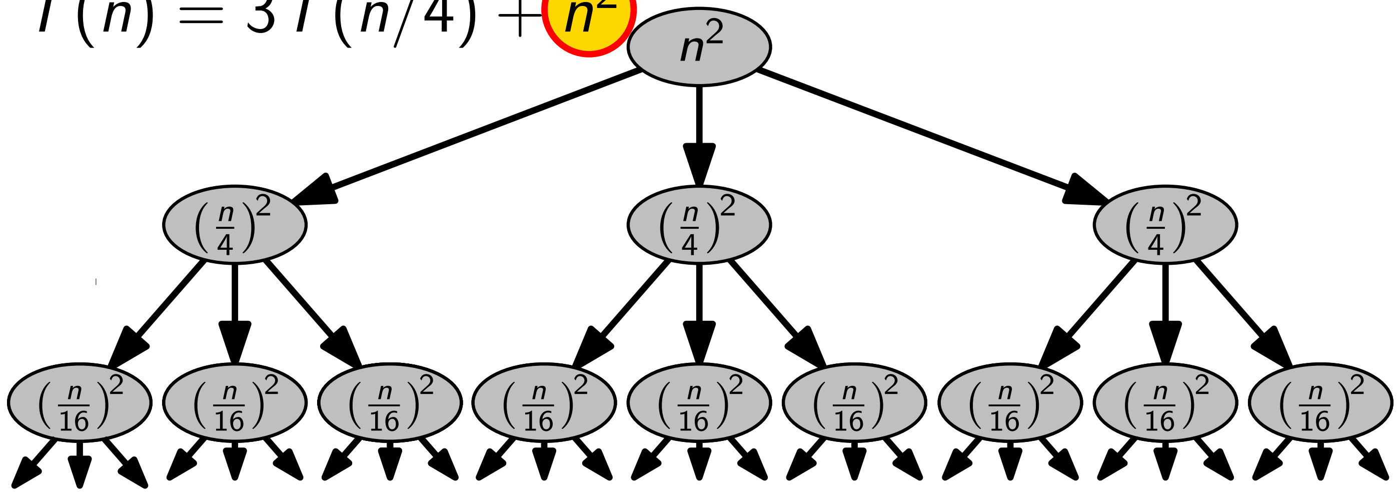
geometr. Reihe!!!

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \le n^{0{,}793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0{,}793} + \frac{16}{13} n^2$$

$$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)!$$

II) Rekursionsbaummethode

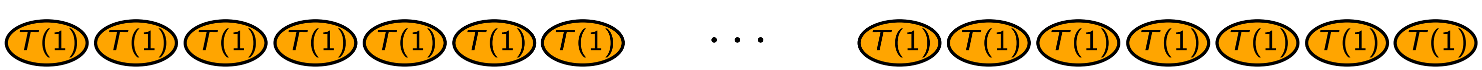
$T(n) = 3T(n/4) + n^2$



lfd.Nr. Ebene	Anz. Knoten	Beitrag (Ebene)
0	1	n^2
1	3	$\frac{3}{16}n^2$
2	3^2	$\frac{3^2}{16^2}n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	3^i	$\frac{3^i}{16^i}n^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$	$n^{\log_4 3}$ vorausgesetzt $T(1) = 1$

Berechnen Sie mit der Rekursionsbaummethode $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$, wobei $T(1) = 0$.

Wurzel: $T(n)$, Kinder $T(\frac{n}{4})$, Enkel $T(\frac{n}{16})$, ..., Blätter $T(1)$. Wie oft müssen wir n durch 4 dividieren, um 1 zu erhalten?



0. Summand schon $1n^2$!

unterste Ebene andere Ebenen

$$\Rightarrow T(n) = n^{\log_4 3} + \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i n^2 \le n^{0,793} + n^2 \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i} = n^{0,793} + \frac{16}{13} n^2$$

geometr. Reihe!!!

$\Rightarrow T \in \Theta(n^2)$!

III) Meistermethode

Nichts ist praktischer als eine gute Theorie...

Achtung!

Die Methode kann man nur anwenden bei Rekursionen der Art

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei $a \geq 1$, $b > 1$ Konst. und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *asymptotisch positiv*...

...und auch da nicht in allen Fällen!

III) Meistermethode

Satz: Seien $a \geq 1$, $b > 1$ Konstanten und $f, T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei n/b sowohl für $\lfloor n/b \rfloor$ als auch $\lceil n/b \rceil$ stehen kann.

Dann gilt

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in O(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textit{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Definition: Die *Regularitätsbedingung* ist erfüllt, falls

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein $c < 1$ und für alle großen n.

III) Meistermethode $\quad T(n) = aT(n/b) + f(n)$

$$T \in \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{falls } f \in O(n^{(\log_b a)-\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n) & \text{falls } f \in \Theta(n^{\log_b a}). \\ \Theta(f) & \text{falls } f \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ & \textit{und} \text{ die Regularitätsbedingung gilt.} \end{cases}$$

Beispiel: $T(n) = 3T(n/4) + n^2$

$\Rightarrow \; a = 3 \; (\geq 1),\; b = 4 \; (> 1)$ und $f : n \mapsto n^2$.

$\Rightarrow f \in \overset{\Omega}{?}(n^{(\log_4 3)\overset{+}{\pm}\varepsilon})$, z.B. für $\varepsilon = 1$, da $\log_4 3 < 1$.

Das ist Fall 3! $\quad \Rightarrow \quad T \in \Theta(f) = \Theta(n^2) \quad \square$

Also müssen wir die Regularitätsbedingung testen:

$3f(n/4) = \frac{3}{16} n^2 \leq c \cdot f(n) = cn^2$, z.B. für $c = \frac{3}{16}$.

Wichtig: Unser c muss *echt* < 1 sein!

Üben! Hausaufgaben!

Übersicht

- *Substitutionsmethode*

  Für „Genies": Lösung raten, dann per Induktion beweisen!

- *Rekursionsbaummethode*

  Etwas umständlich, funktioniert aber immer!

- *Meistermethode*

  Funktioniert nur bei Rekursionsgleichungen der Art
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ (und auch da nicht immer).

  Achtung: Viele verstehen die Bedeutung von ε in den Bedingungen der Fälle 1 & 3 nicht richtig!

  Beispiel: $T(n) = 2T(n/2) + n \log_2 n$

  $\Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$

  aber $f(n) = n \log_2 n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$ **!!**

Also können wir die Meistermethode hier **nicht** verwenden!

Grund: $\log n$ wächst langsamer als n^{ε}, für jedes $\varepsilon > 0$.

PS: Wie könnte man das beweisen?