

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

11. Vorlesung

Planare Graphen

Hauptklausur am 1. August

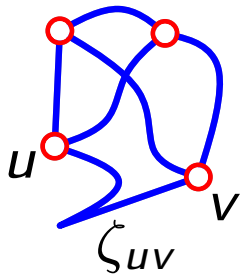
- Die Klausur findet 12:00–14:00 Uhr parallel in Turing- und Zuse-HS statt. (Details kommen kurz vorher per Email.)
- In WueStudy bis **15.07.** anmelden (sonst keine Teilnahme möglich).
Falls Sie nicht teilnehmen werden, melden Sie sich bitte AB (damit wir weniger Klausuren drucken müssen).
- Die Nachklausur findet voraussichtlich am Do, 13.10., statt, aber das ist noch nicht SICHER!

Graphen zeichnen

injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.

Def. Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls $[0, 1]$ in einen **topologischen Raum**.

bei uns: die euklidische Ebene



Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

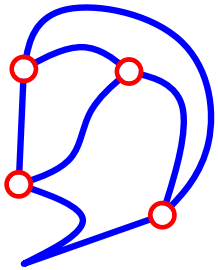
Eine Abbildung ζ heißt *Zeichnung* von G , falls

– für alle $w \in V$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ (Knoten \mapsto Punkt)
und Einschränkung von ζ auf V injektiv

– für alle $uv \in E$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ (Kante \mapsto J-Kurve)

wobei ζ_{uv} Jordankurve mit $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$
 $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$

Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

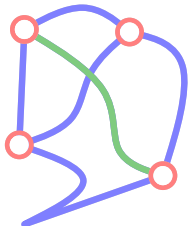
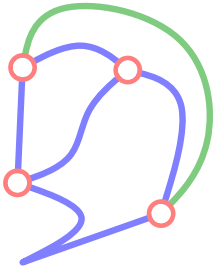


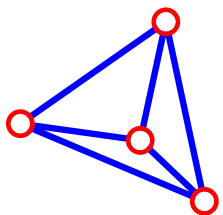
Eine Zeichnung ζ von G heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Def.

Ein Graph G ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B. $G =$  planar, denn  ist eine ebene Zeichnung von G .



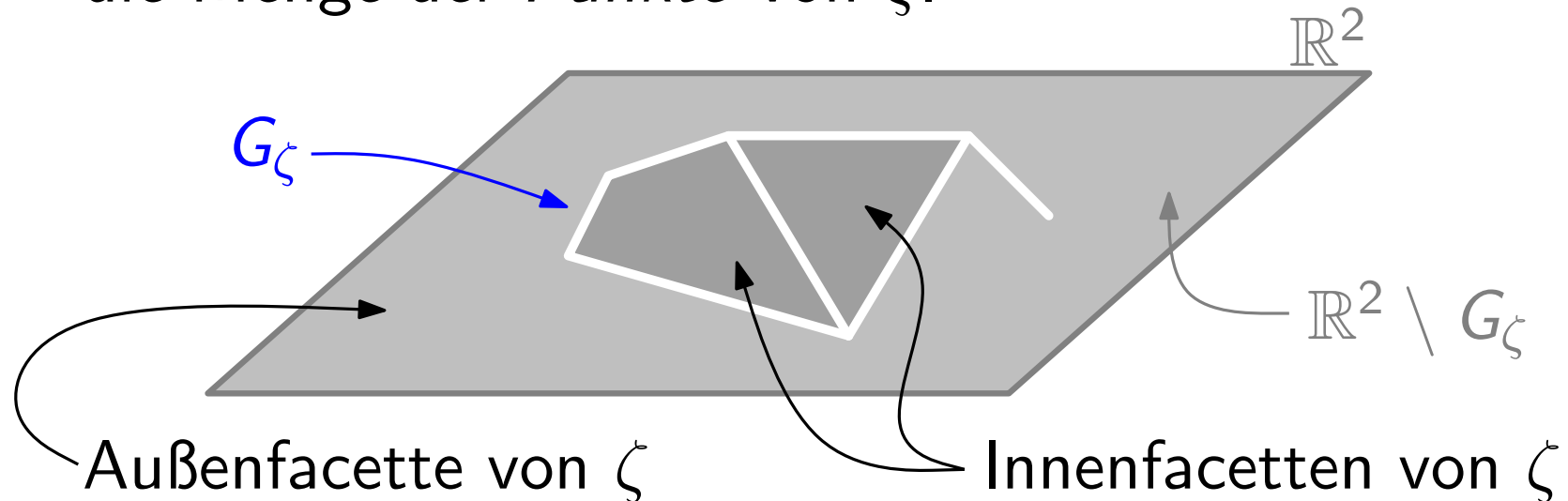
Eine Zeichnung ζ von G heißt *geradlinig*, falls
 für alle $e \in E$ gilt ζ_e ist linear (d.h. $\zeta_e([0, 1])$ Strecke).

Punkte und Facetten

Def. Für einen planaren Graphen $G = (V, E)$ und eine ebene Zeichnung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von ζ .



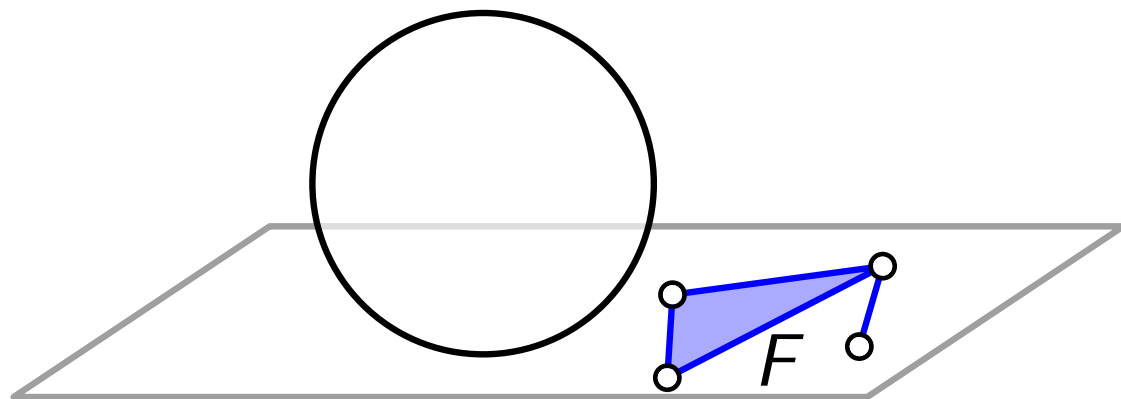
Def. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$ heißen *Facetten* von ζ .

Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Einheitssphäre
im \mathbb{R}^3

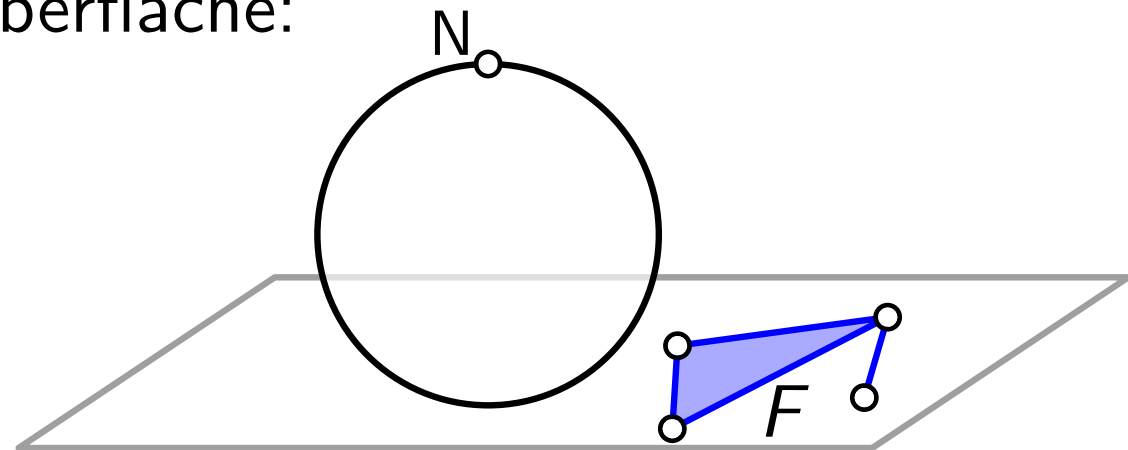


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

höchster
Punkt von S^2

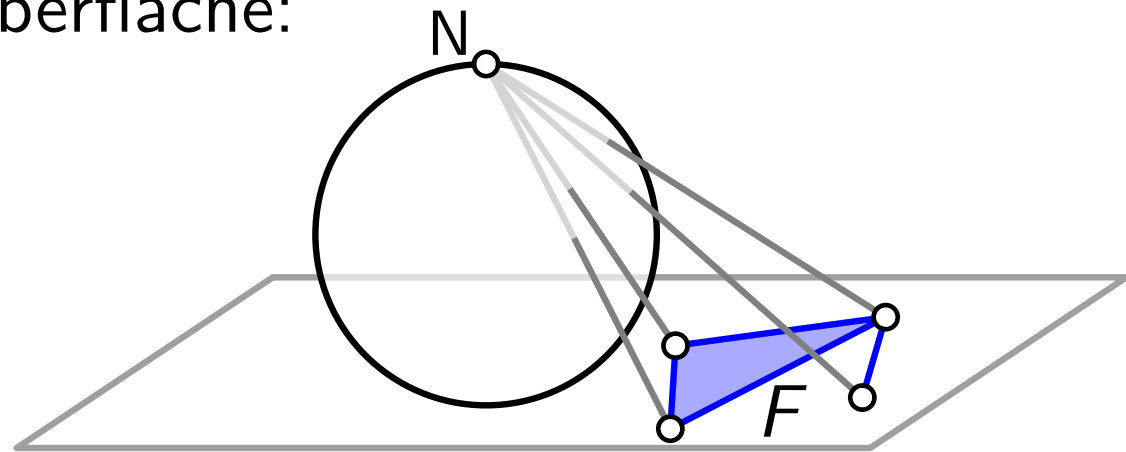


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Zentralprojekt
von $S^2 \setminus \{N\}$
auf \mathbb{R}^2 mit
Zentrum N

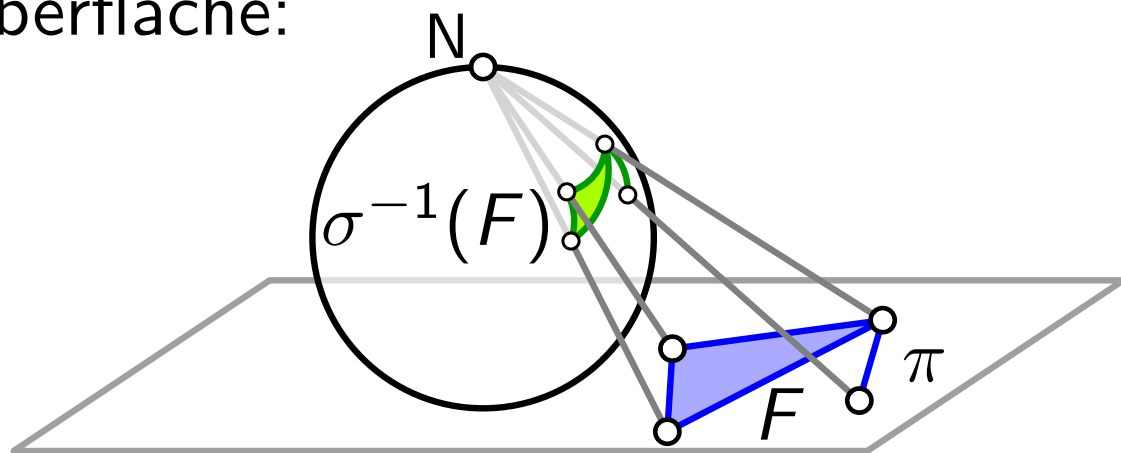


Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

Beob.¹ G planar, π ebene Zeichnung von G , F Innenfacette von π . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung π_F von G , in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet.

Beweis. Die Umkehrung σ^{-1} der *stereografischen* Projektion $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefert eine ebene Zeichnung von G auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) die Kugel, so dass $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$.



Projiziere dann zurück in die Ebene.

\Rightarrow Zeichnung von $E(F)$ begrenzt die Außenfacette.

Zeichnung $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$ ist eben.

Skelette sind planar

Beob.² Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

Beweis. Sei P konvexes, beschränktes Polyeder, $o \in \text{Inn}(P)$.

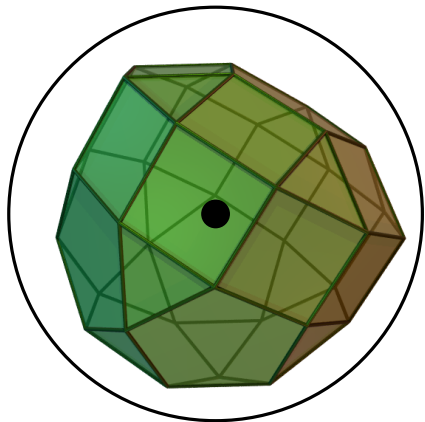
Sei S Kugel mit Zentrum o , so dass $P \subset S$.

Zentralprojektion $\pi_o: P \rightarrow S$ liefert ebene Zeichnung π_S des Skeletts von P auf der Kugeloberfläche von S .

Wähle Nordpol N , so dass $N \notin \pi_S$.

Projiziere π_S mittels σ auf die Ebene.

Ergebnis: $\sigma \circ \pi_S$ ist eben.



Schon wieder Euler . . .

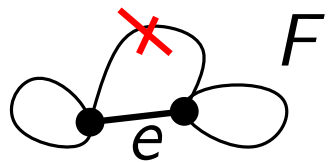


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e beidseitig zu gleicher Facette F inzident $\Rightarrow e$ liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$
$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$$

[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]

Schon wieder Euler ...

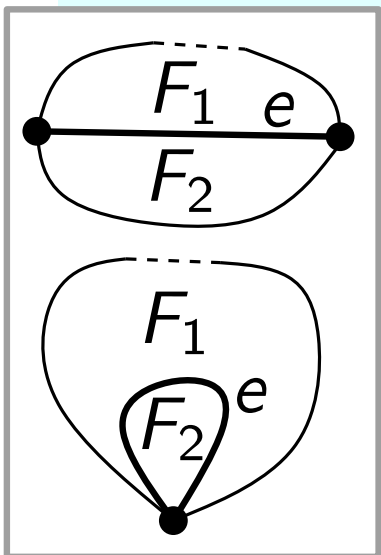


Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



Beweis.

Induktion über m .

$m = 0$: $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$ ✓

$m > 0$: ex. Kante e ; ang. e ~~beidseitig zu gleicher Facette F~~
inzident zu Facetten $F_1 \neq F_2$

$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k - 1.$
 $\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' + 1 = k + 1 = RS_m.$

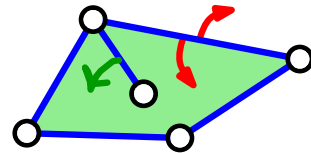
[Können I.V. auf G' anwenden, da G' planar und $m' < m$.]



Planare Graphen sind schlank!

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen $G = (V, E)$ mit mind. 3 Knoten gilt $m \leq 3n - 6$ und $f \leq 2n - 4$.

Beweis. Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[\text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3 \text{).} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist G zusammenhängend
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\stackrel{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow f \leq 2n - 4 \quad \square$$

Konsequenzen

Satz. Für jeden *einfachen* planaren Graphen $G = (V, E)$ mit mind. 3 Knoten gilt $m \leq 3n - 6$ und $f \leq 2n - 4$.

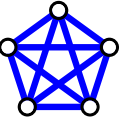
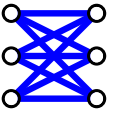
Korollar. Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

Beweis.
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

Korollar. Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

Beweis. O.E. hat G Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).
 Angenommen, es gibt nur **2** Knoten vom Grad ≤ 5 .
 $2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6(n - 2) + \mathbf{2} > 2 \cdot (3n - 6)$.
Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ in planaren Graphen! \square

Nicht planare Graphen

Satz. Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind *nicht* planar.  

Beweis.

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz $\Rightarrow K_5$ nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

\Rightarrow kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von ≥ 4 Knoten begrenzt sein, da $K_{3,3}$ bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

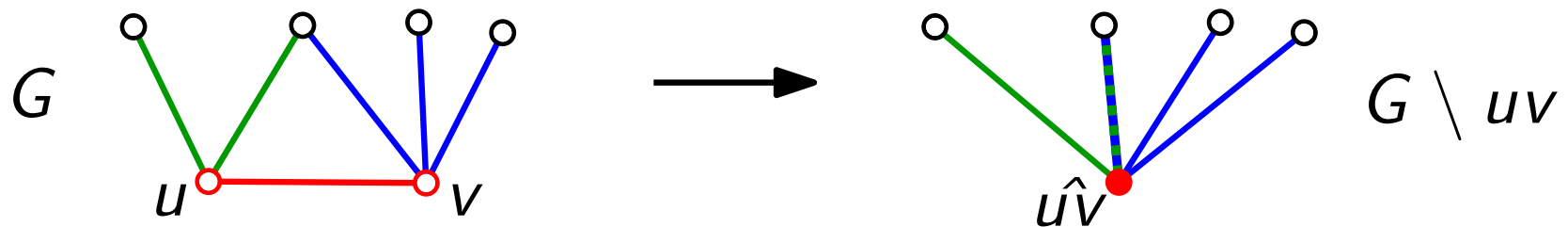
$$2m = 18 < 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f \quad \text{⚡}$$

Kontraktionen und Minoren

Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch (*Einfach-*)Kontraktion von uv .
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
 Unterschied zur
 Kontraktion G/U
 bei Multigraphen!

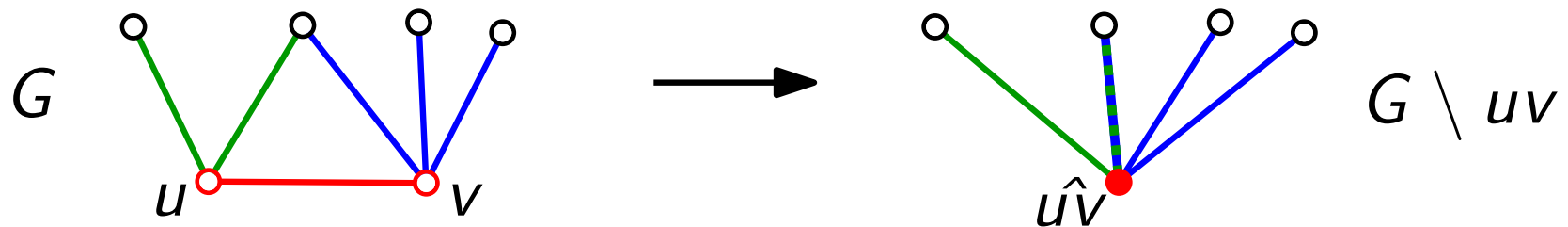


Kontraktionen und Minoren

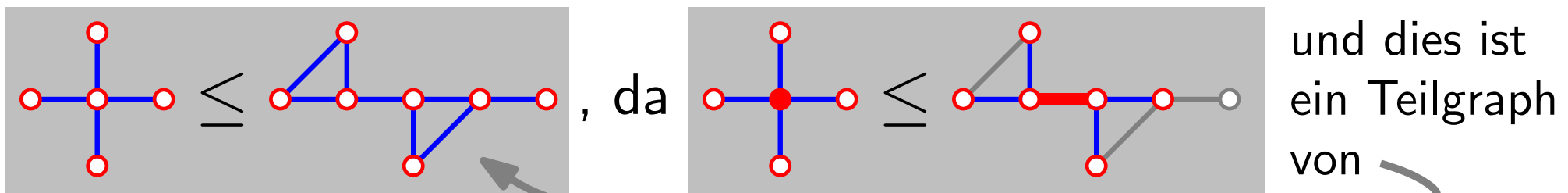
Def. Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G .

Der einfache Graph $G \setminus uv$ entsteht aus G durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von uv .
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte
Unterschied zur
Kontraktion G/U
bei Multigraphen!



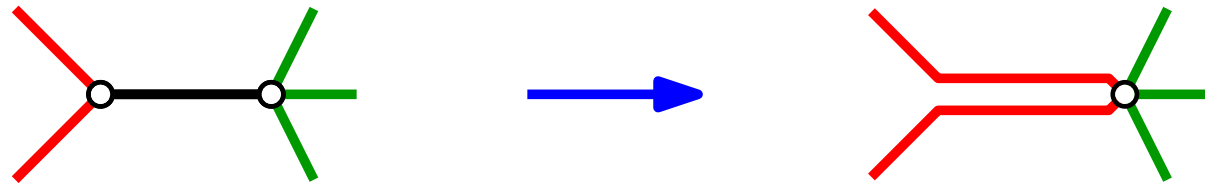
Ein Graph H heißt *Minor* von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.



Ein paar Beobachtungen

Beob.³ G planar \Leftrightarrow alle Minoren von G sind planar.

Beweis. „ \Rightarrow “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ \Leftarrow “ G ist Minor von G ($G \leq G$). □

Beob.⁴ Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

Beweis. , also ist K_4 planar \Rightarrow Beh. □

Satz von Kuratowski

Satz. [Kuratowski 1930: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*]
Sei G ein einfacher Graph. Dann gilt:
 G planar \Leftrightarrow weder K_5 noch $K_{3,3}$ ist Minor von G .



Kazimierz Kuratowski
Warschau 1896–1980 Warschau

Eine Verallgemeinerung

Def. Eine Klasse \mathcal{G} von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $H \leq G$ gilt $H \in \mathcal{G}$.

Bsp.

- Klasse $\mathcal{G}_{\text{wald}}$ der Wälder
- Klasse $\mathcal{G}_{\text{plan}}$ der einfachen planaren Graphen

Def. Ein Graph G einer Graphenklasse \mathcal{G} heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor H von G mit $H \in \mathcal{G}$ gilt $H = G$.

Bsp.

- Für $\mathcal{G}_{\text{wald}}$ und $\mathcal{G}_{\text{plan}}$ ist der K_1 minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}} :=$ Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.
Welche Graphen sind für $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$ minorenminimal?
Man sagt, $\{K_5, K_{3,3}\}$ ist *Obstruktionsmenge* für $\mathcal{G}_{\text{plan}}$.
- Obstruktionsmenge für $\mathcal{G}_{\text{wald}}$? $\{C_3\}$.

Eine Verallgemeinerung

Satz. [Robertson & Seymour 1983–94: *Graph minors I–XIV*]
Jede minorenabgeschlossene Graphklasse besitzt eine *endliche* Obstruktionsmenge.

Satz. [Robertson & Seymour]
Für jeden festen Graphen H existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen G gilt, dass $H \leq G$.

(Die Laufzeit dieses Algorithmus ist kubisch in der Größe von G , aber die konstanten Faktoren hängen superpolynomiell von der Größe von H ab.)

Korollar. Wir können effizient testen, ob ein gegebener Graph G planar ist.

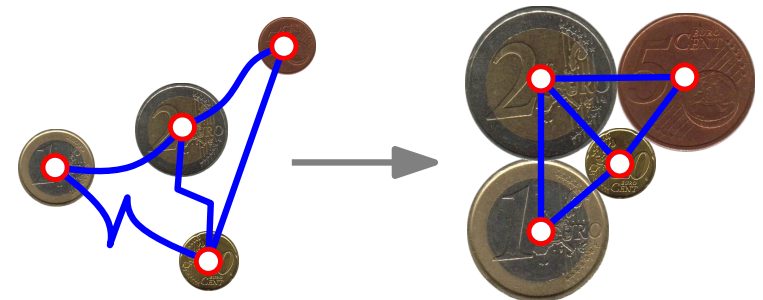
(Wegen der großen Konstanten in der Laufzeit des Algorithmus von Robertson & Seymour ist das aber nicht praktikabel. Anders geht's deutlich schneller. . .)

Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

Satz. [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]
 Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, ob G planar ist.

Satz. [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]
 Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

Satz. [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]
 Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



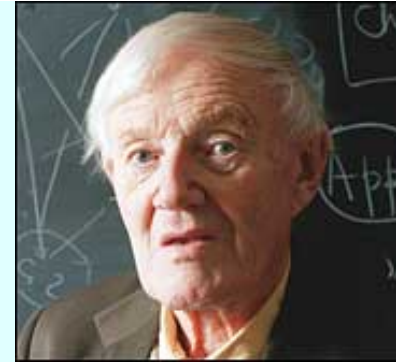
Planare Graphen zeichnen

Satz. [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

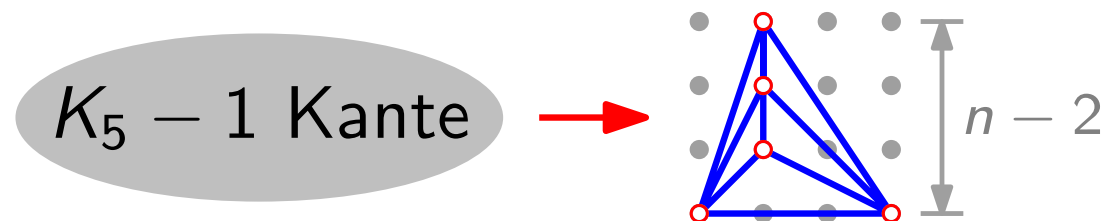
William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



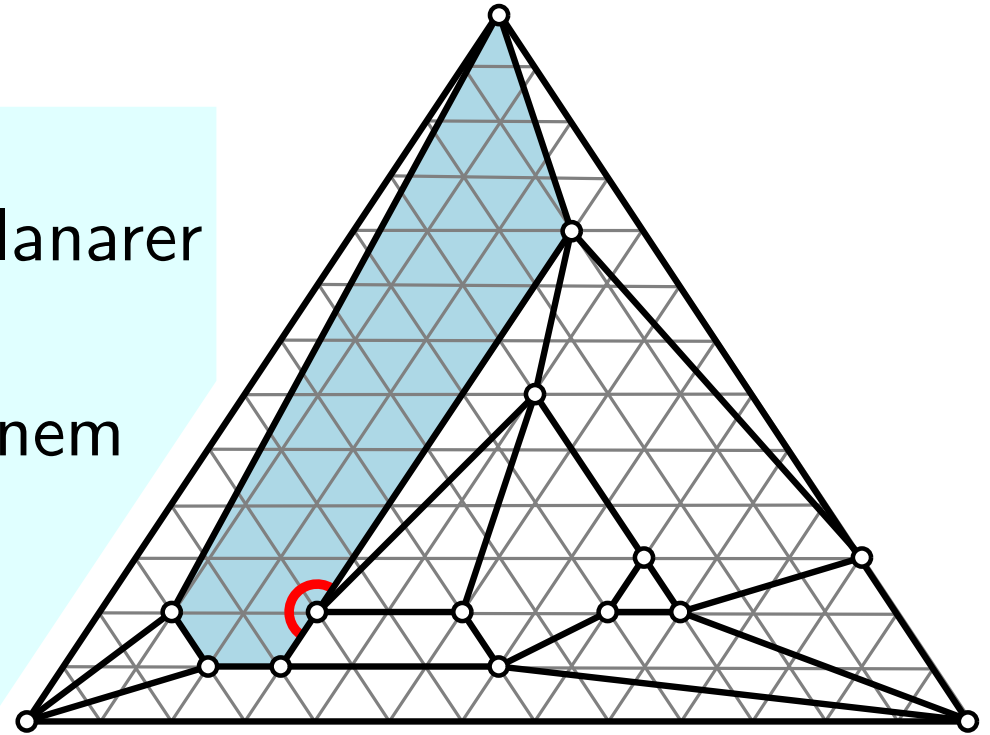
Satz. [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n - 2) \times (n - 2)$ Gitters abgebildet werden.



Konvexe Zeichnungen

Satz. [Felsner 2001]
 Sei G ein 3-fach zshg. planarer Graph mit f Facetten.
 Dann lässt sich G auf einem $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter
 geradlinig *und konvex*
 zeichnen.



Satz. [Bárány & Tokushige 2004]
 Jede *streng* konvexe Zeichnung des C_n benötigt $\Omega(n^3)$
 Platz.

Satz. [Bárány & Rote 2006]
 Jeder 3-fach zshg. planare Graph hat eine streng
 konvexe Zeichnung auf dem $O(n^2) \times O(n^2)$ -Gitter.

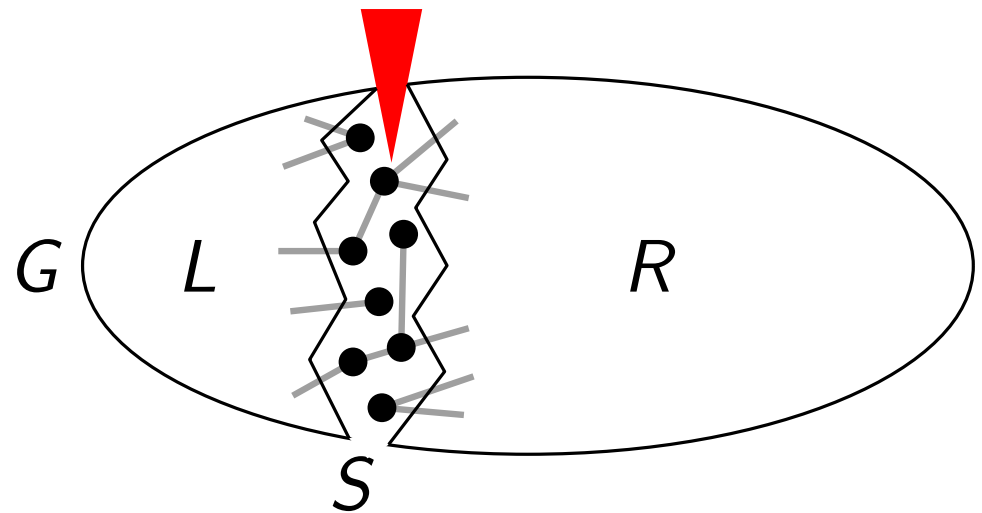
Noch mehr große Sätze

Satz. *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.
Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge
 $V = L \dot{\cup} S \dot{\cup} R$ von G , so dass

- keine Kante zwischen L und R verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$.

Eine solche Zerlegung
kann in $O(n)$ Zeit
berechnet werden.



Größte Matchings inkrementell

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph, sei $v \in V$ und sei M größtes Matching in $G - v$.

- (i) Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält, so ist M größtes Matching in G .
- (ii) Ansonsten sei W ein augmentierender Weg. Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in $G - v$ kann man in $O(E)$ Zeit ein größtes Matching in G finden.

Beweis. Übung – jetzt!

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph $G = (V, E)$)

if $|V| < 5$ **then**

return BruteForceMatching(G)

else

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$ \Rightarrow keine L - R -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$ größtes Matching in $G[\bar{V}]$ laut Lemma

return M

M ist größtes Matching in $G[\bar{V}]$

Korrektheit?

Hier $\bar{V} = V \Rightarrow G[\bar{V}] = G \Rightarrow M$ max. in G

Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph $G = (V, E)$)

if $|V| < 5$ **then** $O(1)$
 | **return** BruteForceMatching(G)

else

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

foreach $v \in S$ **do**

| $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

| $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

return M

$T(n) =$ **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für
 Graphen mit $|V| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n})$.

$O(n)$

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

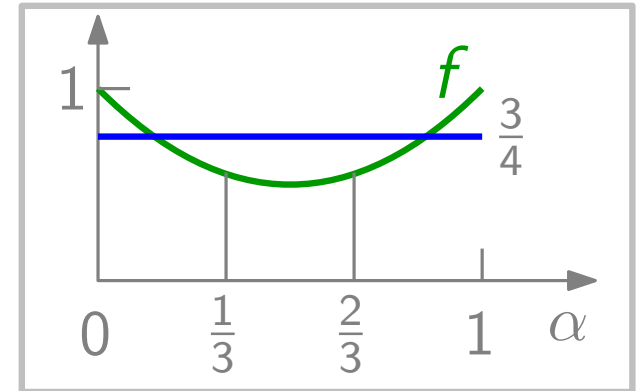
Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh. $T(n) \leq c'n^{3/2}$ für ein $c' > c$ [Wir können c' wählen!]

Bew.

$f(\alpha)$

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left(\underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right) \\ \leq c'n^{3/2} \quad < 3/4 \Rightarrow \text{Nimm } c' = 4c! \quad \square$$

Ergebnis

Satz. In einem planaren Graphen mit n Knoten kann man in $O(n^{3/2})$ Zeit ein größtes Matching finden.

Zum Vergleich:

Größtes Matching

Bipartite Graphen	$O(\sqrt{VE})$	[Hopcroft & Karp, 1973]
Allgemeine Graphen	$O(\sqrt{VE})$	[Micali & Vazirani, 1980]

Schwerstes Matching

Planare Graphen*	$O(V^{3/2} \log V)$	[Lipton & Tarjan, 1980]
Allgemeine Graphen	$O(EV \log V)$	[Gabow, 1975]

*) Das Lemma gilt entsprechend für den gewichteten Fall, allerdings mit Laufzeit $O(E \log V)$ statt $O(E)$.