

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

11. Vorlesung

## Planare Graphen

# Hauptklausur am 1. August

- Die Klausur findet 12:00–14:00 Uhr parallel in Turing- und Zuse-HS statt. (Details kommen kurz vorher per Email.)
- In WueStudy bis **15.07.** anmelden (sonst keine Teilnahme möglich).  
Falls Sie nicht teilnehmen werden, melden Sie sich bitte AB (damit wir weniger Klausuren drucken müssen).
- Die Nachklausur findet voraussichtlich am Do, 13.10., statt, aber das ist noch nicht SICHER!

# Graphen zeichnen

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine *homöomorphe* Einbettung des Intervalls  $[0, 1]$  in einen topologischen Raum.

# Graphen zeichnen

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen topologischen Raum.

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen topologischen Raum.

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*



# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*

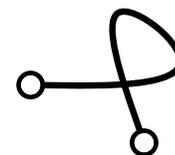


# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*

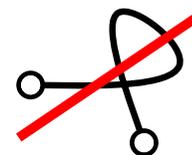


# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*

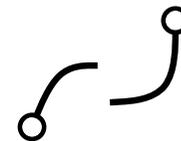
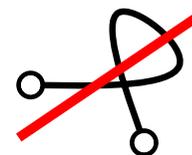


# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*

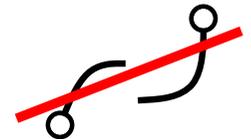
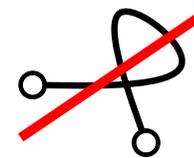


# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*

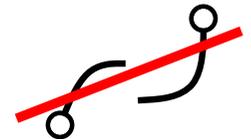
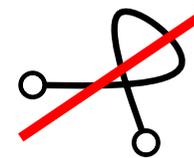


# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

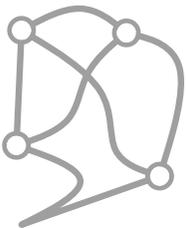
**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*



Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung  $\zeta$  heißt *Zeichnung* von  $G$ , falls

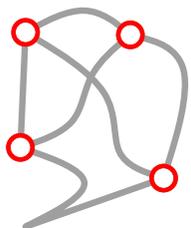
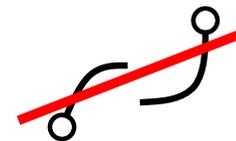
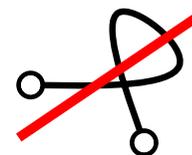


# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*



Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung  $\zeta$  heißt *Zeichnung* von  $G$ , falls

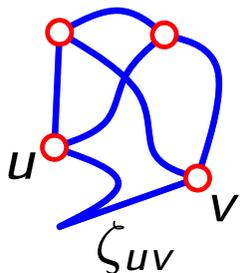
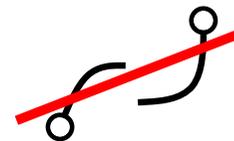
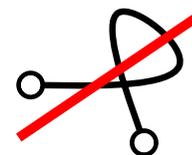
- für alle  $w \in V$  gilt  $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$  (Knoten  $\mapsto$  Punkt)
- und Einschränkung von  $\zeta$  auf  $V$  injektiv

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*



Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung  $\zeta$  heißt *Zeichnung* von  $G$ , falls

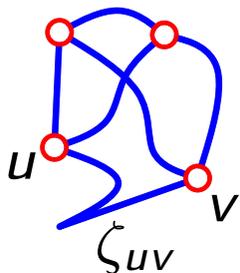
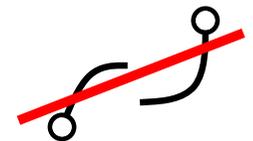
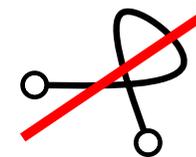
- für alle  $w \in V$  gilt  $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$  (Knoten  $\mapsto$  Punkt)
- und Einschränkung von  $\zeta$  auf  $V$  injektiv
- für alle  $uv \in E$  gilt  $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$  (Kante  $\mapsto$  J-Kurve)

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*



Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Eine Abbildung  $\zeta$  heißt *Zeichnung* von  $G$ , falls

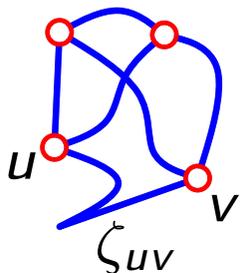
- für alle  $w \in V$  gilt  $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$  (Knoten  $\mapsto$  Punkt)  
und Einschränkung von  $\zeta$  auf  $V$  injektiv
- für alle  $uv \in E$  gilt  $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$  (Kante  $\mapsto$  J-Kurve)  
wobei  $\zeta_{uv}$  Jordankurve mit  $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$

# Graphen zeichnen

*injektive, in beiden Richtungen stetige Abb.*

**Def.** Eine *offene Jordankurve* ist eine **homöomorphe Einbettung** des Intervalls  $[0, 1]$  in einen **topologischen Raum**.

*bei uns: die euklidische Ebene*



Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

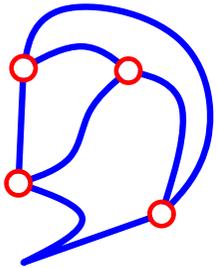
Eine Abbildung  $\zeta$  heißt *Zeichnung* von  $G$ , falls

– für alle  $w \in V$  gilt  $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$  (Knoten  $\mapsto$  Punkt)  
und Einschränkung von  $\zeta$  auf  $V$  injektiv

– für alle  $uv \in E$  gilt  $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$  (Kante  $\mapsto$  J-Kurve)

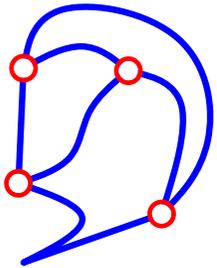
wobei  $\zeta_{uv}$  Jordankurve mit  $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$   
 $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$

# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls  
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

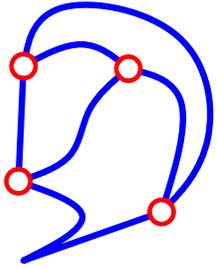
# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls  
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in  
 gemeinsamen Endpunkten schneiden.

# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



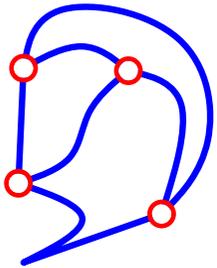
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls

$$ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

**Def.** Ein Graph  $G$  ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene Zeichnung hat.

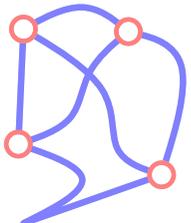
# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



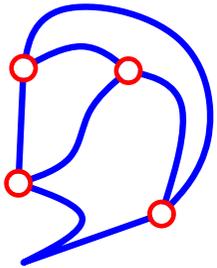
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls  
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in  
gemeinsamen Endpunkten schneiden.

**Def.** Ein Graph  $G$  ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene  
Zeichnung hat.

Z.B.  $G =$   *planar*.

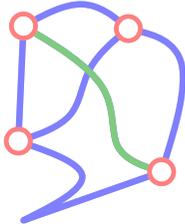
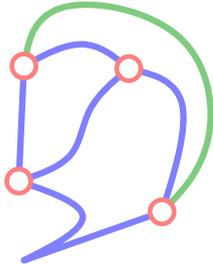
# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph



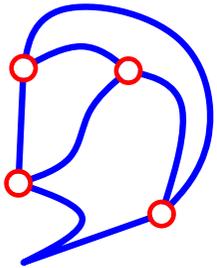
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls  
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

**Def.** Ein Graph  $G$  ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B.  $G =$   planar, denn  ist eine ebene Zeichnung von  $G$ .

# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

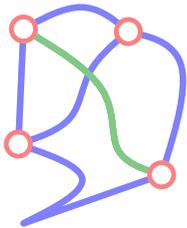
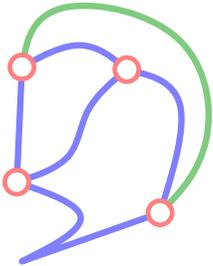


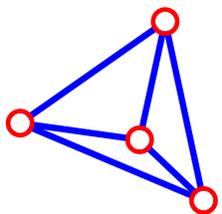
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls  
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

## Def.

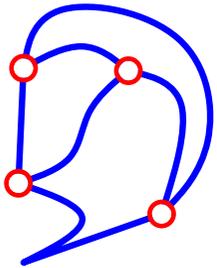
Ein Graph  $G$  ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B.  $G =$   planar, denn  ist eine ebene Zeichnung von  $G$ .



Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *geradlinig*, falls  
 für alle  $e \in E$  gilt  $\zeta_e$  ist linear

# Ebene Zeichnung, plättbarer Graph

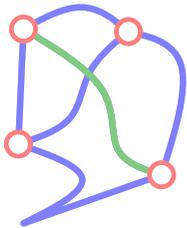
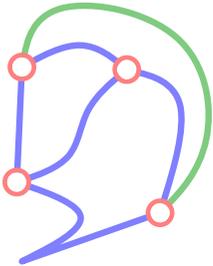


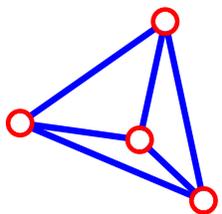
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *eben* (*kreuzungsfrei*), falls  
 $ab \neq cd \in E \Rightarrow \zeta_{ab}([0, 1]) \cap \zeta_{cd}(]0, 1[) = \emptyset$

d.h. falls sich die Zeichnungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

## Def.

Ein Graph  $G$  ist *planar* (*plättbar*), falls er eine ebene Zeichnung hat.

Z.B.  $G =$   planar, denn  ist eine ebene Zeichnung von  $G$ .



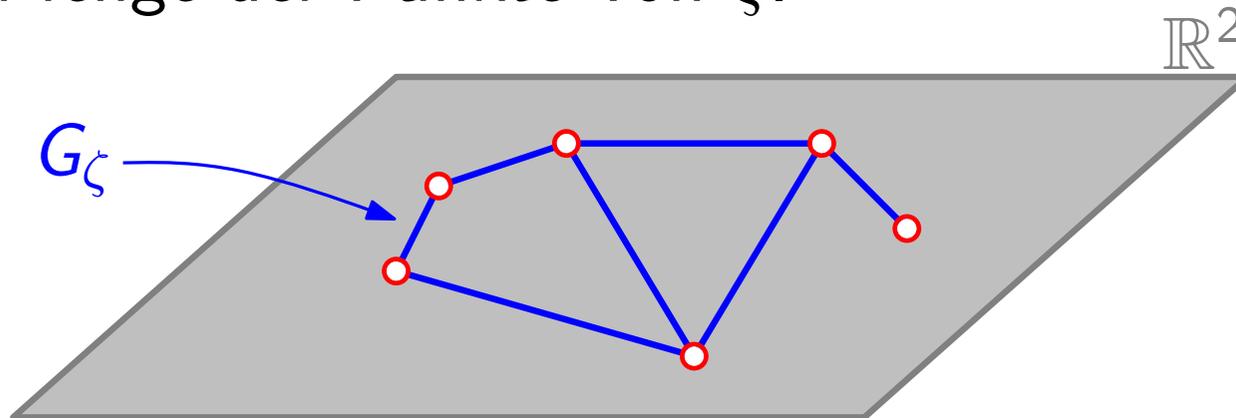
Eine Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  heißt *geradlinig*, falls  
 für alle  $e \in E$  gilt  $\zeta_e$  ist linear (d.h.  $\zeta_e([0, 1])$  Strecke).

# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G = (V, E)$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .

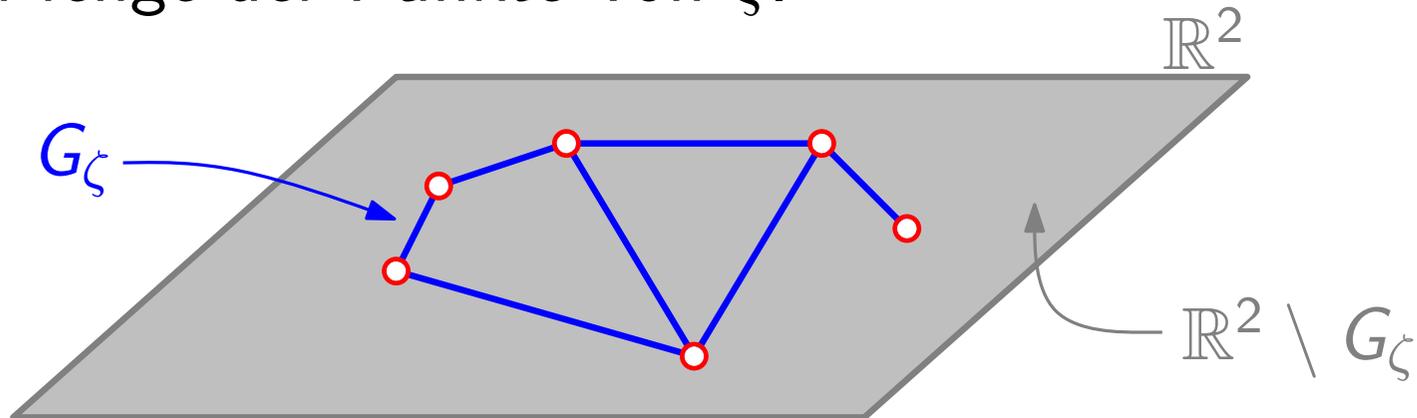


# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G = (V, E)$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .

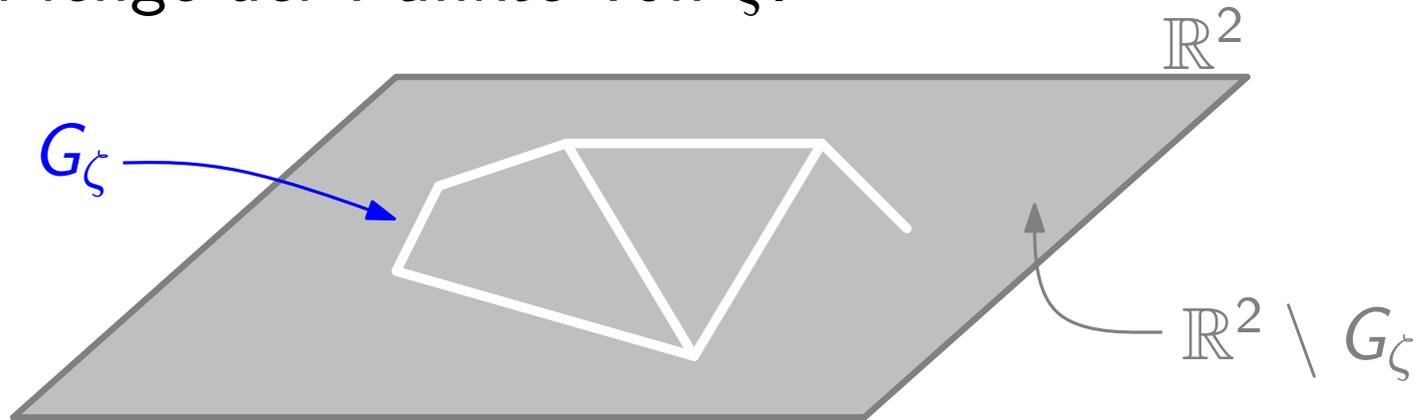


# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G = (V, E)$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .

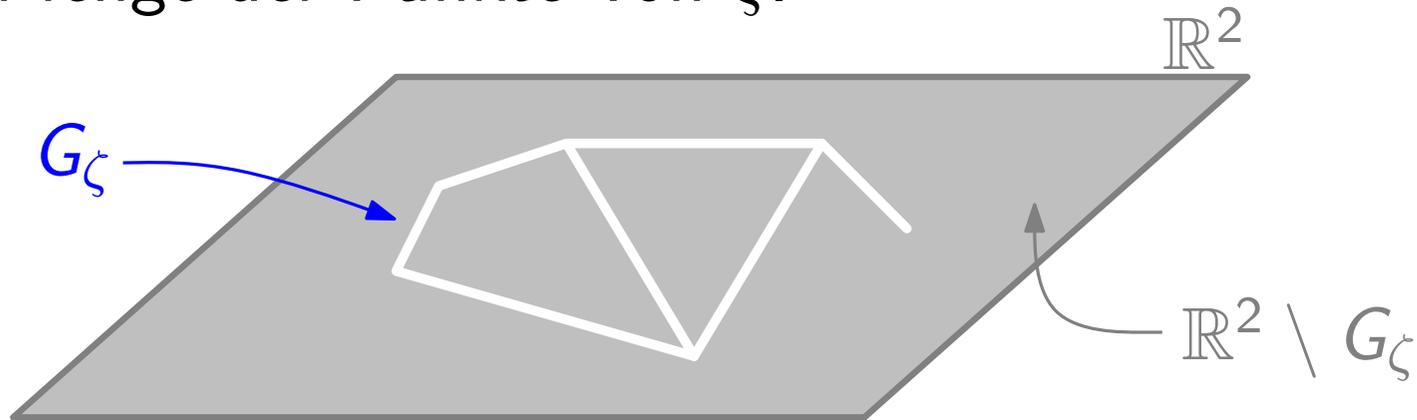


# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G = (V, E)$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .



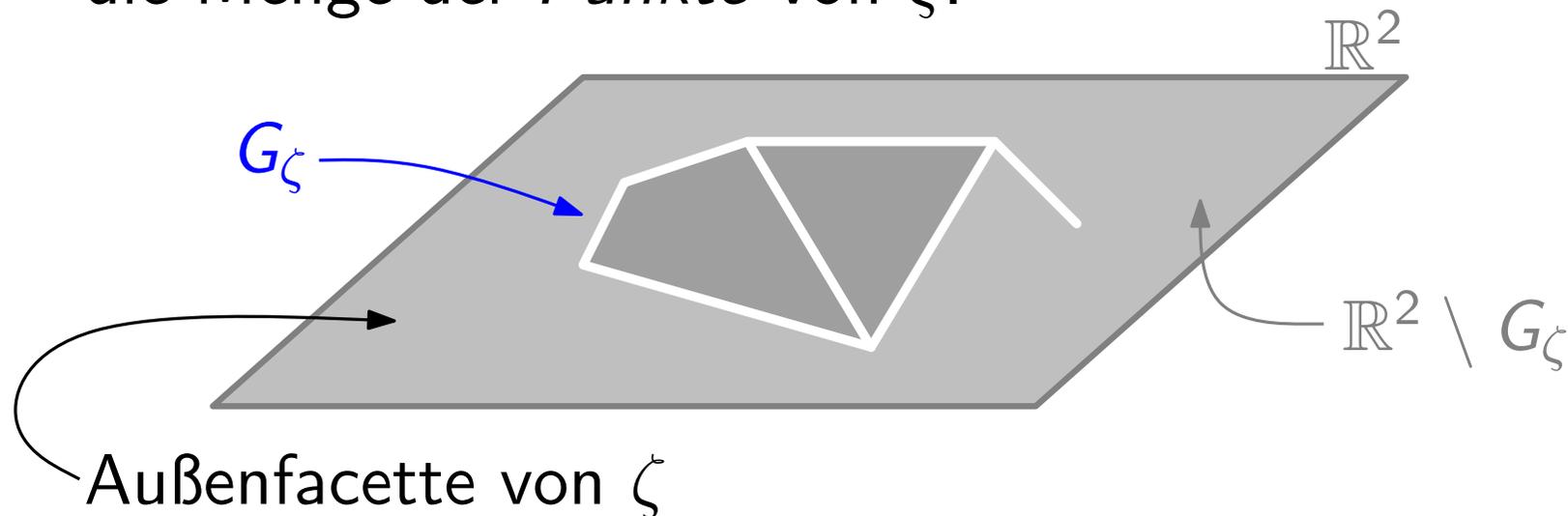
**Def.** Die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$  heißen *Facetten* von  $\zeta$ .

# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G = (V, E)$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .



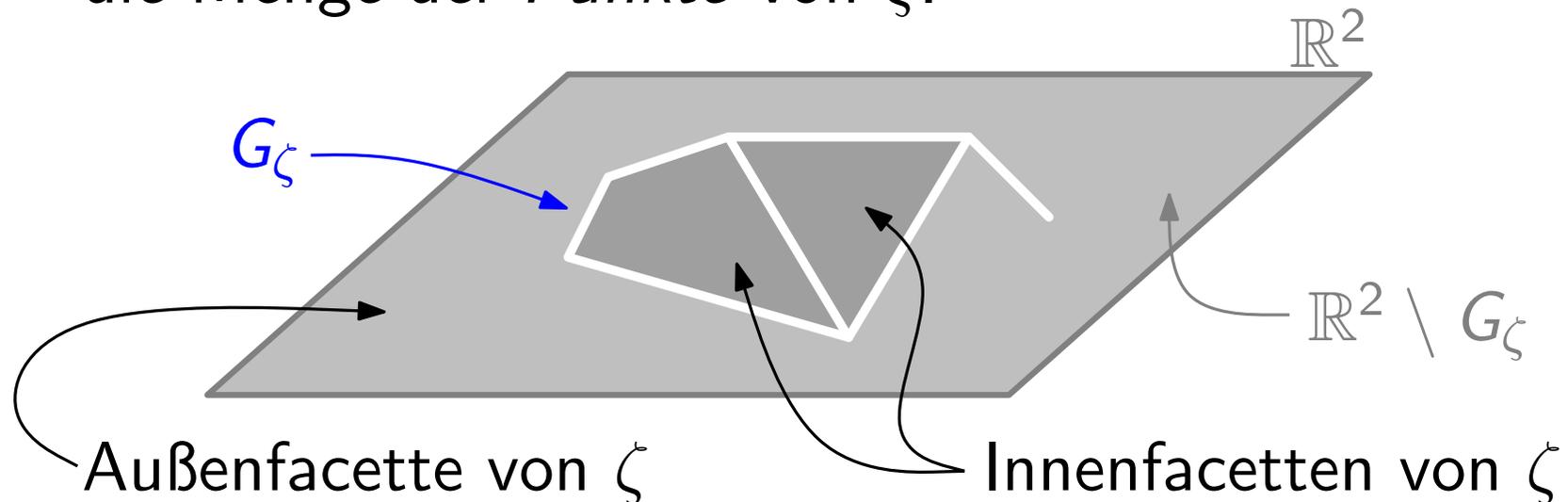
**Def.** Die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$  heißen *Facetten* von  $\zeta$ .

# Punkte und Facetten

**Def.** Für einen planaren Graphen  $G = (V, E)$  und eine ebene Zeichnung  $\zeta$  von  $G$  sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der *Punkte* von  $\zeta$ .



**Def.** Die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus G_\zeta$  heißen *Facetten* von  $\zeta$ .

# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

*Beweis.*



# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

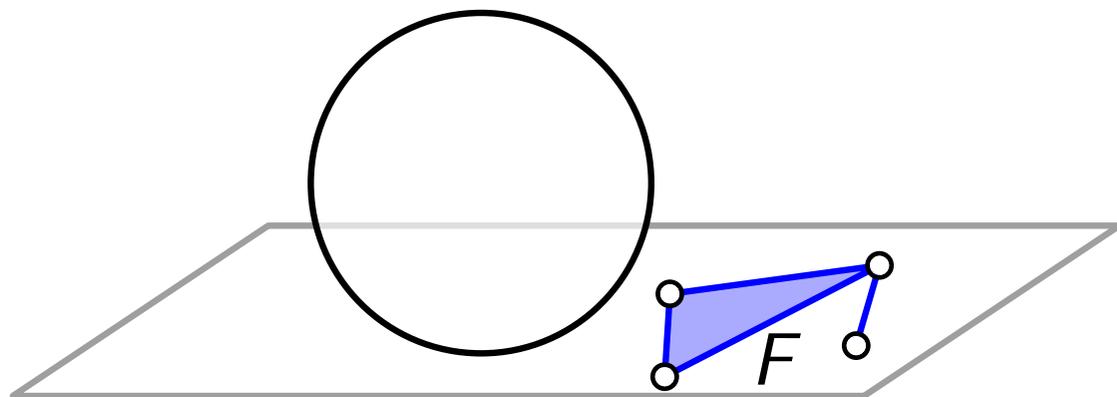


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Einheitssphäre  
im  $\mathbb{R}^3$

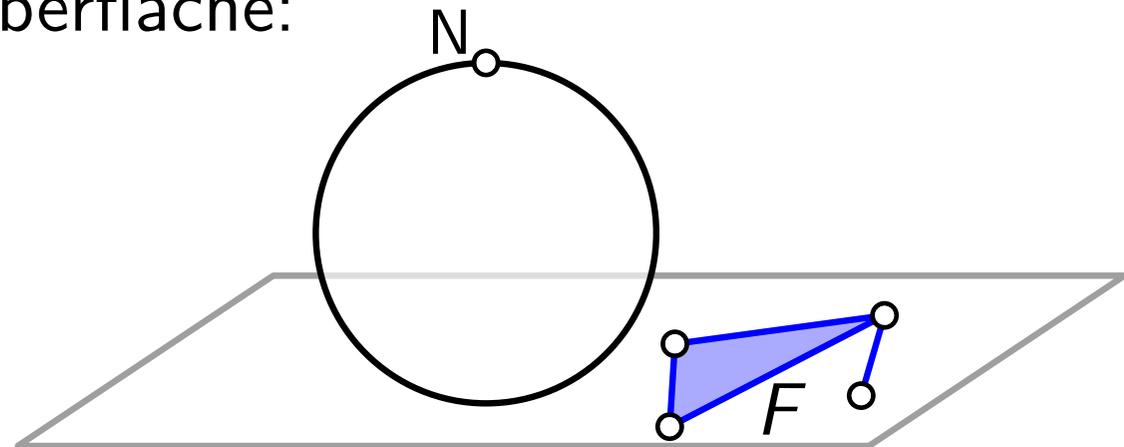


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

höchster  
Punkt von  $S^2$

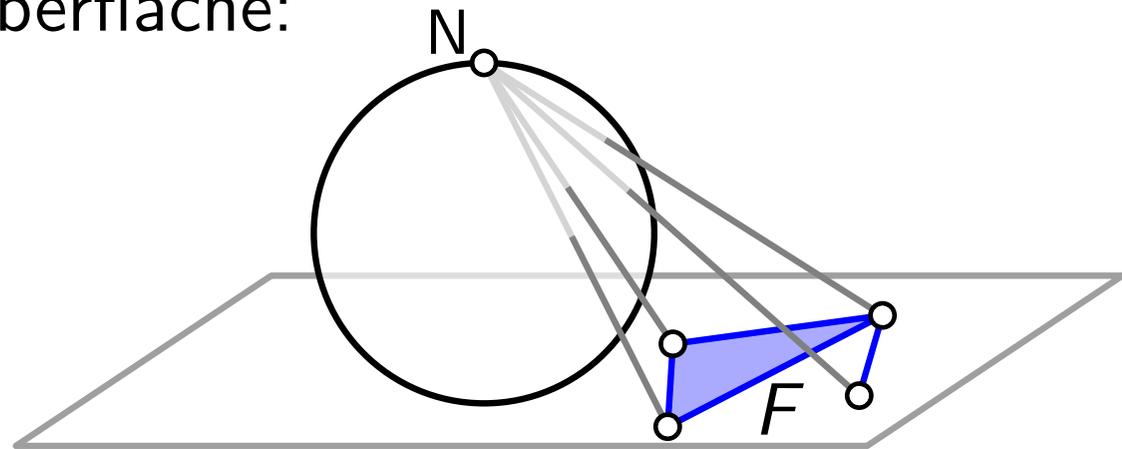


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

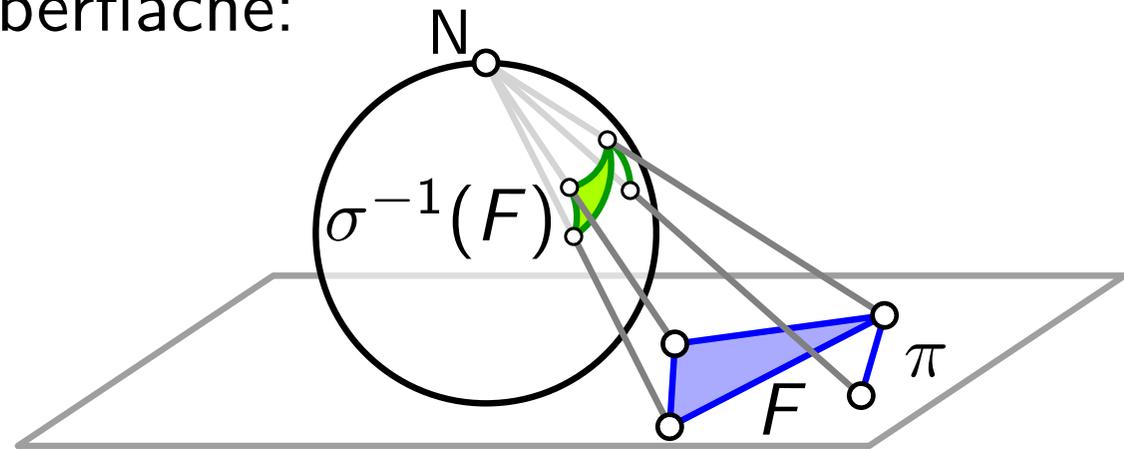
Zentralprojekt  
von  $S^2 \setminus \{N\}$   
auf  $\mathbb{R}^2$  mit  
Zentrum  $N$



# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

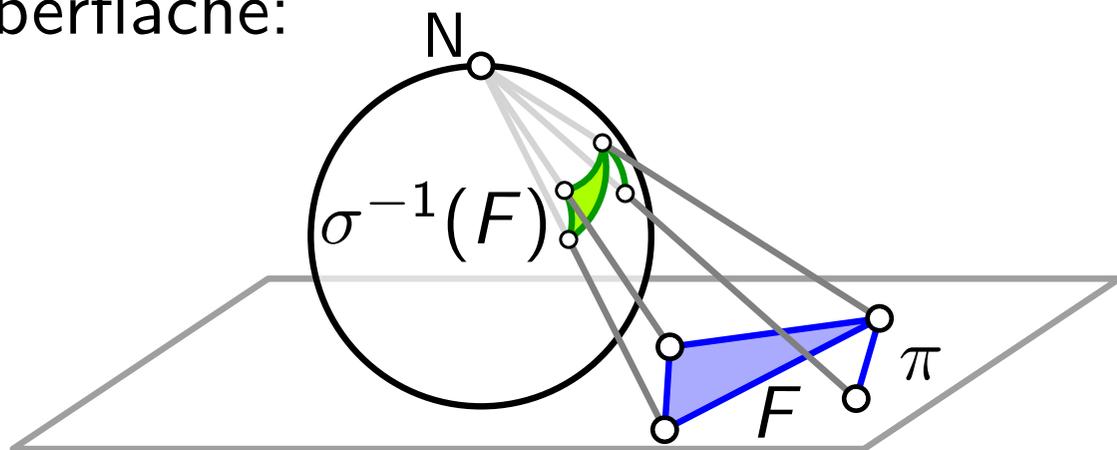


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels  $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) die Kugel, so dass  $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$ .



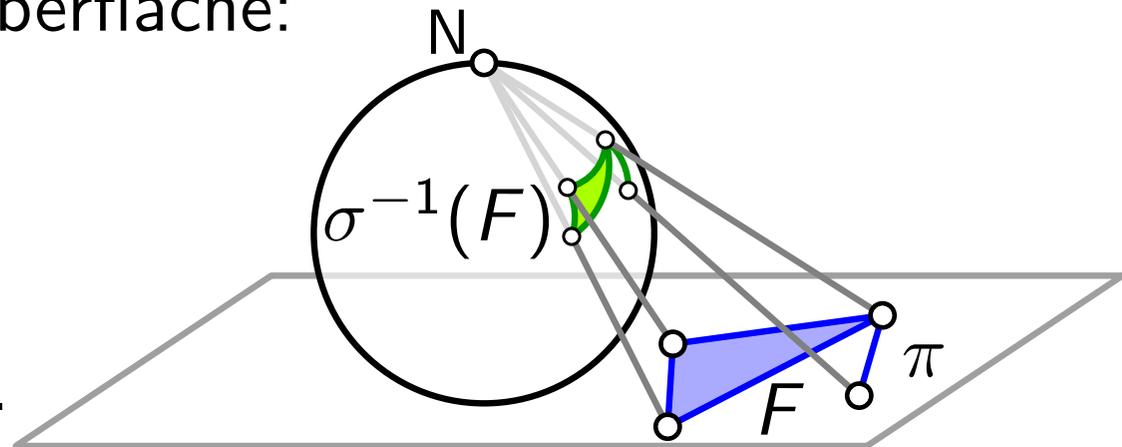
# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels  $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) die Kugel, so dass  $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$ .

Projiziere dann zurück in die Ebene.

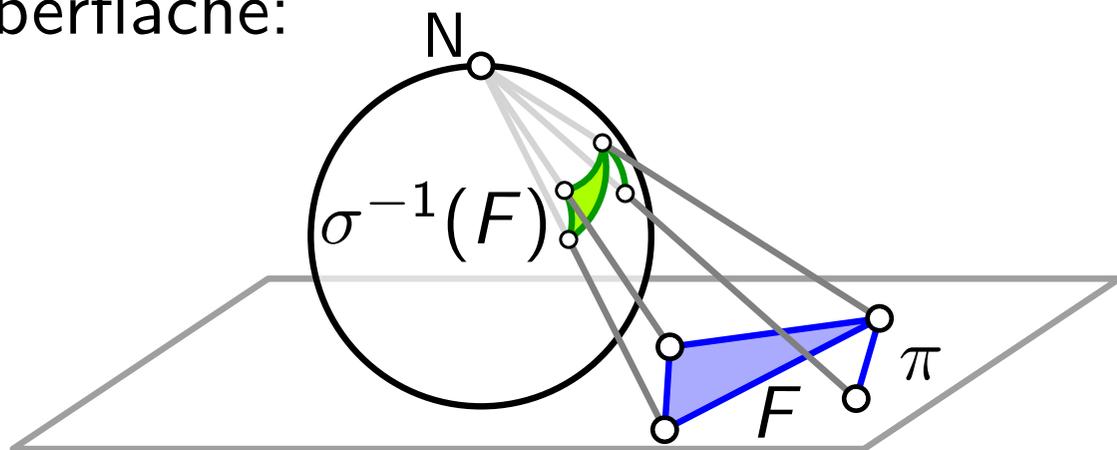


# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels  $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) die Kugel, so dass  $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$ .



Projiziere dann zurück in die Ebene.

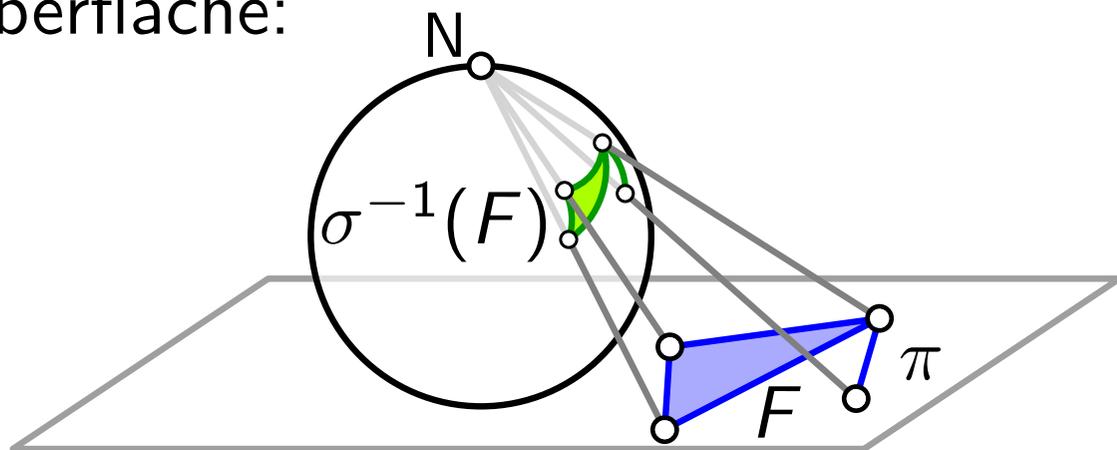
$\Rightarrow$  Zeichnung von  $E(F)$  begrenzt die Außenfacette.

# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels  $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) die Kugel, so dass  $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$ .



Projiziere dann zurück in die Ebene.

$\Rightarrow$  Zeichnung von  $E(F)$  begrenzt die Außenfacette.

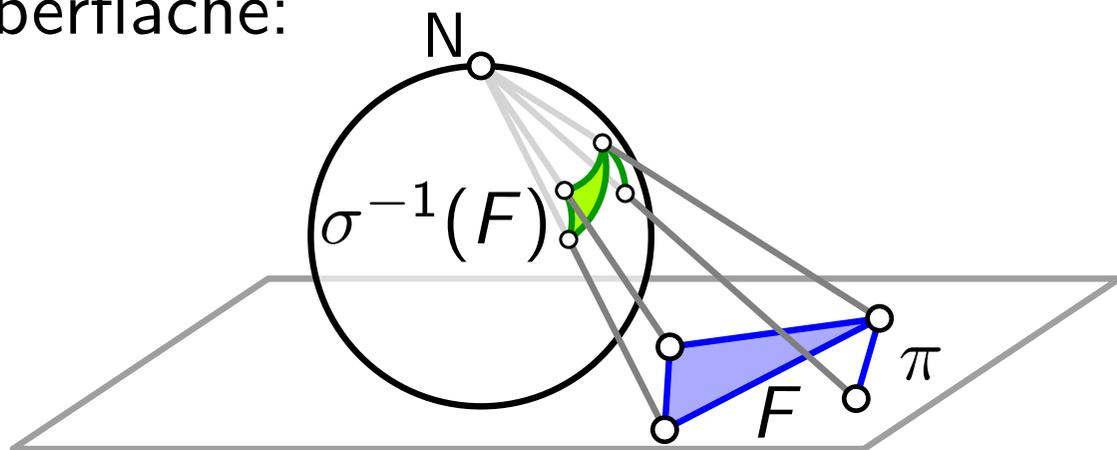
Zeichnung  $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$  ist eben.

# Die Wahl der Außenfacette ist beliebig

**Beob.<sup>1</sup>**  $G$  planar,  $\pi$  ebene Zeichnung von  $G$ ,  $F$  Innenfacette von  $\pi$ . Dann gibt es auch eine ebene Zeichnung  $\pi_F$  von  $G$ , in der  $E(F)$  den Rand der Außenfacette bildet.

**Beweis.** Die Umkehrung  $\sigma^{-1}$  der *stereografischen* Projektion  $\sigma: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  liefert eine ebene Zeichnung von  $G$  auf der Kugeloberfläche:

Drehe (mittels  $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) die Kugel, so dass  $N \in \text{Inn}(\sigma^{-1}(F))$ .



Projiziere dann zurück in die Ebene.

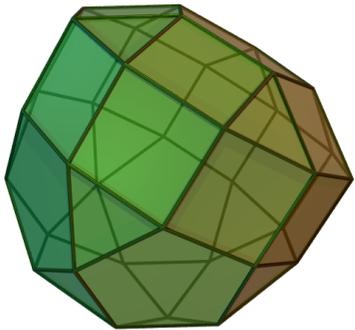
$\Rightarrow$  Zeichnung von  $E(F)$  begrenzt die Außenfacette.

Zeichnung  $\pi_F = \sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} \circ \pi$  ist eben.

PS: Einfacher mit Inversion am Kreis. Man legt das Zentrum der Inversion ins Innere von  $F$ .

# Skelette sind planar

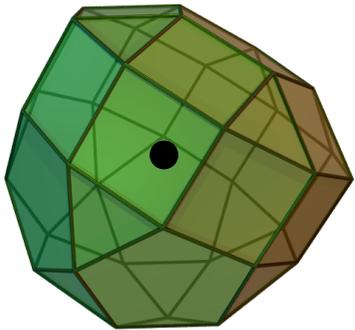
**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.



# Skelette sind planar

**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

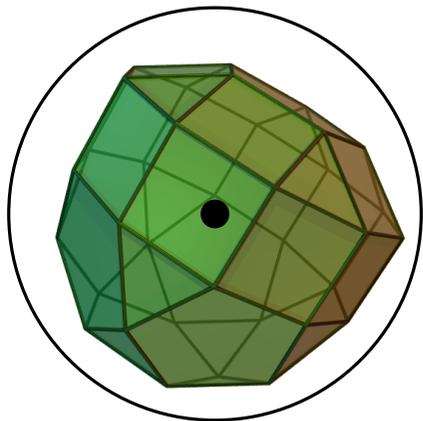
*Beweis.* Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .



# Skelette sind planar

**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

*Beweis.* Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .  
Sei  $S$  Kugel mit Zentrum  $o$ , so dass  $P \subset S$ .



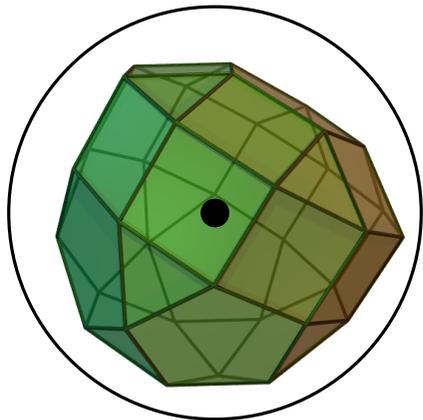
# Skelette sind planar

**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

*Beweis.* Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .

Sei  $S$  Kugel mit Zentrum  $o$ , so dass  $P \subset S$ .

Zentralprojektion  $\pi_o: P \rightarrow S$  liefert ebene Zeichnung  $\pi_S$  des Skeletts von  $P$  auf der Kugeloberfläche von  $S$ .



# Skelette sind planar

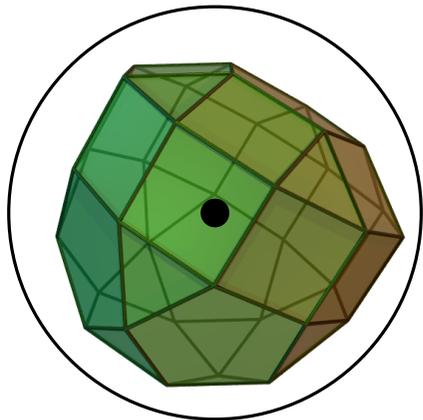
**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

*Beweis.* Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .

Sei  $S$  Kugel mit Zentrum  $o$ , so dass  $P \subset S$ .

Zentralprojektion  $\pi_o: P \rightarrow S$  liefert ebene Zeichnung  $\pi_S$  des Skeletts von  $P$  auf der Kugeloberfläche von  $S$ .

Wähle Nordpol  $N$ , so dass  $N \notin \pi_S$ .



# Skelette sind planar

**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

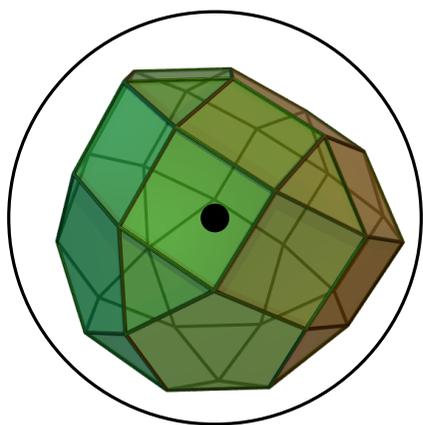
*Beweis.* Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .

Sei  $S$  Kugel mit Zentrum  $o$ , so dass  $P \subset S$ .

Zentralprojektion  $\pi_o: P \rightarrow S$  liefert ebene Zeichnung  $\pi_S$  des Skeletts von  $P$  auf der Kugeloberfläche von  $S$ .

Wähle Nordpol  $N$ , so dass  $N \notin \pi_S$ .

Projiziere  $\pi_S$  mittels  $\sigma$  auf die Ebene.



# Skelette sind planar

**Beob.<sup>2</sup>** Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar.

*Beweis.*

Sei  $P$  konvexes, beschränktes Polyeder,  $o \in \text{Inn}(P)$ .

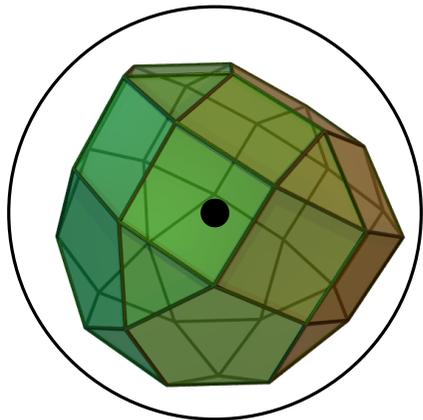
Sei  $S$  Kugel mit Zentrum  $o$ , so dass  $P \subset S$ .

Zentralprojektion  $\pi_o: P \rightarrow S$  liefert ebene Zeichnung  $\pi_S$  des Skeletts von  $P$  auf der Kugeloberfläche von  $S$ .

Wähle Nordpol  $N$ , so dass  $N \notin \pi_S$ .

Projiziere  $\pi_S$  mittels  $\sigma$  auf die Ebene.

Ergebnis:  $\sigma \circ \pi_S$  ist eben.



# Schon wieder Euler . . .

**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:



# Schon wieder Euler . . .

## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$n - m + f = k + 1.$$



# Schon wieder Euler . . .



## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$n - m + f = k + 1.$$

*Beweis.*

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$n - m + f = k + 1.$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1$ ,

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n$

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 =$

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1$

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 \quad RS_0 =$

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \quad \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 \quad RS_0 = n + 1$$

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$

# Schon wieder Euler . . .



**Satz.** (Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Beweis.** Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ;

# Schon wieder Euler . . .



## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident

# Schon wieder Euler . . .

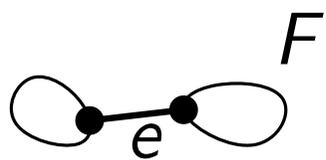


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident

# Schon wieder Euler . . .

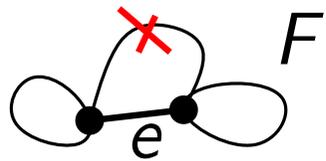


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

# Schon wieder Euler . . .

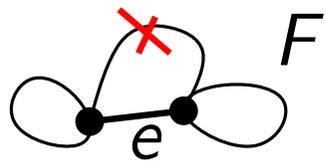


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e$$

# Schon wieder Euler . . .

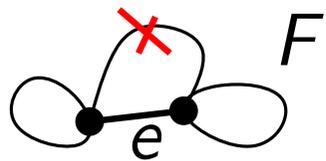


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$G' := G - e \Rightarrow n' =$

# Schon wieder Euler . . .

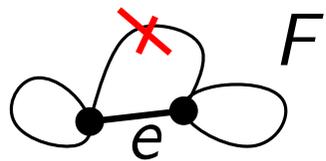


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' =$$

# Schon wieder Euler . . .

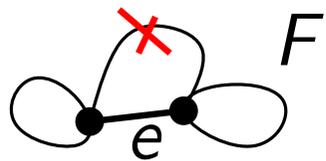


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' =$

# Schon wieder Euler . . .

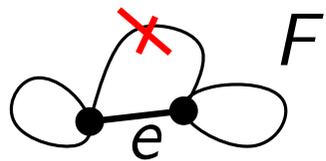


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' =$$

# Schon wieder Euler . . .

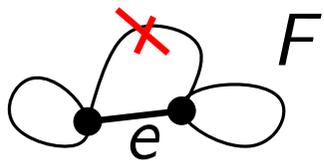


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \quad \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \quad \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, \quad f' = f, \quad m' = m - 1, \quad k' = k + 1.$$

# Schon wieder Euler . . .

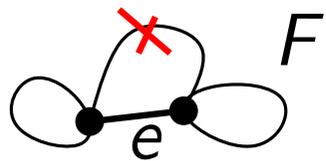


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m =$$

# Schon wieder Euler . . .

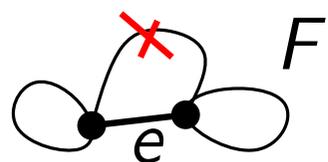


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f =$$

# Schon wieder Euler . . .

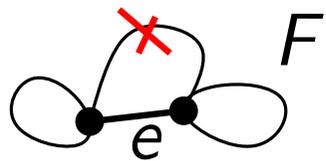


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 =$$

# Schon wieder Euler . . .

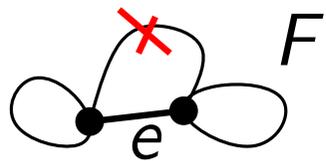


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 =$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .

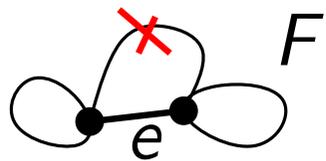


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' =$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .

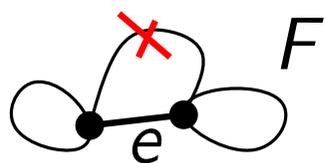


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 =$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .

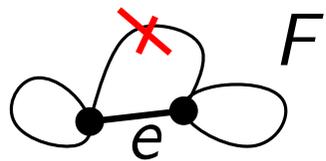


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  beidseitig zu gleicher Facette  $F$  inzident  $\Rightarrow e$  liegt nicht auf Kreis

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$
$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .

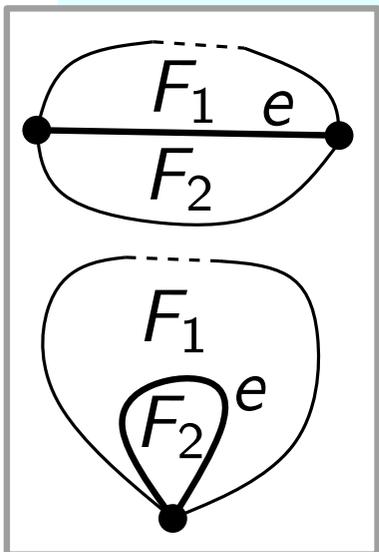


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  ~~beidseitig zu gleicher Facette  $F$~~   
inzident zu Facetten  $F_1 \neq F_2$

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .

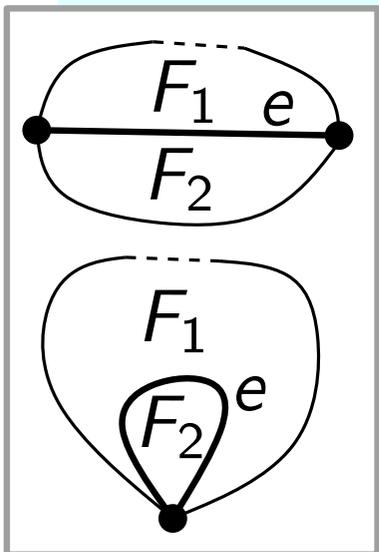


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  ~~beidseitig zu gleicher Facette  $F$~~   
inzident zu Facetten  $F_1 \neq F_2$

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k + 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler . . .

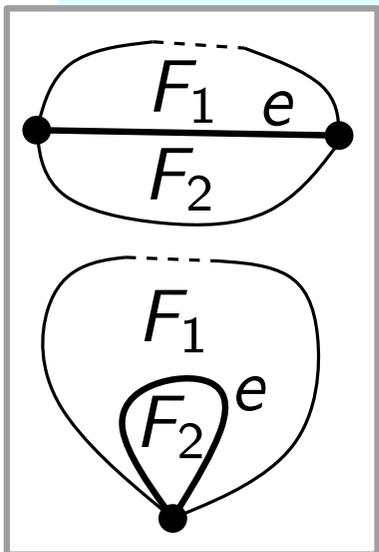


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$m = 0$ :  $\Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1$  ✓

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  ~~beidseitig zu gleicher Facette  $F$~~   
inzident zu Facetten  $F_1 \neq F_2$

$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k - 1.$   
 $\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler ...

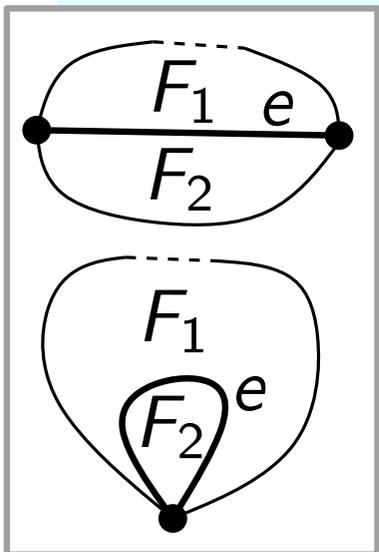


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  ~~beidseitig zu gleicher Facette  $F$~~   
inzident zu Facetten  $F_1 \neq F_2$

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k - 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' = k + 1 = RS_m.$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]

# Schon wieder Euler ...

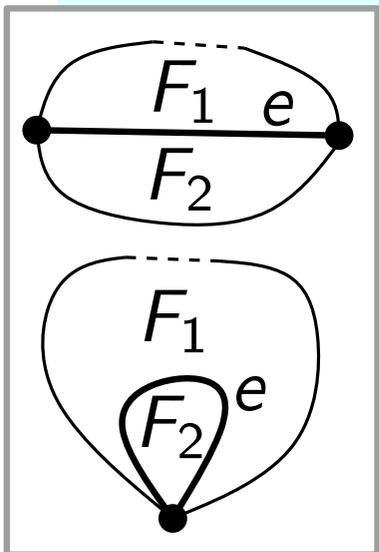


## Satz.

(Eulerscher Polyedersatz / Polyederformel)

Sei  $\pi$  eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten,  $f$  Facetten und  $k$  Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$



## Beweis.

Induktion über  $m$ .

$$m = 0: \Rightarrow f = 1, k = n \Rightarrow LS_0 = n + 1 = RS_0 = n + 1 \checkmark$$

$m > 0$ : ex. Kante  $e$ ; ang.  $e$  ~~beidseitig zu gleicher Facette  $F$~~   
inzident zu Facetten  $F_1 \neq F_2$

$$G' := G - e \Rightarrow n' = n, f' = f - 1, m' = m - 1, k' = k - 1.$$

$$\Rightarrow LS_m = n - m + f = n' - m' + f' - 1 = k' + 1 = k + 1 = RS_m.$$

[Können I.V. auf  $G'$  anwenden, da  $G'$  planar und  $m' < m$ .]



# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* Zweifaches Abzählen

# Planare Graphen sind schlank!

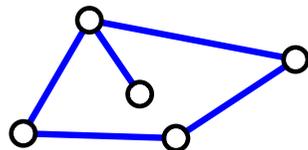
**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

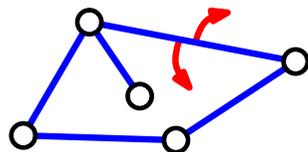
*Beweis.* Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

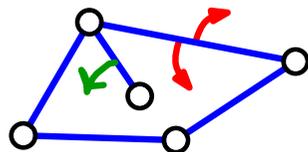
**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

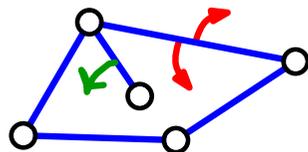


# Inz.

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

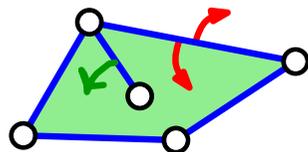


$$2m \geq \# \text{ Inz.}$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

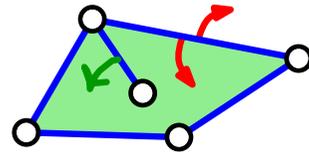


$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



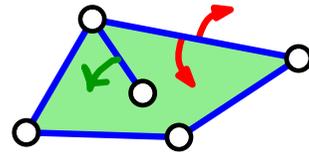
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls  $n \geq 3$  und  $m \geq 3$ ).

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f$$

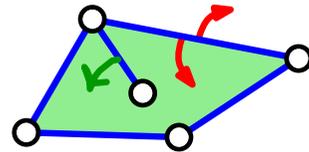
[da jede Facette eines *einfachen* Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls  $n \geq 3$  und  $m \geq 3$ ).

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \right.$$

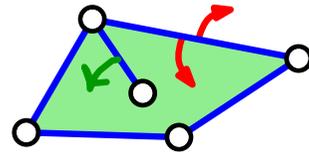
$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m \quad \left. \text{drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3 \text{).} \right]$$

OBdA ist  $G$  zusammenhängend

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind.} \right.$$

drei Kanten besteht (falls  $n \geq 3$  und  $m \geq 3$ ).  $\left. \right]$

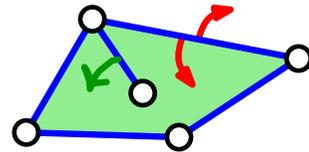
$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3). \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

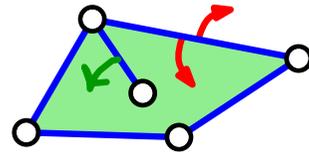
OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\Rightarrow \underset{\text{Euler}}{m} =$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3). \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

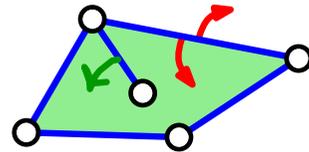
$$\Rightarrow m = n + f - 2$$

Euler

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3 \text{).} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

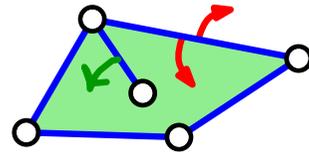
OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\underset{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3 \text{).} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

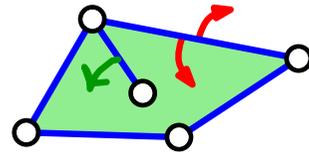
OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\Rightarrow \underset{\text{Euler}}{m} = n + f - 2 \leq$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3). \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

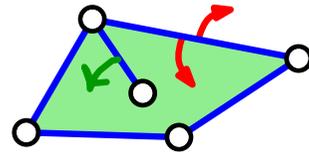
OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\stackrel{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3). \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

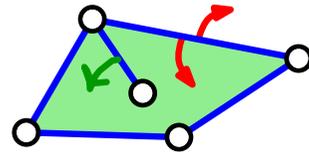
OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\stackrel{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3 \text{)}. \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

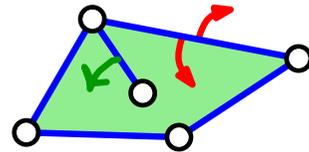
OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\stackrel{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3 \text{).} \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

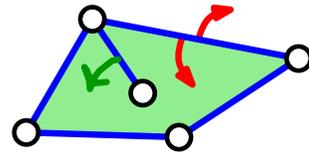
$$\stackrel{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow f \leq$$

# Planare Graphen sind schlank!

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Beweis.** Zweifaches Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:



$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 3f \quad \left[ \text{da jede Facette eines } \textit{einfachen} \text{ Graphen aus mind. drei Kanten besteht (falls } n \geq 3 \text{ und } m \geq 3). \right]$$

$$\Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

OBdA ist  $G$  zusammenhängend  
(sonst füge weitere Kanten hinzu).

$$\stackrel{\text{Euler}}{\Rightarrow} m = n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

$$\Rightarrow f \leq 2n - 4 \quad \square$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} =$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} <$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6$$



# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu). Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad  $\leq 5$ .

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).  
Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad  $\leq 5$ .  
 $2m =$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).  
Angenommen, es gibt nur 2 Knoten vom Grad  $\leq 5$ .  
$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).  
Angenommen, es gibt nur **2** Knoten vom Grad  $\leq 5$ .  
$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6(n - 2) + \mathbf{2} >$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).  
Angenommen, es gibt nur **2** Knoten vom Grad  $\leq 5$ .  
$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6(n - 2) + \mathbf{2} > 2 \cdot (3n - 6).$$

# Konsequenzen

**Satz.** Für jeden *einfachen* planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit mind. 3 Knoten gilt  $m \leq 3n - 6$  und  $f \leq 2n - 4$ .

**Korollar.** Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6.

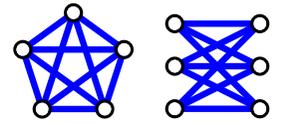
*Beweis.* 
$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{n} = \frac{2m}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6 \quad \square$$

**Korollar.** Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mind. 3) Knoten vom Grad höchstens 5.

*Beweis.* O.E. hat  $G$  Mindestgrad 1 (sonst füge Kanten hinzu).  
 Angenommen, es gibt nur **2** Knoten vom Grad  $\leq 5$ .  
 $2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6(n - 2) + \mathbf{2} > 2 \cdot (3n - 6)$ .  
*Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  in planaren Graphen!*  $\square$

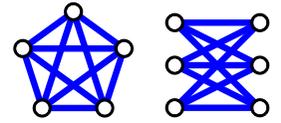
# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.



# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.

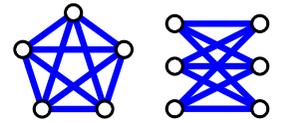


*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} =$$

# Nicht planare Graphen

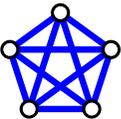
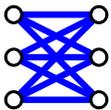
**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.



*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

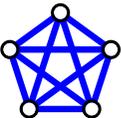
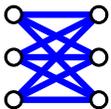
# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad = 3n - 6$$

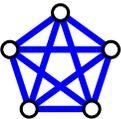
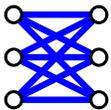
# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

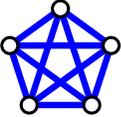
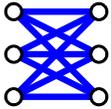
# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

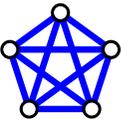
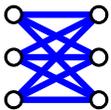
# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

# Nicht planare Graphen

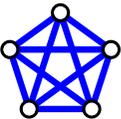
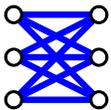
**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

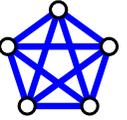
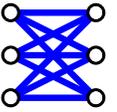
*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = \quad \quad \quad = 3n - 6$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

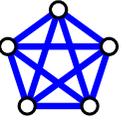
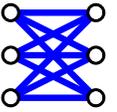
*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

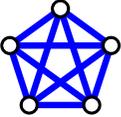
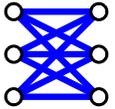
$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

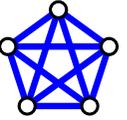
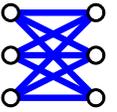
voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

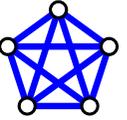
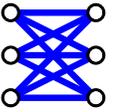
$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad > \quad 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 \quad < \quad 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

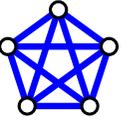
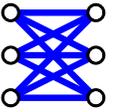
$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

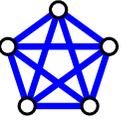
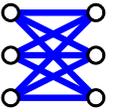
In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = \quad \quad \quad = 4f$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

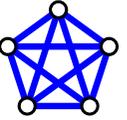
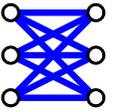
In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad \quad \quad = 4f$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

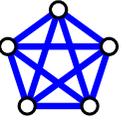
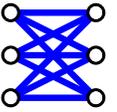
$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f$$

$$2m = 18$$

$$\text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$= 4(2 - n + m) = 4f$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

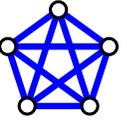
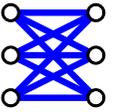
In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

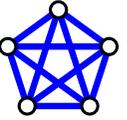
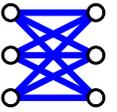
In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

$$2m = 18 \quad 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f$$

# Nicht planare Graphen

**Satz.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind *nicht* planar.  

*Beweis.*

$$K_5: \quad m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$$

voriger Satz  $\Rightarrow K_5$  nicht planar

$$K_{3,3}: \quad m = 3 \cdot 3 = 9 < 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3n - 6$$

$\Rightarrow$  kein Widerspruch zum vorigen Satz!

In planarer Zeichnung müsste jede Facette von  $\geq 4$  Knoten begrenzt sein, da  $K_{3,3}$  bipartit und einfach.

Doppeltes Abzählen der Kanten-Facetten-Inzidenzen:

$$2m \geq \# \text{ Inz.} \geq 4f \quad \text{Euler: } f = 2 - n + m$$

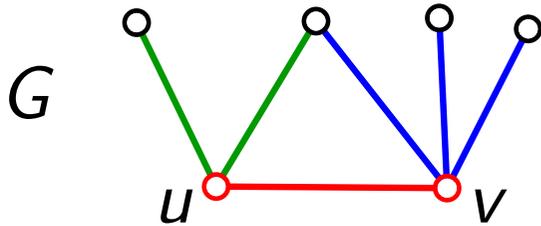
$$2m = 18 < 20 = 4 \cdot 5 = 4(2 - n + m) = 4f \quad \text{⚡}$$

# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

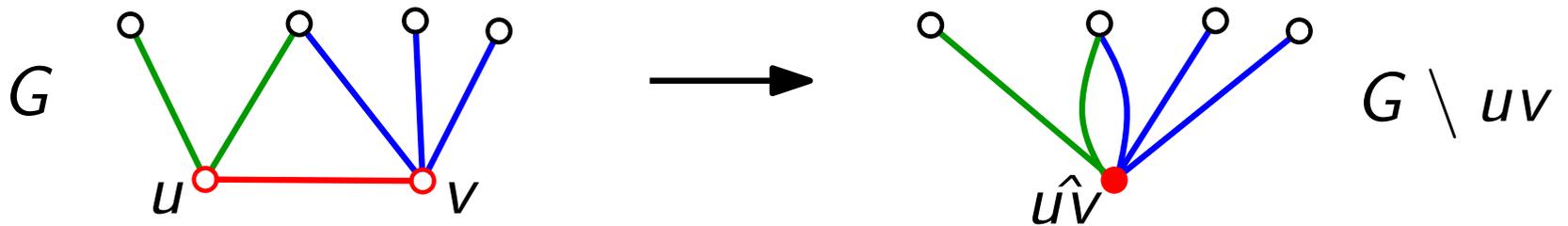
# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .  
Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .



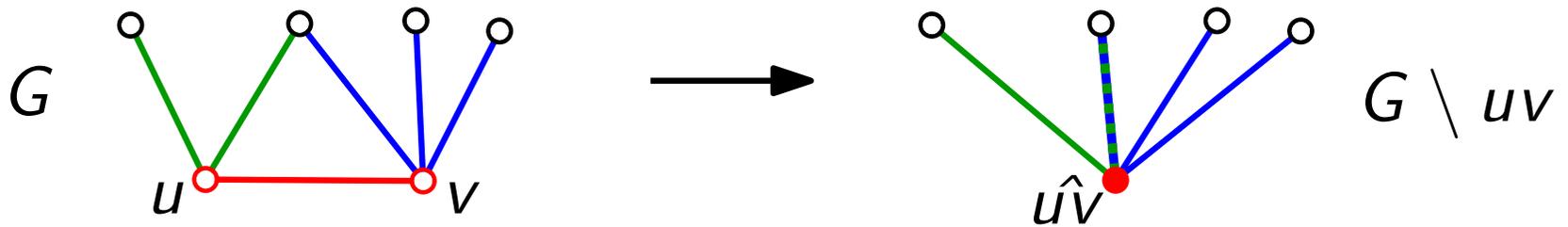
# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .  
 Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .



# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .  
 Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .  
 (Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

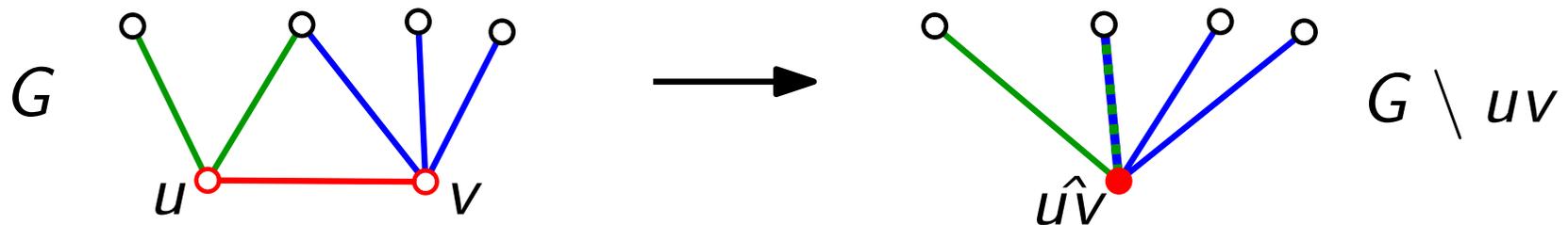


# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)Kontraktion von  $uv$ .  
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
Unterschied zur  
Kontraktion  $G/U$   
bei Multigraphen!

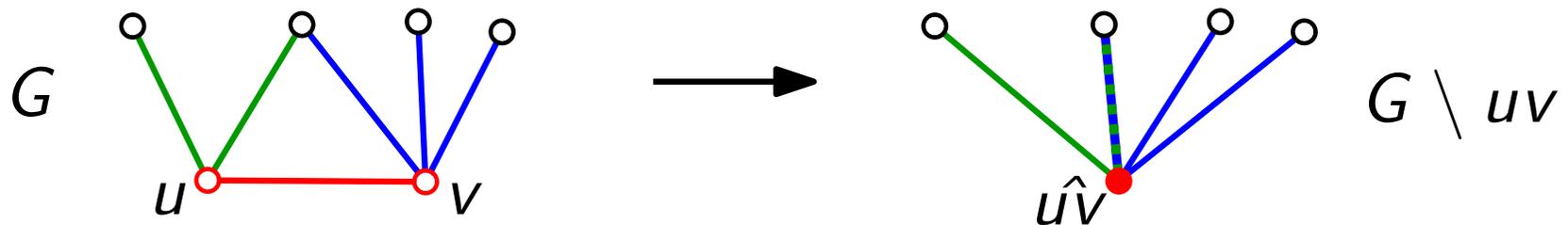


# Kontraktionen und Minoren

**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .  
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
Unterschied zur  
Kontraktion  $G/U$   
bei Multigraphen!



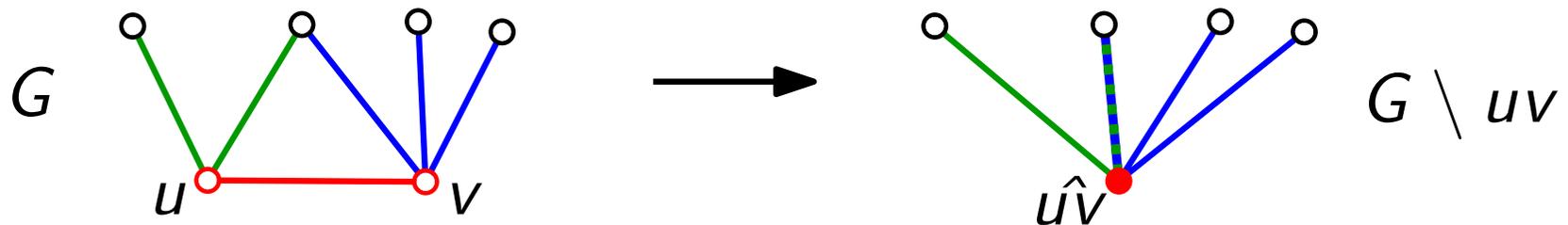
Ein Graph  $H$  heißt *Minor* von  $G$  (schreibe  $H \leq G$ ), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von  $G$  hervorgeht.

# Kontraktionen und Minoren

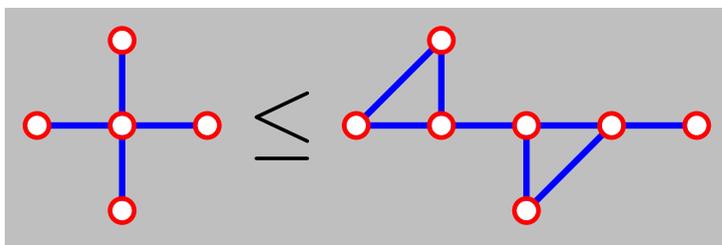
**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .  
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
Unterschied zur  
Kontraktion  $G/U$   
bei Multigraphen!



Ein Graph  $H$  heißt *Minor* von  $G$  (schreibe  $H \leq G$ ), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von  $G$  hervorgeht.

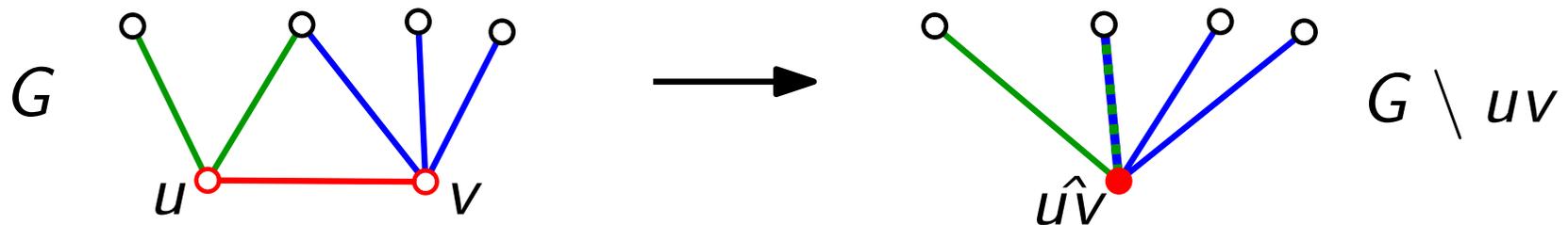


# Kontraktionen und Minoren

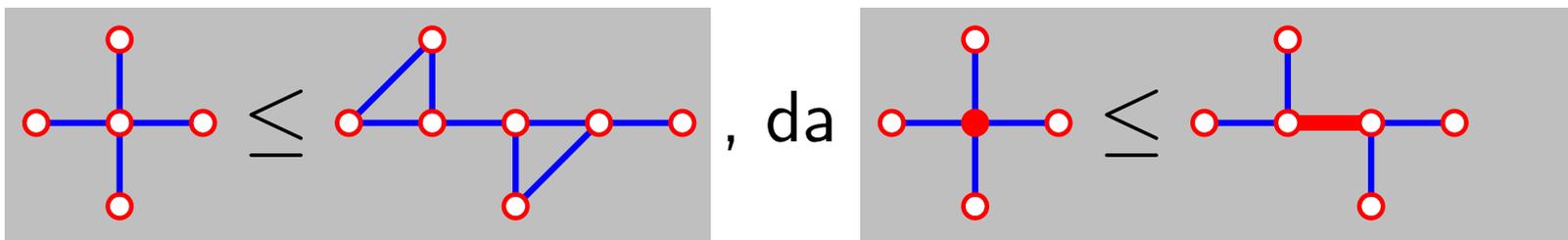
**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .  
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
Unterschied zur  
Kontraktion  $G/U$   
bei Multigraphen!



Ein Graph  $H$  heißt *Minor* von  $G$  (schreibe  $H \leq G$ ), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von  $G$  hervorgeht.

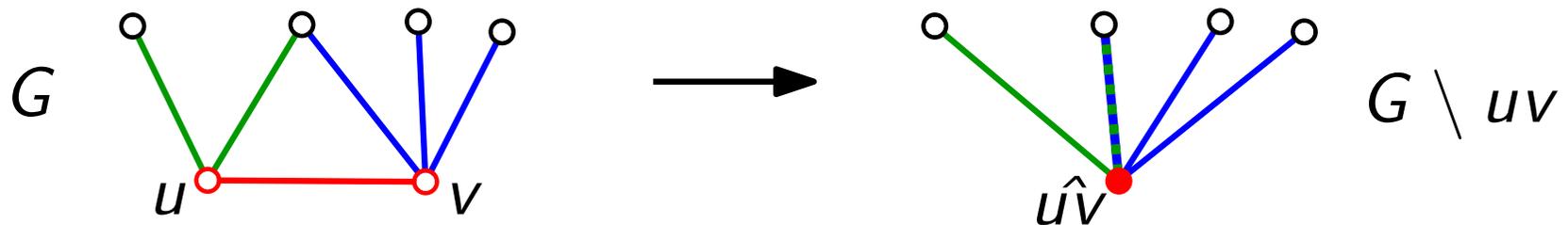


# Kontraktionen und Minoren

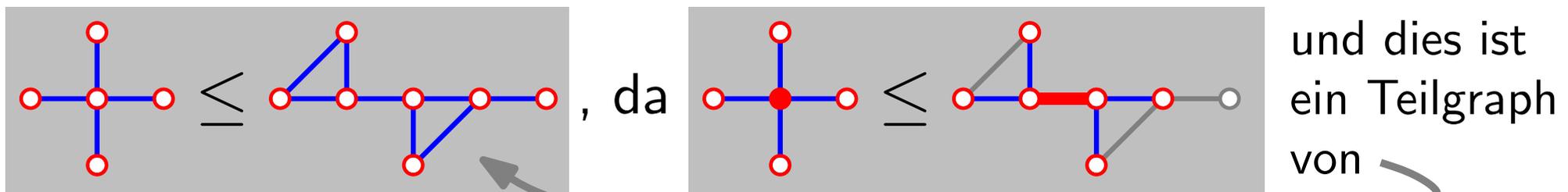
**Def.** Sei  $G$  ein einfacher Graph und sei  $uv$  Kante von  $G$ .

Der einfache Graph  $G \setminus uv$  entsteht aus  $G$  durch (*Einfach-*)*Kontraktion* von  $uv$ .  
(Mehrfachkanten werden verschmolzen.)

beachte  
Unterschied zur  
Kontraktion  $G/U$   
bei Multigraphen!



Ein Graph  $H$  heißt *Minor* von  $G$  (schreibe  $H \leq G$ ), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von  $G$  hervorgeht.



# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “

# Ein paar Beobachtungen

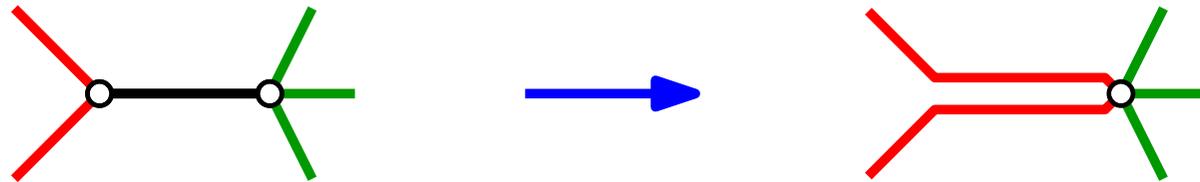
**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:

# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

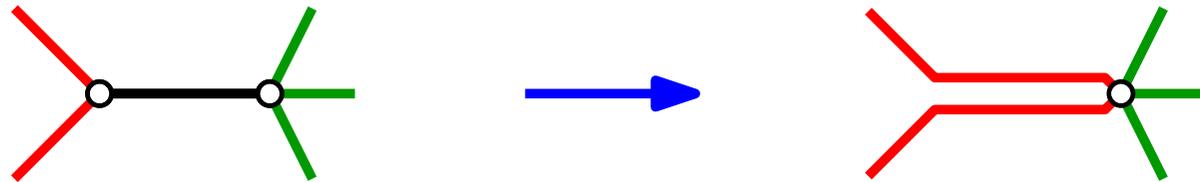
*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:

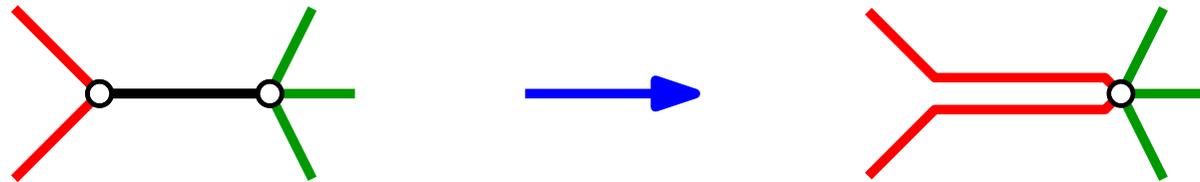


„ $\Leftarrow$ “

# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



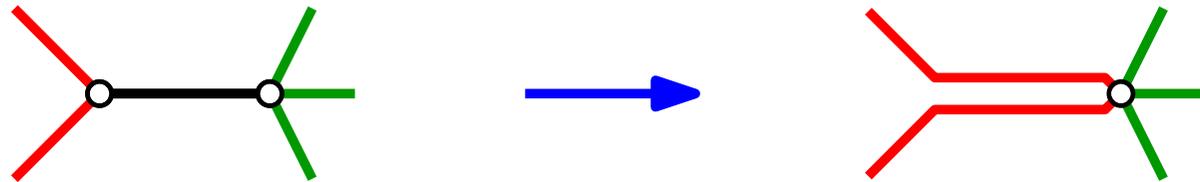
„ $\Leftarrow$ “  $G$  ist Minor von  $G$  ( $G \leq G$ ).

□

# Ein paar Beobachtungen

**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



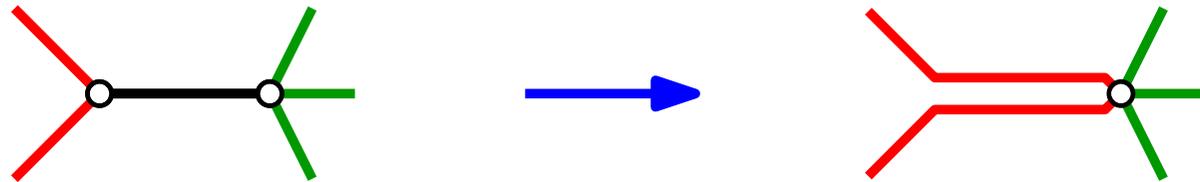
„ $\Leftarrow$ “  $G$  ist Minor von  $G$  ( $G \leq G$ ). □

**Beob.<sup>4</sup>** Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

# Ein paar Beobachtungen

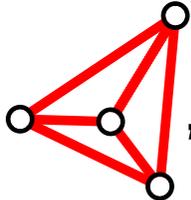
**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ $\Leftarrow$ “  $G$  ist Minor von  $G$  ( $G \leq G$ ). □

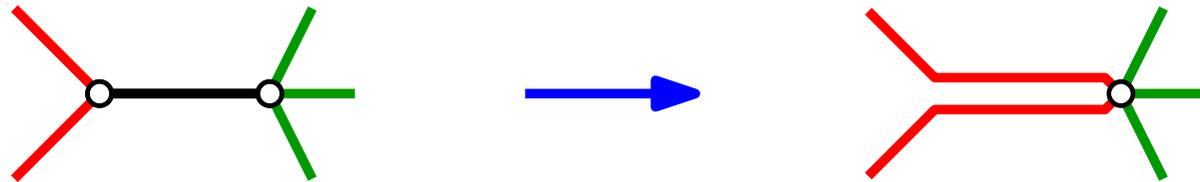
**Beob.<sup>4</sup>** Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

*Beweis.* , also ist  $K_4$  planar

# Ein paar Beobachtungen

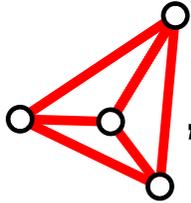
**Beob.<sup>3</sup>**  $G$  planar  $\Leftrightarrow$  alle Minoren von  $G$  sind planar.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Beim Kontrahieren können neue Kreuzungen vermieden werden:



„ $\Leftarrow$ “  $G$  ist Minor von  $G$  ( $G \leq G$ ). □

**Beob.<sup>4</sup>** Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind planar.

*Beweis.* , also ist  $K_4$  planar  $\Rightarrow$  Beh. □

# Satz von Kuratowski

**Satz.** [Kuratowski 1930: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph. Dann gilt:  
 $G$  planar  $\Leftrightarrow$  weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  ist Minor von  $G$ .



Kazimierz Kuratowski  
Warschau 1896–1980 Warschau

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

# Eine Verallgemeinerung

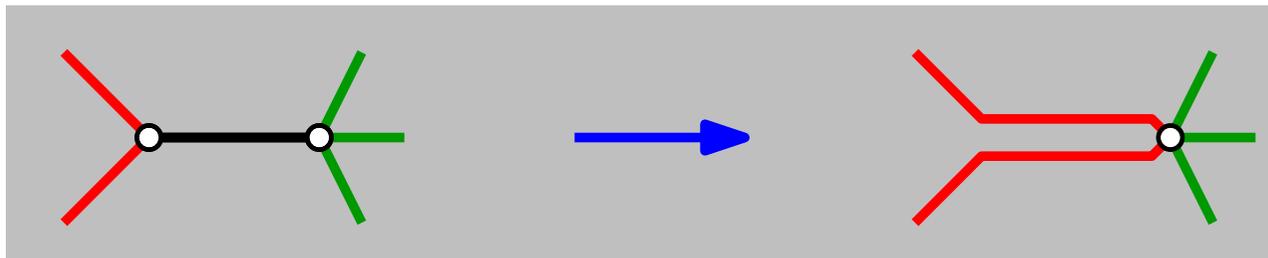
**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.** – Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

- Bsp.**
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
  - Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen



# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  := Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  := Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.  
Welche Graphen sind für  $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  minorenminimal?

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  := Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.

Welche Graphen sind für  $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  minorenminimal?

$$\{K_5, K_{3,3}\}$$

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  := Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.  
Welche Graphen sind für  $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  minorenminimal?  
Man sagt,  $\{K_5, K_{3,3}\}$  ist *Obstruktionsmenge* für  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$ .

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  := Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.  
Welche Graphen sind für  $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  minorenminimal?  
Man sagt,  $\{K_5, K_{3,3}\}$  ist *Obstruktionsmenge* für  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$ .
- Obstruktionsmenge für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$ ?

# Eine Verallgemeinerung

**Def.** Eine Klasse  $\mathcal{G}$  von Graphen heißt *minorenabgeschlossen*, wenn für alle  $G \in \mathcal{G}$  und alle  $H \leq G$  gilt  $H \in \mathcal{G}$ .

**Bsp.**

- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  der Wälder
- Klasse  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  der einfachen planaren Graphen

**Def.** Ein Graph  $G$  einer Graphenklasse  $\mathcal{G}$  heißt *minorenminimal*, wenn für jeden Minor  $H$  von  $G$  mit  $H \in \mathcal{G}$  gilt  $H = G$ .

**Bsp.**

- Für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$  und  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$  ist der  $K_1$  minorenminimal.
- $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  := Klasse der einfachen *nicht*-planaren Graphen.  
Welche Graphen sind für  $\overline{\mathcal{G}_{\text{plan}}}$  minorenminimal?  
Man sagt,  $\{K_5, K_{3,3}\}$  ist *Obstruktionsmenge* für  $\mathcal{G}_{\text{plan}}$ .
- Obstruktionsmenge für  $\mathcal{G}_{\text{wald}}$ ?  $\{C_3\}$ .

# Eine Verallgemeinerung

**Satz.** [Robertson & Seymour 1983–94: *Graph minors I–XIV*]  
Jede minorenablegeschlossene Graphklasse besitzt eine *endliche* Obstruktionsmenge.

# Eine Verallgemeinerung

**Satz.** [Robertson & Seymour 1983–94: *Graph minors I–XIV*]  
Jede minorengeschlossene Graphklasse besitzt eine *endliche* Obstruktionsmenge.

**Satz.** [Robertson & Seymour]  
Für jeden festen Graphen  $H$  existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen  $G$  gilt, dass  $H \leq G$ .

# Eine Verallgemeinerung

**Satz.** [Robertson & Seymour 1983–94: *Graph minors I–XIV*]  
Jede minorenabgeschlossene Graphklasse besitzt eine *endliche* Obstruktionsmenge.

**Satz.** [Robertson & Seymour]  
Für jeden festen Graphen  $H$  existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen  $G$  gilt, dass  $H \leq G$ .

(Die Laufzeit dieses Algorithmus ist kubisch in der Größe von  $G$ , aber die konstanten Faktoren hängen superpolynomiell von der Größe von  $H$  ab.)

# Eine Verallgemeinerung

**Satz.** [Robertson & Seymour 1983–94: *Graph minors I–XIV*]  
Jede minorenablegeschlossene Graphklasse besitzt eine *endliche* Obstruktionsmenge.

**Satz.** [Robertson & Seymour]  
Für jeden festen Graphen  $H$  existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen  $G$  gilt, dass  $H \leq G$ .

(Die Laufzeit dieses Algorithmus ist kubisch in der Größe von  $G$ , aber die konstanten Faktoren hängen superpolynomiell von der Größe von  $H$  ab.)

**Korollar.** Wir können effizient testen, ob ein gegebener Graph  $G$  planar ist.

# Eine Verallgemeinerung

**Satz.** [Robertson & Seymour 1983–94: *Graph minors I–XIV*]  
Jede minorenabgeschlossene Graphklasse besitzt eine *endliche* Obstruktionsmenge.

**Satz.** [Robertson & Seymour]  
Für jeden festen Graphen  $H$  existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen  $G$  gilt, dass  $H \leq G$ .

(Die Laufzeit dieses Algorithmus ist kubisch in der Größe von  $G$ , aber die konstanten Faktoren hängen superpolynomiell von der Größe von  $H$  ab.)

**Korollar.** Wir können effizient testen, ob ein gegebener Graph  $G$  planar ist.

(Wegen der großen Konstanten in der Laufzeit des Algorithmus von Robertson & Seymour ist das aber nicht praktikabel. Anders geht's deutlich schneller. . . )

# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.



John Edward Hopcroft  
\*1939, Seattle, WA, U.S.A.



Robert Endre Tarjan  
\*1948 Pomona, CA, USA

# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

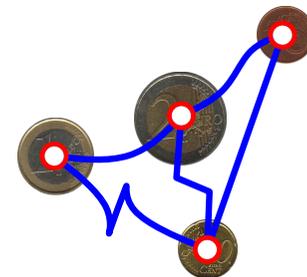
**Satz.** [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]  
Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

**Satz.** [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]  
Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

**Satz.** [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]  
Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.

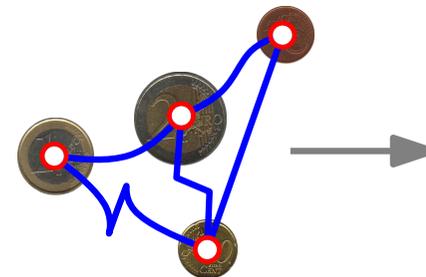


# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

**Satz.** [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]  
Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

**Satz.** [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]  
Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.

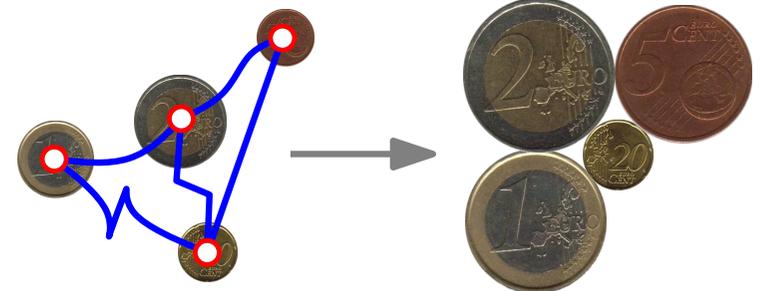


# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
 Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

**Satz.** [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]  
 Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

**Satz.** [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]  
 Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.

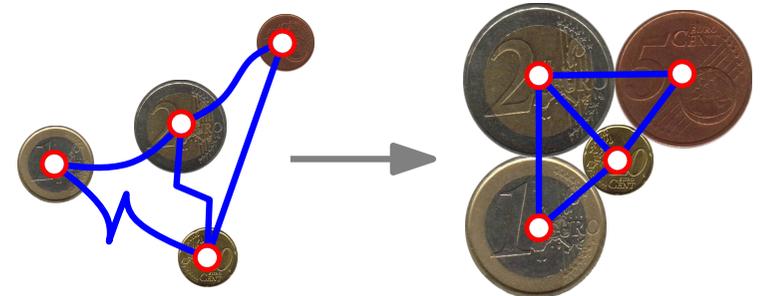


# Planare Graphen: Charakt., Test, Zeichnung

**Satz.** [Hopcroft & Tarjan, J. ACM 1974]  
 Sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten. Dann kann man in  $O(n)$  Zeit entscheiden, ob  $G$  planar ist.

**Satz.** [Wagner 1936, Fáry 1948, Stein 1951]  
 Jeder planare Graph lässt sich *geradlinig* zeichnen.

**Satz.** [Koebe 1936: *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*]  
 Jeder planare Graph lässt sich als *Berührgraph* von Kreisscheiben (*coin graph*) repräsentieren.



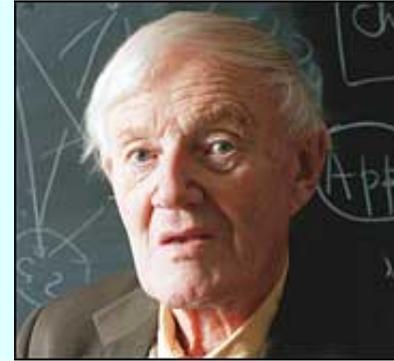
# Planare Graphen zeichnen

**Satz.** [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



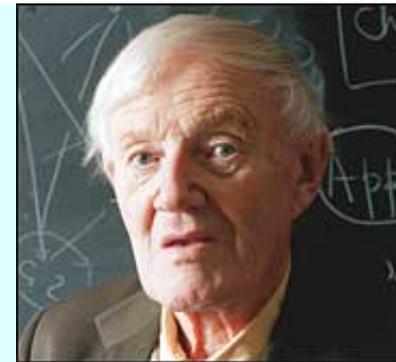
# Planare Graphen zeichnen

**Satz.** [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



**Satz.** [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des  $(n - 2) \times (n - 2)$  Gitters abgebildet werden.

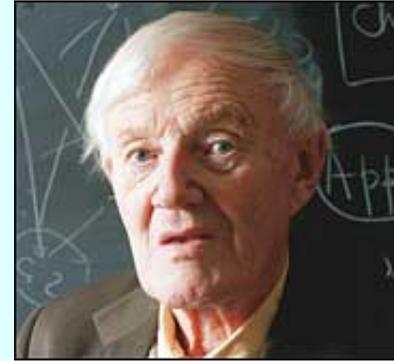
# Planare Graphen zeichnen

**Satz.** [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

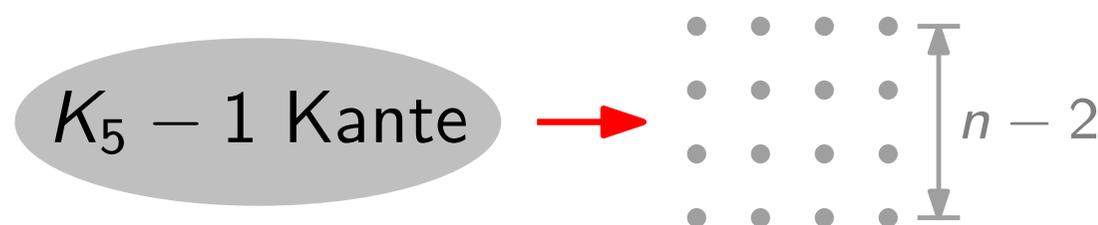
William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



**Satz.** [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des  $(n - 2) \times (n - 2)$  Gitters abgebildet werden.



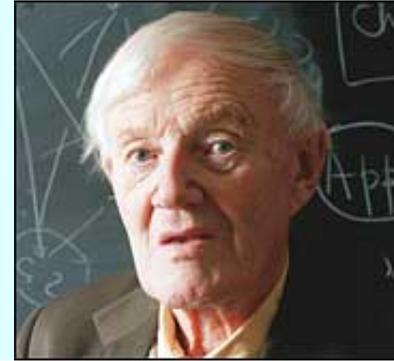
# Planare Graphen zeichnen

**Satz.** [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

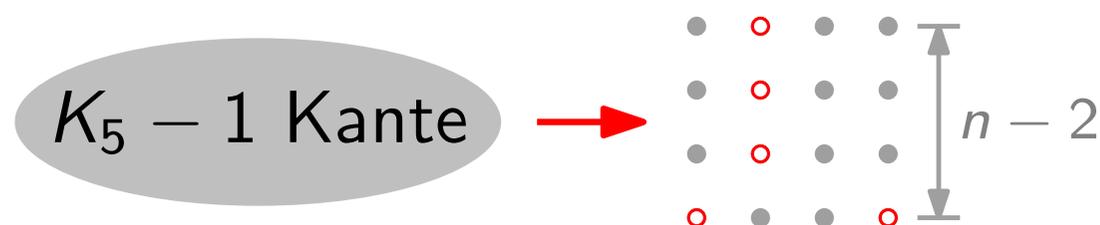
William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



**Satz.** [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des  $(n - 2) \times (n - 2)$  Gitters abgebildet werden.



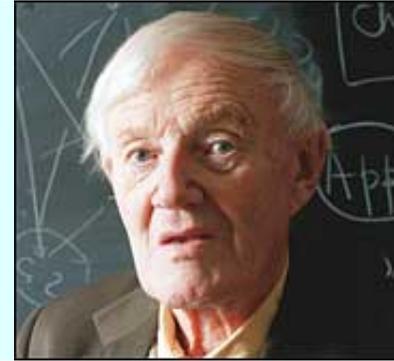
# Planare Graphen zeichnen

**Satz.** [Tutte 1963: *How to draw a graph*]

Ein (3-fach zshg.) planarer Graph lässt sich in Linearzeit geradlinig (und konvex) zeichnen.

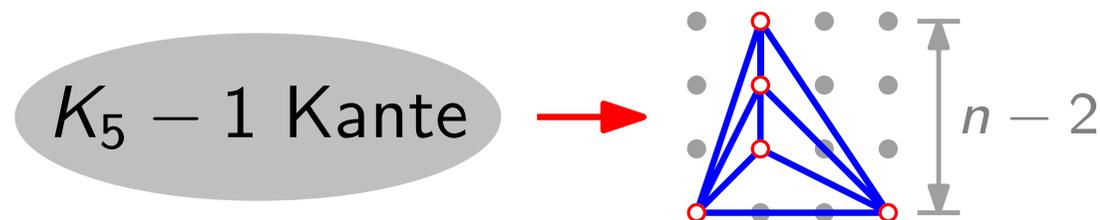
William Thomas Tutte

Newmarket, GB 1917–2002 Kitchener, Kanada



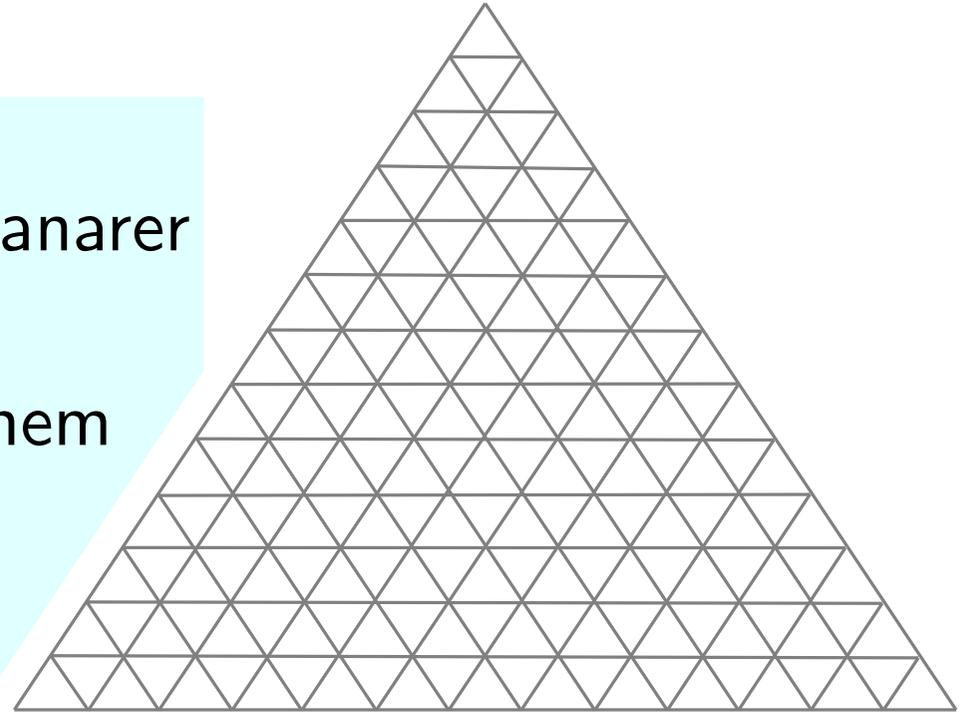
**Satz.** [Schnyder 1990: *Embedding planar graphs on the grid*]

Ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten lässt sich in Linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des  $(n - 2) \times (n - 2)$  Gitters abgebildet werden.



# Konvexe Zeichnungen

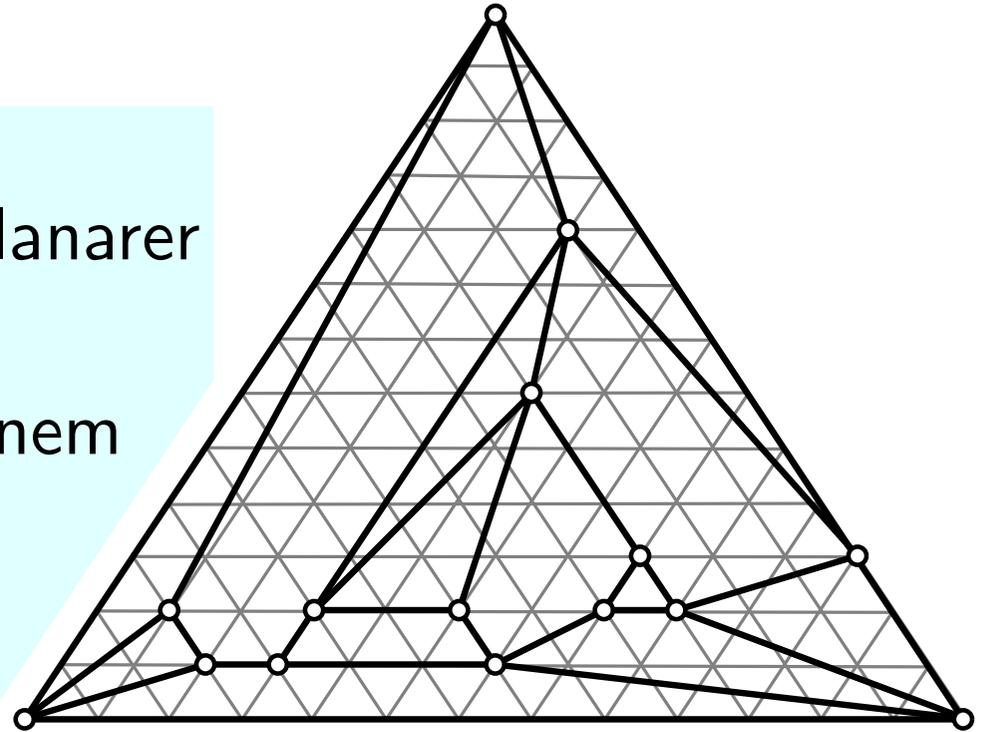
**Satz.** [Felsner 2001]  
Sei  $G$  ein 3-fach zshg. planarer Graph mit  $f$  Facetten.  
Dann lässt sich  $G$  auf einem  $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter geradlinig *und konvex* zeichnen.





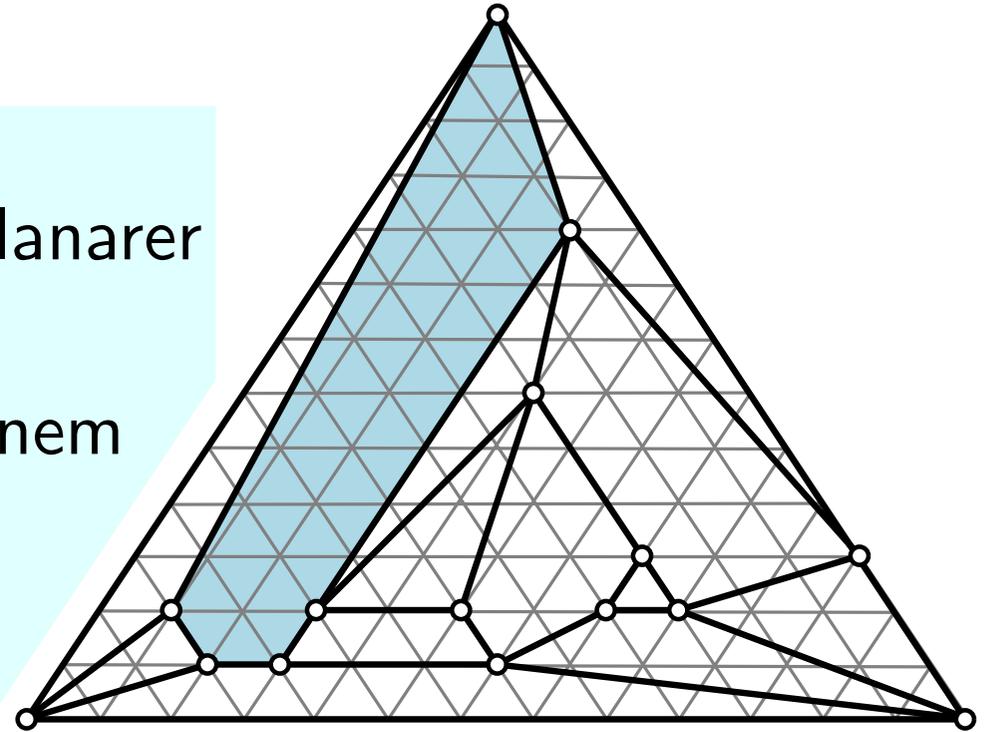
# Konvexe Zeichnungen

**Satz.** [Felsner 2001]  
Sei  $G$  ein 3-fach zshg. planarer Graph mit  $f$  Facetten.  
Dann lässt sich  $G$  auf einem  $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter geradlinig *und konvex* zeichnen.



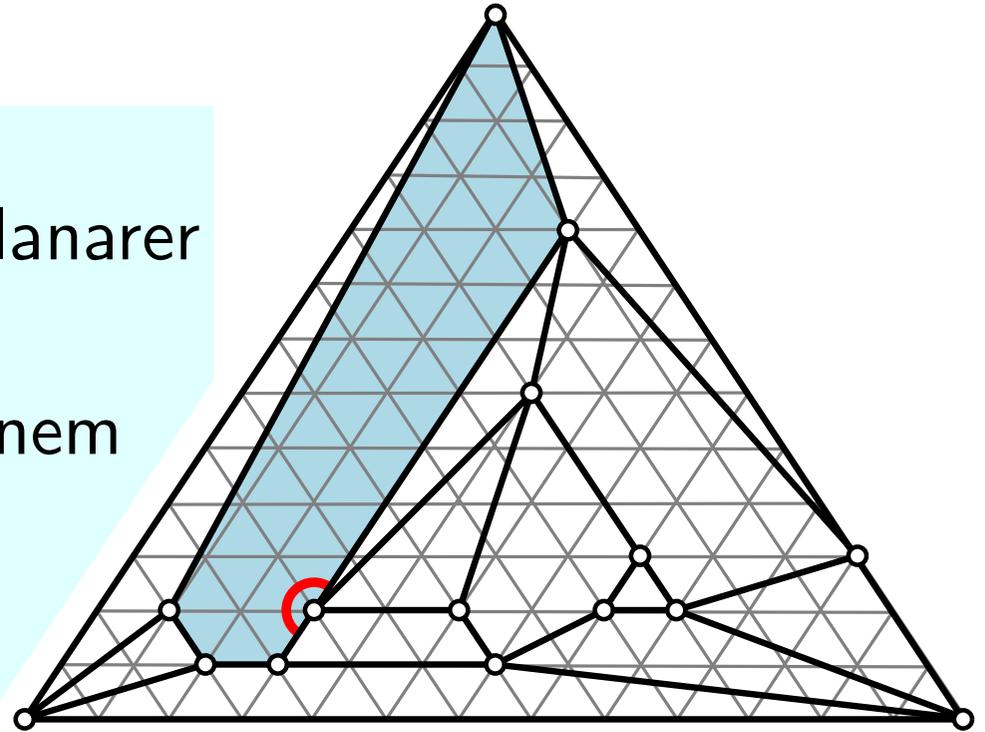
# Konvexe Zeichnungen

**Satz.** [Felsner 2001]  
Sei  $G$  ein 3-fach zshg. planarer Graph mit  $f$  Facetten.  
Dann lässt sich  $G$  auf einem  $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter geradlinig *und konvex* zeichnen.



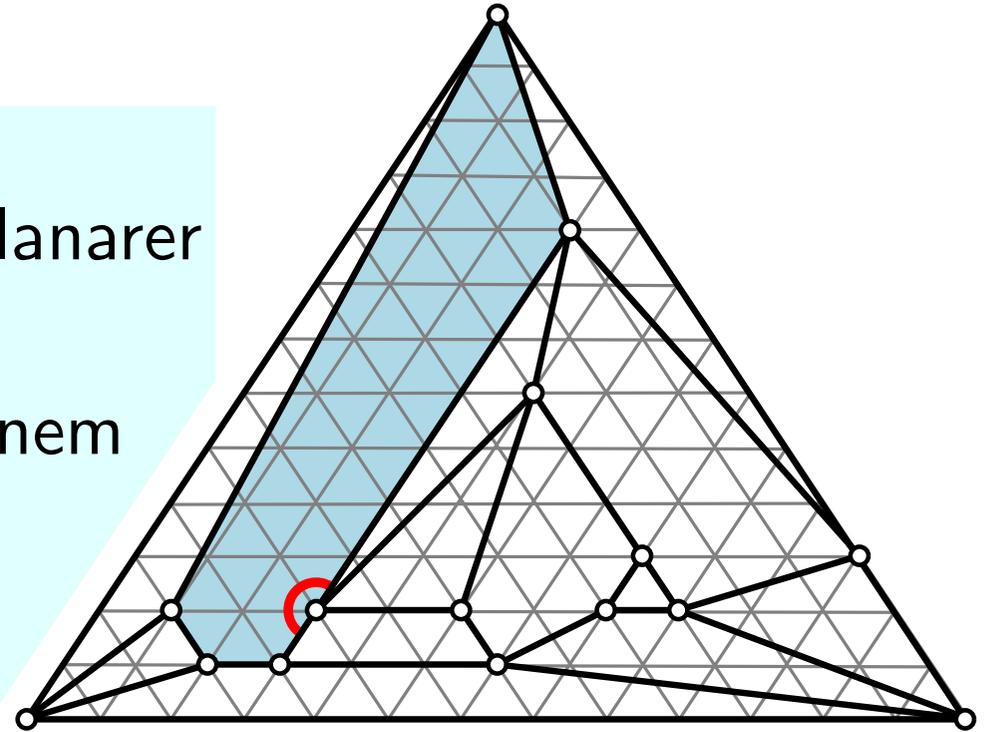
# Konvexe Zeichnungen

**Satz.** [Felsner 2001]  
Sei  $G$  ein 3-fach zshg. planarer Graph mit  $f$  Facetten.  
Dann lässt sich  $G$  auf einem  $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter geradlinig *und konvex* zeichnen.



# Konvexe Zeichnungen

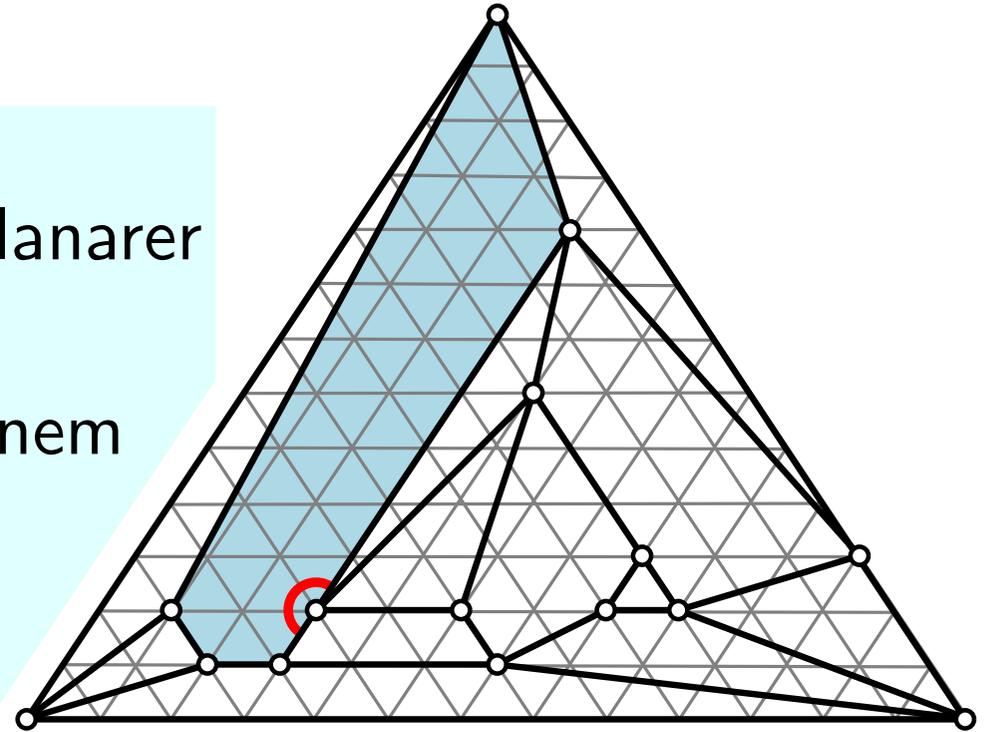
**Satz.** [Felsner 2001]  
 Sei  $G$  ein 3-fach zshg. planarer Graph mit  $f$  Facetten.  
 Dann lässt sich  $G$  auf einem  $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter  
 geradlinig *und konvex*  
 zeichnen.



**Satz.** [Bárány & Tokushige 2004]  
 Jede *streng* konvexe Zeichnung des  $C_n$  benötigt  $\Omega(n^3)$   
 Platz.

# Konvexe Zeichnungen

**Satz.** [Felsner 2001]  
 Sei  $G$  ein 3-fach zshg. planarer Graph mit  $f$  Facetten.  
 Dann lässt sich  $G$  auf einem  $(f - 1) \times (f - 1)$ -Gitter  
 geradlinig *und konvex*  
 zeichnen.



**Satz.** [Bárány & Tokushige 2004]  
 Jede *streng* konvexe Zeichnung des  $C_n$  benötigt  $\Omega(n^3)$   
 Platz.

**Satz.** [Bárány & Rote 2006]  
 Jeder 3-fach zshg. planare Graph hat eine streng  
 konvexe Zeichnung auf dem  $O(n^2) \times O(n^2)$ -Gitter.

# Noch mehr große Sätze

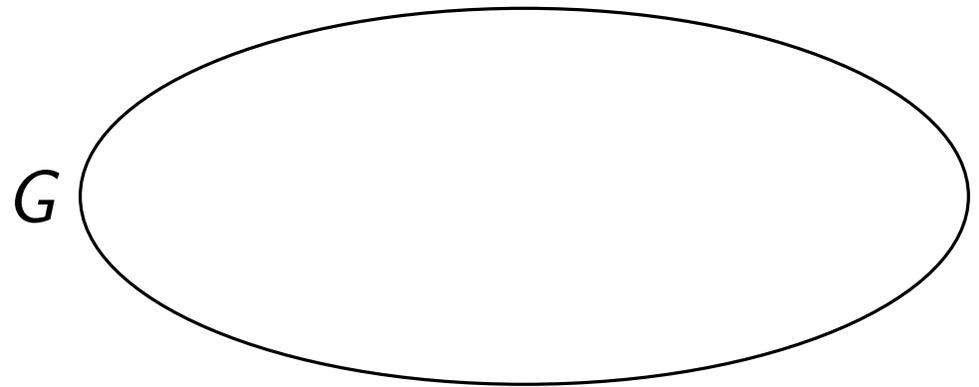
**Satz.** *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n \geq 5$  Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge

$V = L \dot{\cup} S \dot{\cup} R$  von  $G$ , so dass

- keine Kante zwischen  $L$  und  $R$  verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$  und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$ .



# Noch mehr große Sätze

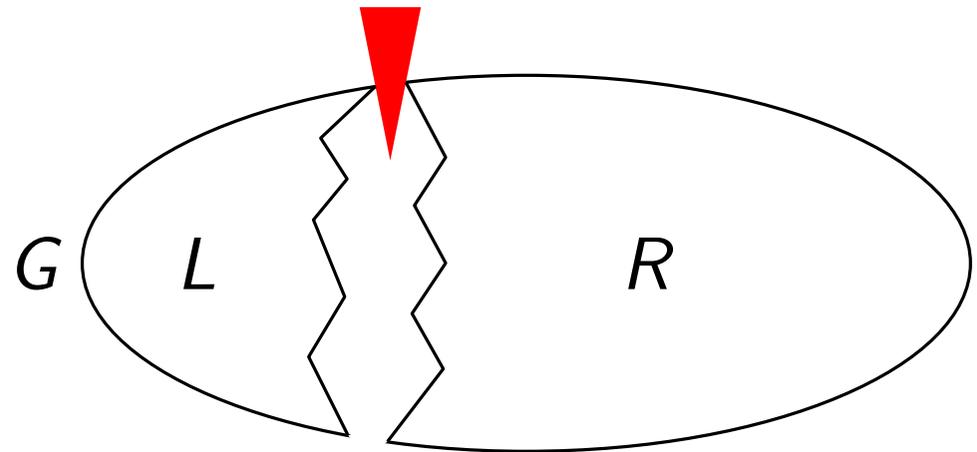
**Satz.** *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n \geq 5$  Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge

$V = L \dot{\cup} S \dot{\cup} R$  von  $G$ , so dass

- keine Kante zwischen  $L$  und  $R$  verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$  und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$ .



# Noch mehr große Sätze

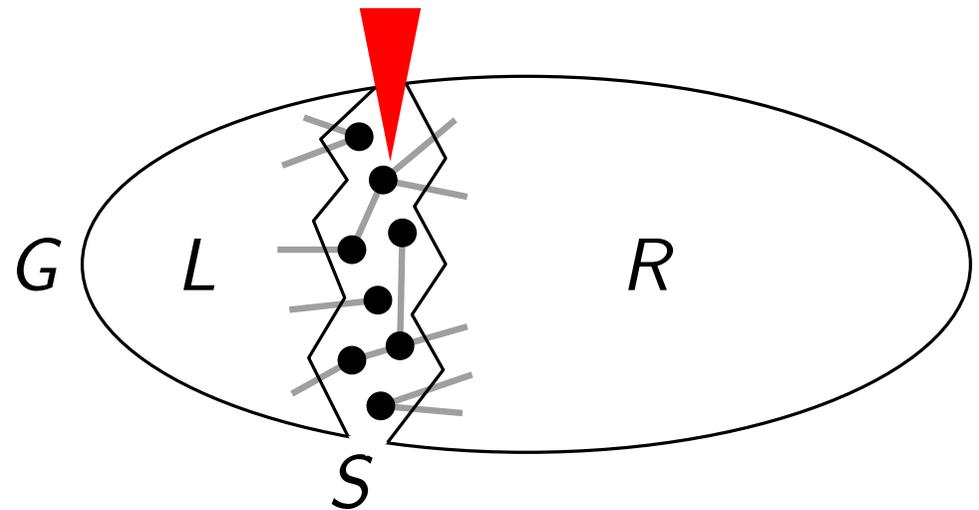
**Satz.** *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n \geq 5$  Knoten.

Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge

$V = L \dot{\cup} S \dot{\cup} R$  von  $G$ , so dass

- keine Kante zwischen  $L$  und  $R$  verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$  und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$ .



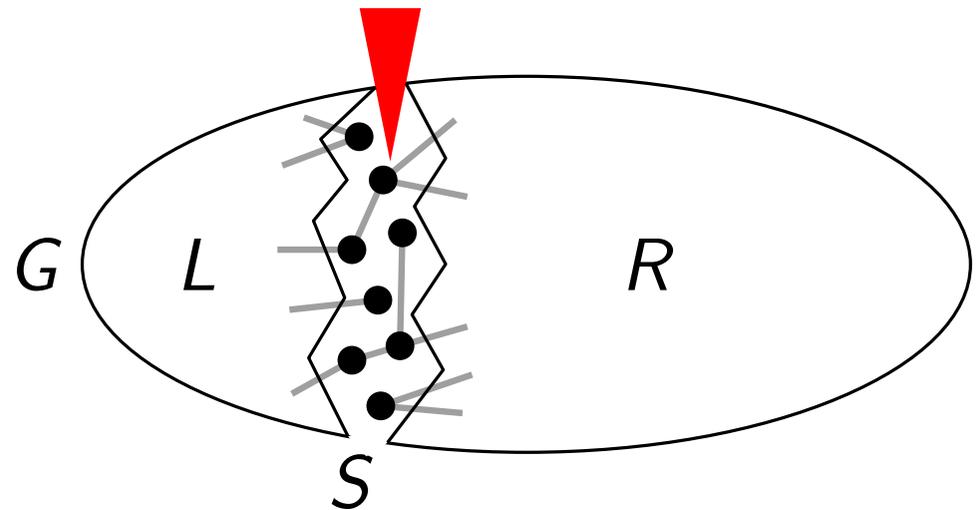
# Noch mehr große Sätze

**Satz.** *Planar Separator Theorem* [Lipton & Tarjan 1979]

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n \geq 5$  Knoten.  
Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge  
 $V = L \dot{\cup} S \dot{\cup} R$  von  $G$ , so dass

- keine Kante zwischen  $L$  und  $R$  verläuft,
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$  und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$ .

Eine solche Zerlegung  
kann in  $O(n)$  Zeit  
berechnet werden.



# Größte Matchings inkrementell

**Lemma.** Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph, sei  $v \in V$  und sei  $M$  größtes Matching in  $G - v$ .

# Größte Matchings inkrementell

**Lemma.** Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph, sei  $v \in V$  und sei  $M$  größtes Matching in  $G - v$ .

- (i) Falls  $G$  keinen augmentierenden Weg mit Endknoten  $v$  enthält,  
so ist  $M$  größtes Matching in  $G$ .

# Größte Matchings inkrementell

- Lemma.** Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph, sei  $v \in V$  und sei  $M$  größtes Matching in  $G - v$ .
- (i) Falls  $G$  keinen augmentierenden Weg mit Endknoten  $v$  enthält, so ist  $M$  größtes Matching in  $G$ .
  - (ii) Ansonsten sei  $W$  ein augmentierender Weg. Dann ist  $M \Delta E(W)$  größtes Matching in  $G$ .

# Größte Matchings inkrementell

**Lemma.** Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph, sei  $v \in V$  und sei  $M$  größtes Matching in  $G - v$ .

- (i) Falls  $G$  keinen augmentierenden Weg mit Endknoten  $v$  enthält, so ist  $M$  größtes Matching in  $G$ .
- (ii) Ansonsten sei  $W$  ein augmentierender Weg. Dann ist  $M \Delta E(W)$  größtes Matching in  $G$ .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in  $G - v$  kann man in  $O(E)$  Zeit ein größtes Matching in  $G$  finden.

# Größte Matchings inkrementell

- Lemma.** Sei  $G = (V, E)$  ungerichteter Graph, sei  $v \in V$  und sei  $M$  größtes Matching in  $G - v$ .
- (i) Falls  $G$  keinen augmentierenden Weg mit Endknoten  $v$  enthält, so ist  $M$  größtes Matching in  $G$ .
  - (ii) Ansonsten sei  $W$  ein augmentierender Weg. Dann ist  $M \Delta E(W)$  größtes Matching in  $G$ .

Mit einer passenden Repräsentation eines größten Matchings in  $G - v$  kann man in  $O(E)$  Zeit ein größtes Matching in  $G$  finden.

*Beweis.* Übung – jetzt!

# Größte Matchings in planaren Graphen

```
MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )
```

```
  if  $|V| < 5$  then
```

```
    | return BruteForceMatching( $G$ )
```

```
  else
```

```
    ( $L, S, R$ ) = PlanarSeparator( $G$ )
```

**Aufgabe:** Berechnen Sie mithilfe des Separators und des Lemmas ein größtes Matching  $M$  in  $G$ .

Wenden Sie *Teile & Herrsche* an!

```
  return  $M$ 
```

# Größte Matchings in planaren Graphen

```
MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )
```

```
  if  $|V| < 5$  then
```

```
    return BruteForceMatching( $G$ )
```

```
  else
```

```
     $(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$ 
```

```
     $M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$ 
```

```
     $M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$ 
```

```
     $M = M_L \cup M_R$ 
```

```
     $\bar{V} = L \cup R$ 
```

```
    foreach  $v \in S$  do
```

```
      |
```

```
    return  $M$ 
```

# Größte Matchings in planaren Graphen

```
MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )
  if  $|V| < 5$  then
    | return BruteForceMatching( $G$ )
  else
    ( $L, S, R$ ) = PlanarSeparator( $G$ )
     $M_L$  = MaxCardinalityMatching( $G[L]$ )
     $M_R$  = MaxCardinalityMatching( $G[R]$ )
     $M = M_L \cup M_R$ 
     $\bar{V} = L \cup R$ 
    foreach  $v \in S$  do
      |  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
      |  $M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma
    return  $M$ 
```

# Größte Matchings in planaren Graphen

```

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )
  if  $|V| < 5$  then
    | return BruteForceMatching( $G$ )
  else
    ( $L, S, R$ ) = PlanarSeparator( $G$ )
     $M_L$  = MaxCardinalityMatching( $G[L]$ )
     $M_R$  = MaxCardinalityMatching( $G[R]$ )
     $M = M_L \cup M_R$ 
     $\bar{V} = L \cup R$ 
    foreach  $v \in S$  do
      |  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$ 
      |  $M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma
    return  $M$ 

```

**Korrektheit?**

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$   $\Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma

**return**  $M$

**Korrektheit?**

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$   $\Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma

**return**  $M$

$M$  ist größtes Matching in  $G[\bar{V}]$

**Korrektheit?**

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$   $\Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma

**return**  $M$

$M$  ist größtes Matching in  $G[\bar{V}]$

**Korrektheit?**

Hier  $\bar{V} = V$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$   $\Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma

**return**  $M$

$M$  ist größtes Matching in  $G[\bar{V}]$

**Korrektheit?**

Hier  $\bar{V} = V \Rightarrow G[\bar{V}] = G$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$   $\Rightarrow$  keine  $L$ - $R$ -Kante

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma

**return**  $M$

$M$  ist größtes Matching in  $G[\bar{V}]$

**Korrektheit?**

Hier  $\bar{V} = V \Rightarrow G[\bar{V}] = G \Rightarrow M$  max. in  $G$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
Graphen mit  $|V| = n$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$

**return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

$\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

$M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
Graphen mit  $|V| = n$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

$O(n)$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n}) \cdot$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M =$  größtes Matching in  $G[\bar{V}]$  laut Lemma

**return**  $M$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n})$ .

}  $O(n)$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n}) \cdot$

$O(n)$

$T(n) \leq$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n}) \cdot$

$O(n)$

$$T(n) \leq T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2}$$

# Größte Matchings in planaren Graphen

MaxCardinalityMatching(Graph  $G = (V, E)$ )

**if**  $|V| < 5$  **then**  $O(1)$   
 | **return** BruteForceMatching( $G$ )

**else**

$(L, S, R) = \text{PlanarSeparator}(G)$

$M_L = \text{MaxCardinalityMatching}(G[L])$

$M_R = \text{MaxCardinalityMatching}(G[R])$

$M = M_L \cup M_R$

$\bar{V} = L \cup R$

**foreach**  $v \in S$  **do**

|  $\bar{V} = \bar{V} \cup \{v\}$

|  $M = \text{größtes Matching in } G[\bar{V}] \text{ laut Lemma}$

**return**  $M$

$T(n) =$  **Laufzeit?**

Worst-Case-Laufzeit für  
 Graphen mit  $|V| = n$

$O(n)$

$T(|L|)$

$T(|R|)$

$O(\sqrt{n})$ .

$O(n)$

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2})$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2})$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O\left(n^{\log_{3/2} 2}\right)$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O\left(n^{\log_{3/2} 2}\right)$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:*

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:* siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:* siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

*Beh.*  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:* siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

*Beh.*  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:* siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

*Beh.*  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

*Bew.*  
 $T(n) \leq$



# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:* siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

*Beh.*  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

*Bew.*

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$$

# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

*Master-Methode:* siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$

*Genauere Abschätzung:*

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

*Beh.*  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

*Bew.*  $T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$

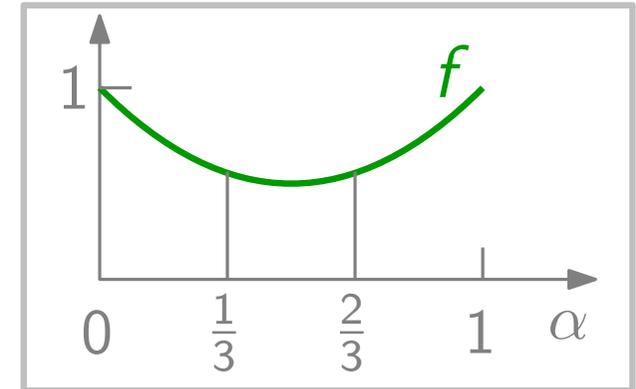
# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh.  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$

[Wir können  $c'$  wählen!]

Bew.

$f(\alpha)$

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$$

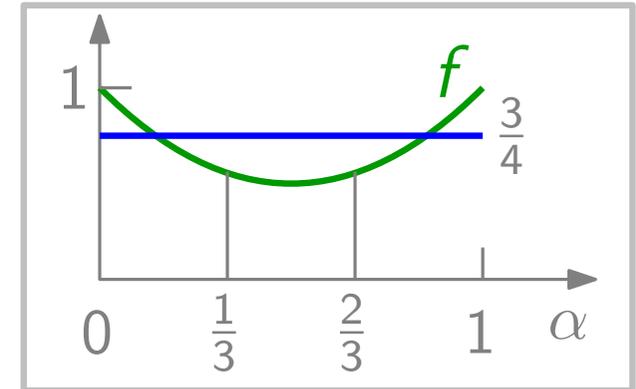
# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh.  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

Bew.  $T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + c/c' \right)$

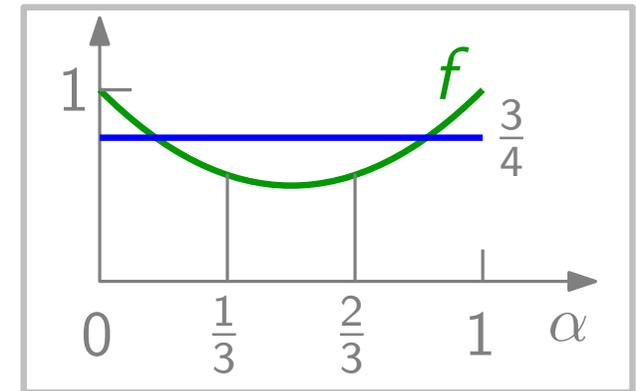
# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh.  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

Bew.

$f(\alpha)$

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right)$$

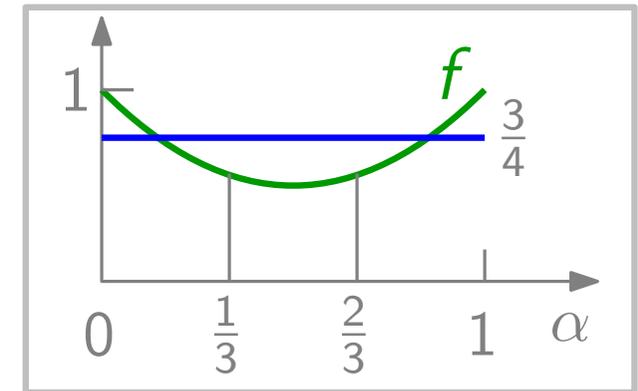
# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh.  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

Bew.

$f(\alpha)$

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right)$$

$< 3/4 \Rightarrow$  Nimm  $c' = 4c!$

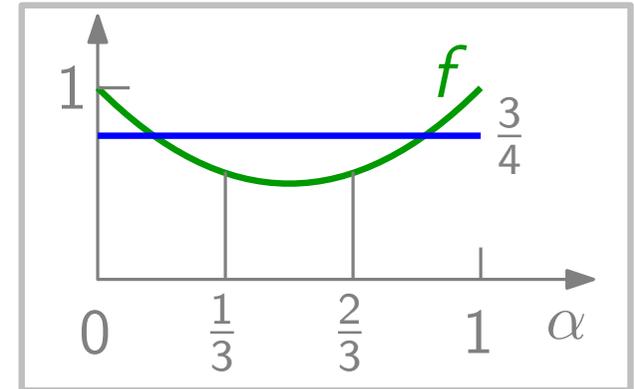
# Rekursions(un)gleichung lösen...

$$T(n) \leq \max \left\{ T(|L|) + T(|R|) + cn^{3/2} : \right. \\ \left. |L| + |R| \leq n, \frac{n}{3} \leq |L| \leq \frac{2}{3}n \right\}$$

Master-Methode:

siehe [CLRS, Kapitel 4.5]

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + O(n^{3/2}) \\ \in O(n^{\log_{3/2} 2}) = O(n^{1,709\dots})$$



Genauere Abschätzung:

$$T(n) \leq \max \left\{ T(\alpha n) + T((1 - \alpha)n) \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\} + cn^{3/2}$$

Beh.  $T(n) \leq c'n^{3/2}$  für ein  $c' > c$  [Wir können  $c'$  wählen!]

Bew.

$f(\alpha)$

$$T(n) \leq c'n^{3/2} \left( \underbrace{\max \left\{ \alpha^{3/2} + (1 - \alpha)^{3/2} \mid \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \right\}}_{< 3/4} + c/c' \right) \\ \leq c'n^{3/2} \quad < 3/4 \Rightarrow \text{Nimm } c' = 4c! \quad \square$$

# Ergebnis

**Satz.** In einem planaren Graphen mit  $n$  Knoten kann man in  $O(n^{3/2})$  Zeit ein größtes Matching finden.

# Ergebnis

**Satz.** In einem planaren Graphen mit  $n$  Knoten kann man in  $O(n^{3/2})$  Zeit ein größtes Matching finden.

*Zum Vergleich:*

## Größtes Matching

Bipartite Graphen	$O(\sqrt{VE})$	[Hopcroft & Karp, 1973]
Allgemeine Graphen	$O(\sqrt{VE})$	[Micali & Vazirani, 1980]

## Schwerstes Matching

Planare Graphen	$O(V^{3/2} \log V)$	[Lipton & Tarjan, 1980]
Allgemeine Graphen	$O(EV \log V)$	[Gabow, 1975]

# Ergebnis

**Satz.** In einem planaren Graphen mit  $n$  Knoten kann man in  $O(n^{3/2})$  Zeit ein größtes Matching finden.

*Zum Vergleich:*

## Größtes Matching

Bipartite Graphen	$O(\sqrt{VE})$	[Hopcroft & Karp, 1973]
Allgemeine Graphen	$O(\sqrt{VE})$	[Micali & Vazirani, 1980]

## Schwerstes Matching

Planare Graphen*	$O(V^{3/2} \log V)$	[Lipton & Tarjan, 1980]
Allgemeine Graphen	$O(EV \log V)$	[Gabow, 1975]

\*) Das Lemma gilt entsprechend für den gewichteten Fall, allerdings mit Laufzeit  $O(E \log V)$  statt  $O(E)$ .