Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

7. Vorlesung

Wurzelspannbäume

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch,
- $\mathrm{indeg}(s) = 0$ und
- $\mathrm{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch,
- $\mathrm{indeg}(s) = 0$ und
- $\mathrm{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

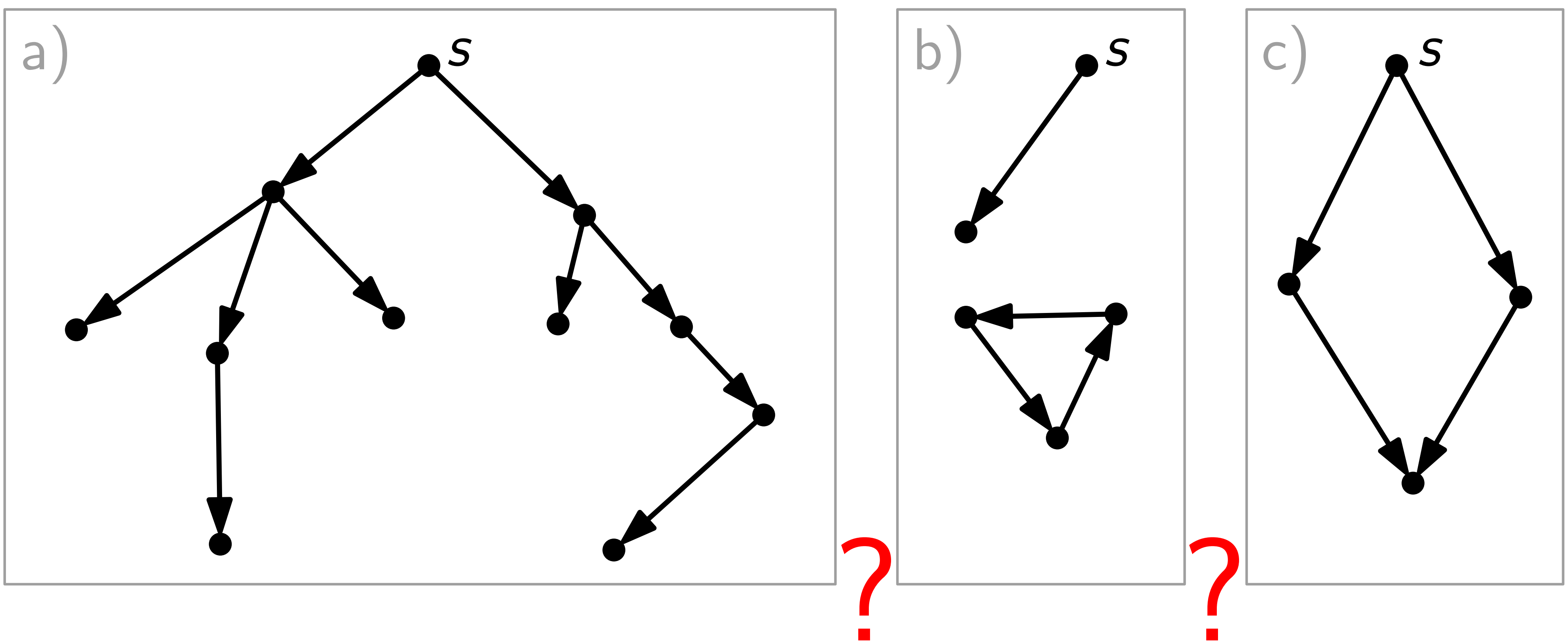
T enthält keinen (gerichteten) Kreis.

Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$ und
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

T enthält keinen (gerichteten) Kreis.

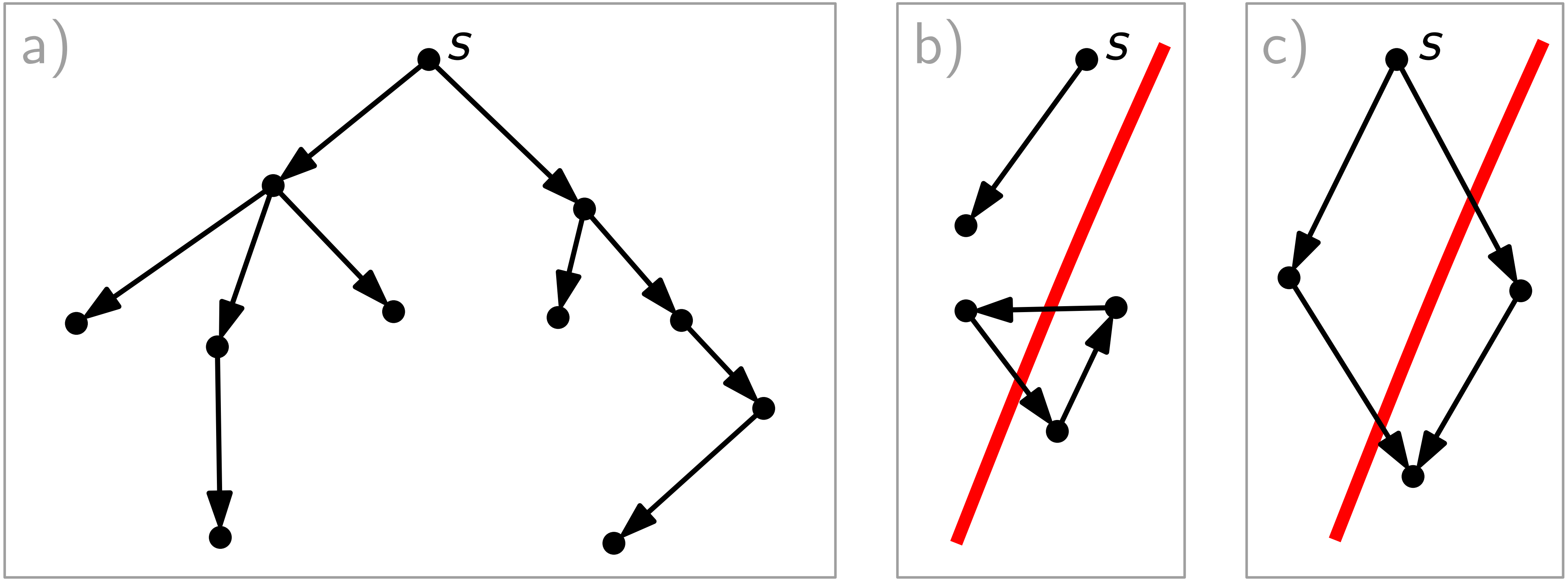


Wurzelbäume

Def. Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

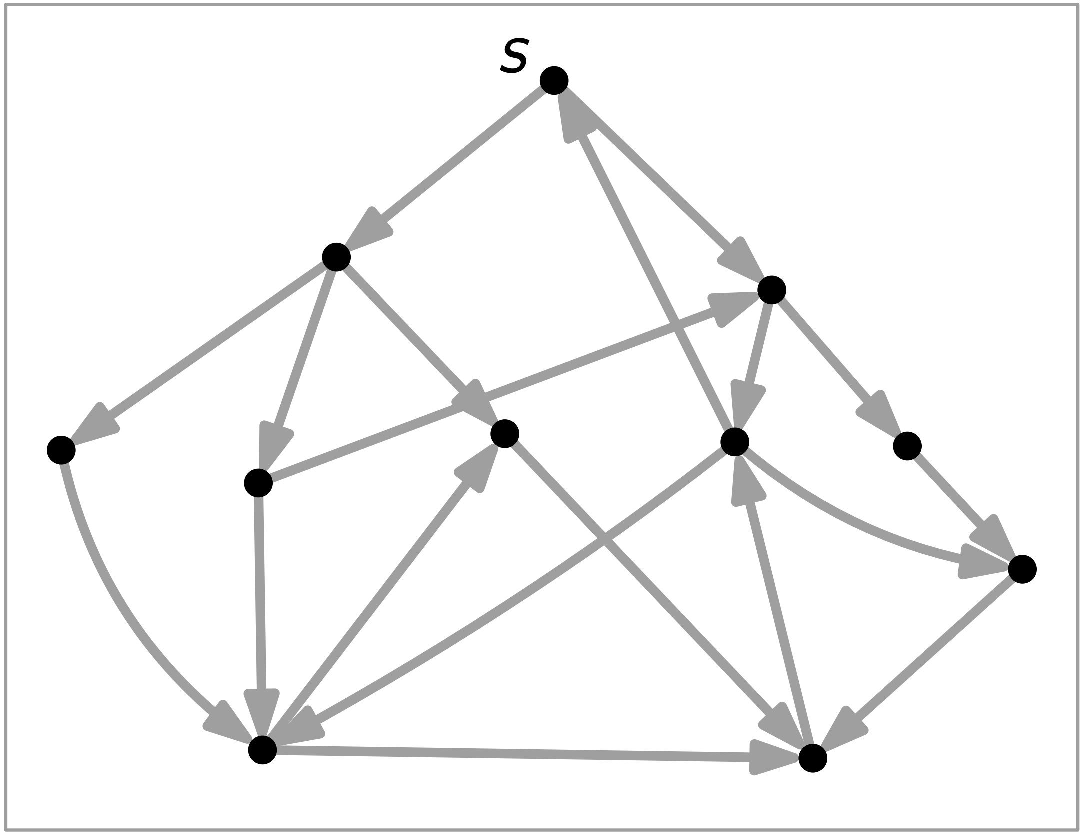
- T azyklisch,
- $\mathrm{indeg}(s) = 0$ und
- $\mathrm{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$.

T enthält keinen (gerichteten) Kreis.



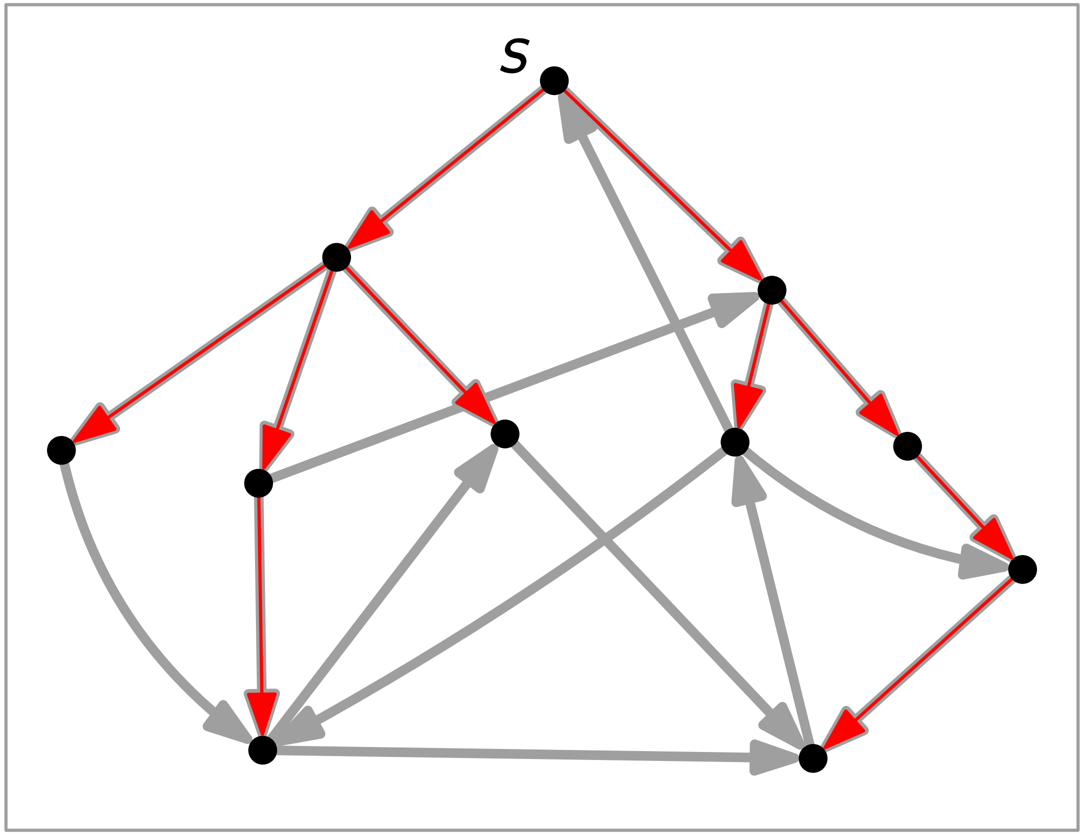
Wurzelspannbäume

Def. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt s-**Wurzelspannbaum** von G, wenn T ein s-Wurzelbaum ist.



Wurzelspannbäume

Def. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt s-**Wurzelspannbaum** von G, wenn T ein s-Wurzelbaum ist.



Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s.
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.

Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s.
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein s-v-Pfad in G.

Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s.
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein s-v-Pfad in G.

Beweis. Siehe Übungsblatt. $\square$

Existenz von Wurzelspannbäumen

Beob. Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s.
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum
$\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.

Es existiert ein s-v-Pfad in G.

Beweis. Siehe Übungsblatt. $\square$

Bem. DFS(s) liefert s-Wurzelspannbaum
(sofern es einen gibt).

Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Minimale Wurzelspannbäume

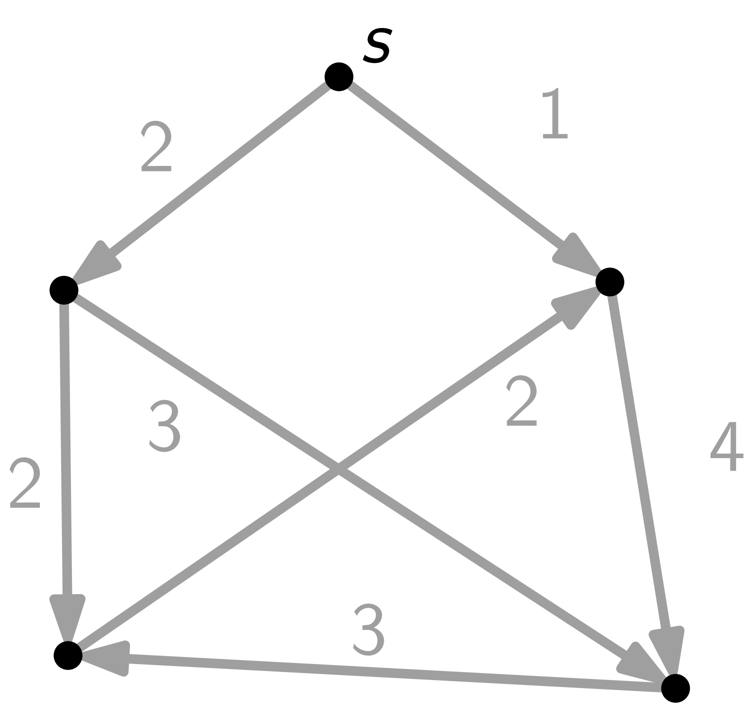
Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.

Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

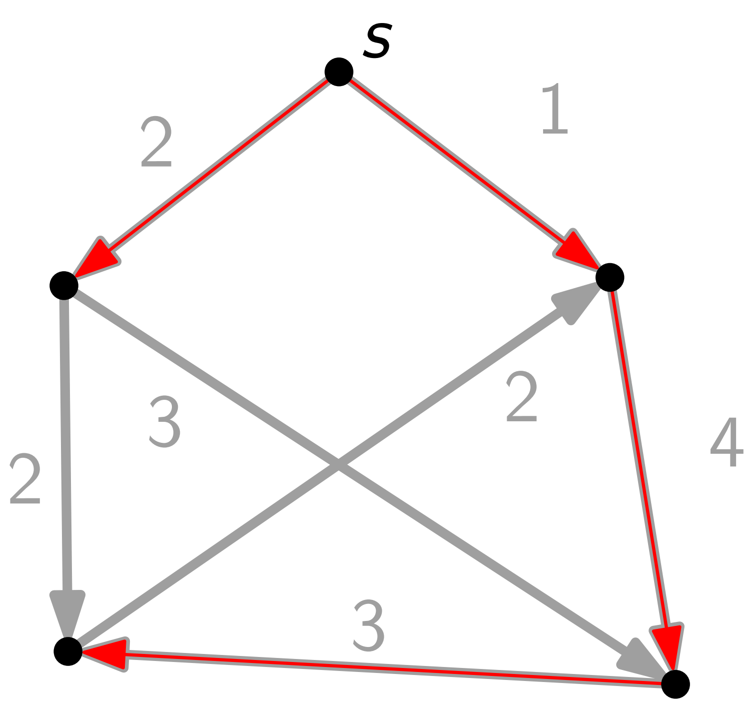
Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

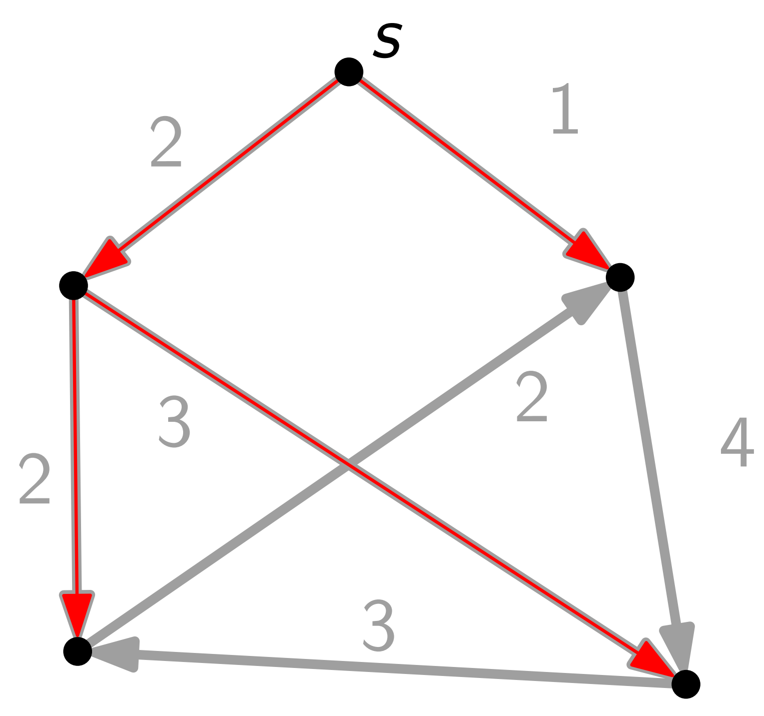
Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

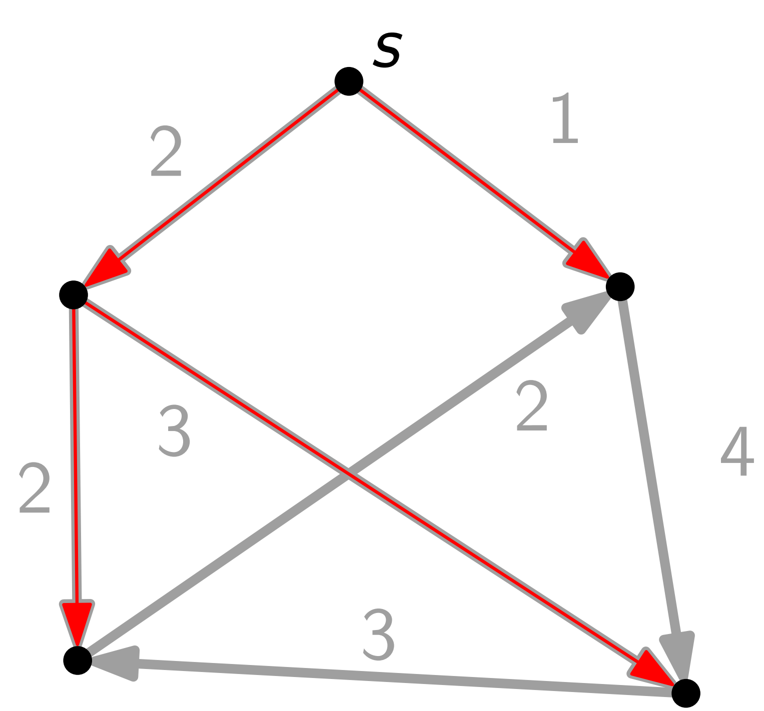
Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



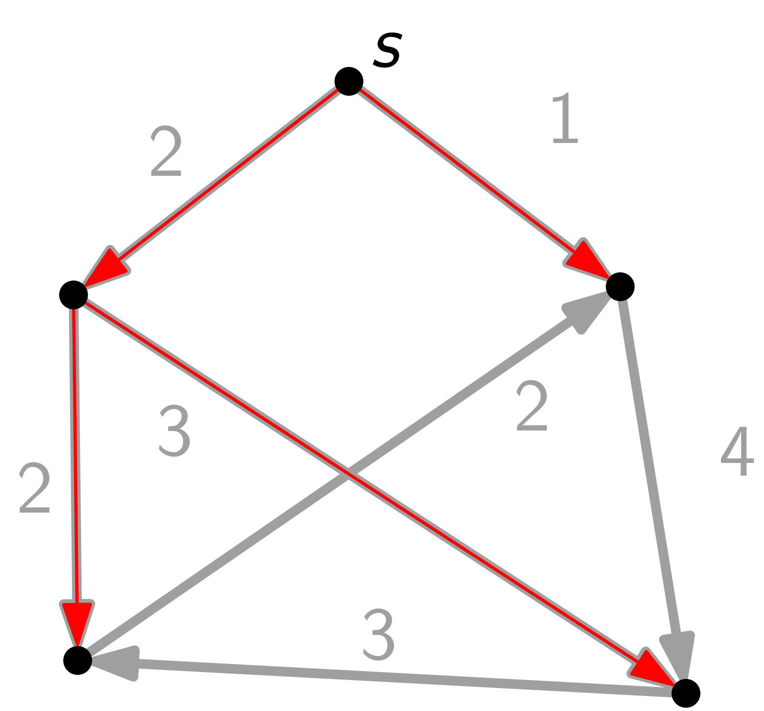
Motivation:

Broadcast (Versenden von Information von s an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

Minimale Wurzelspannbäume

Def. Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph $G = (V, E)$ mit $s \in V$ und Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ von G (sofern existent) mit minimalen Kosten $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$.



Motivation:

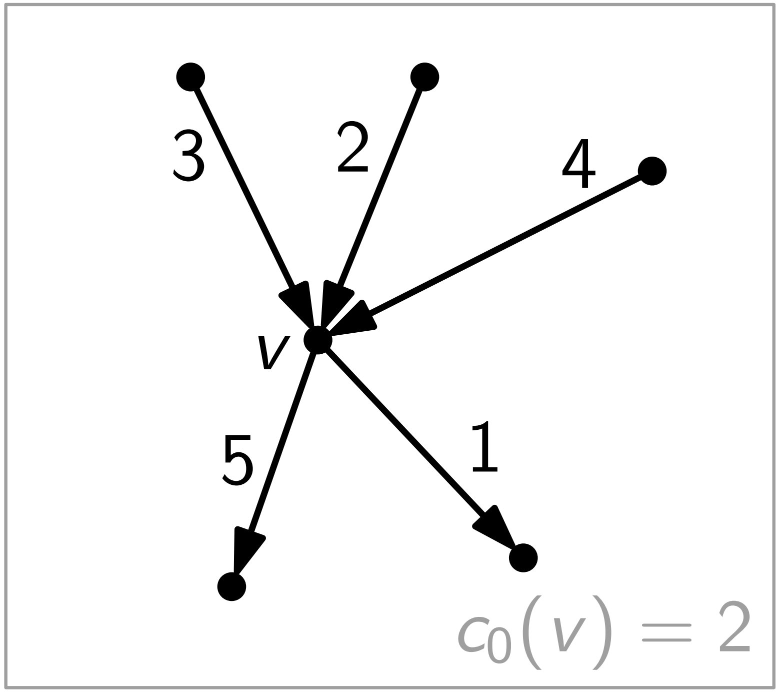
Broadcast (Versenden von Information von s an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

Übungsaufgabe:

Kruskal und Jarník-Prim schlagen i.A. fehl!

Kostenmodifikation

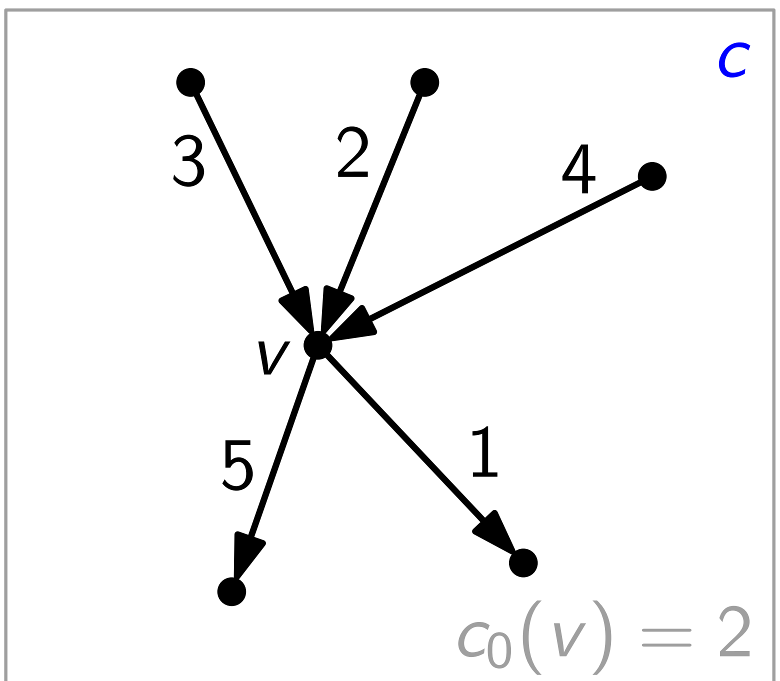
Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.



Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\mathrm{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

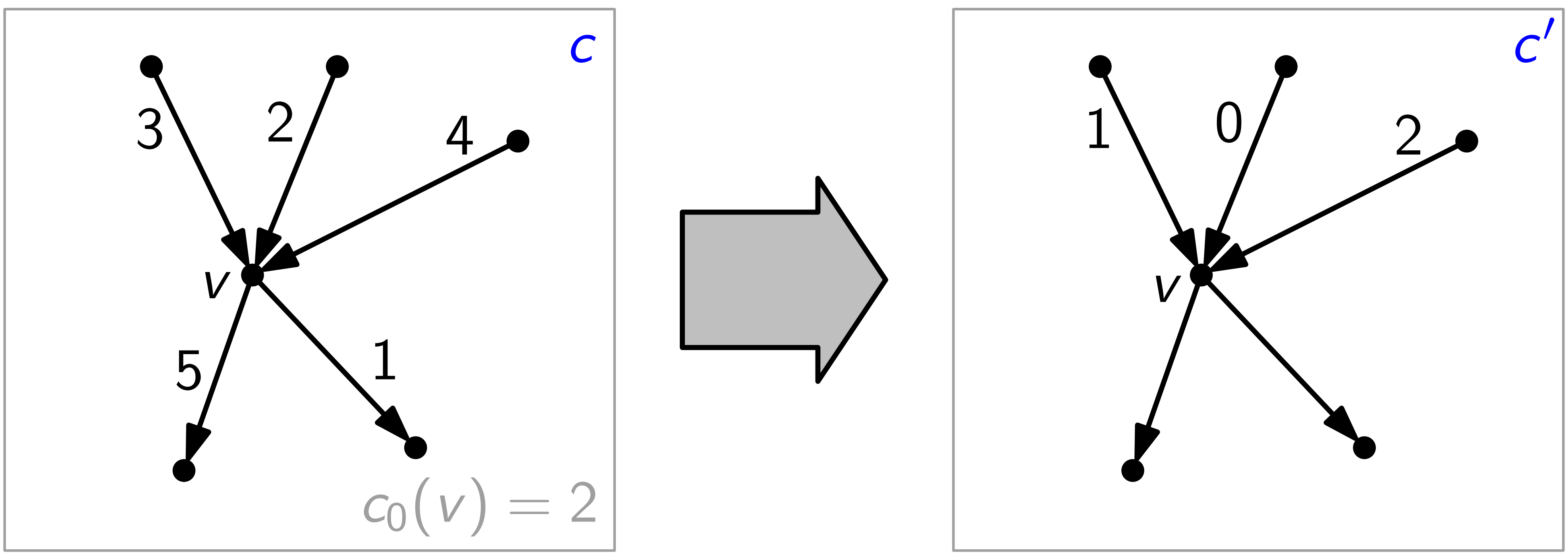


Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\mathrm{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante (u,v) setze $c'(u,v) := c(u,v) - c_0(v)$.



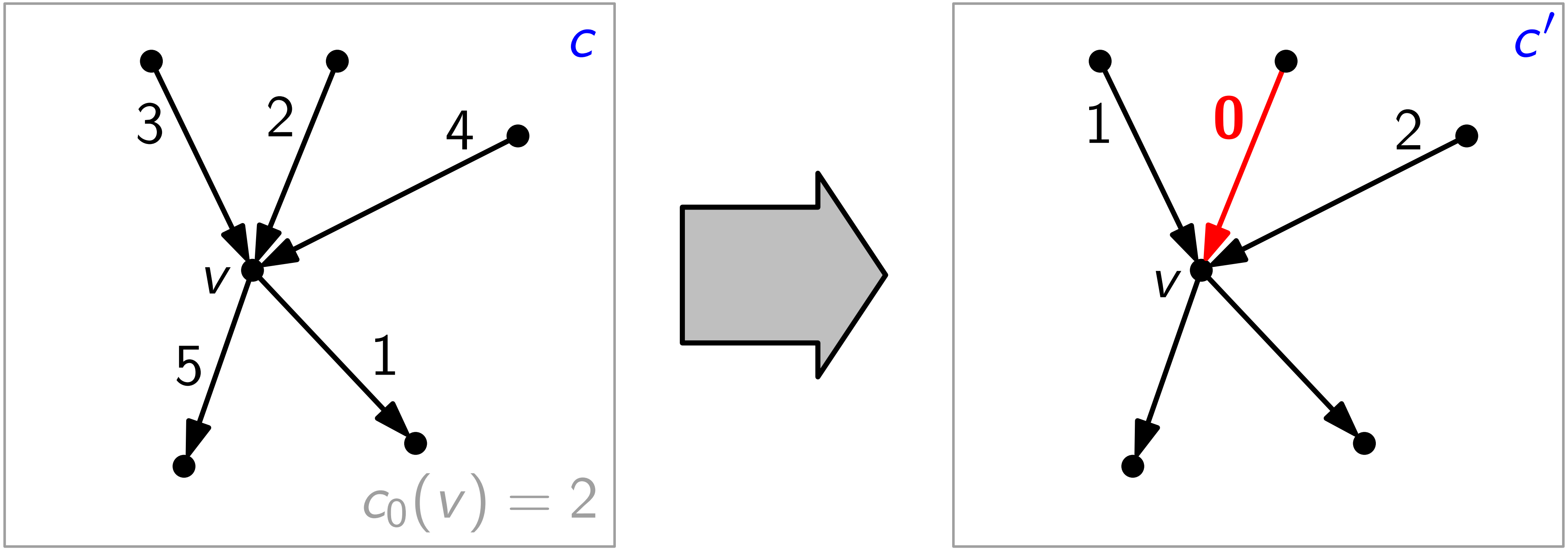
Kostenmodifikation

Für jedes $v \neq s$ setze $c_0(v) := \min\{\, c(u,v) \mid (u,v) \in E \,\}$.

O.B.d.A. $\mathrm{indeg}(v) \geq 1$ für jedes $v \neq s$.

Für jede Kante (u,v) setze $c'(u,v) := c(u,v) - c_0(v)$.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten $v \neq s$ hat eingehende 0-Kante.



Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) =$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$\begin{aligned} c'(E_T) &= \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v)) \\ &= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V\setminus s} c_0(v) \end{aligned}$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

$\mathrm{indeg}_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
$\mathrm{indeg}_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v) \in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

$\mathrm{indeg}_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
$\mathrm{indeg}_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v) \in E_T} c(u,v) - \sum_{v \in V \setminus s} c_0(v)$$

$$= c(E_T) - \boxed{\sum_{v \in V \setminus s} c_0(v)}$$

Validität der Kostenmodifikation

Lem. 1. Ein s-Wurzelspannbaum von G ist genau dann optimal bezüglich c, wenn er optimal bezüglich c' ist.

Beweis. Für *jeden* s-Wurzelspannbaum $T = (V, E_T)$ gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v)\in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

indeg$_T(s) = 0$
und für alle $v \neq s$
indeg$_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v)\in E_T} c(u,v) - \sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)$$

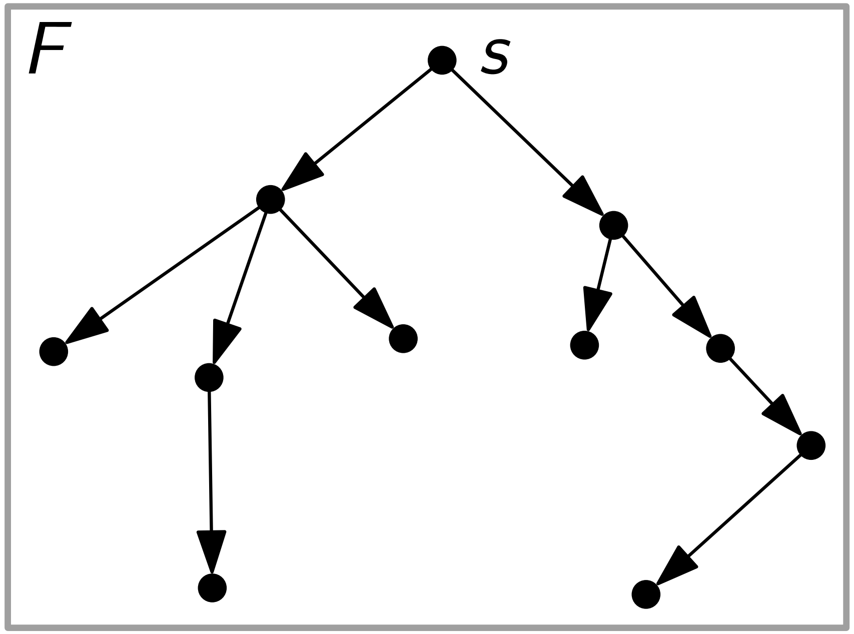
$$= c(E_T) - \boxed{\sum_{v\in V\setminus s} c_0(v)}$$

unabhängig von T!

□

Ein Versuch

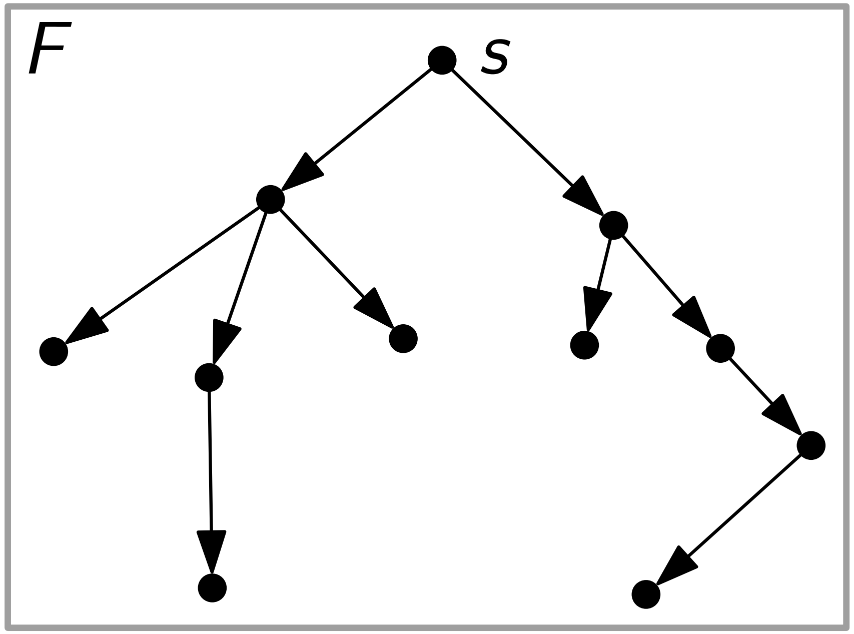
Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von G



Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von G

Falls F azyklisch $\Rightarrow$ F ist s-Wurzelspannbaum von G!

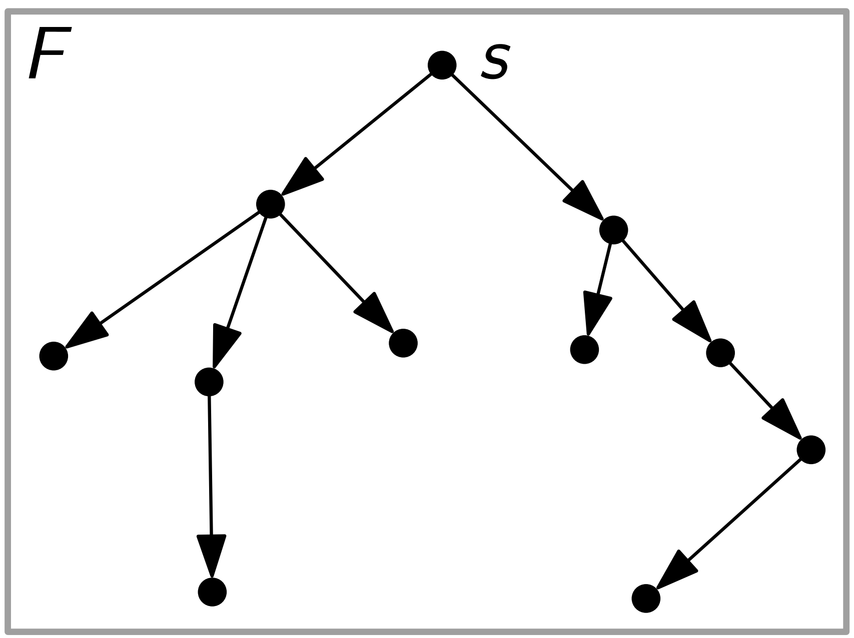


Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von G

Falls F azyklisch $\Rightarrow$ F ist s-Wurzelspannbaum von G!

Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c)

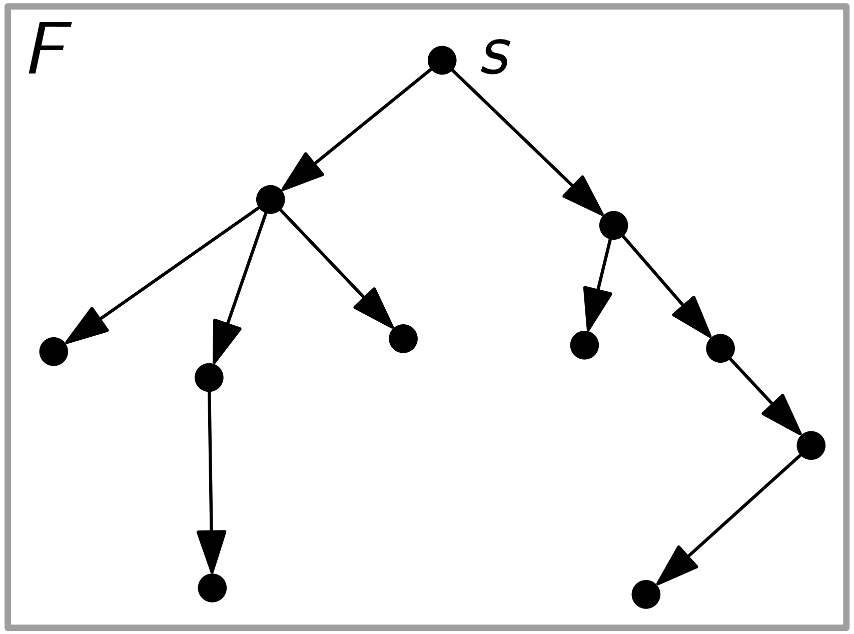


Ein Versuch

Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von G

Falls F azyklisch $\Rightarrow$ F ist s-Wurzelspannbaum von G!

Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c), da $c'(F) = 0$.



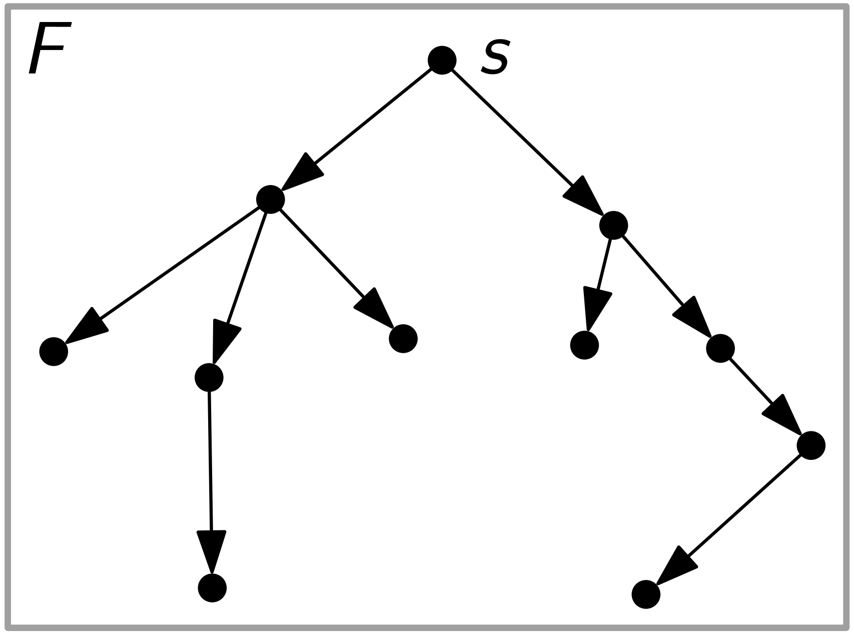
Ein Versuch

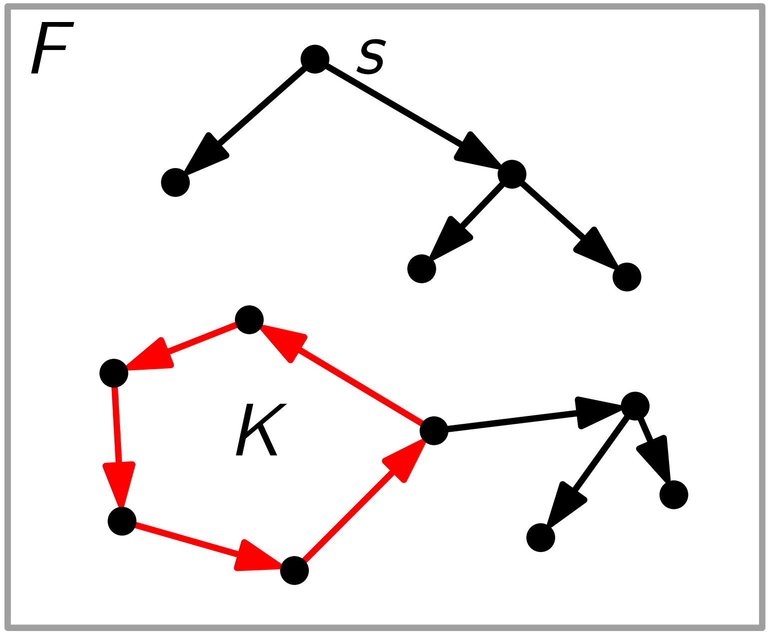
Wähle für jedes $v \neq s$ eine eingehende 0-Kante
$\rightsquigarrow$ Teilgraph $F = (V, E_F)$ von G

Falls F azyklisch $\Rightarrow$ F ist s-Wurzelspannbaum von G!

Beachte: F ist *optimal* bzgl. c' (und somit auch bzgl. c), da $c'(F) = 0$.

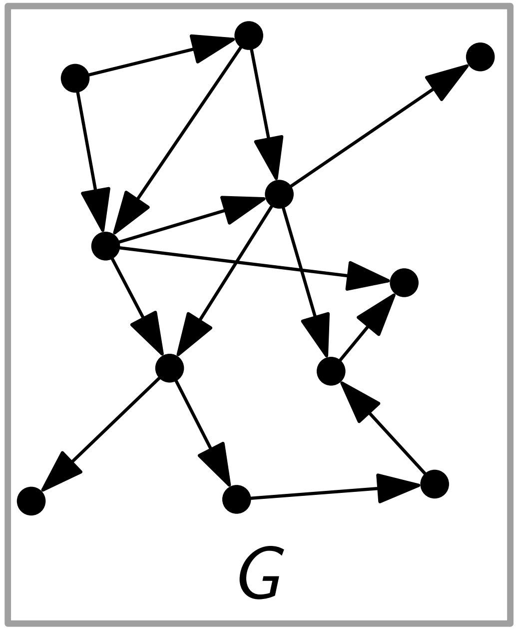
Problem: Was tun, wenn F einen Kreis K enthält?





Kontraktion

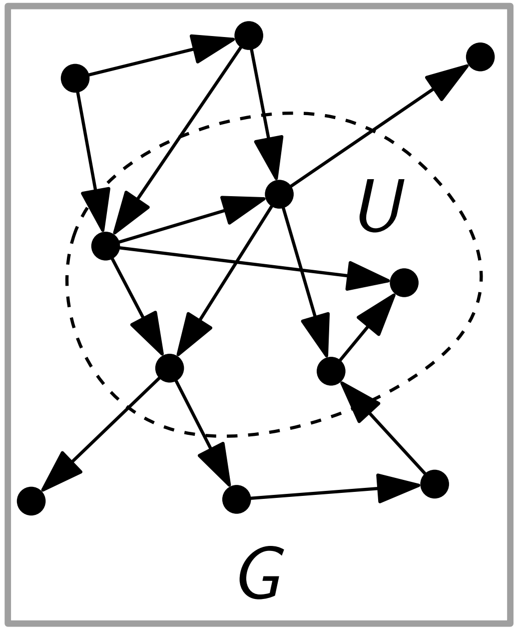
Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

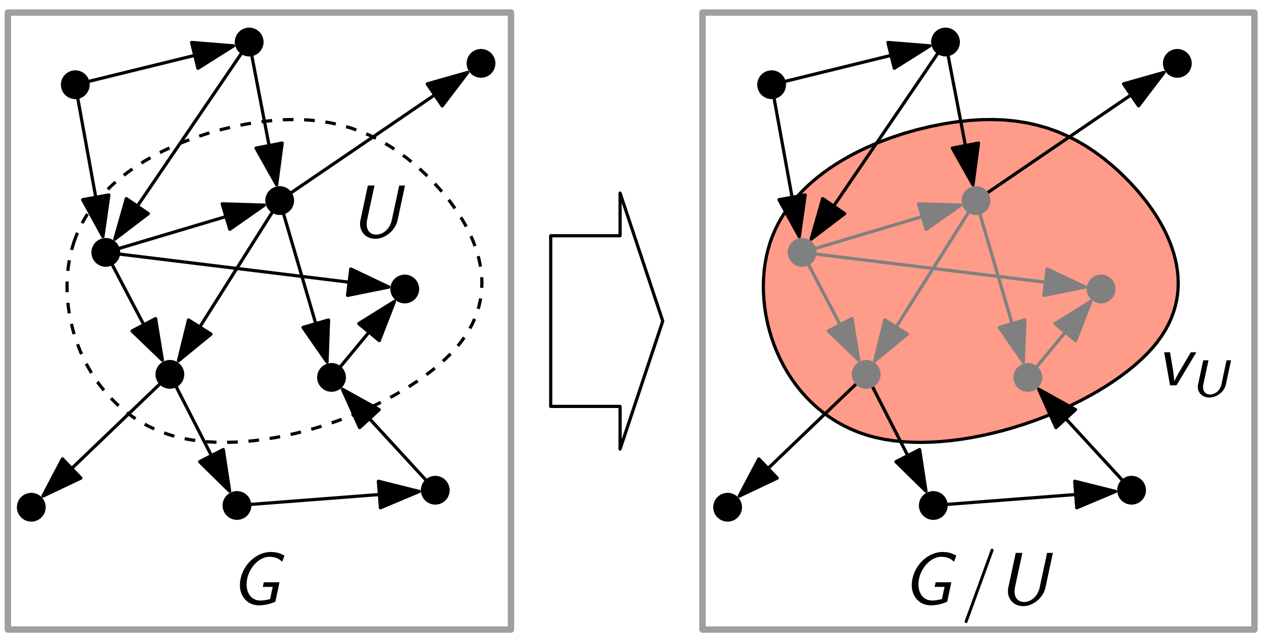
Kontraktion von U: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U.



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

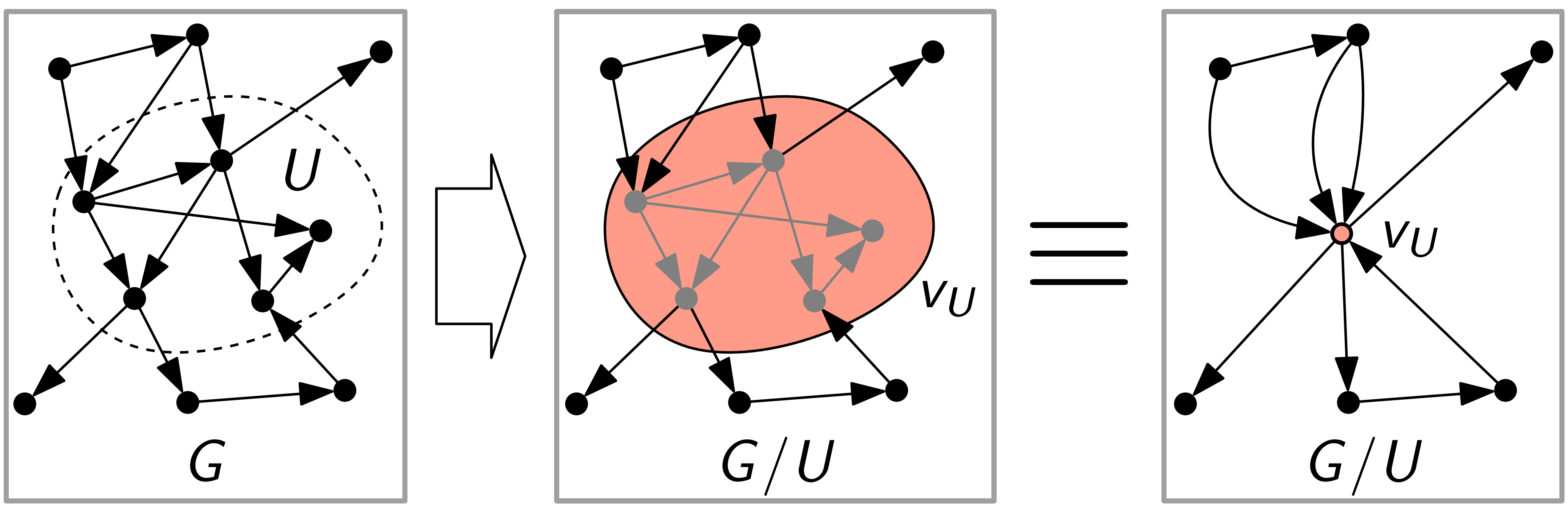
Kontraktion von U: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U.



Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

Kontraktion von U: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U.

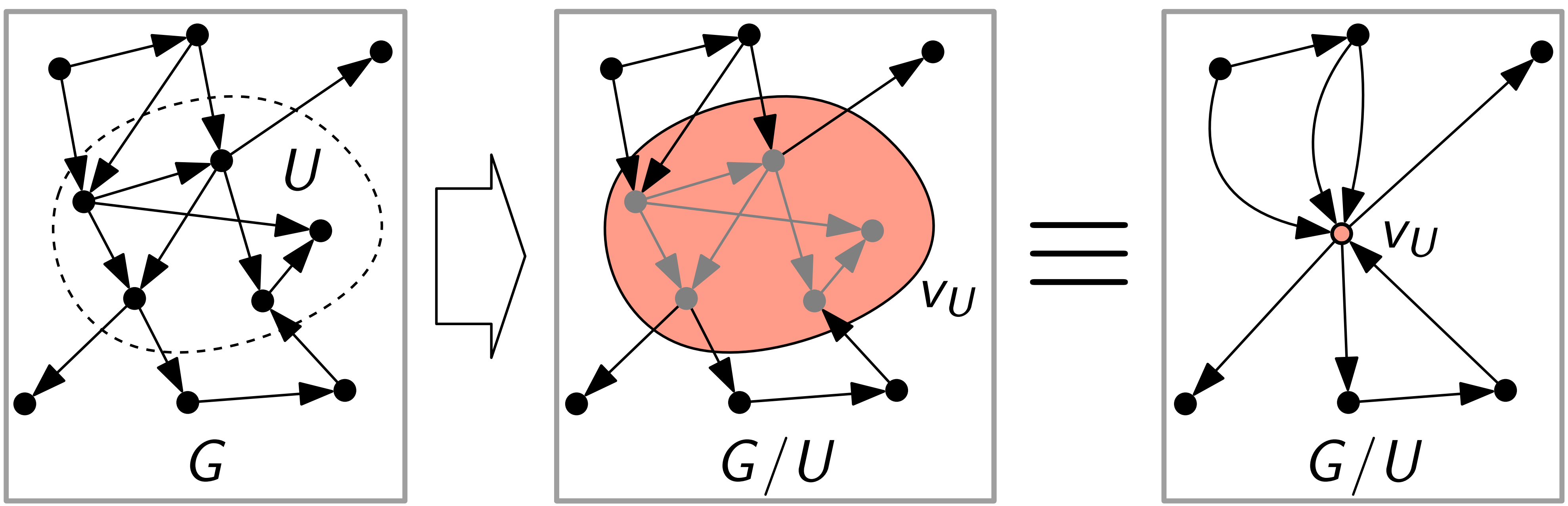


Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U \subseteq V$.

Kontraktion von U: Ersetze $G[U]$ durch neuen Knoten v_U.

Kantenkosten werden auf G/U vererbt.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

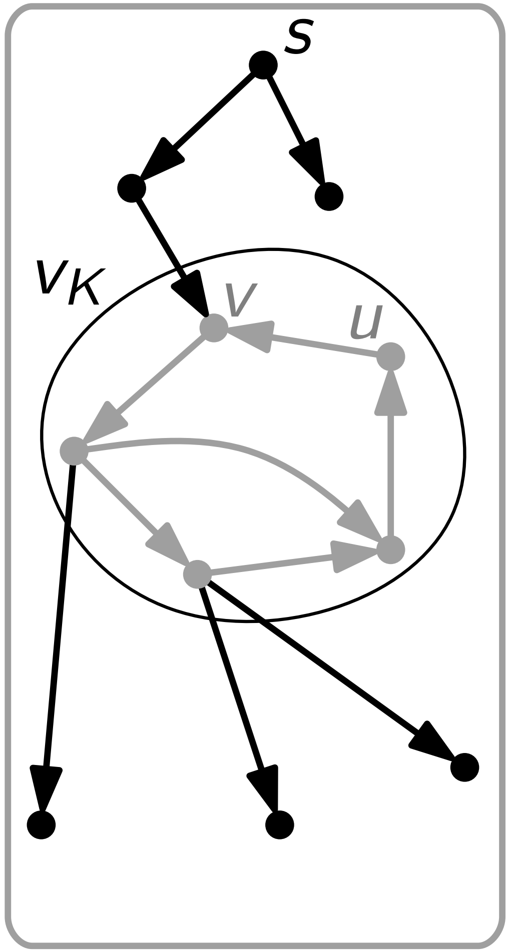
Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.



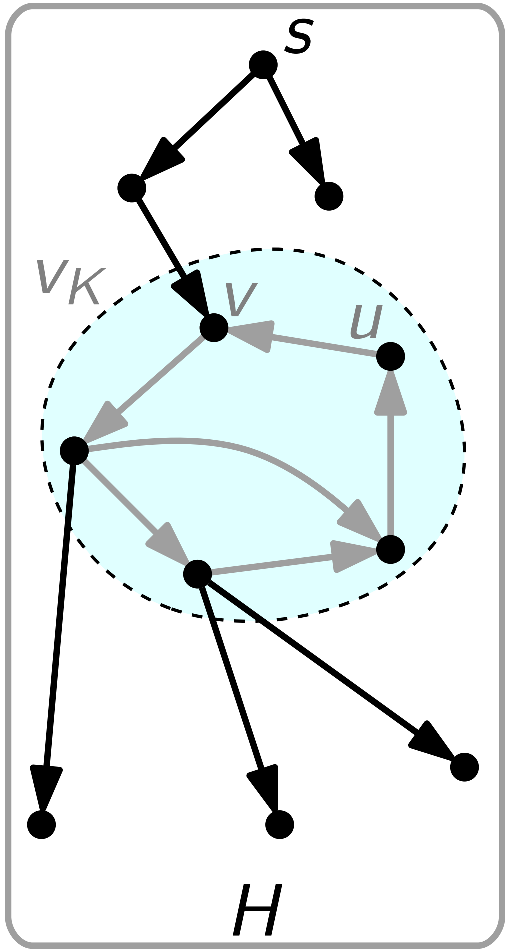
Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

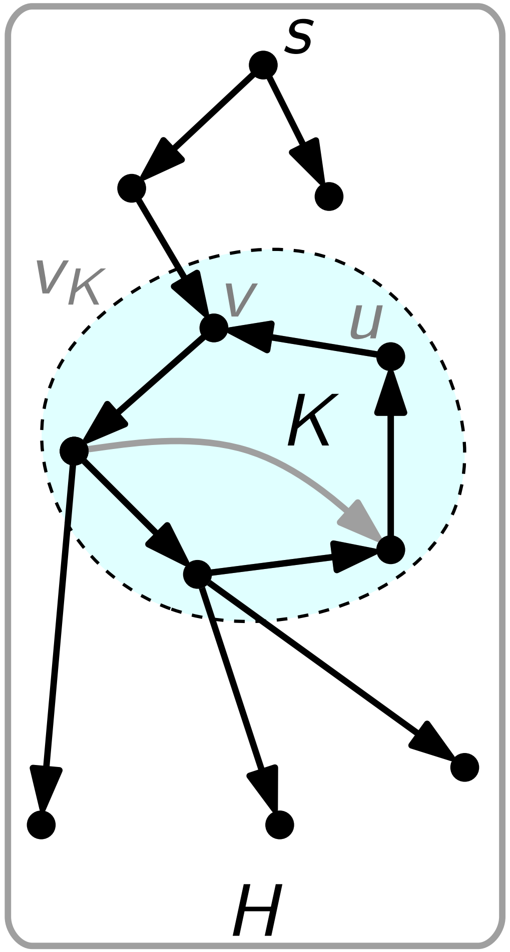
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

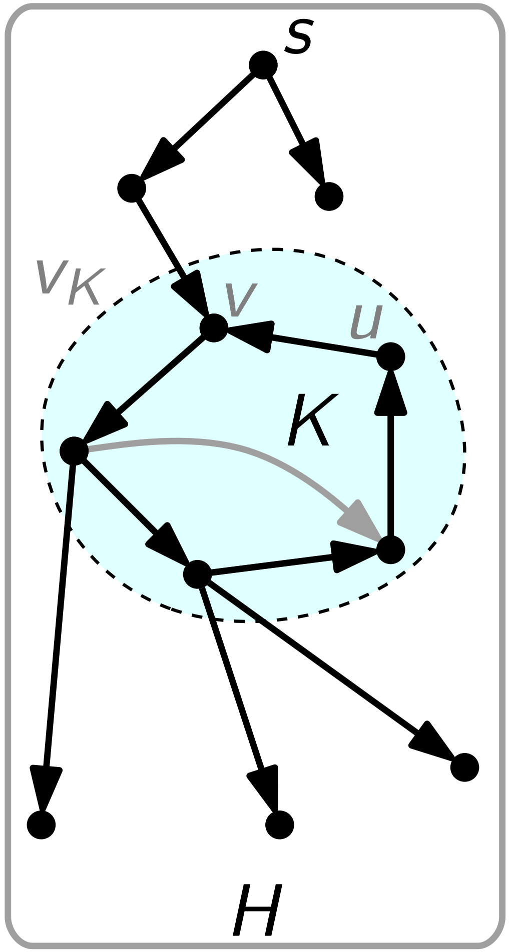
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) =$



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

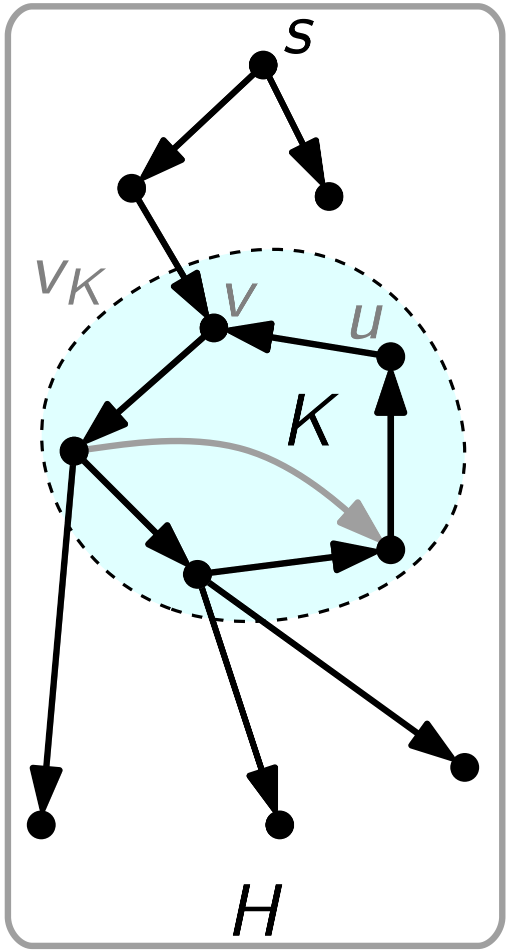
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K.
Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

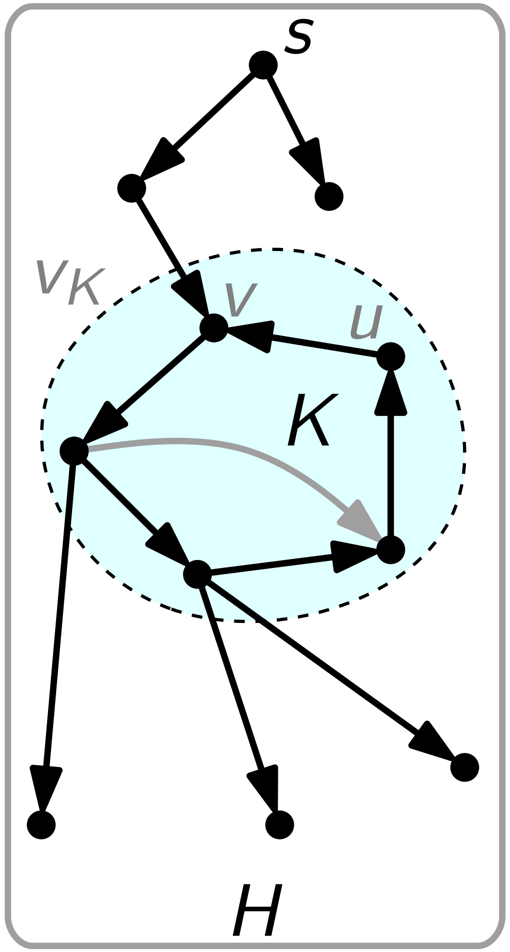
Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\leadsto$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

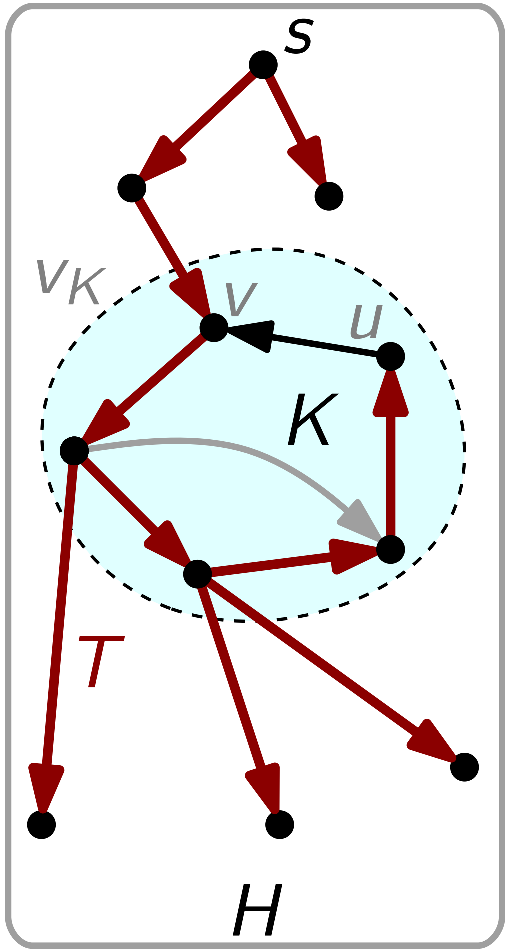
Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s-Wurzelspannbaum T $(= H - uv)$ von H.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

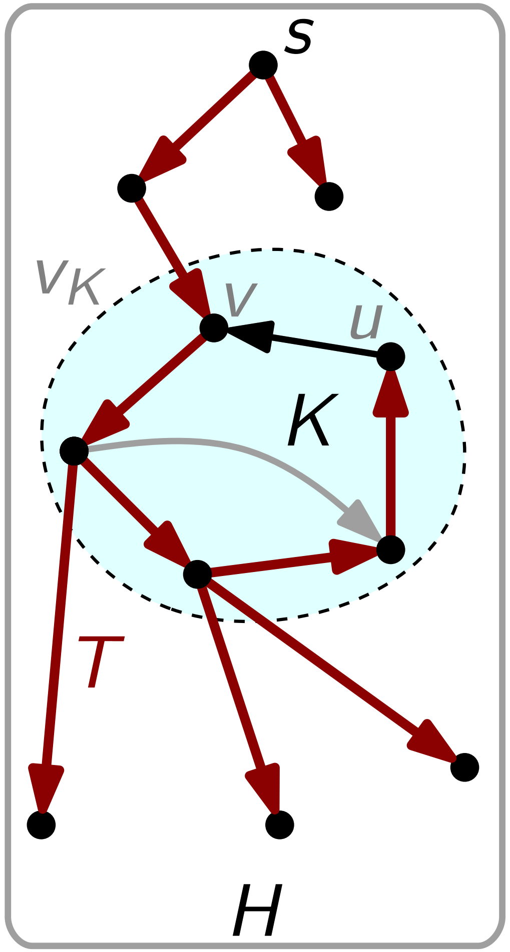
$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s-Wurzelspannbaum T $(= H - uv)$ von H.

T ist s-Wurzelspannbaum von G.



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

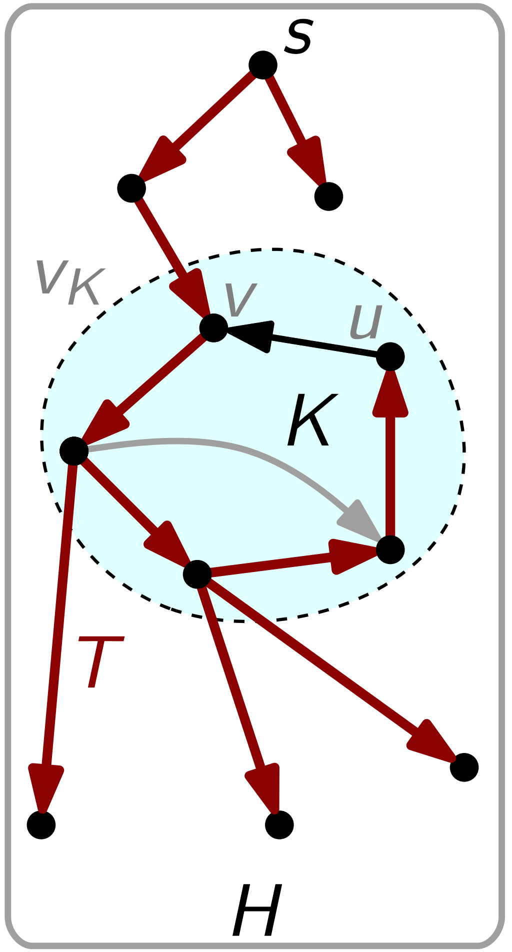
Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s-Wurzelspannbaum T $(= H - uv)$ von H.

T ist s-Wurzelspannbaum von G.

$c'(T) \leq$



Expansion

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Beweis.

Jede Kante in $\tilde{T}$ korrespondiert zu Kante in G.

$\rightsquigarrow$ Teilgraph H von G mit Knotenmenge V.

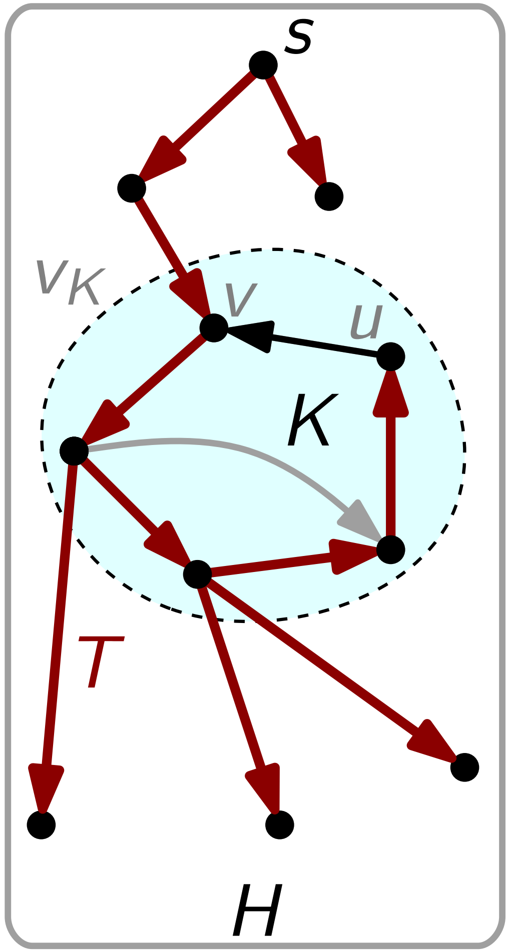
Füge Kreis K zu H hinzu. $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$.

Jeder Knoten in V ist in H von s erreichbar.

Ermittle s-Wurzelspannbaum T $(= H - uv)$ von H.

T ist s-Wurzelspannbaum von G.

$c'(T) \leq c'(H) = c'(\tilde{T})$ $\square$



Algorithmus

[Edmonds 1967]

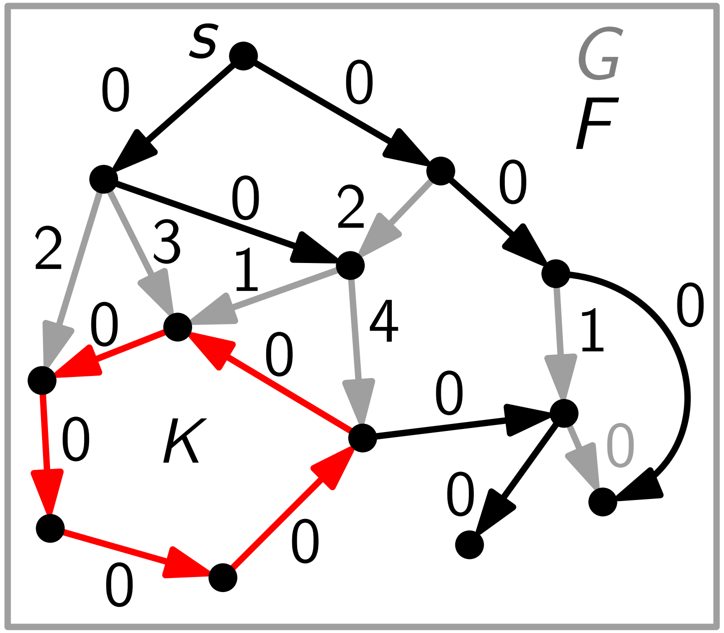
- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.

Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.

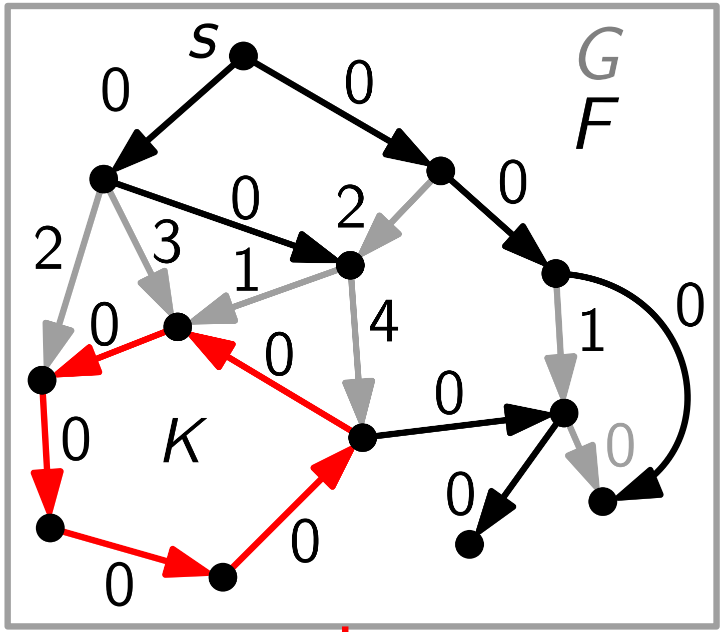


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.



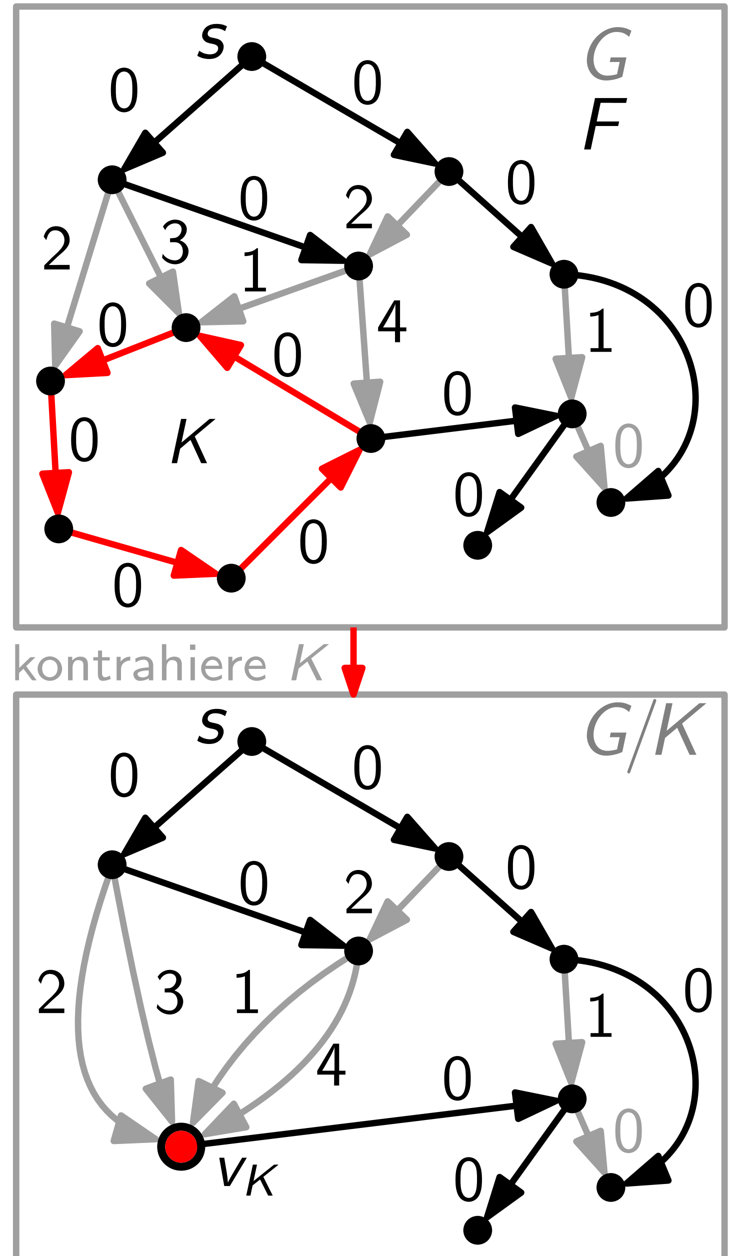
kontrahiere K

Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.

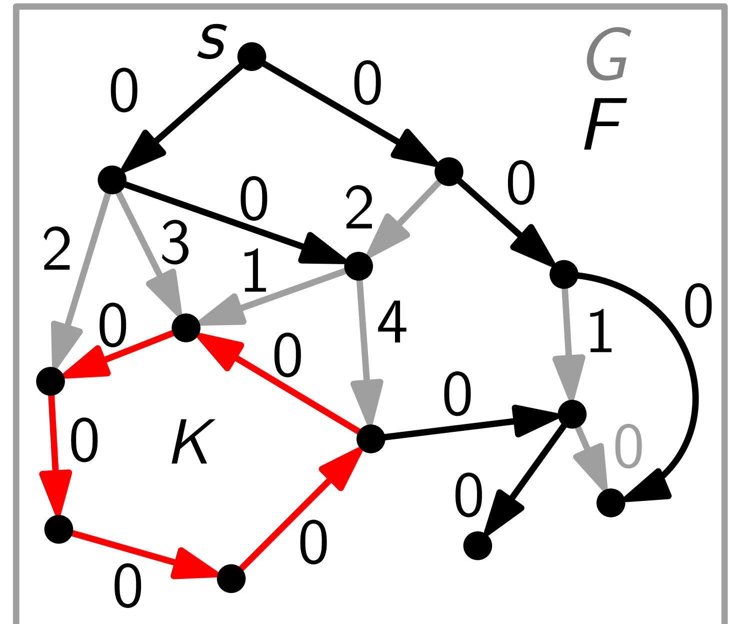


Jack R. Edmonds
*1934

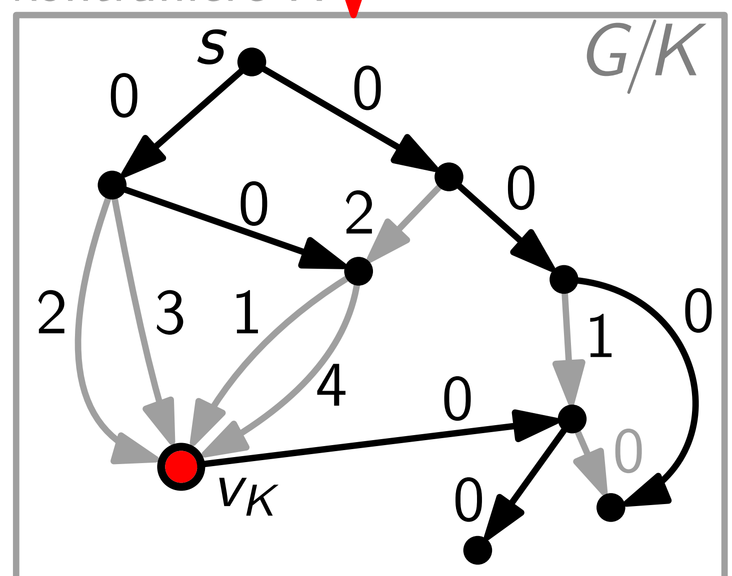
Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.



kontrahiere K

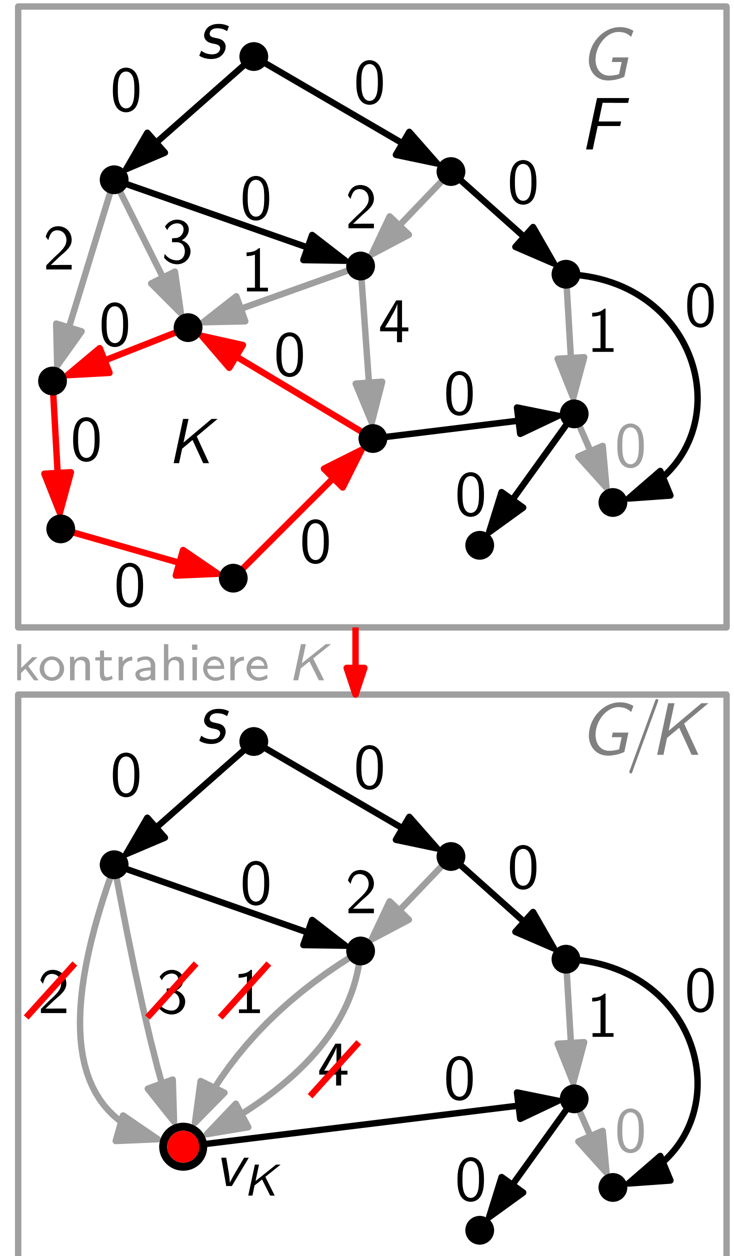


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.

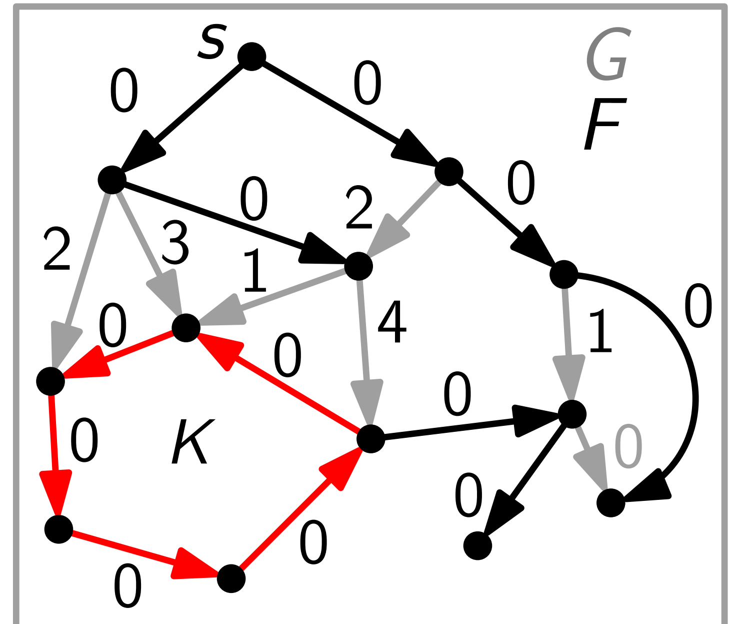


Jack R. Edmonds
*1934

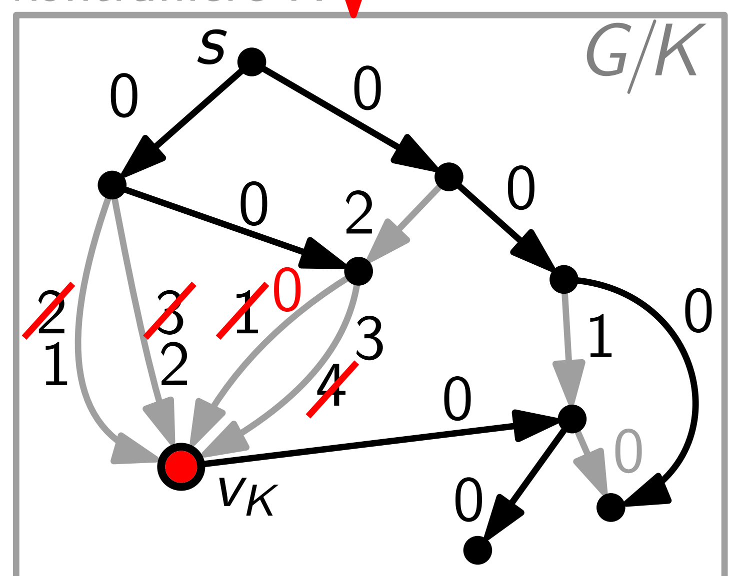
Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.



kontrahiere K

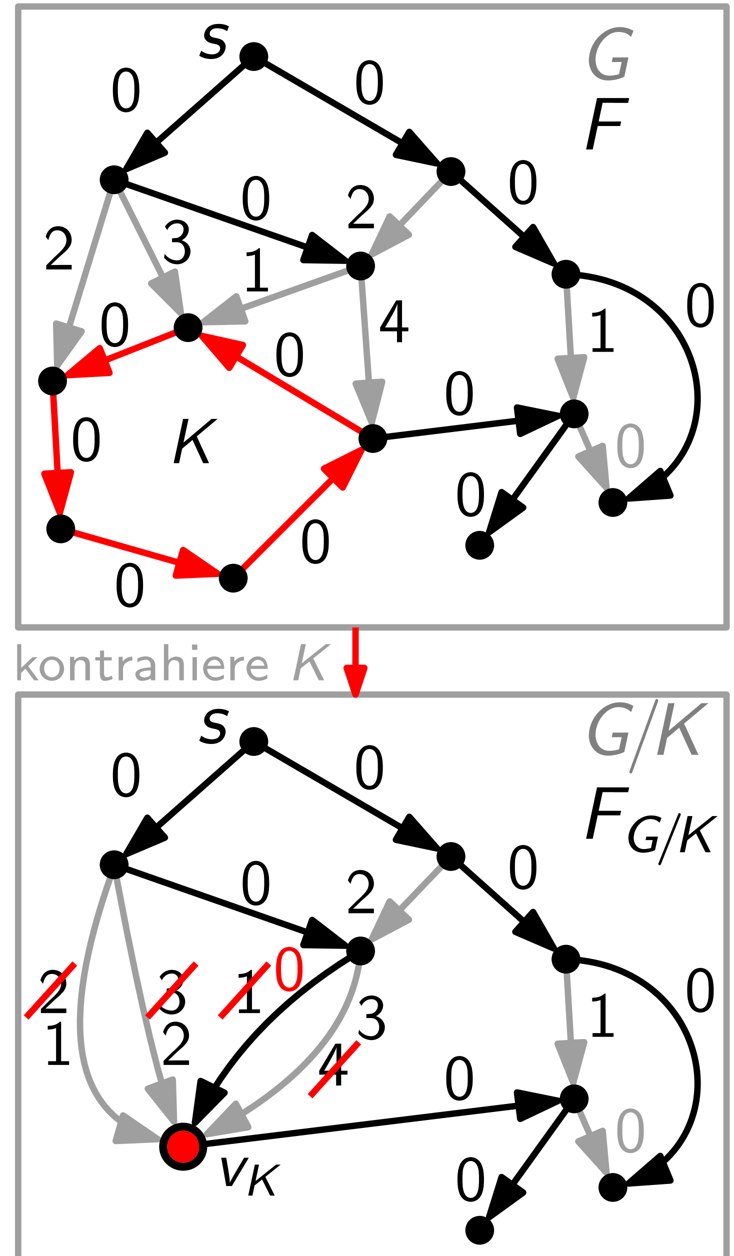


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.

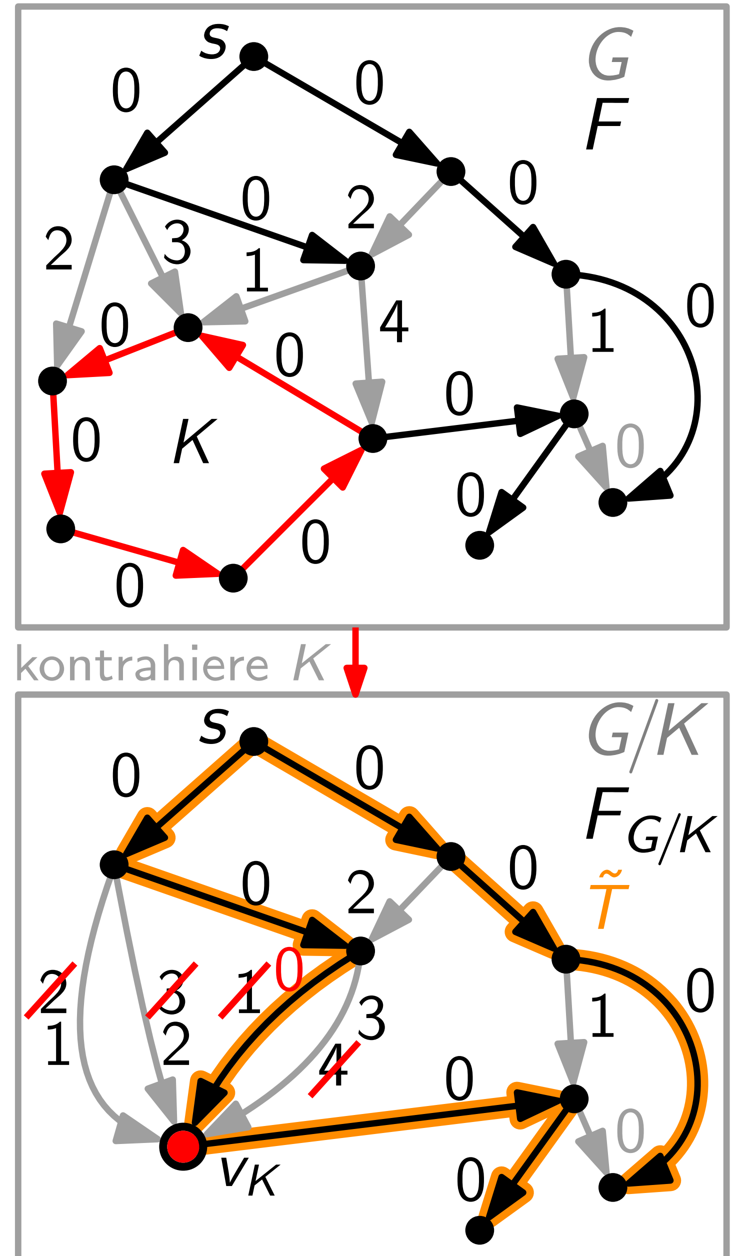


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.

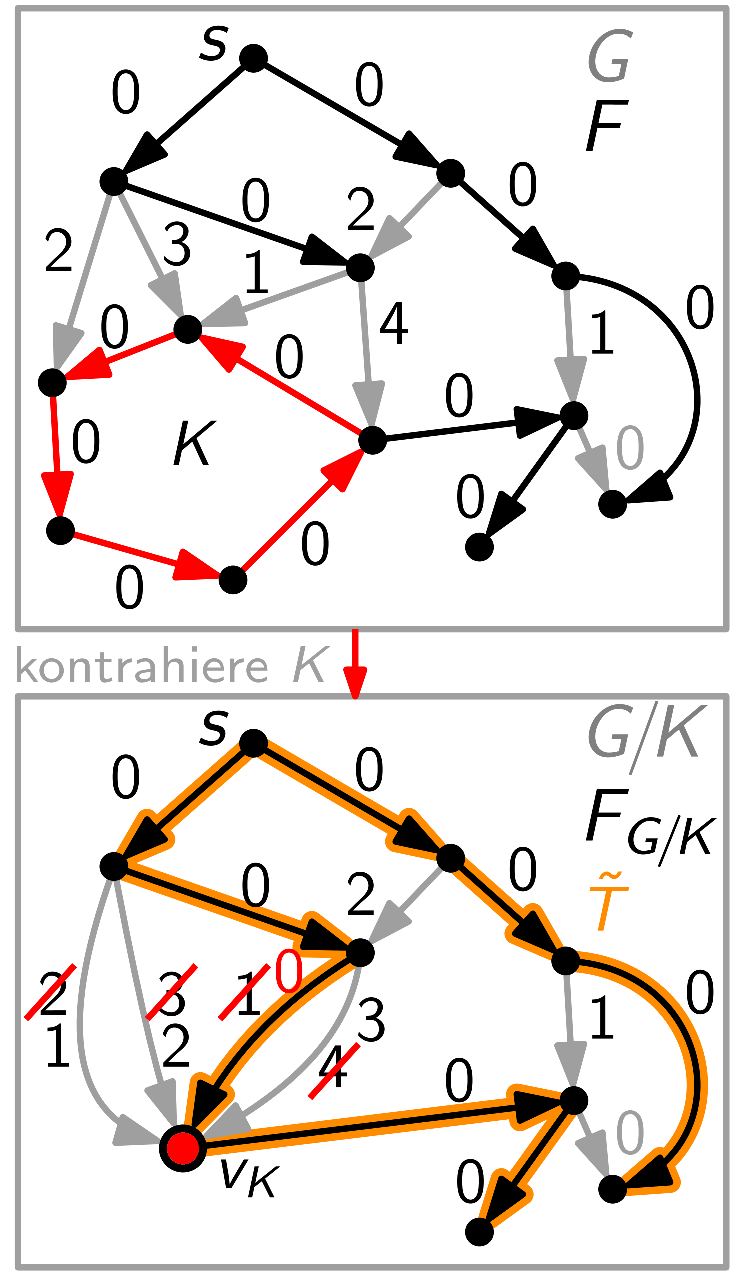


Jack R. Edmonds
*1934

Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G. (nach Lemma 2!)



Jack R. Edmonds
*1934

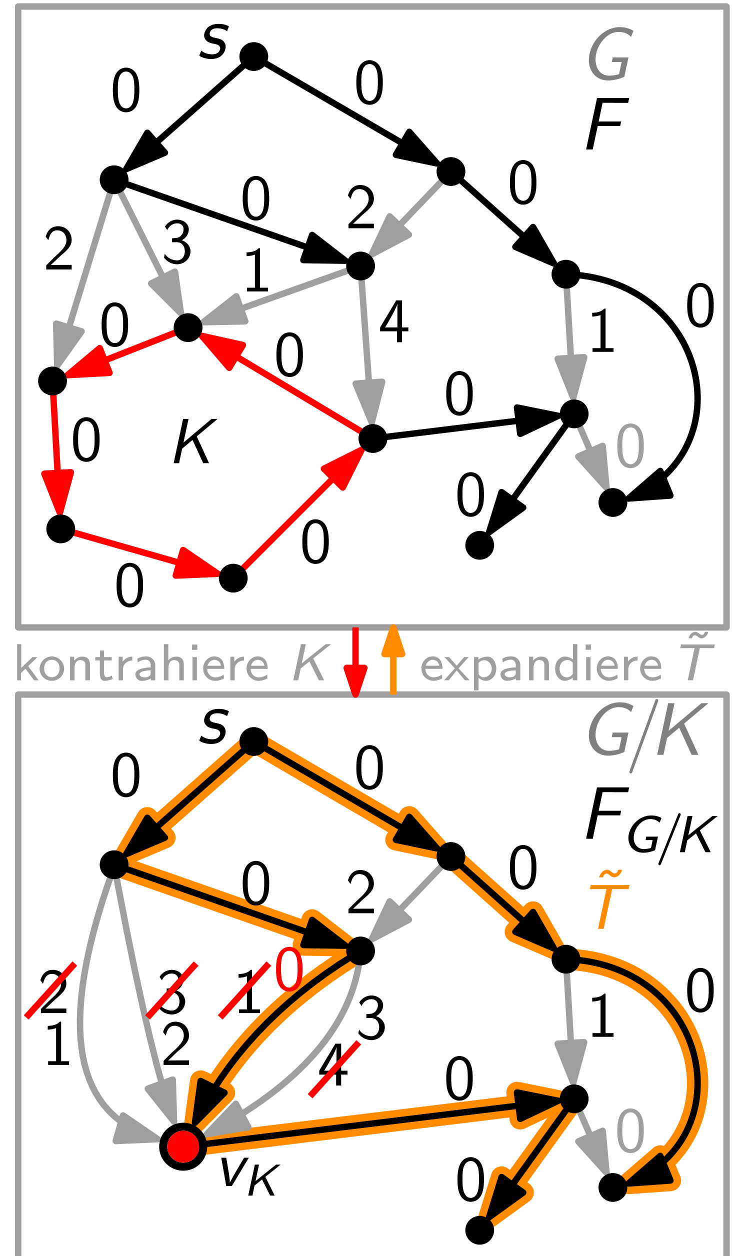
Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G.

(nach Lemma 2!)

Jack R. Edmonds
*1934

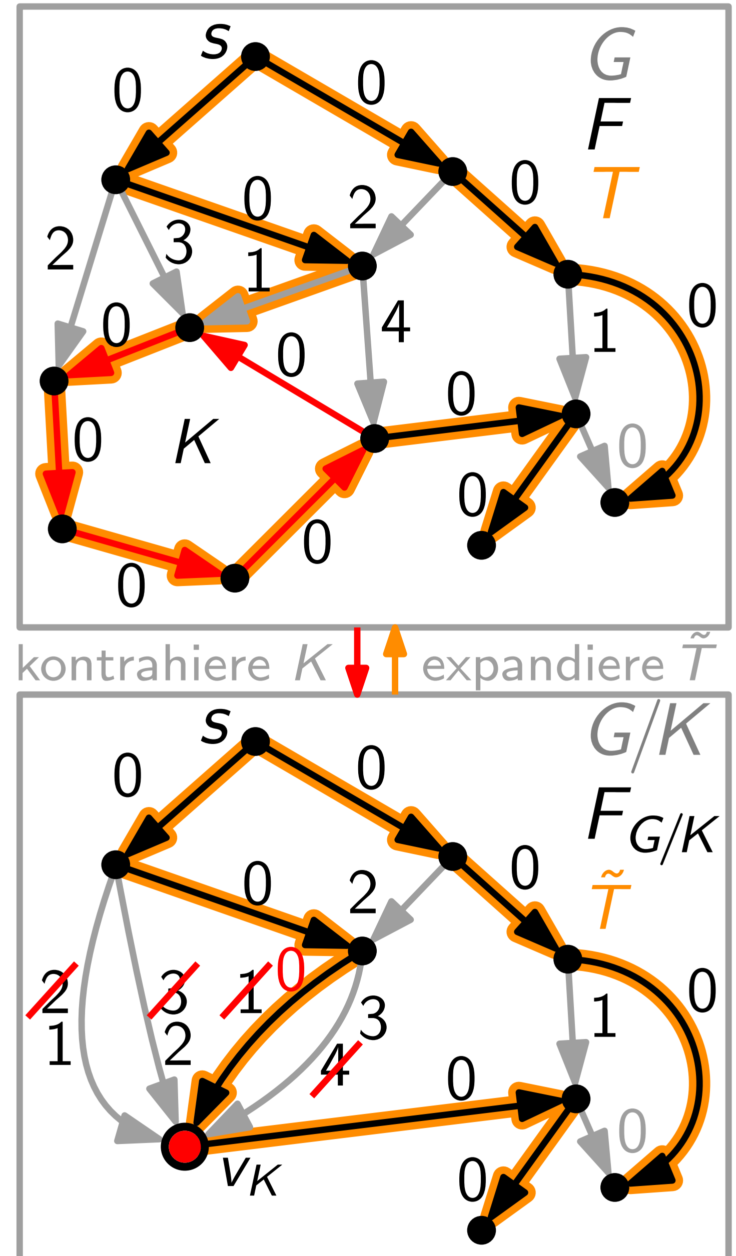


Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G. (nach Lemma 2!)

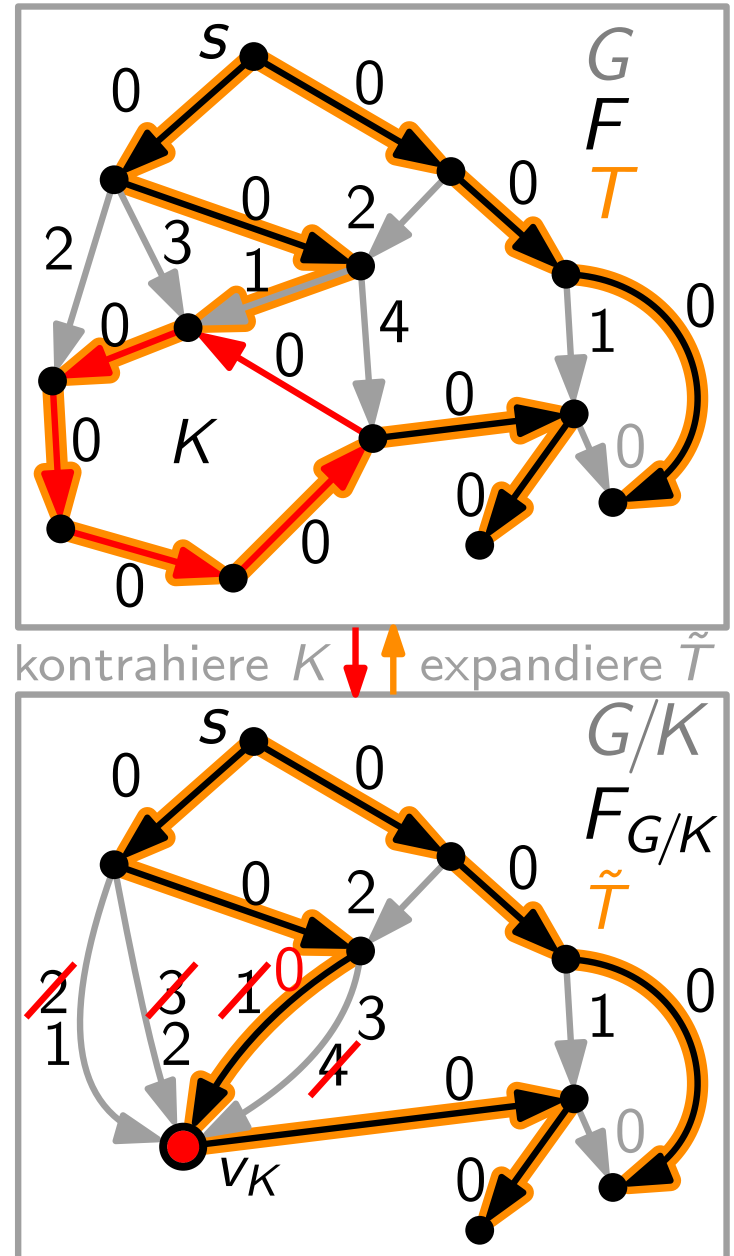
Jack R. Edmonds
*1934



Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G.
  (nach Lemma 2!)
- Gib T zurück.



Jack R. Edmonds
*1934

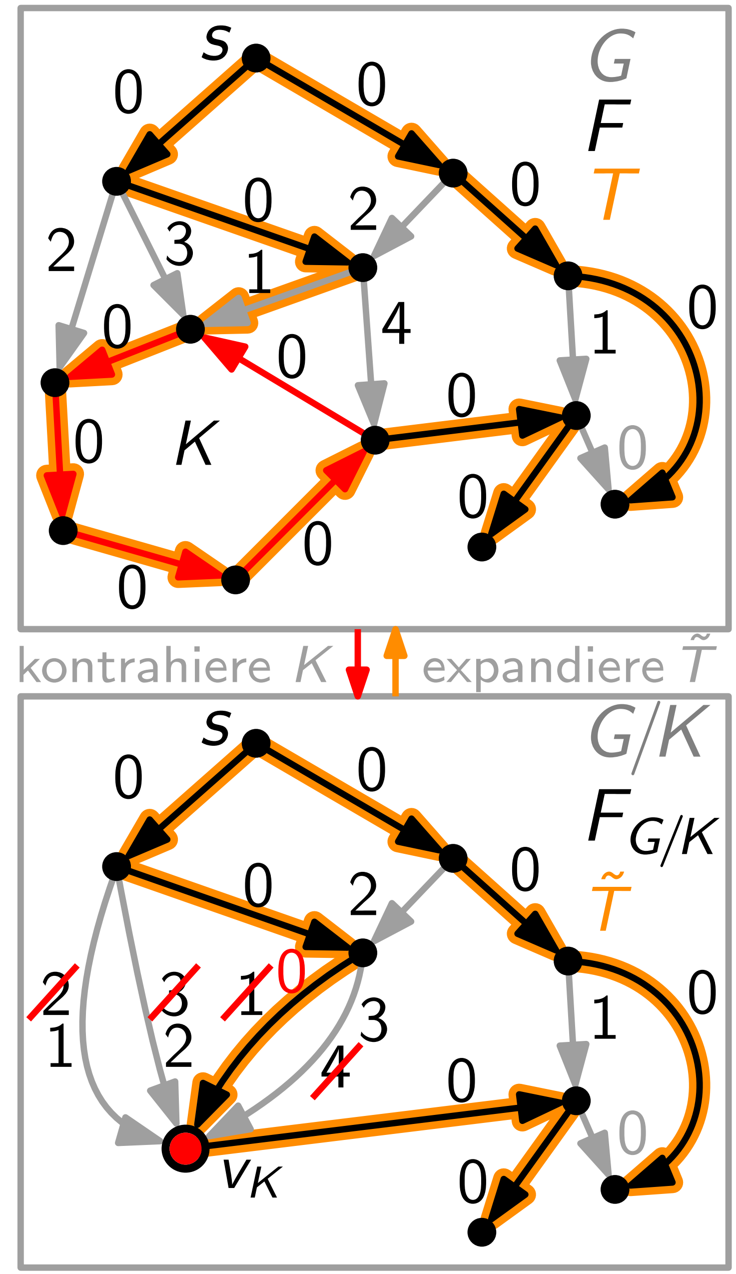
Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an
  $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G.
  (nach Lemma 2!)
- Gib T zurück.

– Optimalität?

Jack R. Edmonds
*1934



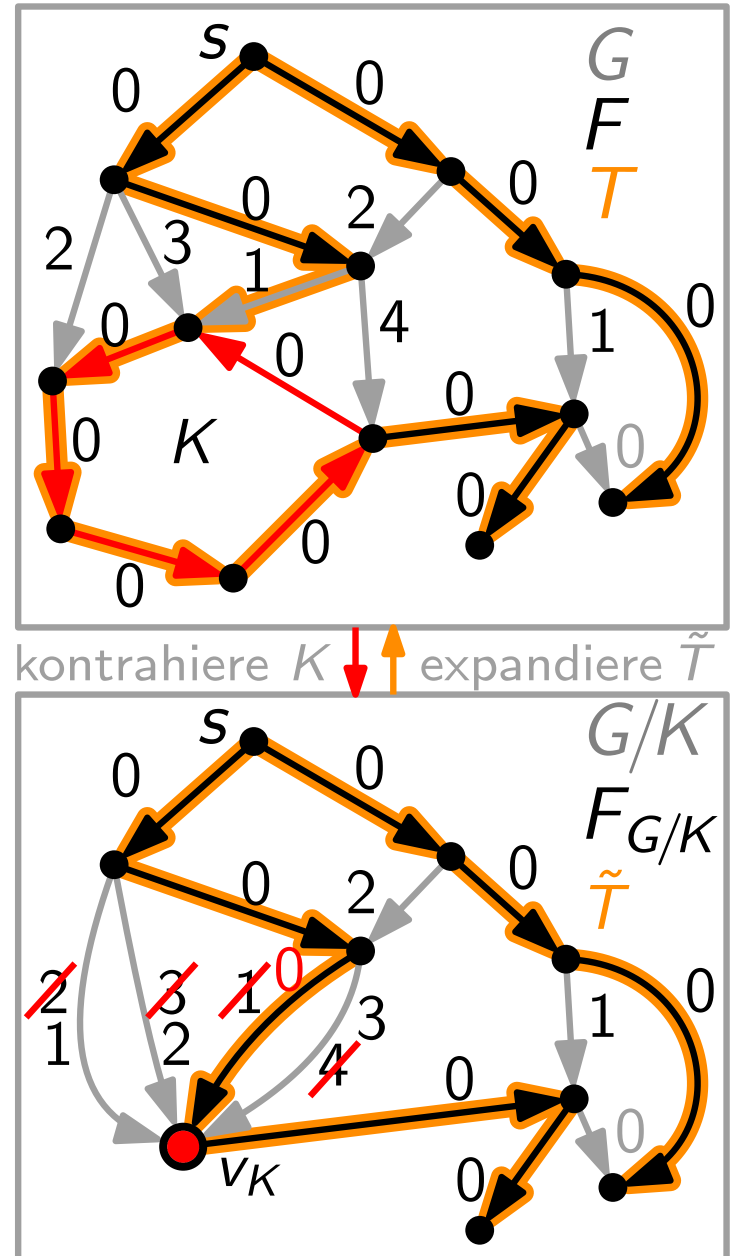
Algorithmus

[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'.
- Bestimme Teilgraph F.
- Falls F azyklisch, gib F zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis K in F.
- Kontrahiere G zu G/K.
- Wende Algorithmus rekursiv auf $(G/K, c')$ an $\rightsquigarrow$ s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ für G/K.
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G. (nach Lemma 2!)
- Gib T zurück.

– Optimalität?
– Laufzeit?

Jack R. Edmonds
*1934



Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(V)$ rekursive Aufrufe.

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow$ $O(V)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(E)$ Zeit.

Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn $|V| \leq 2$.

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1. $\Rightarrow O(V)$ rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils $O(E)$ Zeit.

Satz. Angewandt auf einen gewichteten (Multi-) Graphen $G = (V, E)$, läuft Edmonds' Algorithmus in $O(VE)$ Zeit.

Optimalität

Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

Optimalität

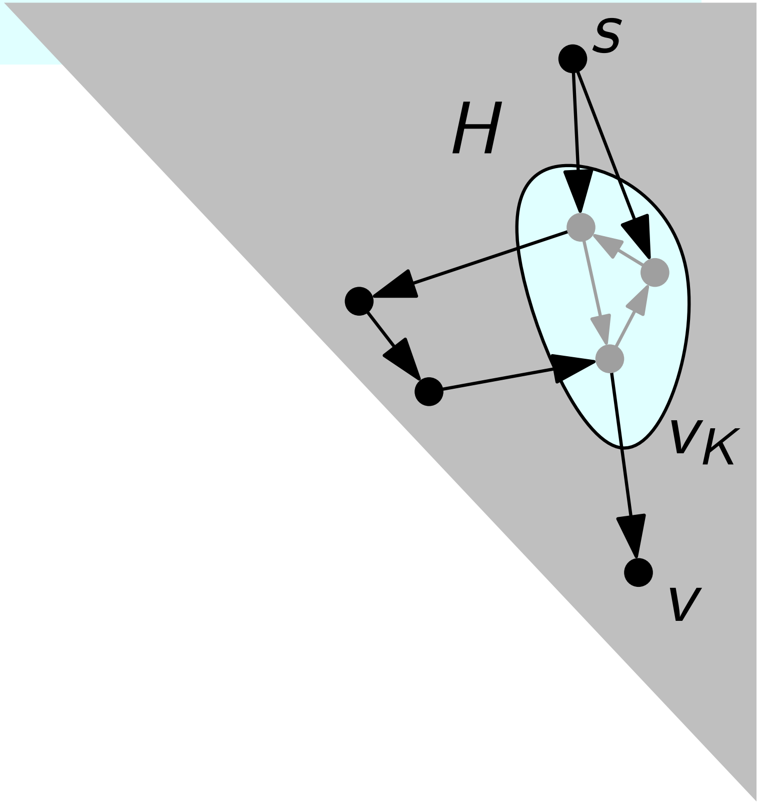
Lem. 2. Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzelspannbaum von G/K. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit $c'(T) \leq c'(\tilde{T})$.

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

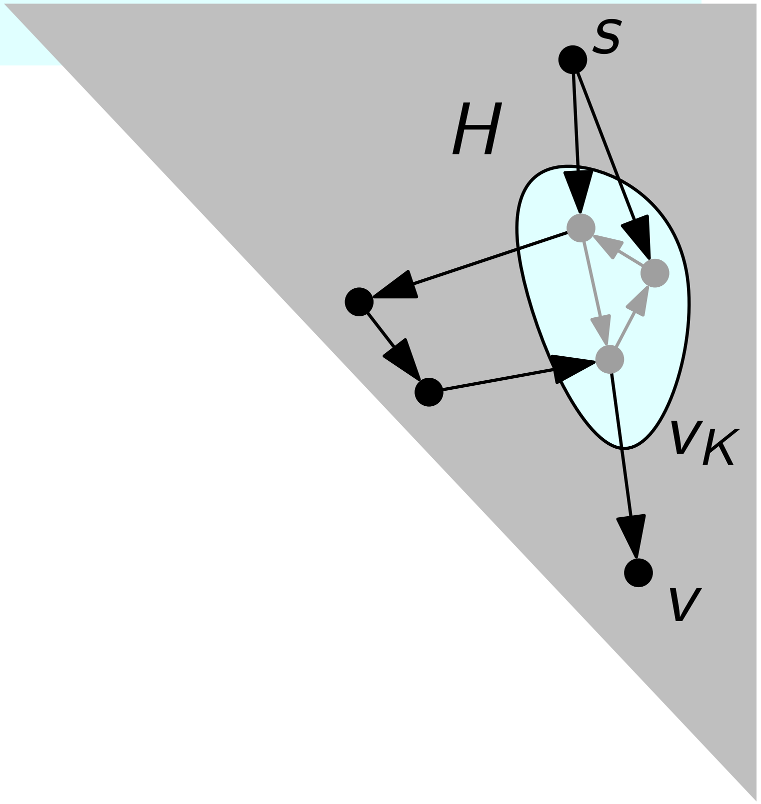


Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq$

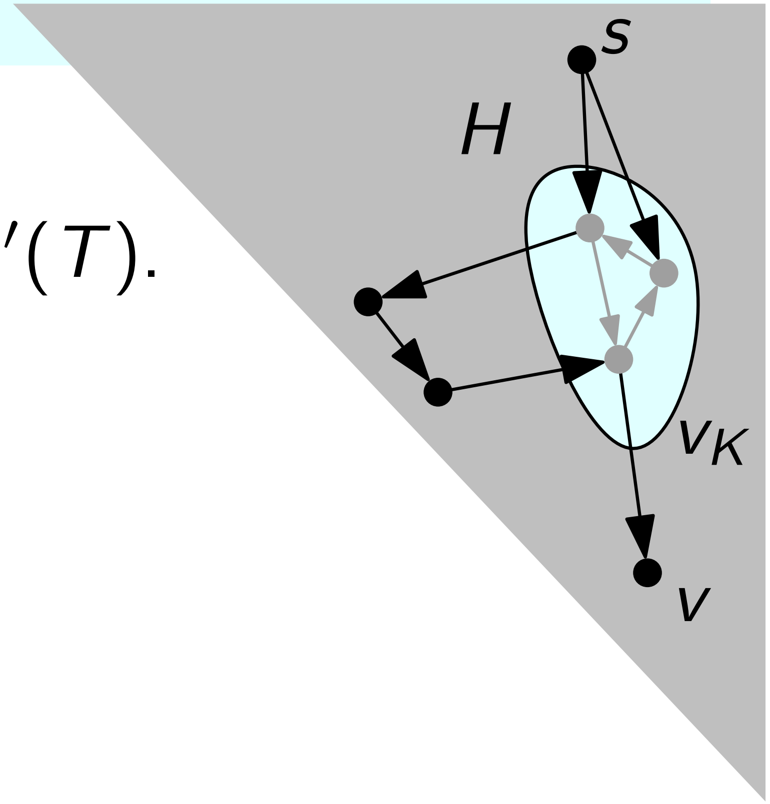


Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.



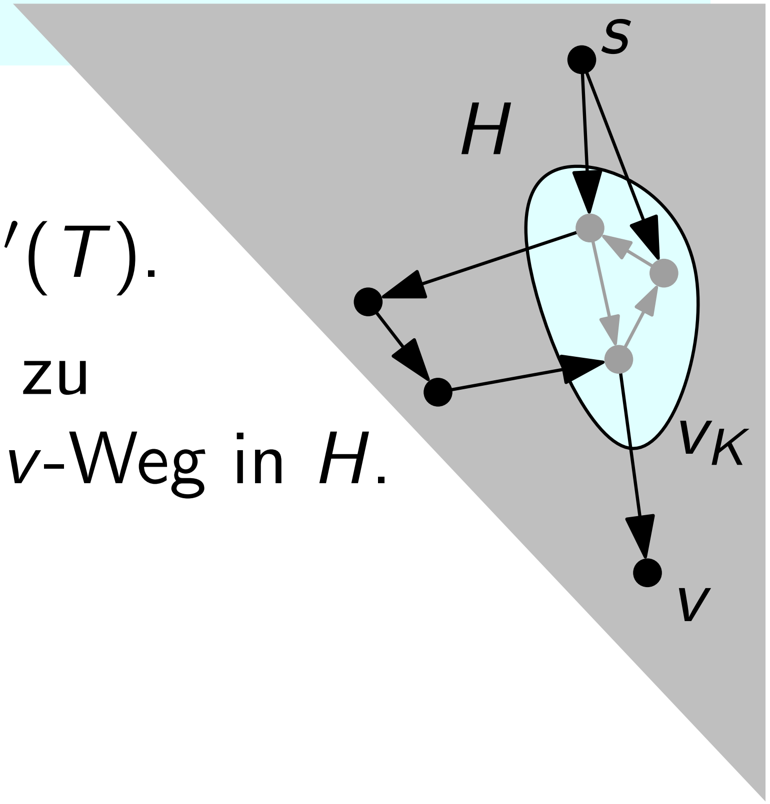
Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

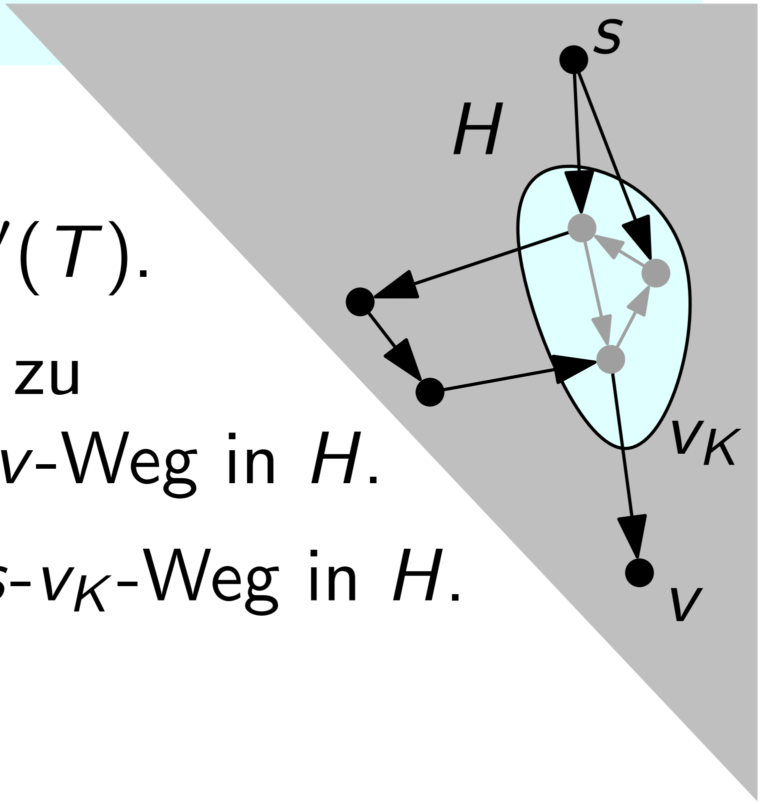
– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.



Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.

Beweis. Setze $H := T/K$.



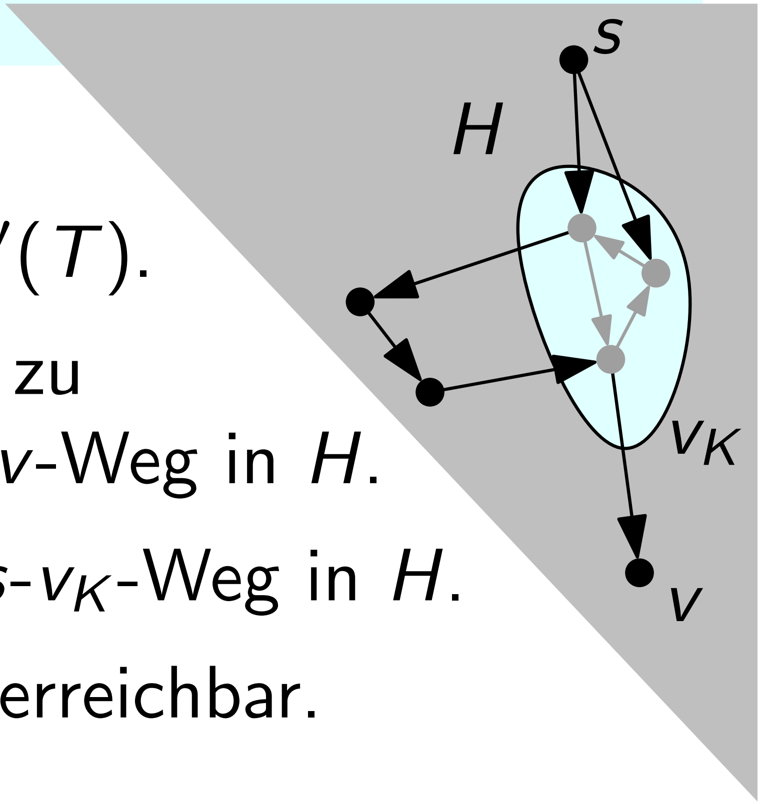
H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \le c'(T)$.

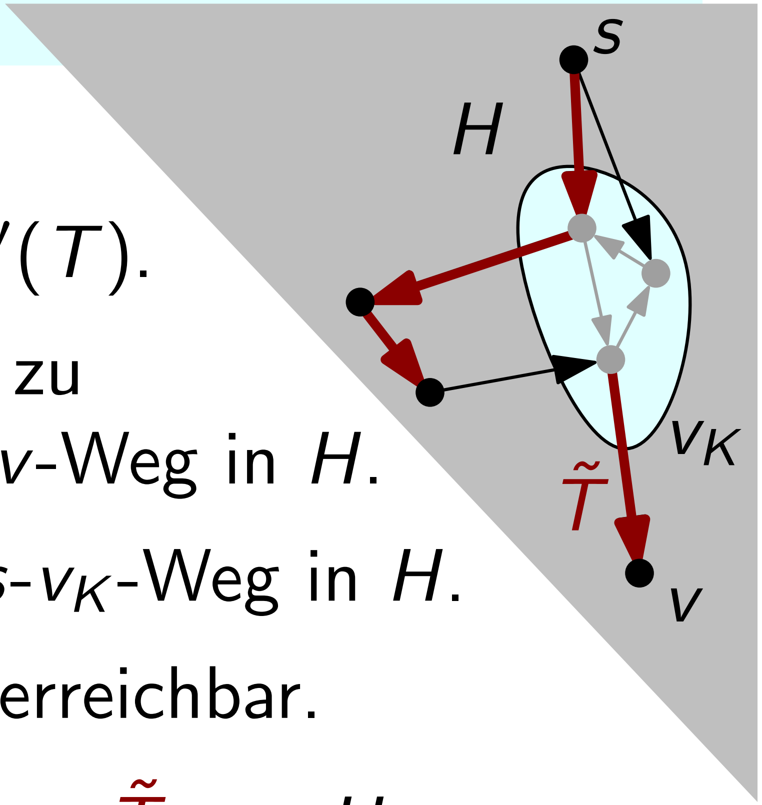
– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

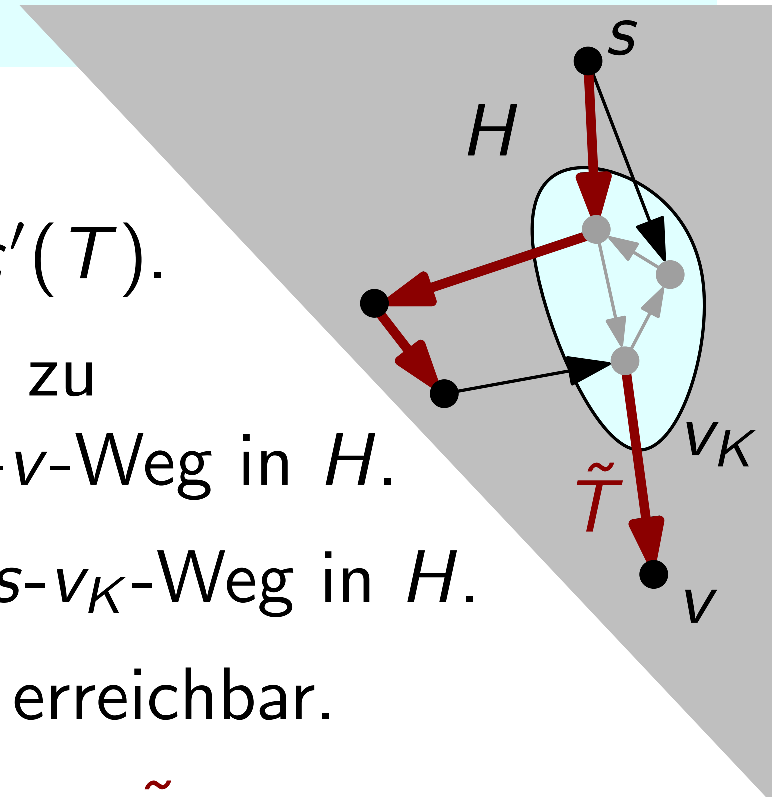
– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H.

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

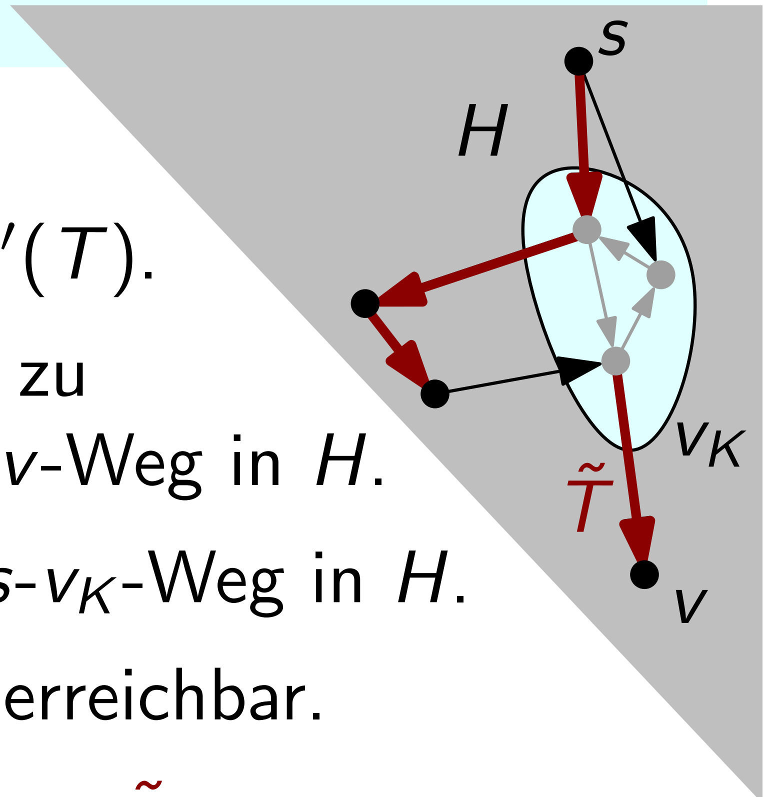
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch s-Wurzelspannbaum von G/K

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

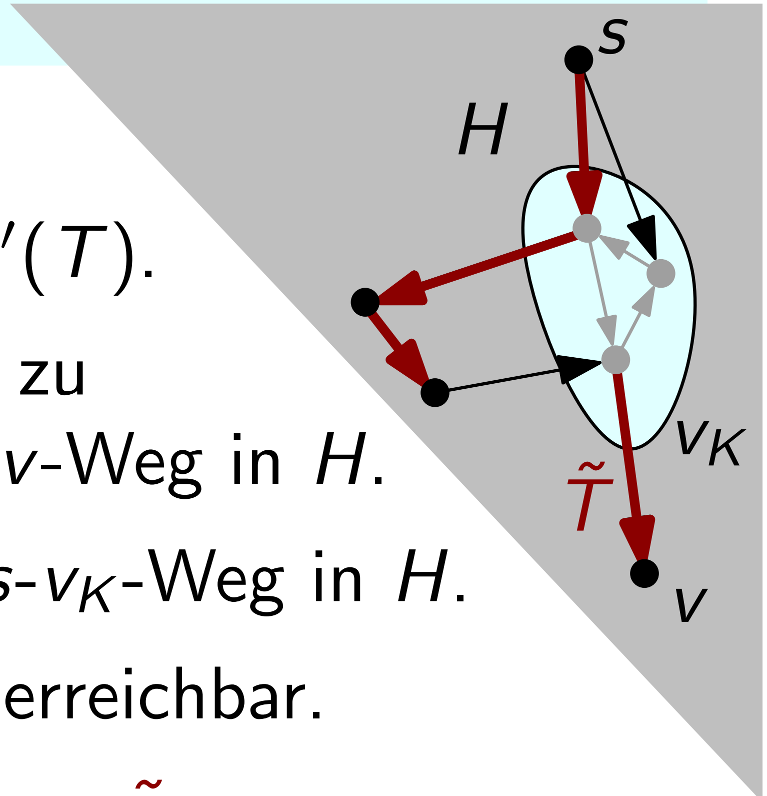
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch s-Wurzelspannbaum von G/K und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq$

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

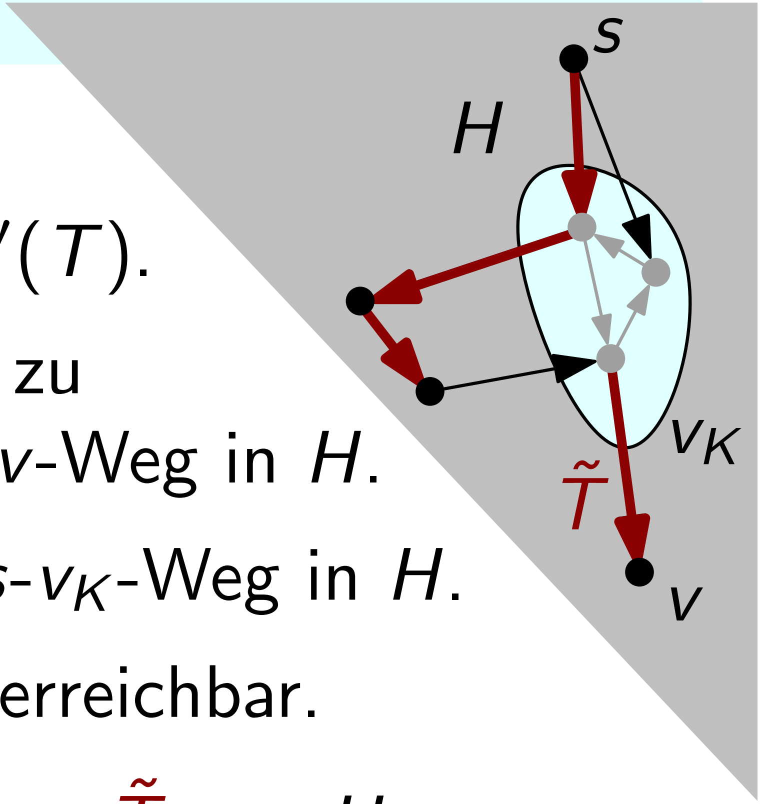
$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch s-Wurzelspannbaum von G/K und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq$

Optimalität

Lem. 3. Sei K Kreis in F und T s-Wurzelspannbaum von G. Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$.



Beweis. Setze $H := T/K$.

H ist Teilgraph von G/K mit $c'(H) \leq c'(T)$.

– Jeder s-v-Weg ($v \in V \setminus K$) in T wird zu (nicht notwendigerweise einfachem) s-v-Weg in H.

– Jeder s-u-Weg ($u \in K$) in T wird zu s-v_K-Weg in H.

$\Rightarrow$ Jeder Knoten in G/K ist in H von s erreichbar.

Betrachte (beliebigen) s-Wurzelspannbaum $\tilde{T}$ von H.

$\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist auch s-Wurzelspannbaum von G/K und es gilt $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq c'(T)$. $\square$

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

*B*eweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.

Anfang $(n = 1)$: $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt $(n > 1)$:

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star)$

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star)$ $=:$ OPT$'$

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.

Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \le c'(\tilde{T})$.
Lem. 2 liefert s-WSB T von G mit $c'(T) \le c'(\hat{T}) \le \mathrm{OPT}'$.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$.
Lem. 2 liefert s-WSB T von G mit $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \mathrm{OPT}'$.
$\Rightarrow$ T ist optimal bzgl. c'

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓

Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.

Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓

Schritt ($n > 1$):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.

Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.

Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$

IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \le c'(\tilde{T})$.

Lem. 2 liefert s-WSB T von G mit $c'(T) \le c'(\hat{T}) \le \mathrm{OPT}'$.

$\Rightarrow$ T ist optimal bzgl. c' und somit bzgl. c.

Korrektheit

Satz. Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen s-Wurzelspannbaum.

Beweis. Falls F azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl n.
Anfang ($n = 1$): $V = \{s\}$, G azyklisch. ✓
Schritt ($n > 1$):
Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit $k < n$ Knoten.
Sei K Kreis in F und $T^\star$ min. s-Wurzelspannbaum von G.
Lem. 3 $\Rightarrow \exists$ s-WSB $\tilde{T}$ von G/K mit $c'(\tilde{T}) \le c'(T^\star) =: \mathrm{OPT}'$
IA $\Rightarrow$ Algorithmus liefert optimalen s-WSB $\hat{T}$ von G/K.
$\Rightarrow c'(\hat{T}) \le c'(\tilde{T})$.
Lem. 2 liefert s-WSB T von G mit $c'(T) \le c'(\hat{T}) \le \mathrm{OPT}'$.
$\Rightarrow$ T ist optimal bzgl. c' und somit bzgl. c. ✓ $\square$