Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

6. Vorlesung

Matchings / Paarungen II

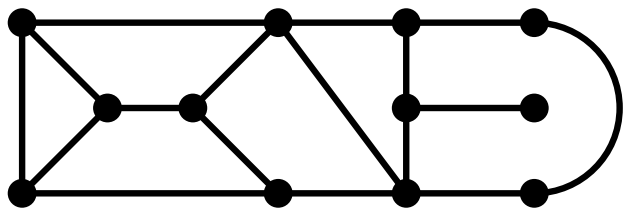
– Kombinatorischer Algorithmus, Anwendung für Handlungsreisende, LP-Runden –

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.

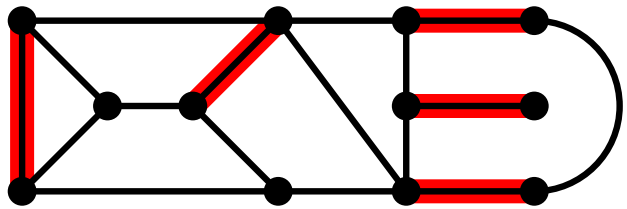


$G = (V, E)$ unger. Graph

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



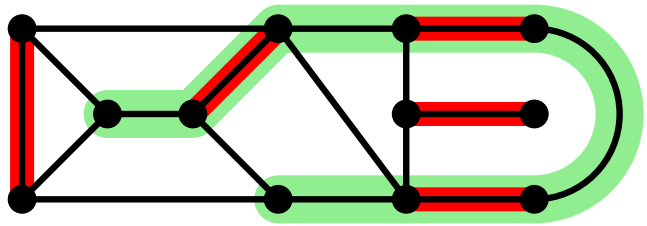
$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



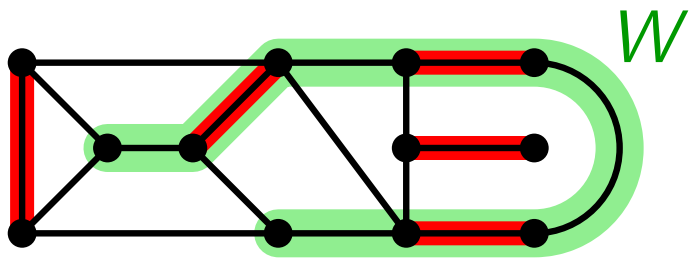
$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

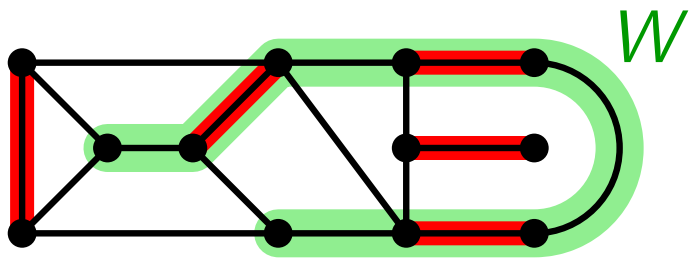
Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

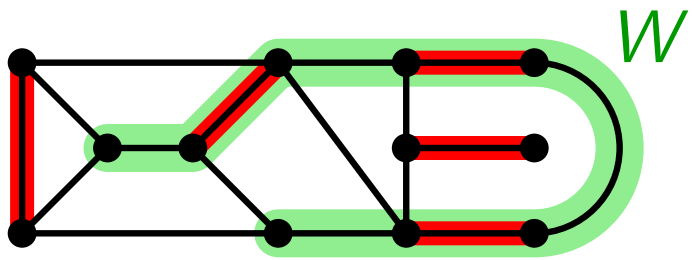
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

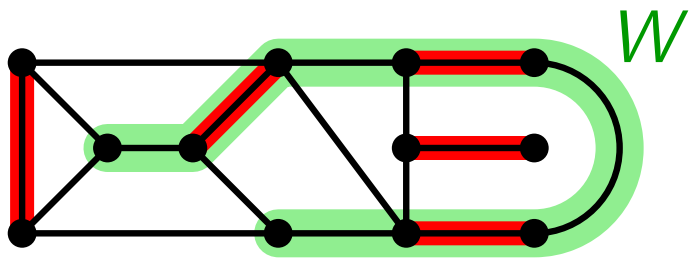
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

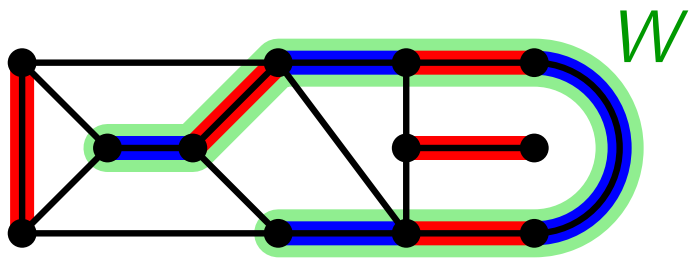
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

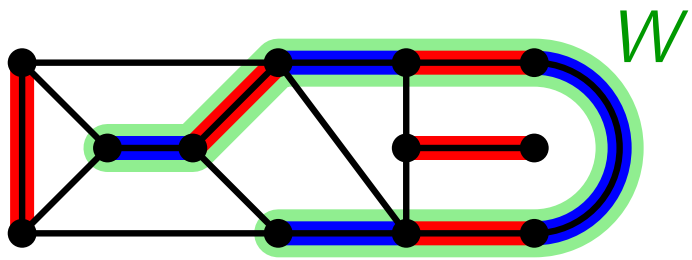
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

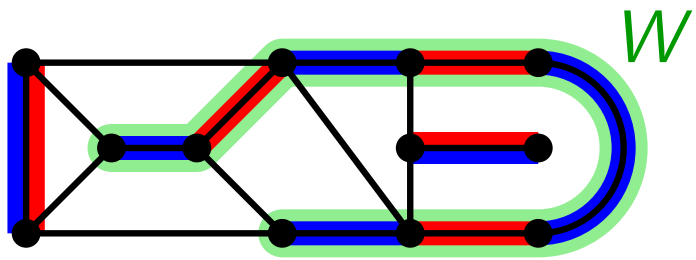
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

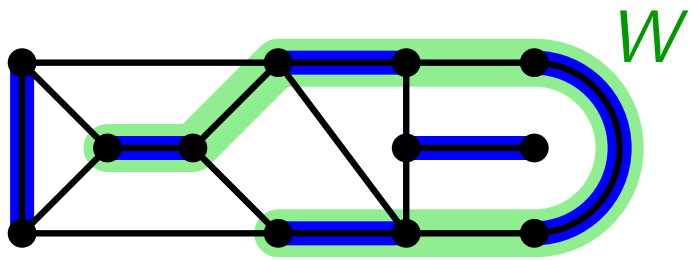
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis → kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

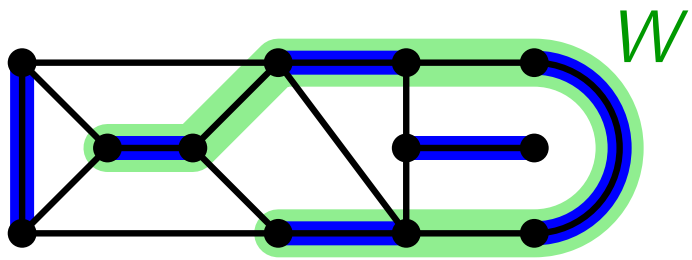
enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis $\rightarrow$ kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

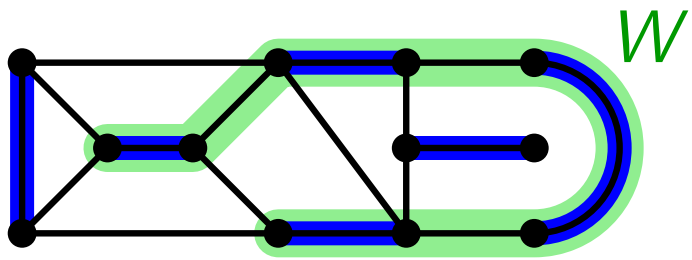
- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob. – Augmentierende Wege haben

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis → kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

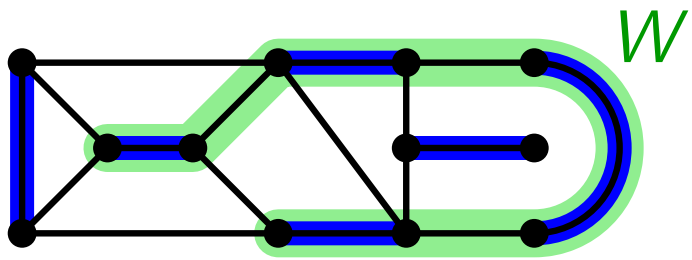
- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob. – Augmentierende Wege haben ungerade Länge.

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis → kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

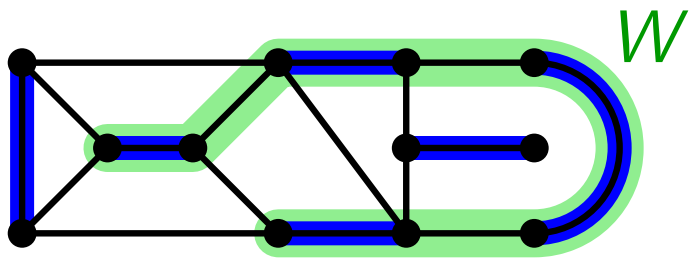
- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob.
– Augmentierende Wege haben ungerade Länge.
– M' ist um 1 Kante größer als M

Alternierende und augmentierende Wege

Ziel: Besseres Problemverständnis → kombinatorische (d.h. nicht flussbasierte) Algorithmen für größte Matchings.

Bsp.



$G = (V, E)$ unger. Graph
$M \subseteq E$ Matching in G.

Wie können wir ein gegebenes (nicht-größtes) Matching vergrößern?

enthält abwechselnd M- und nicht-M-Kanten

- Finde einen (M-) *alternierenden Weg* W, dessen Endknoten *M-frei* sind. So ein Weg heißt (M-) *augmentierend*.
- Setze $M' = W \Delta M$, wobei $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die *symm. Differenz* von A und B ist.

Beob.
- Augmentierende Wege haben ungerade Länge.
- M' ist um 1 Kante größer als M
  (da M' zusätzlich die Endknoten von W paart).

Satz von Berge

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.

Claude Berge
(1926–2002)

Satz von Berge

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz von Berge

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz von Berge

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar:

Satz von Berge

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Claude Berge
(1926–2002)

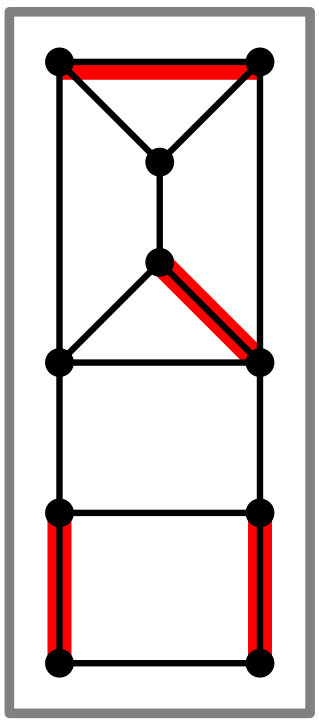
Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.

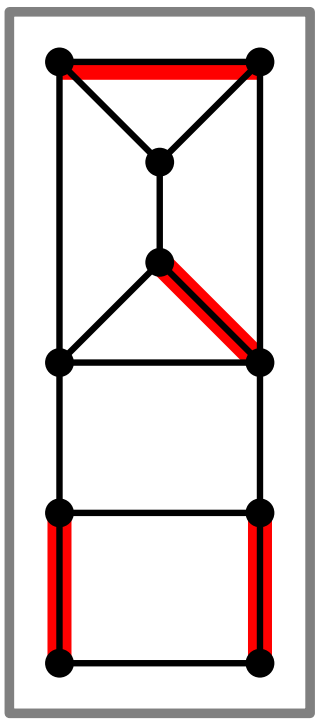


Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

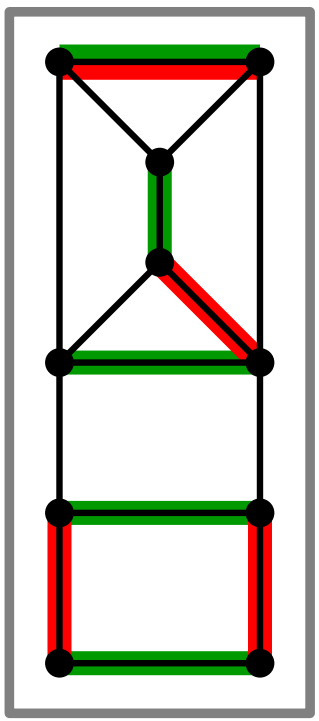


Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.



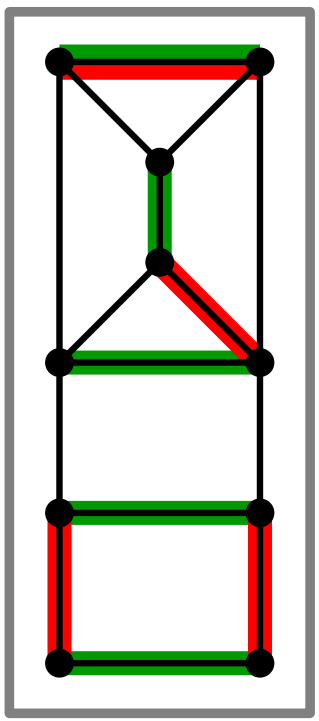
Satz von Berge


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

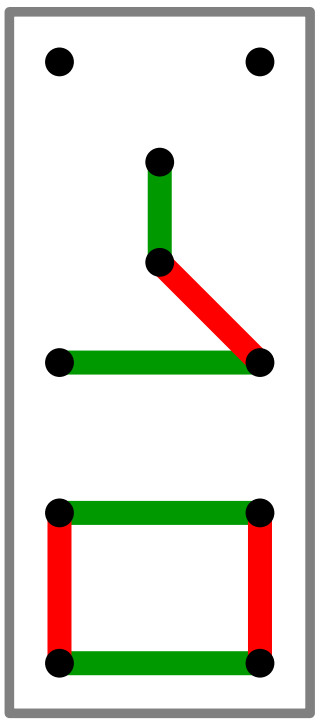
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



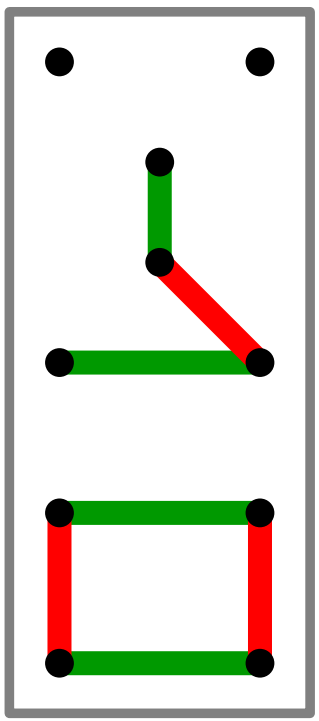
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

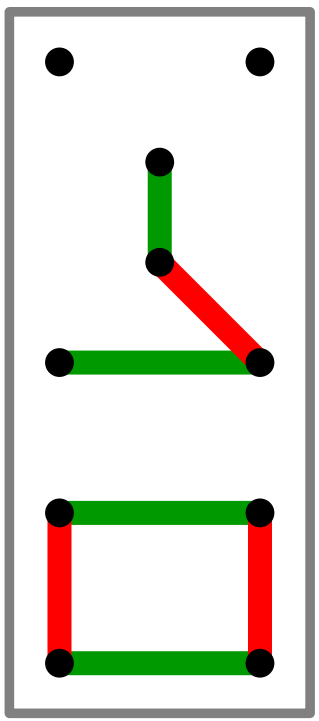
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) =$

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.

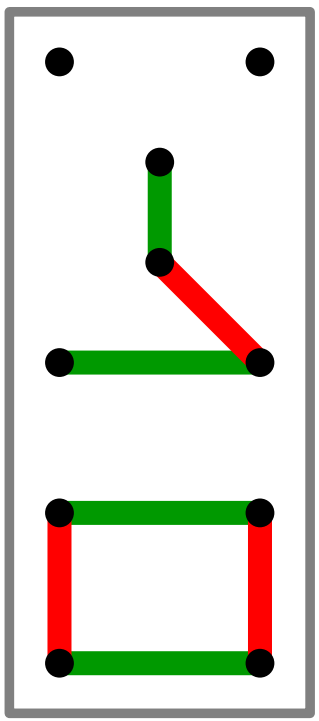
Satz von Berge


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.

Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.

Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.

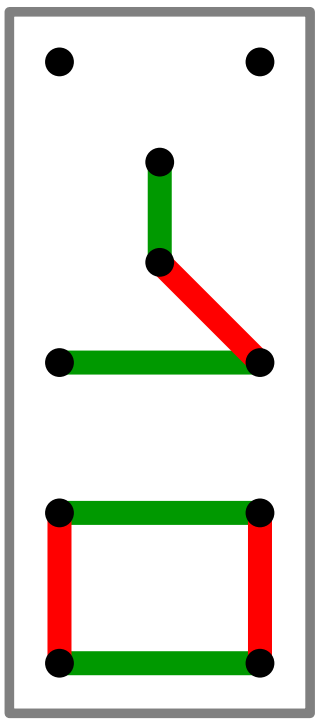
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



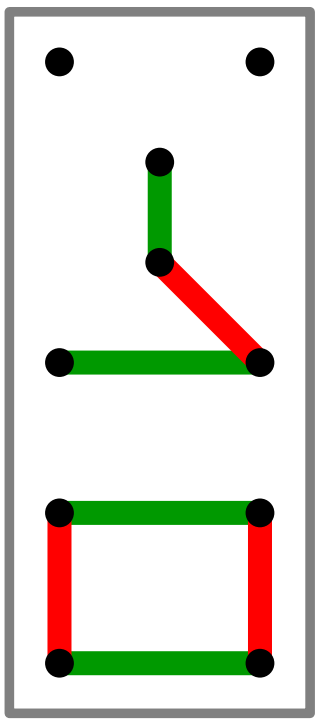
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.

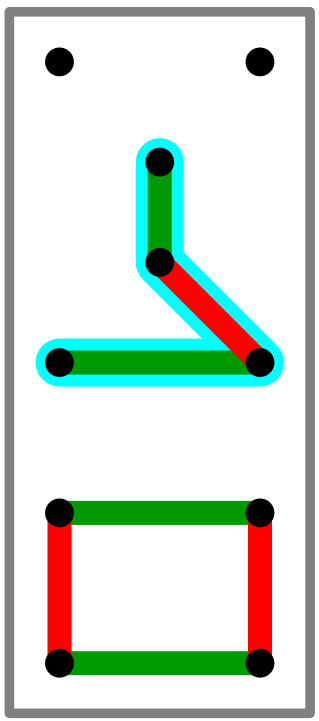
Satz von Berge


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.

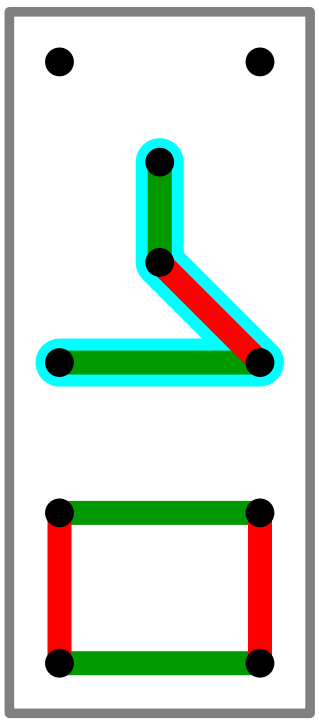
Satz von Berge


Paris, 1990 © Adrian Bondy

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



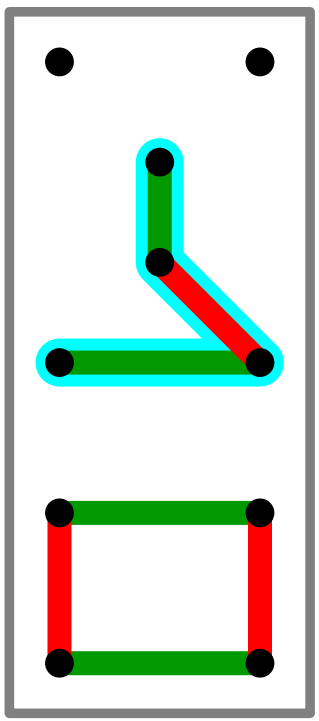
$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.
$\Rightarrow$ Dieser Weg ist M-augm.

Satz von Berge

Claude Berge
(1926–2002)

Satz. Sei $G = (V, E)$ Graph,
$M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G
$\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

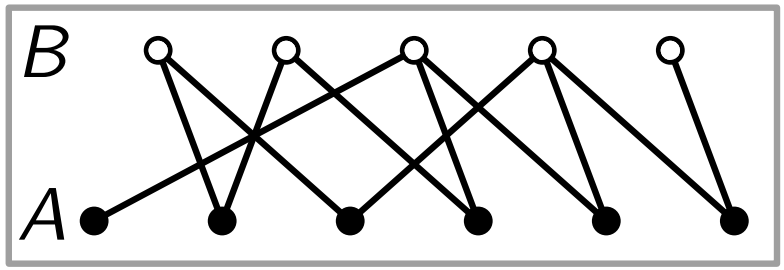
Beweis. „$\Rightarrow$“ Klar: jeder augm. Weg würde M vergrößern ↯
„$\Leftarrow$“ Annahme: M ist kein größtes Matching.



$\Rightarrow$ Es gibt ein Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte $G_\Delta = (V, M \Delta M')$.
Beobachtung: $\max_{v \in V} \deg_{G_\Delta}(v) = 2$.
$\Rightarrow$ G_Δ besteht aus einfachen alt. Wegen & Kreisen.
Alle Kreise in G_Δ haben gerade Länge.
$\Rightarrow$ Ex. alt. Weg mit mehr Kanten aus M' als aus M.
$\Rightarrow$ Dieser Weg ist M-augm. ↯ zur Annahme. □

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

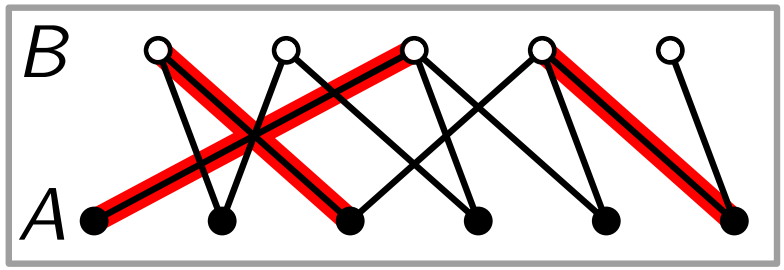
Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit,

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

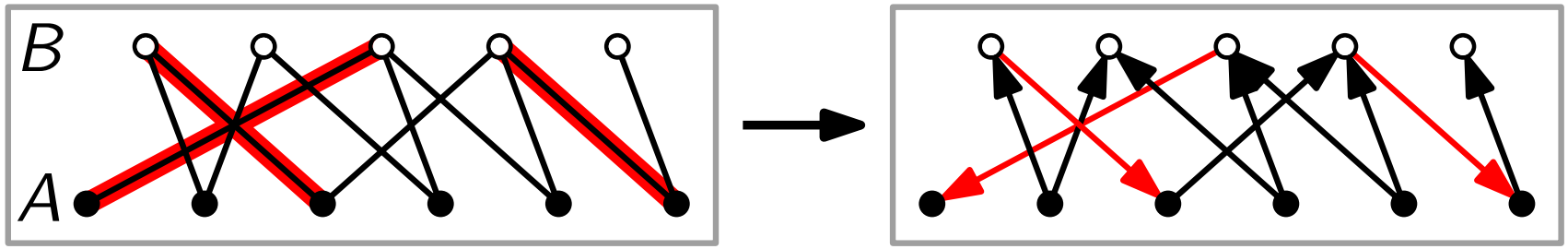
Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?

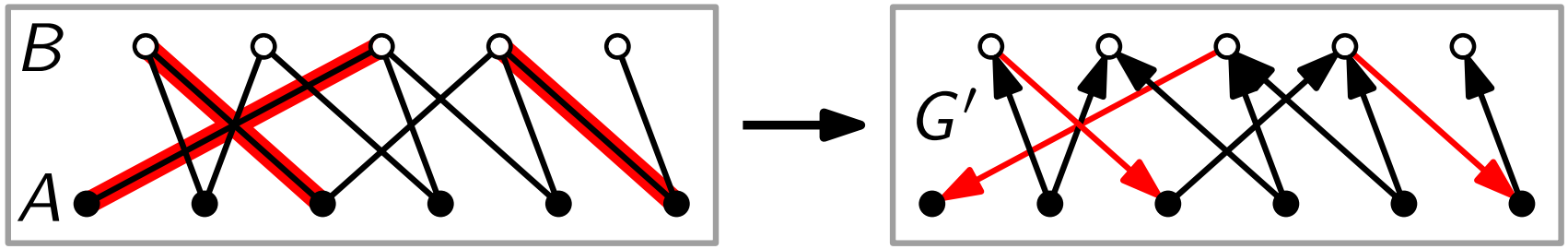


$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten,
nicht-M-Kanten nach oben.

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?

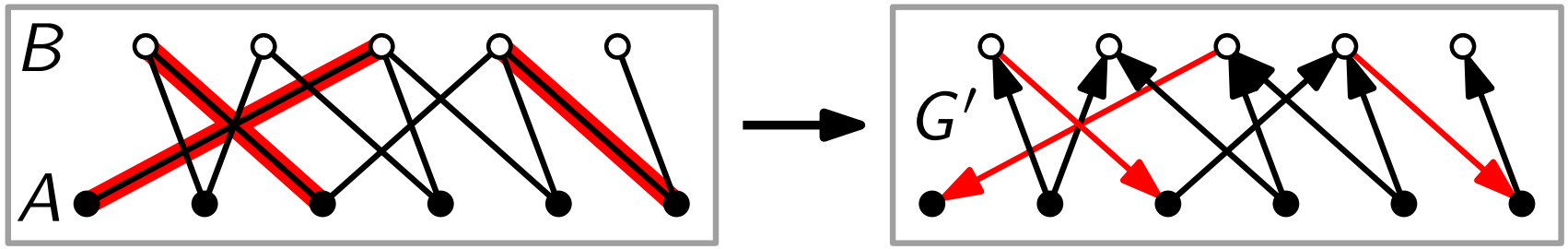


$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\Big\}$ $\longrightarrow$ $G' = (A \cup B, E')$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



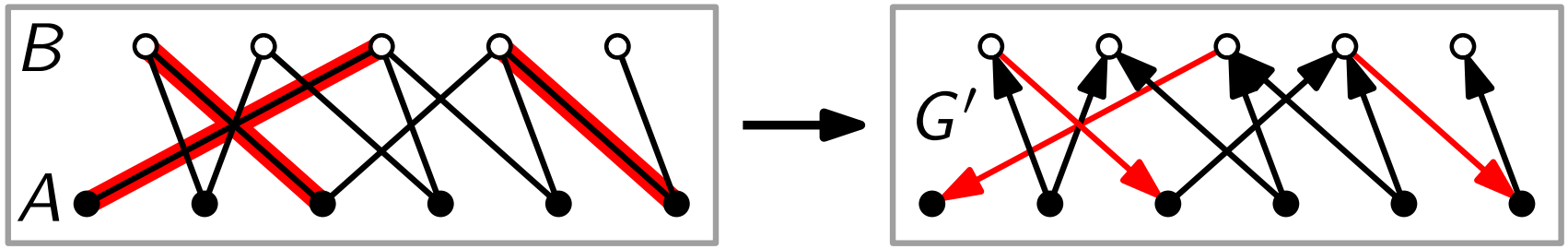
$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\Rightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\Leftrightarrow$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



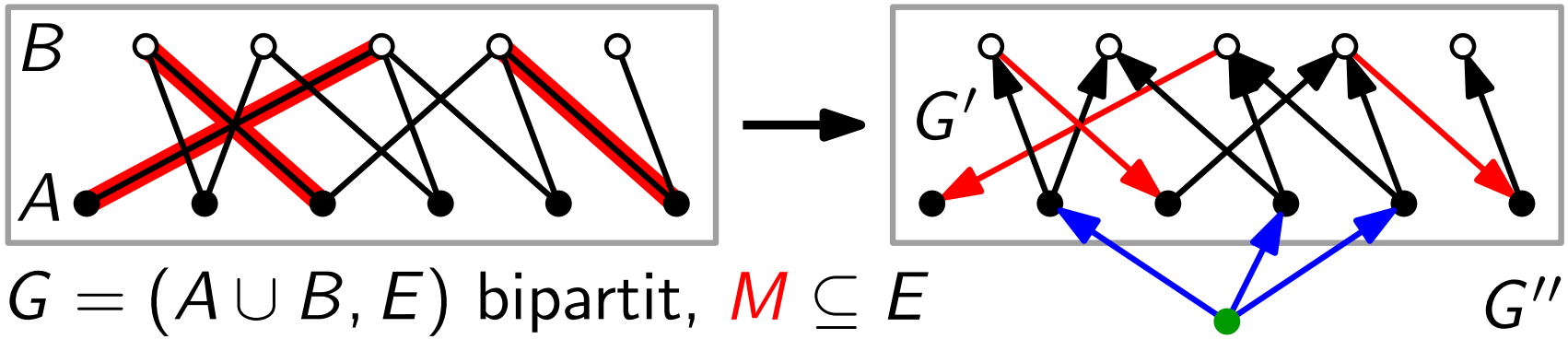
$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\Longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

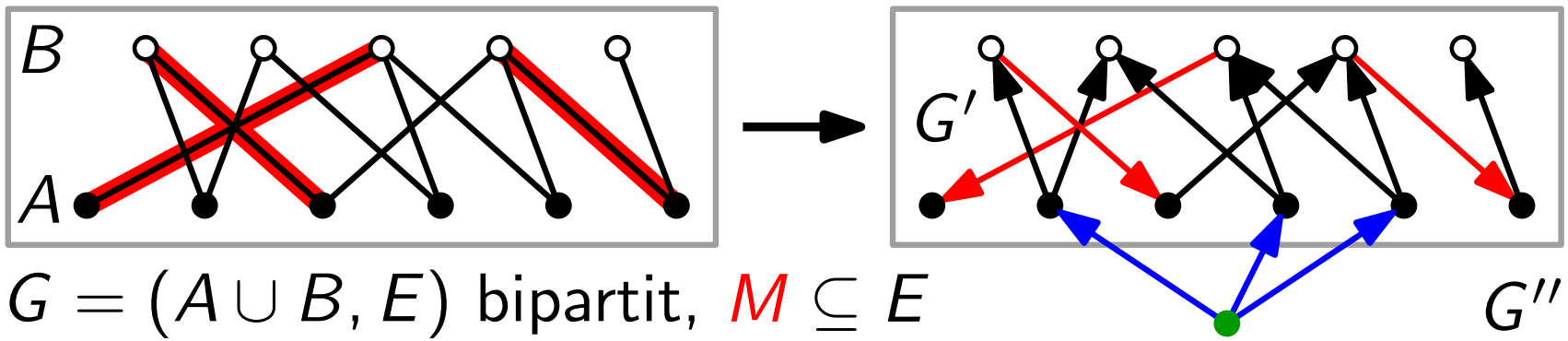
Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\Longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Definiere $G'' = \big(A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A,\ M\text{-frei}\}\big)$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\Big\} \longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

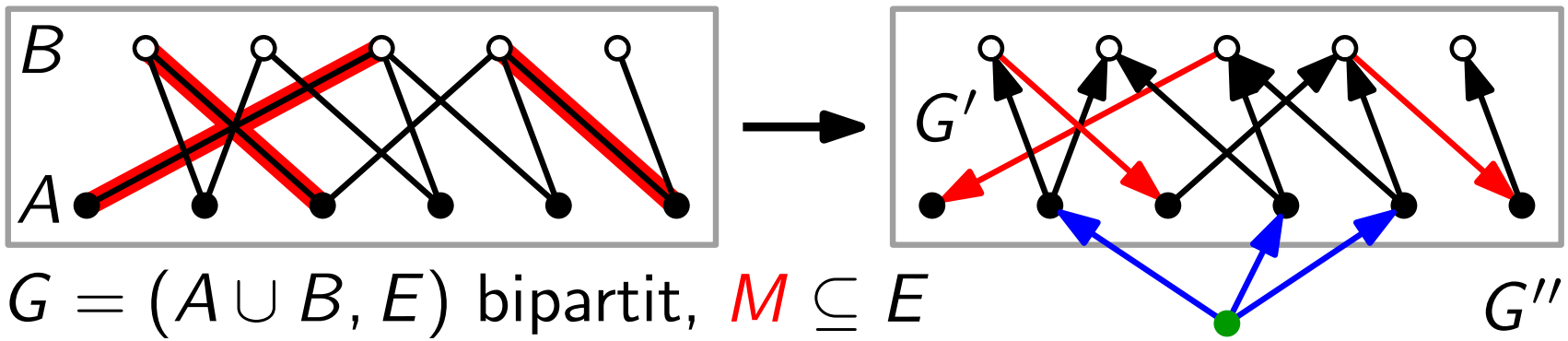
Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Definiere $G'' = \big(A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A,\ M\text{-frei}\}\big)$

Breitensuche BFS(G'', s) erreicht einen M-freien Endknoten in B $\Leftrightarrow$

Zurück zu: größte Matchings in bip. Graphen

Frage: Wie finden wir augmentierende Wege?



$G = (A \cup B, E)$ bipartit, $M \subseteq E$

Idee: Richte M-Kanten nach unten, nicht-M-Kanten nach oben. $\Longrightarrow G' = (A \cup B, E')$

Augmentierende Wege in G $\longleftrightarrow$ gerichtete Wege mit M-freien Endknoten in G'

Definiere $G'' = \big(A \cup B \cup \{s\}, E' \cup \{sa \mid a \in A,\ M\text{-frei}\}\big)$

Breitensuche BFS(G'', s) erreicht einen M-freien Endknoten in B $\Leftrightarrow$ G hat M-augm. Weg.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –

bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –

bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –

bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

Satz. In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ Zeit ein größtes Matching bestimmen.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –

bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

Satz. In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ Zeit ein größtes Matching bestimmen.

Bem. Dinic' Fluss-Algorithmus berechnet [KN, Kapitel 9.6]

– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(V^2E)$ Zeit

– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{V}E)$ Zeit.

Ergebnis

Algo: $M := \emptyset$.

Führe BFS $\leq |V|/2$ mal aus –
bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird.

Gib größtes Matching zurück.

Satz. In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ Zeit ein größtes Matching bestimmen.

Bem. Dinic' Fluss-Algorithmus berechnet [KN, Kapitel 9.6]
– maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(V^2E)$ Zeit
– Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{V}E)$ Zeit.

Satz. Selbst in einem beliebigen Graphen $G = (V, E)$ lässt sich eine größte Paarung in $O(\sqrt{V}E)$ Zeit berechnen.
[Micali & Vazirani, FOCS'80]

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

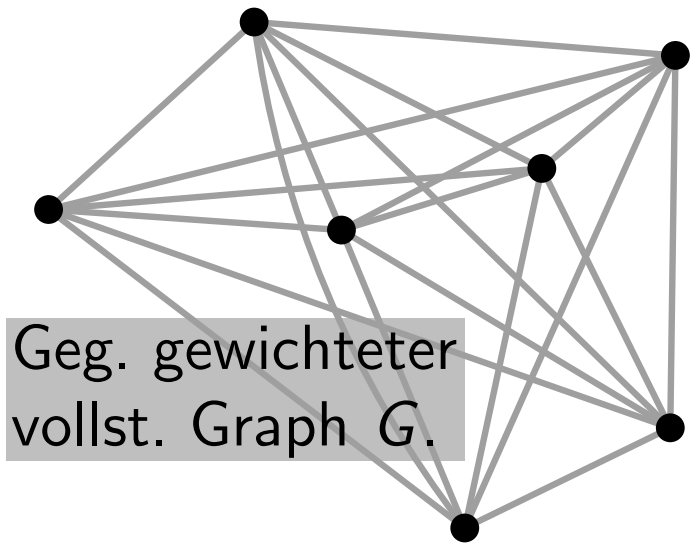
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Geg. gewichteter vollst. Graph G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

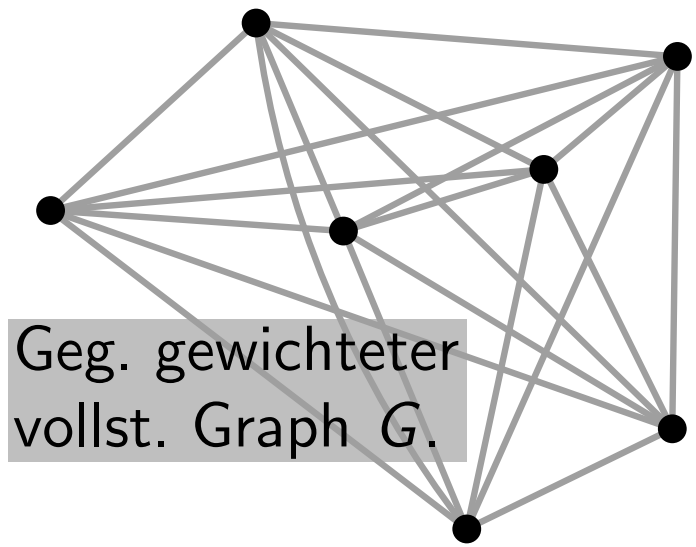
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Geg. gewichteter vollst. Graph G.

1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

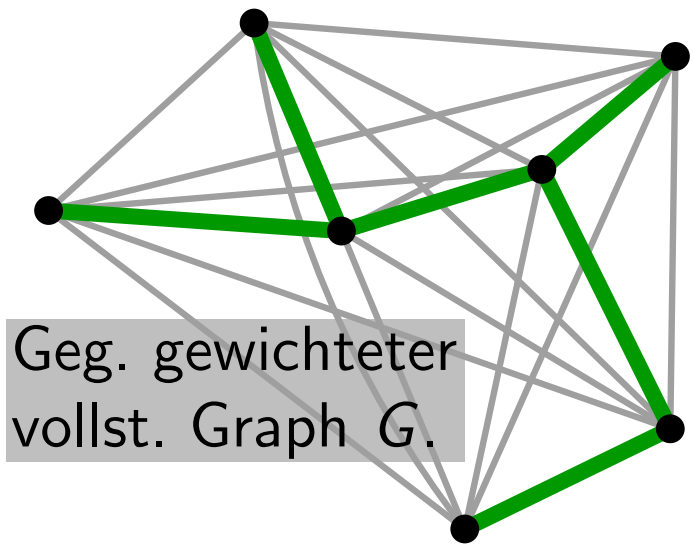
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Geg. gewichteter vollst. Graph G.

1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

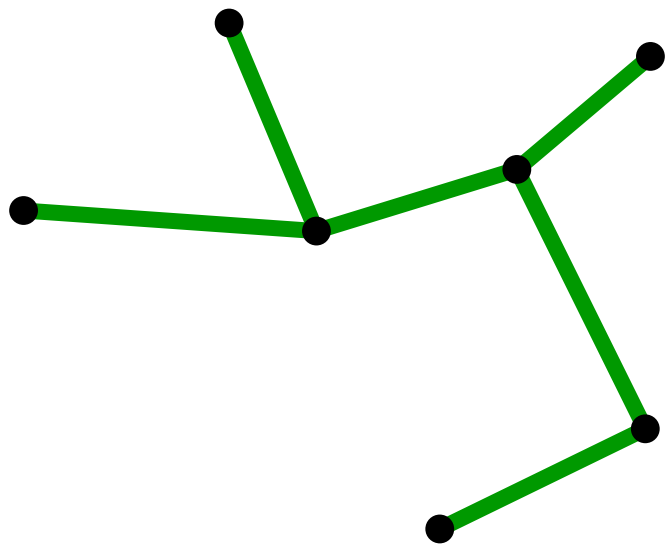
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

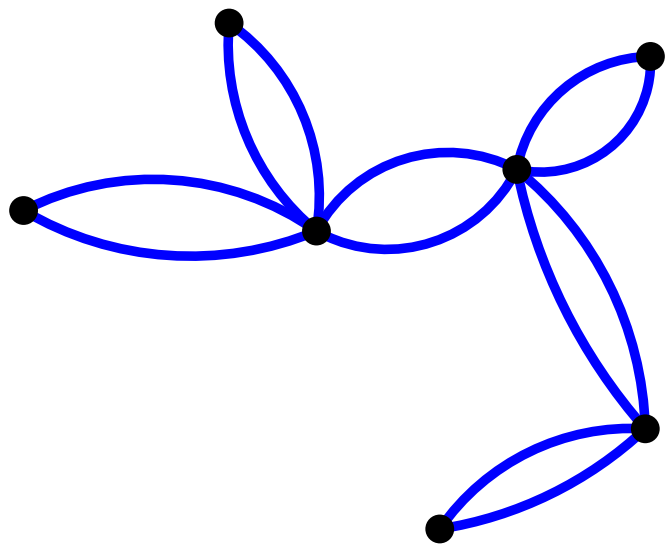
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

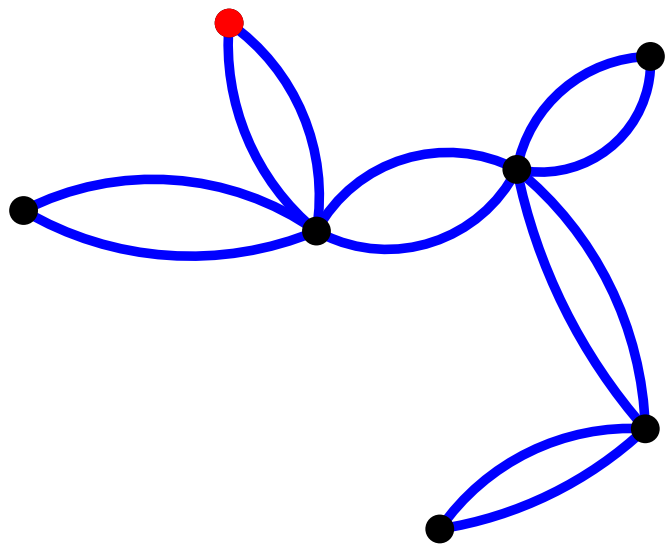
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

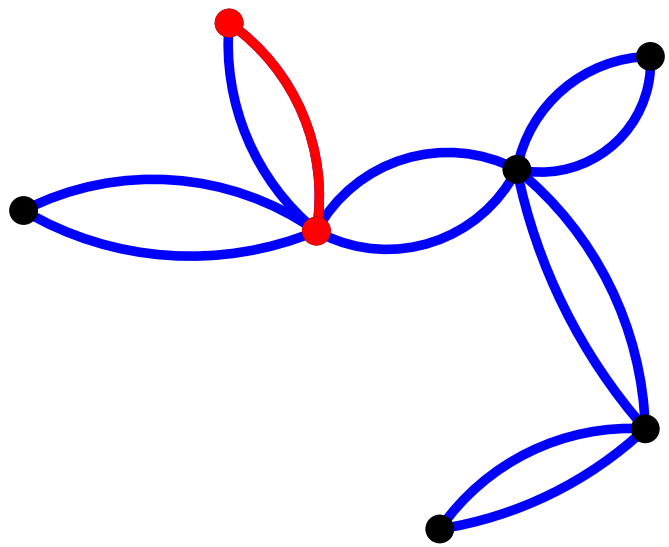
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

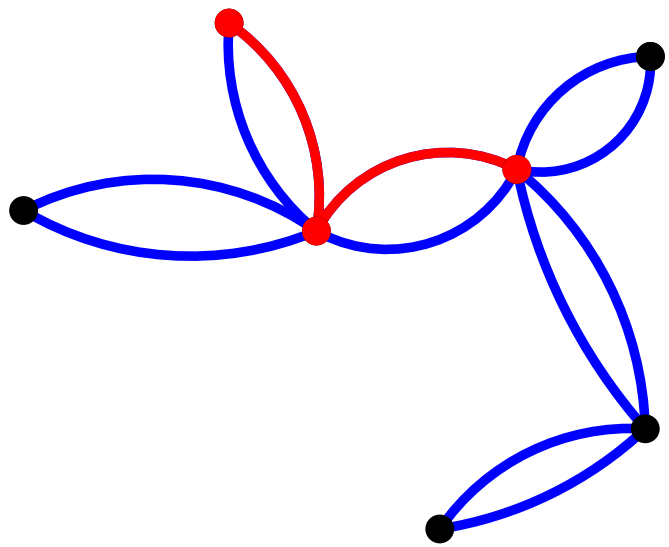
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

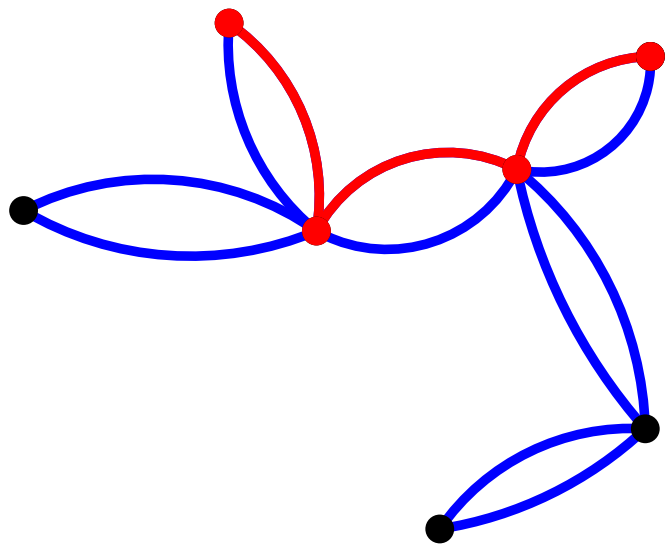
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

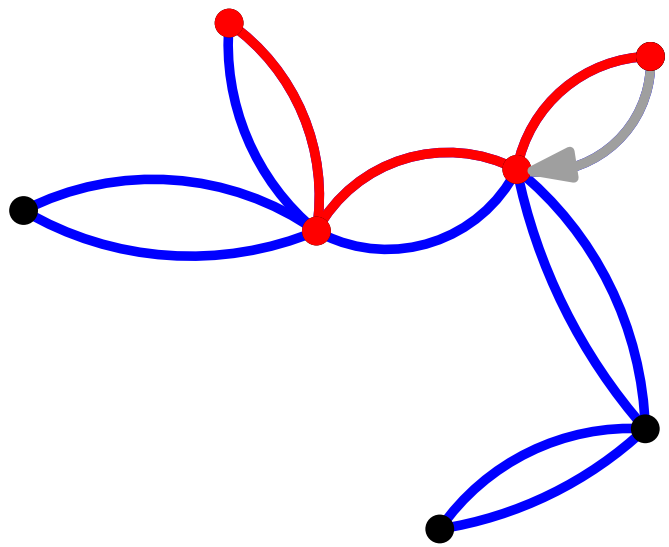
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

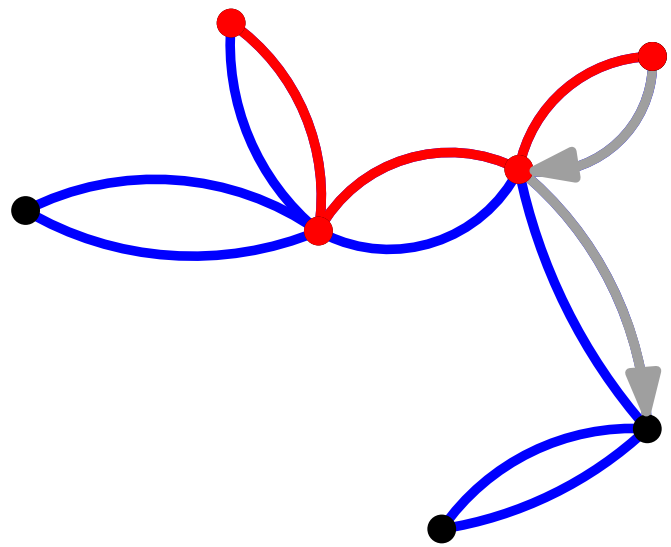
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

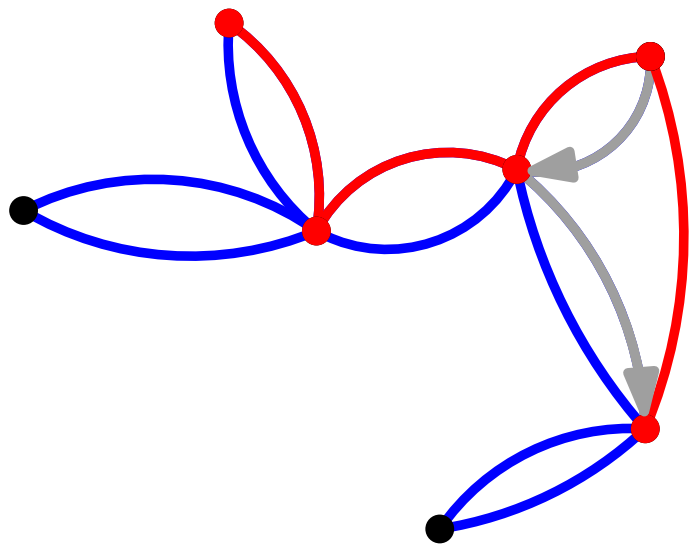
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

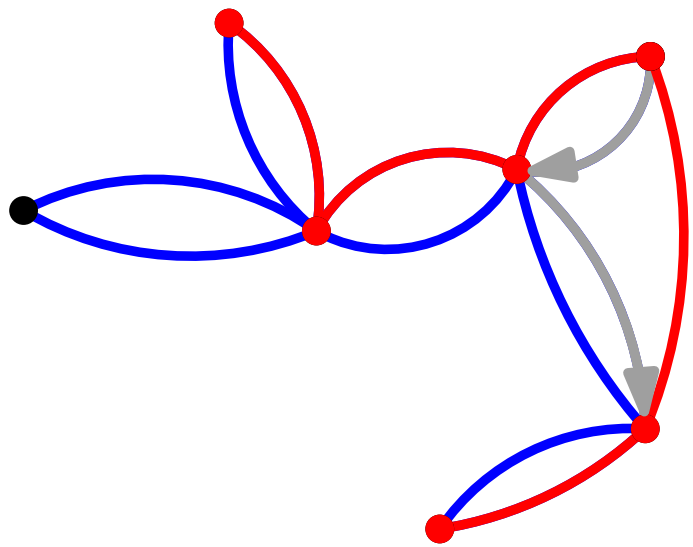
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

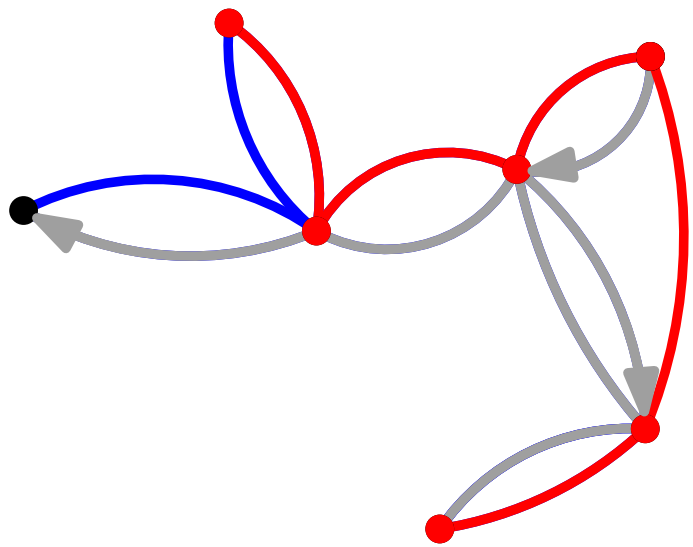
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

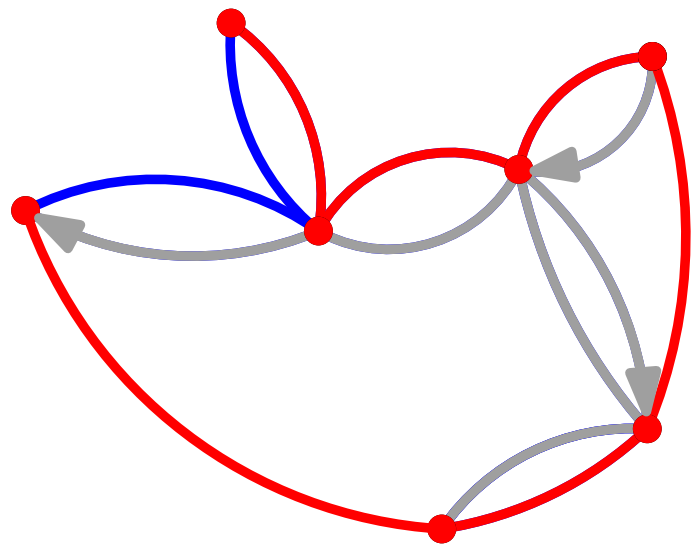
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

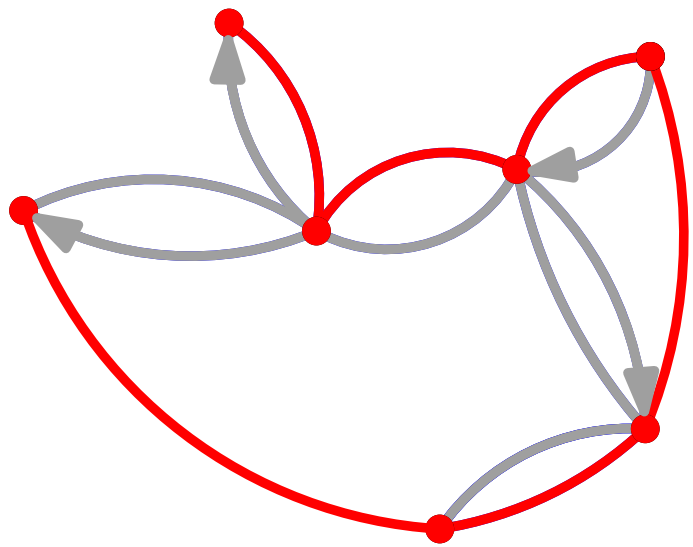
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

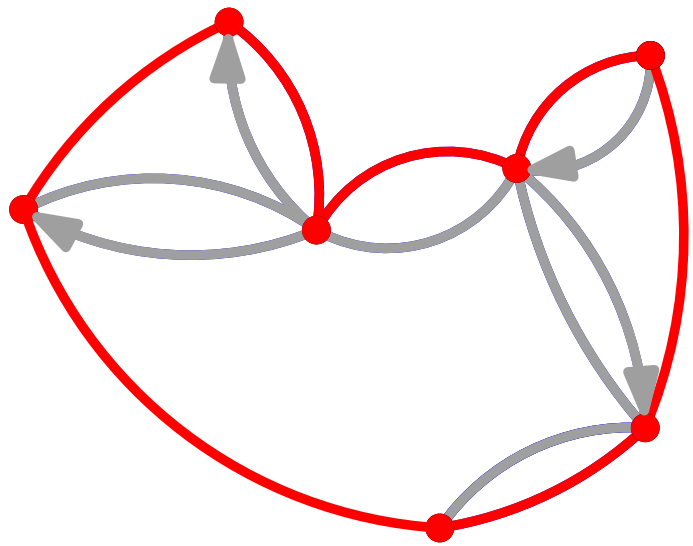
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

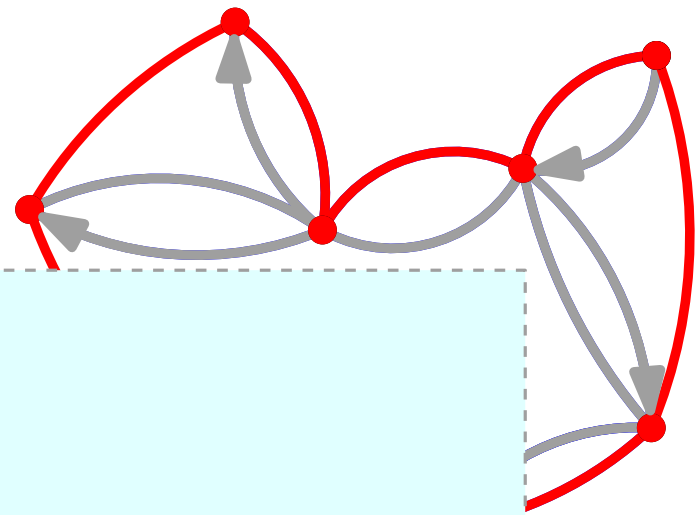
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

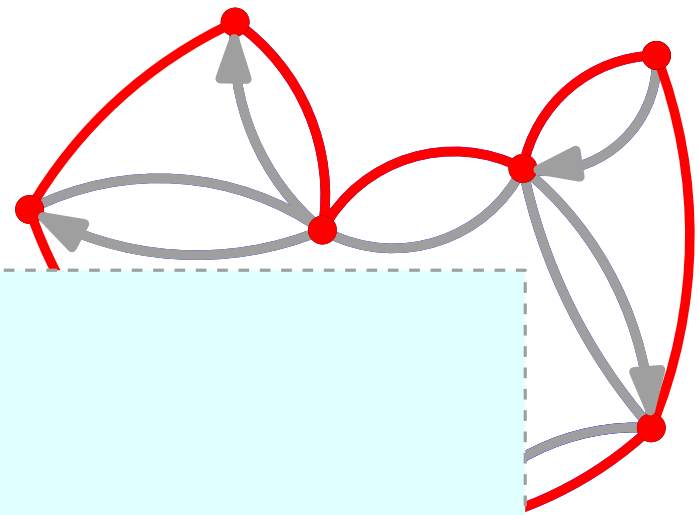
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

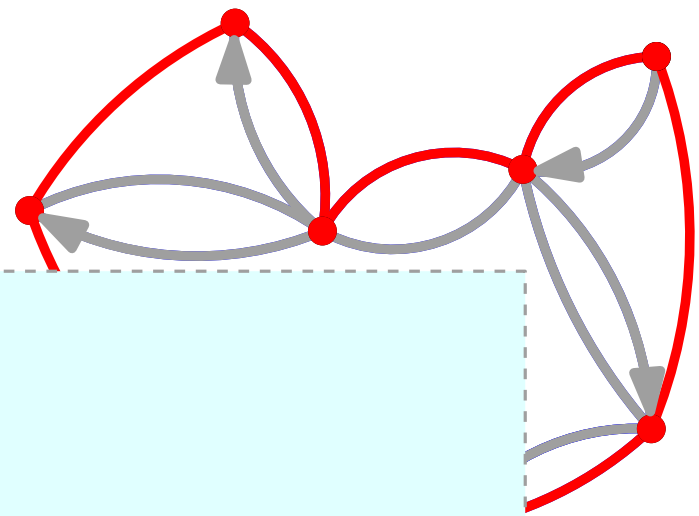
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\mathrm{ALG}) \leq$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

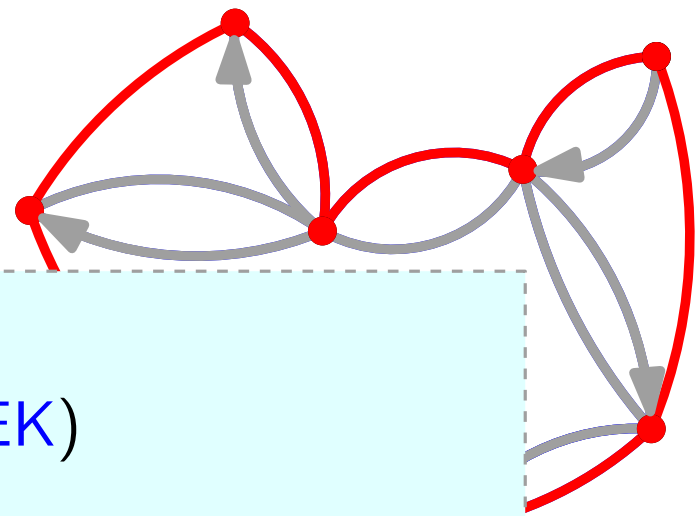
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

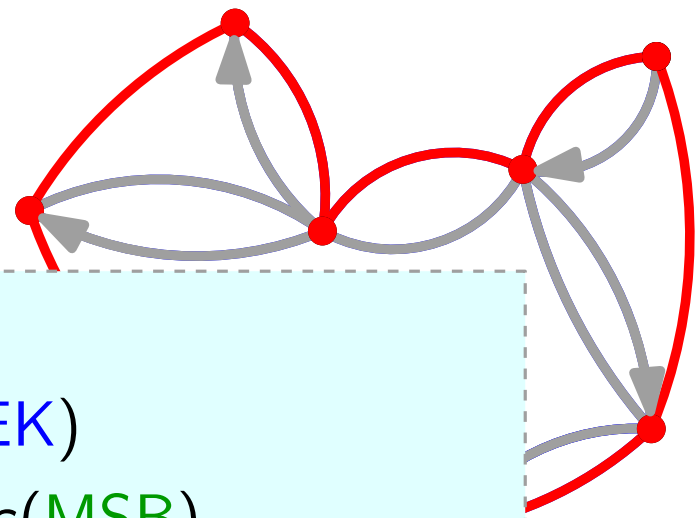
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK}) = 2 \cdot c(\text{MSB})$$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

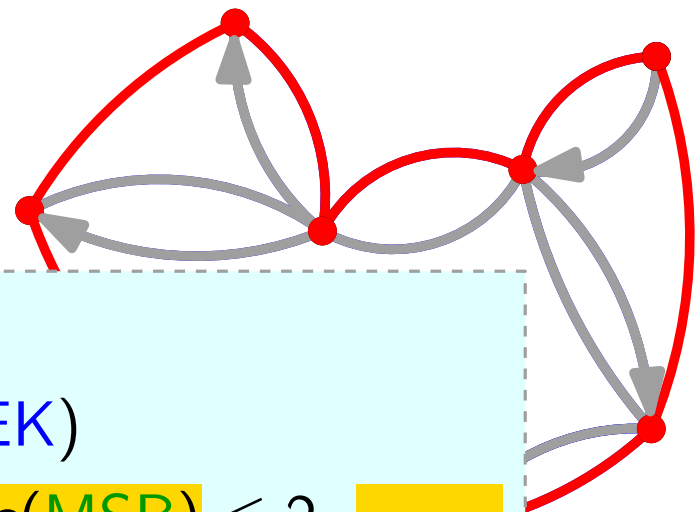
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

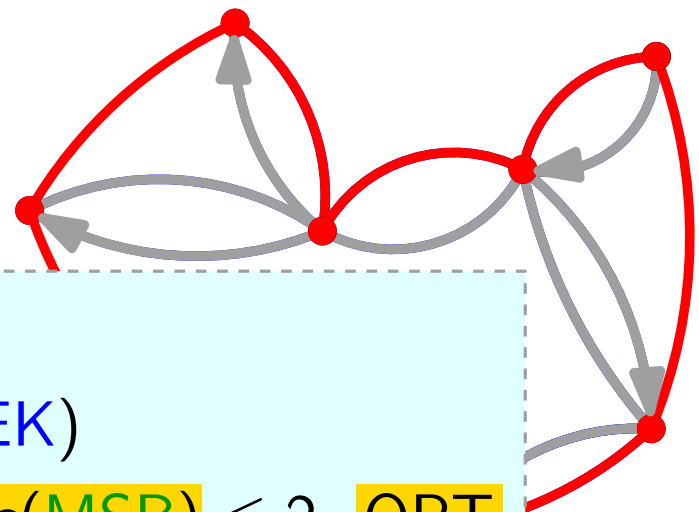
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

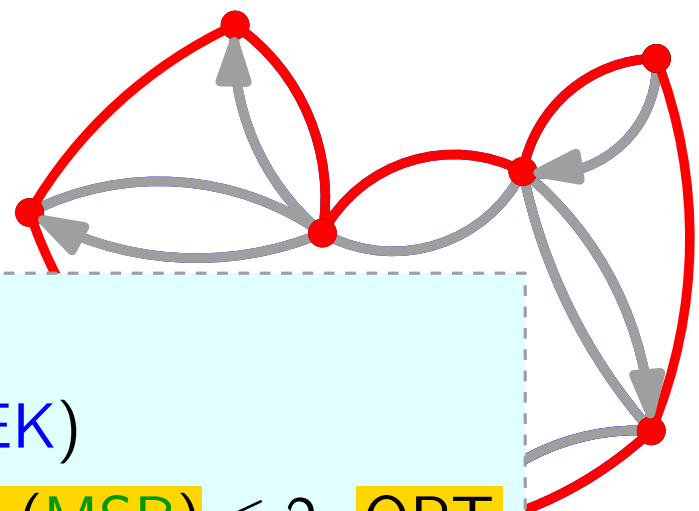
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$

Opt. TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Wiederholung – Tree-Doubling für Δ-TSP

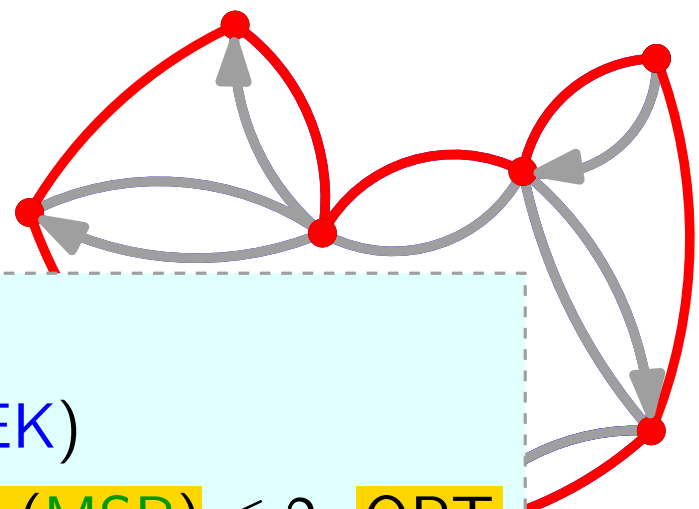
Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ eulersch!

Durchlaufe Eulerkreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$c(\text{ALG}) \leq c(\text{EK})$

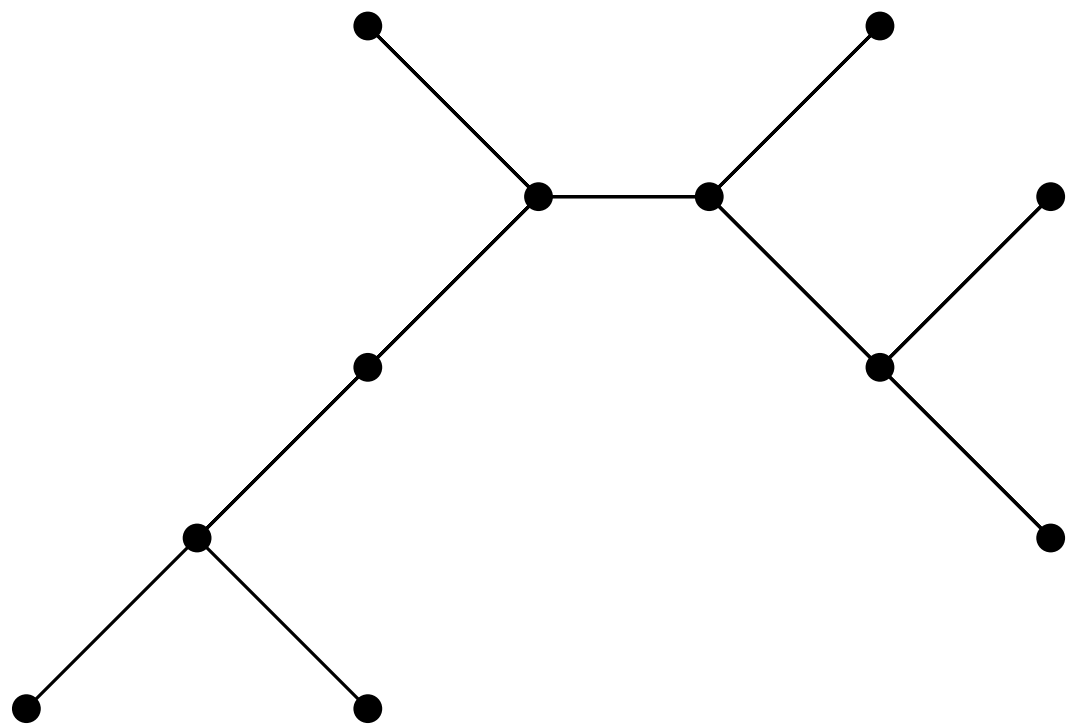
$= 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$

Opt. TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

„Die Kunst der unteren Schranke“

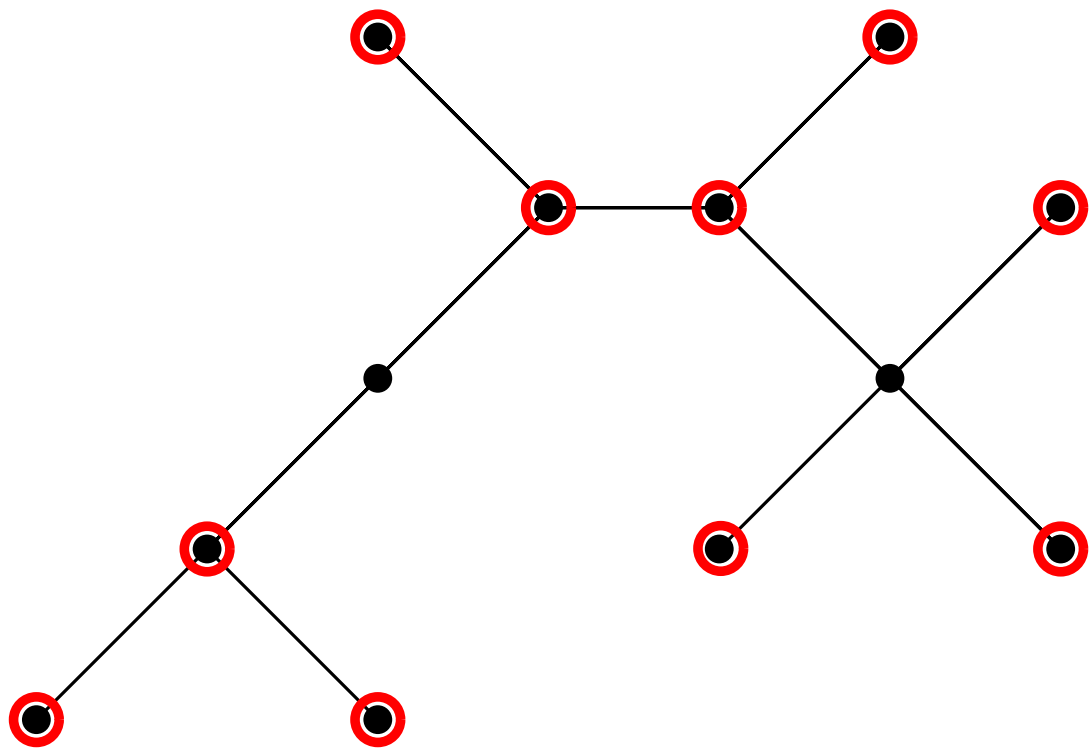
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.



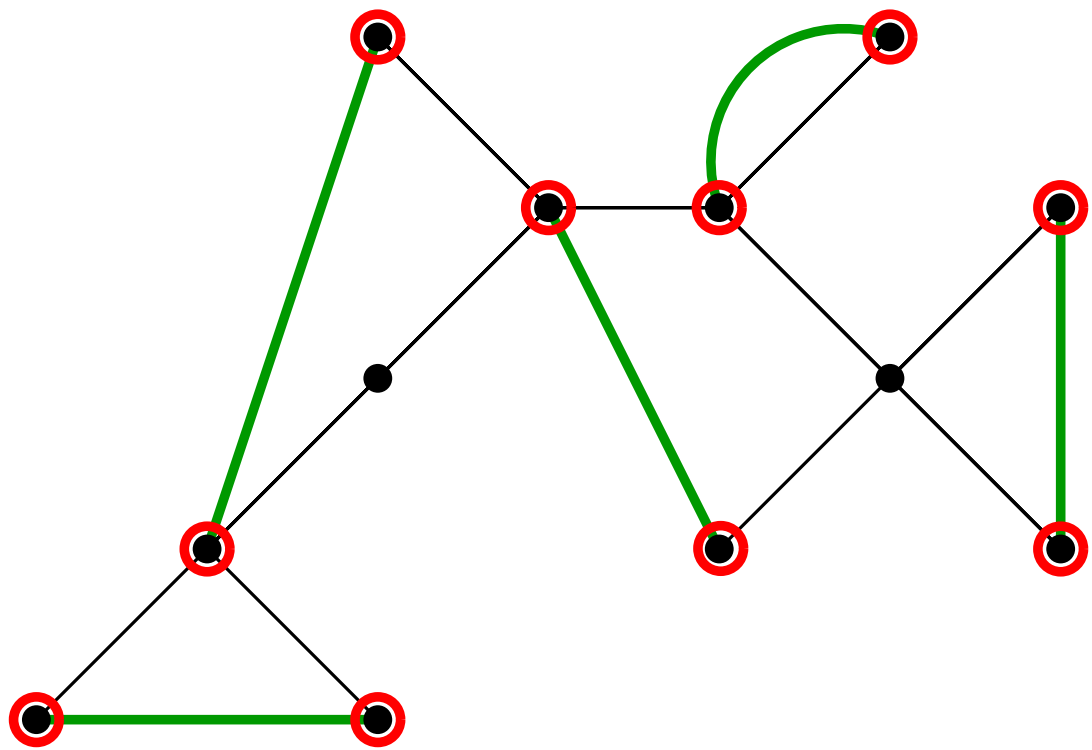
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.



Christofides' Algorithmus

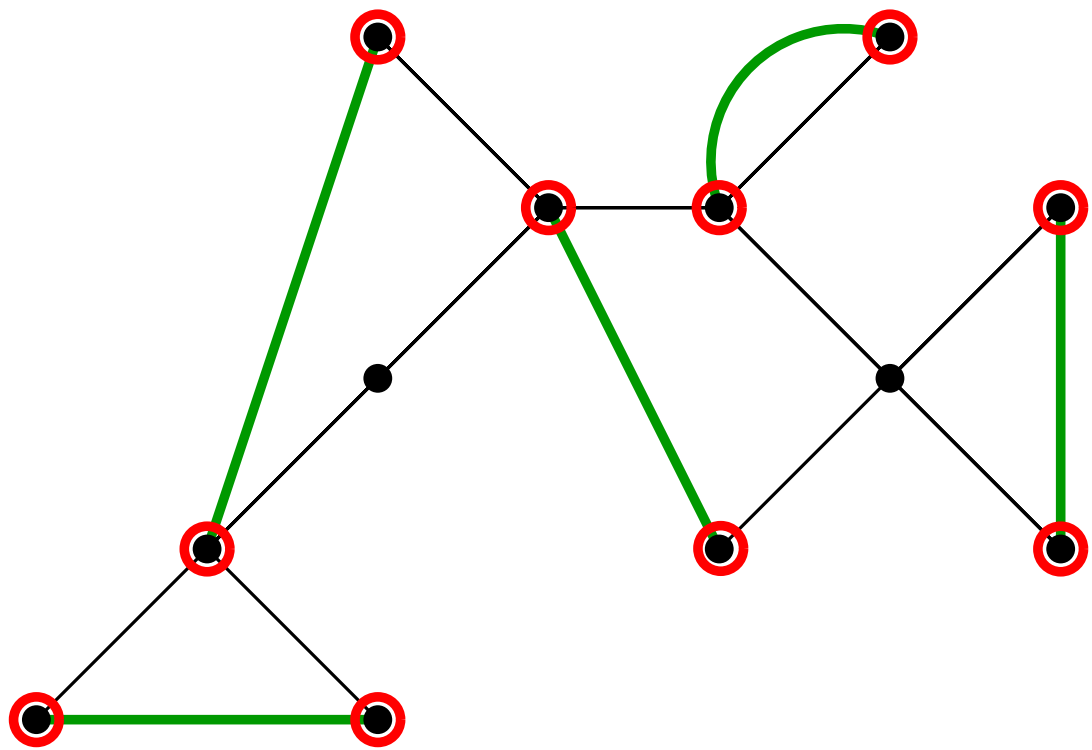
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$



Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

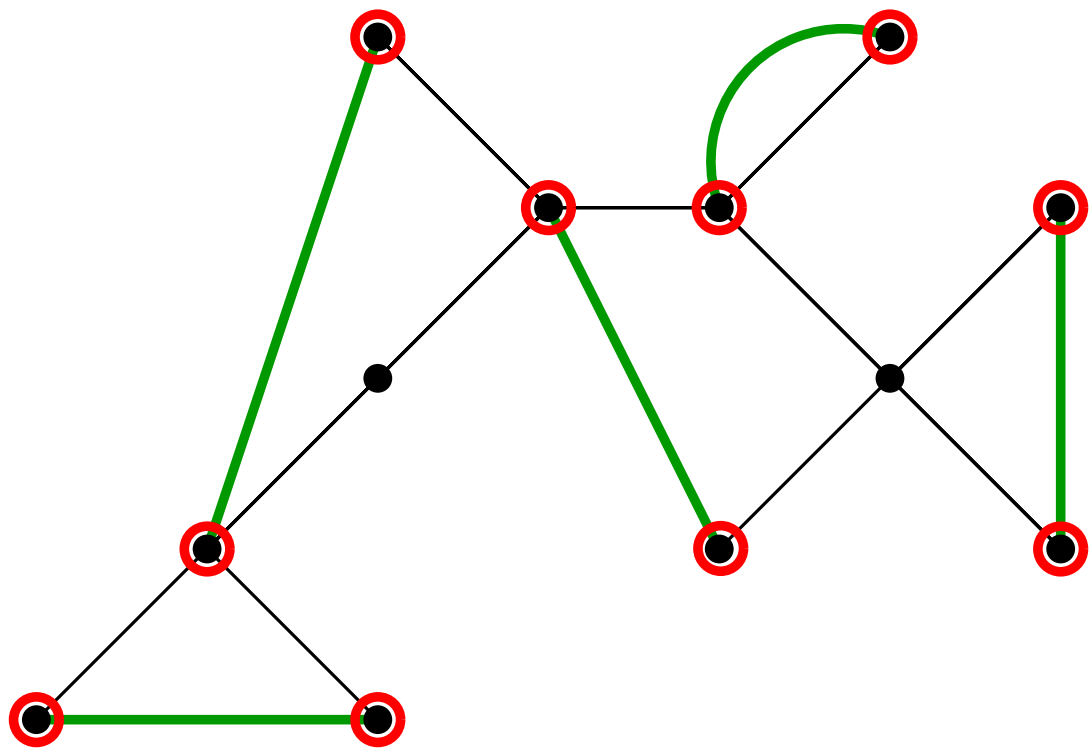


Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

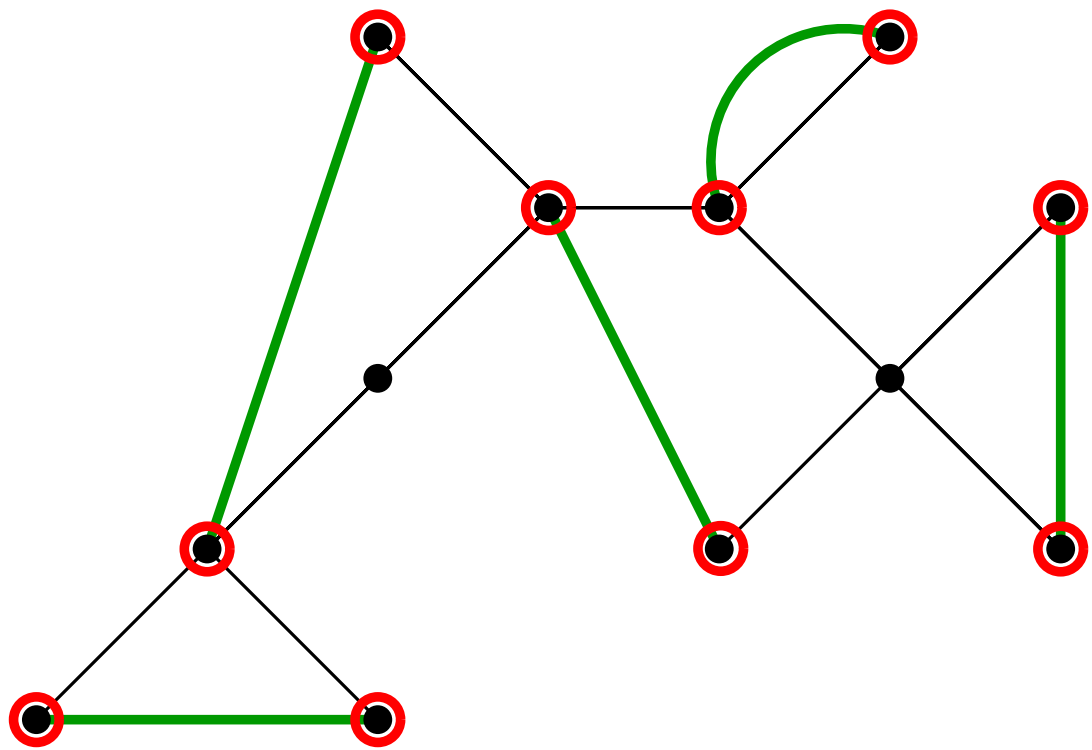


Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$



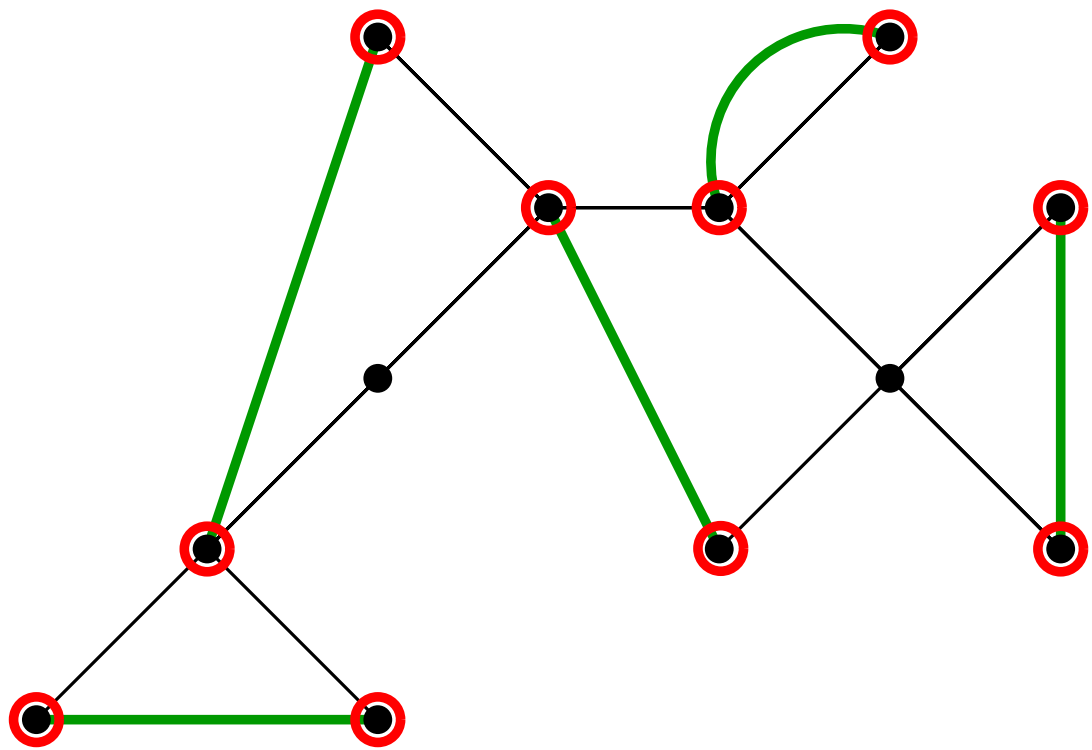
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$



Christofides' Algorithmus

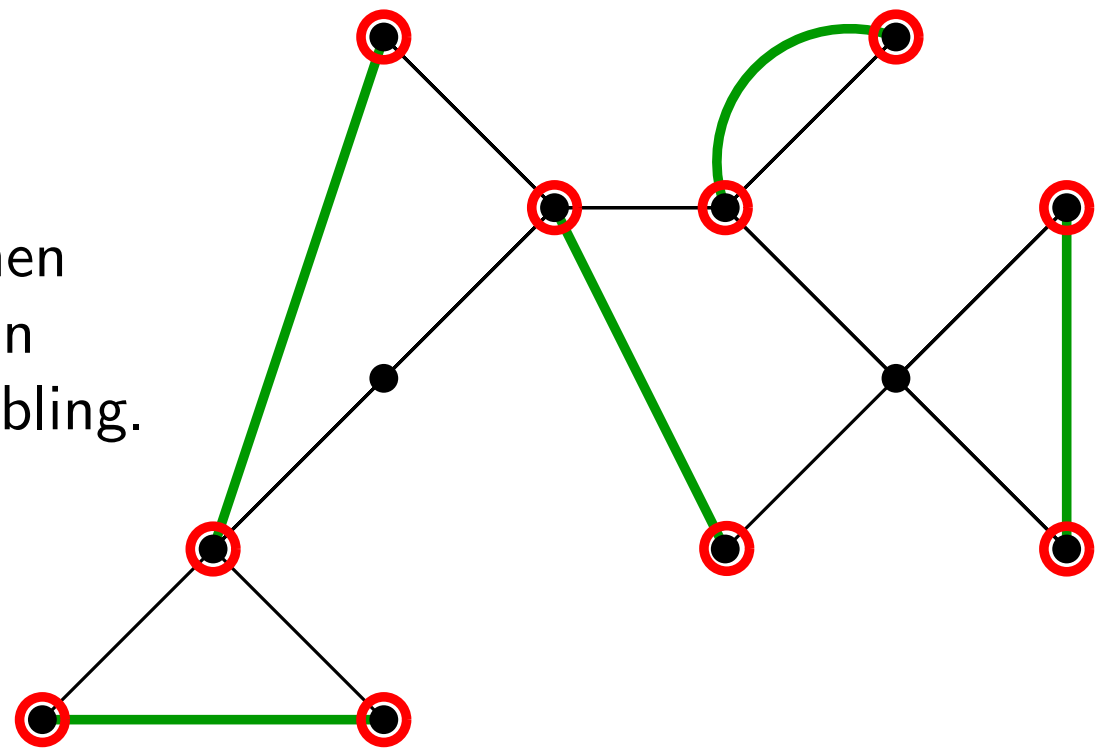
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

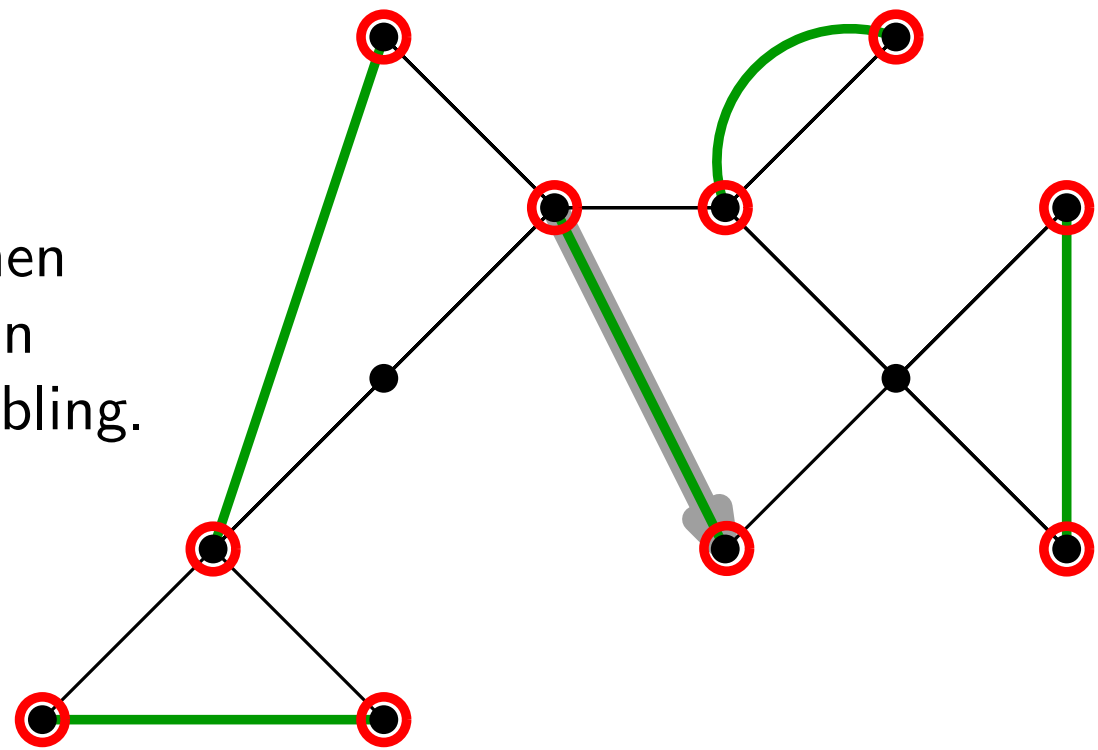
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

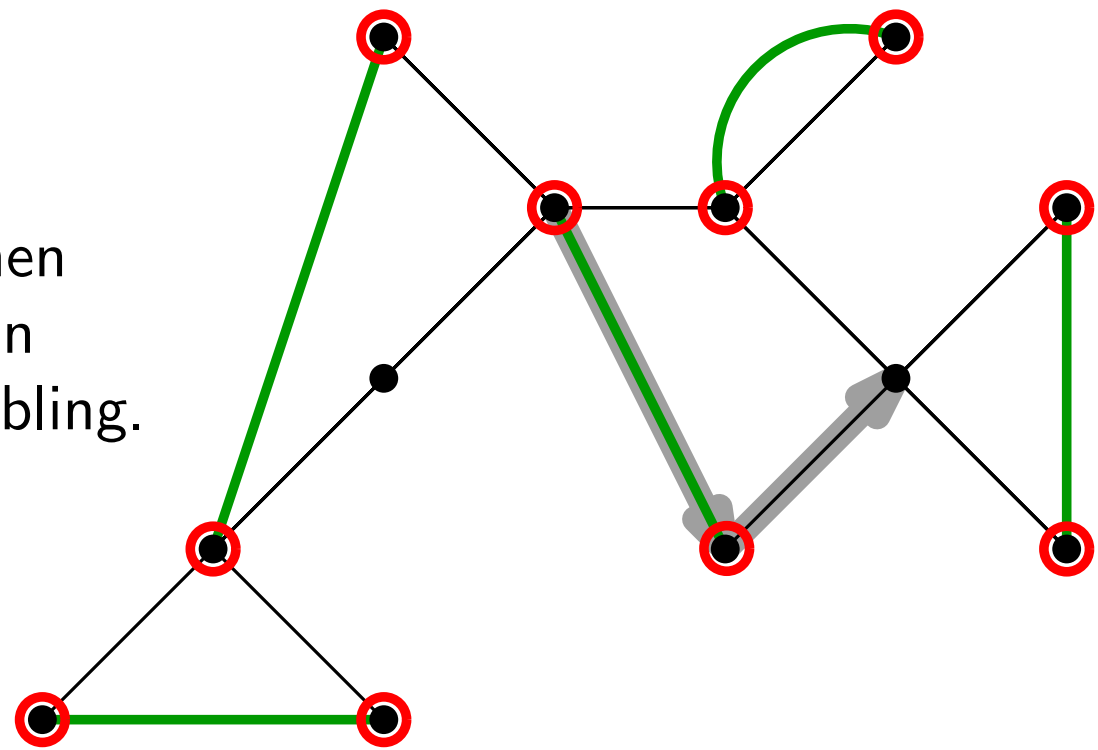
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

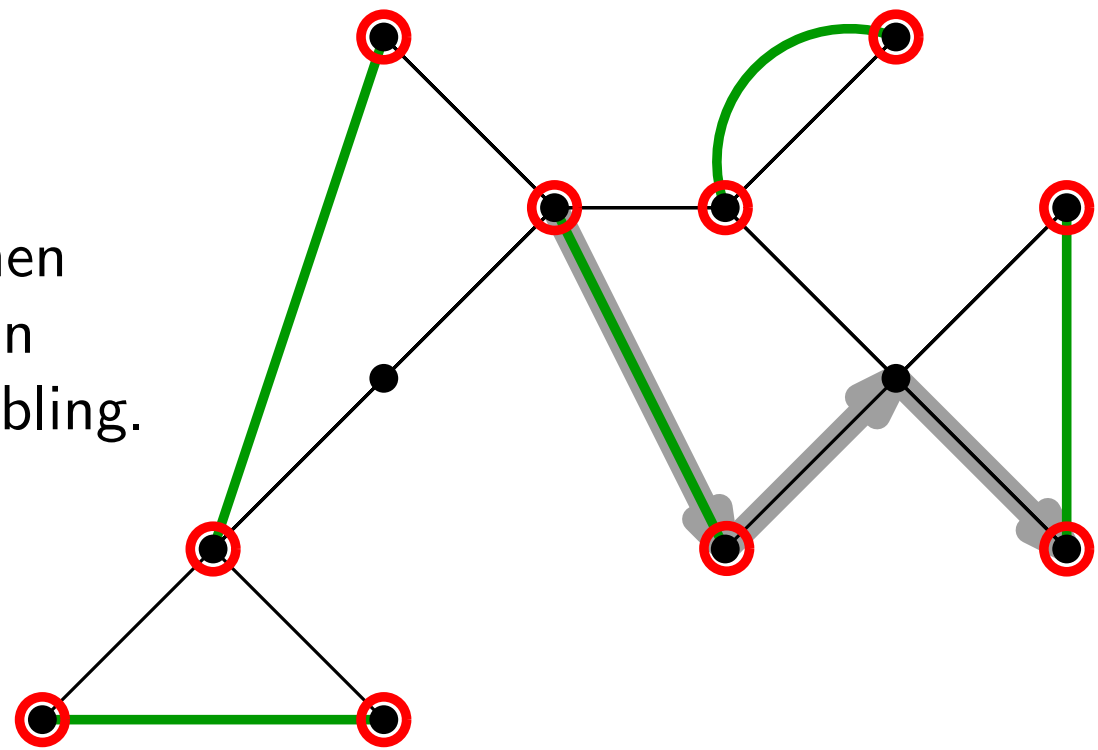
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

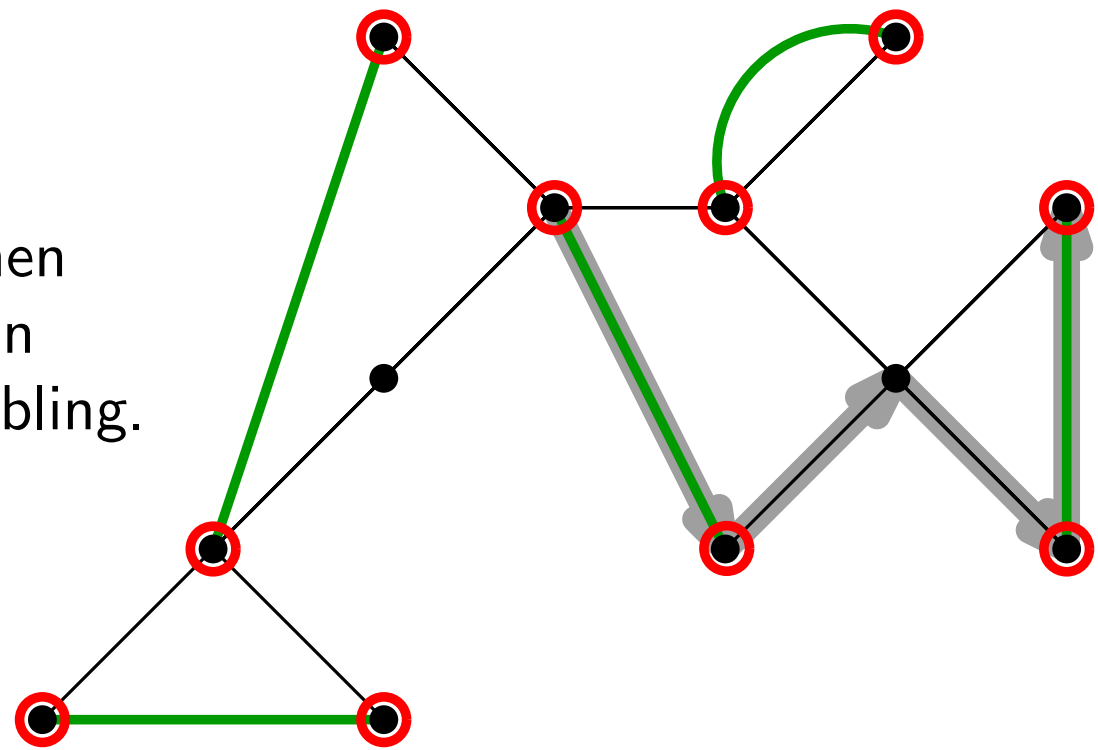
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

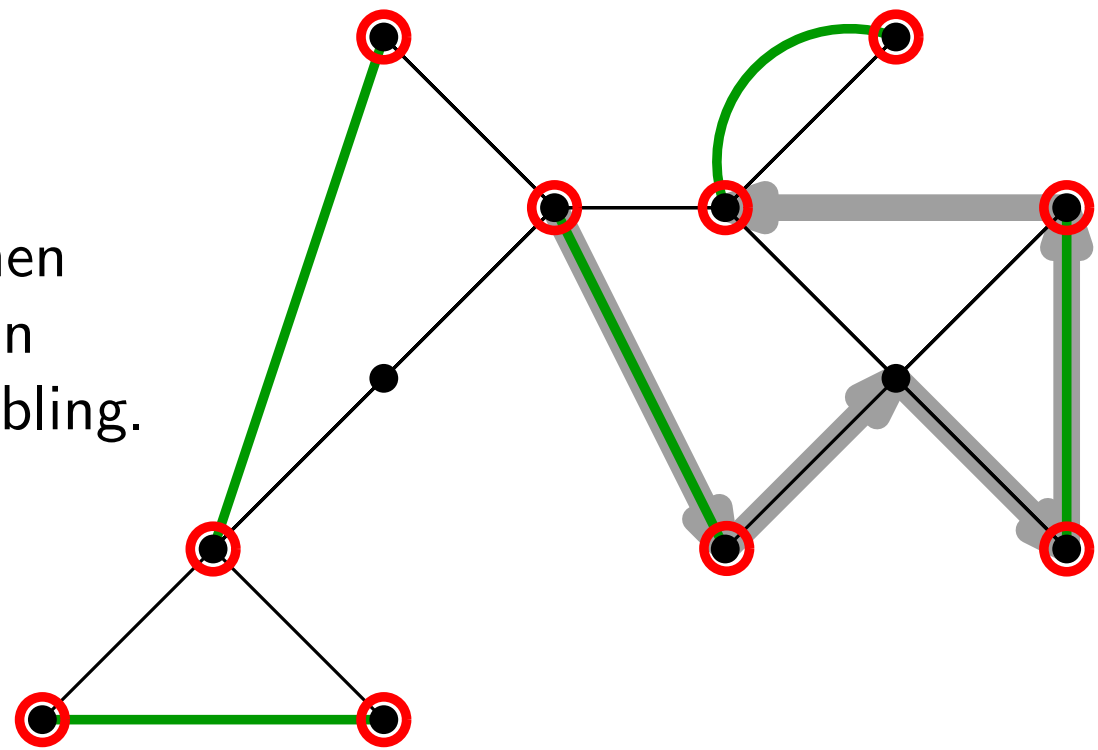
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

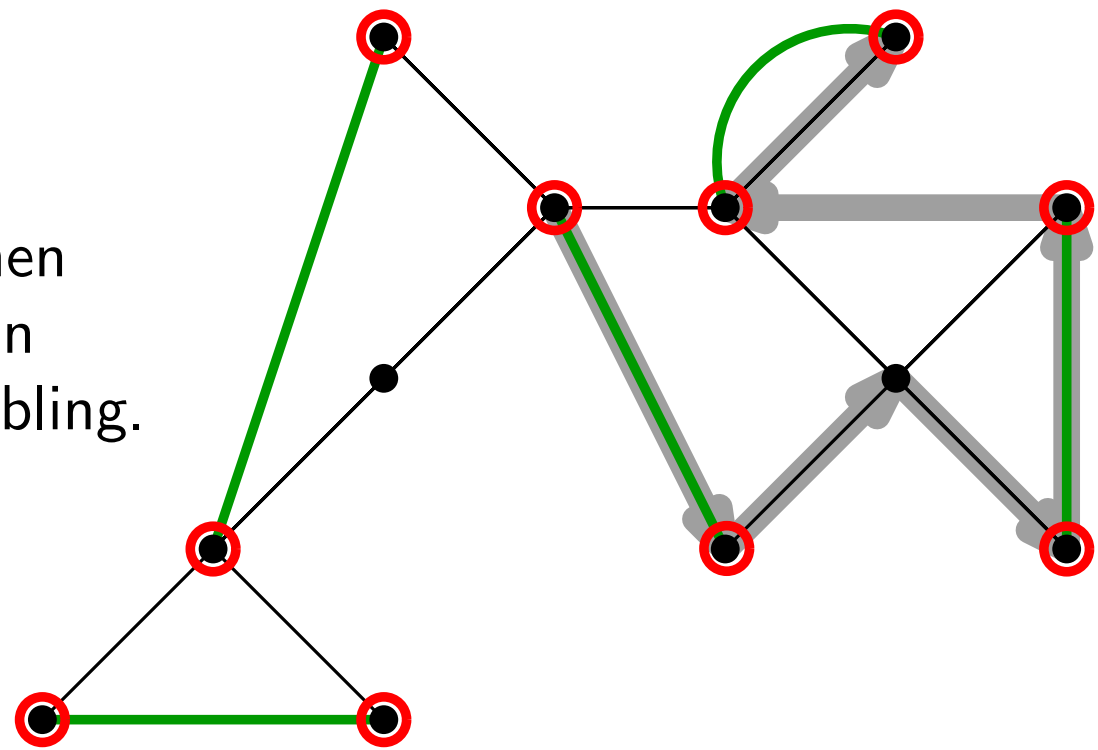
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

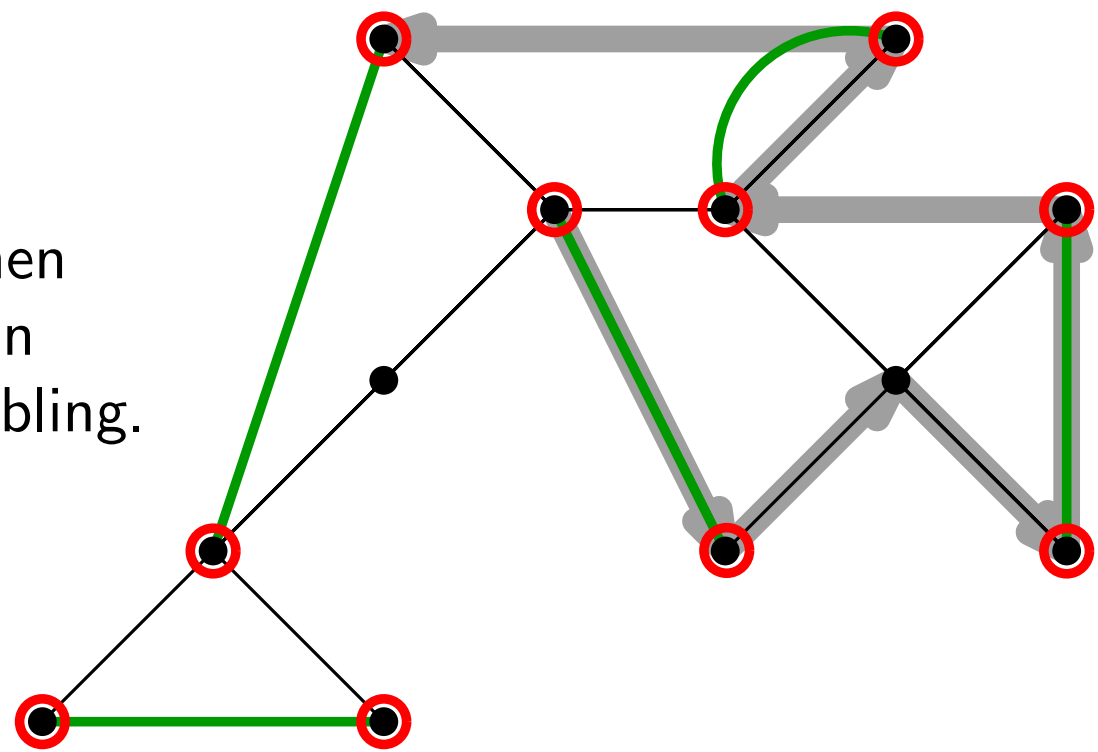
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



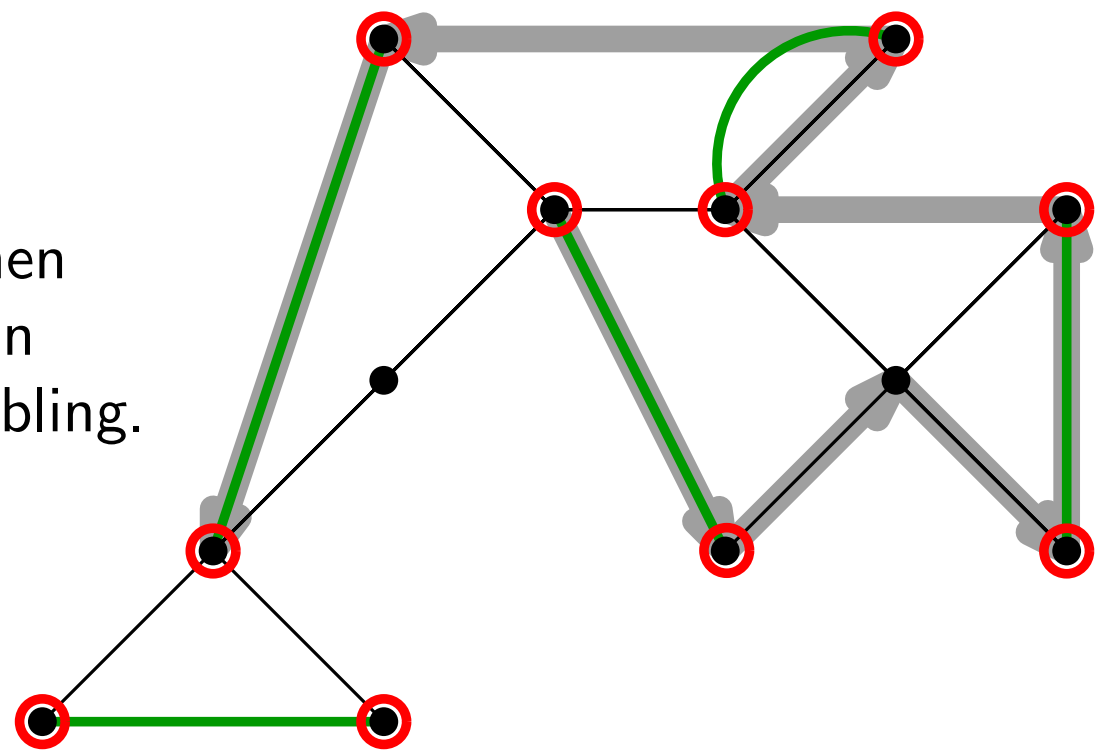
Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$



- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.

Christofides' Algorithmus

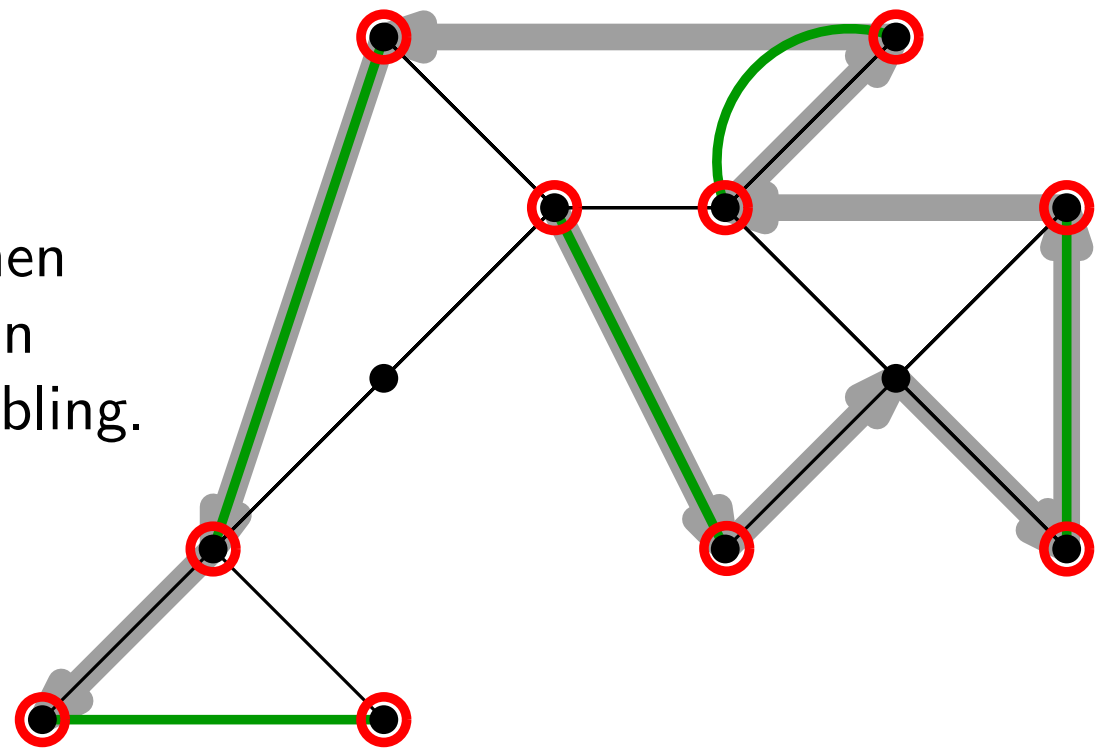
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) : v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

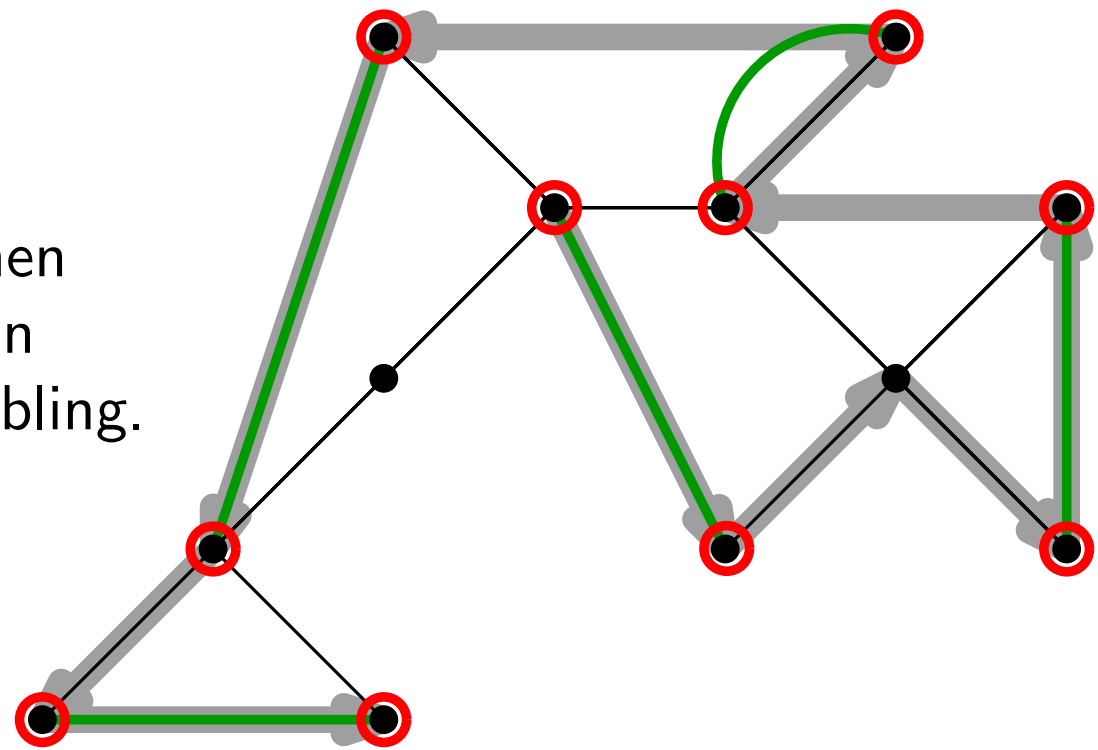
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

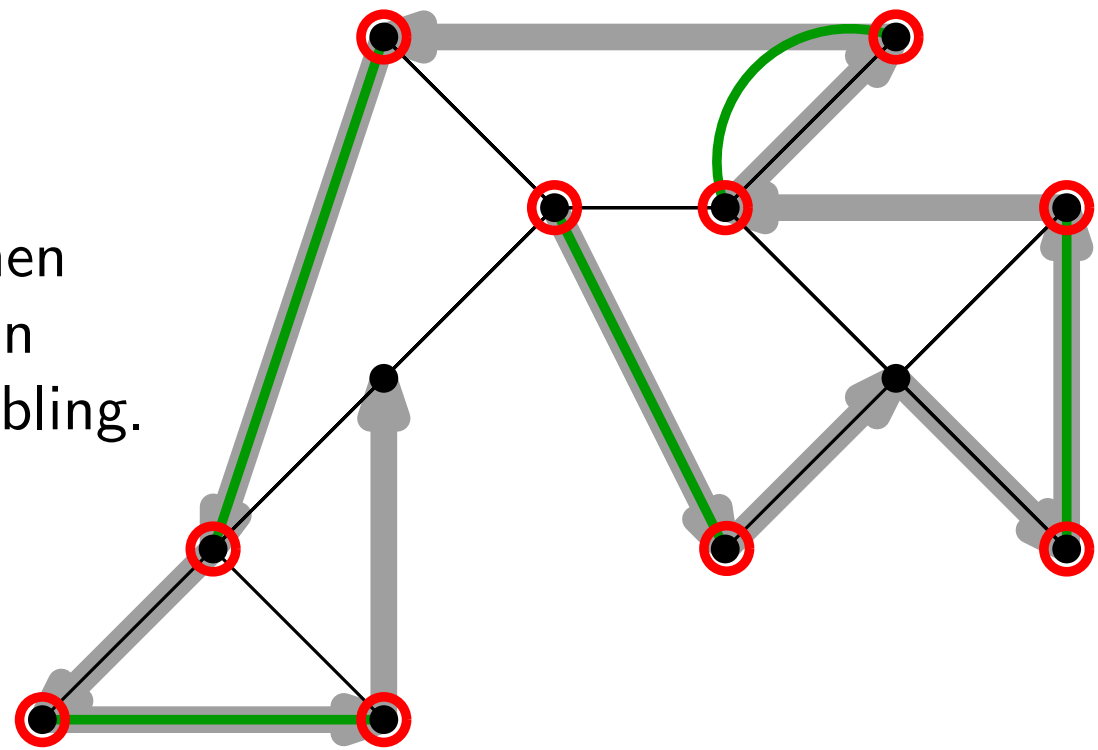
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

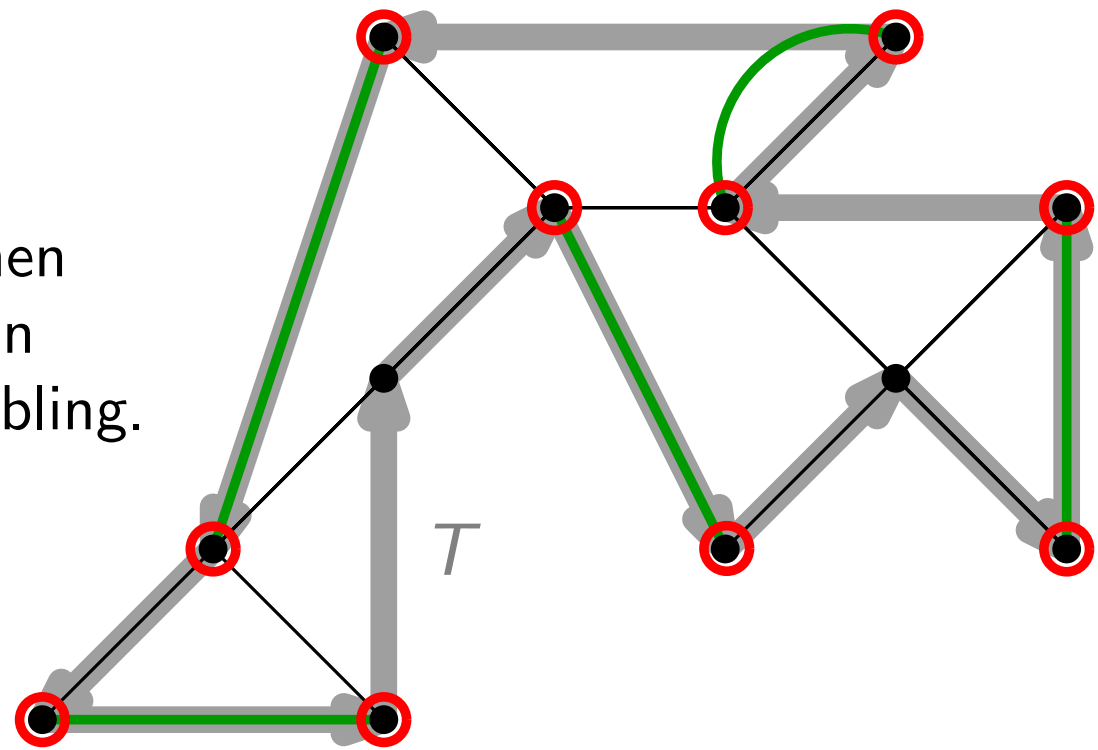
- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) \colon v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.



Christofides' Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G.
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B.
- Ermittle *kostenminimales perfektes* Matching M für $G[U]$ (existiert, da $|U|$ gerade und $G[U]$ vollständig).

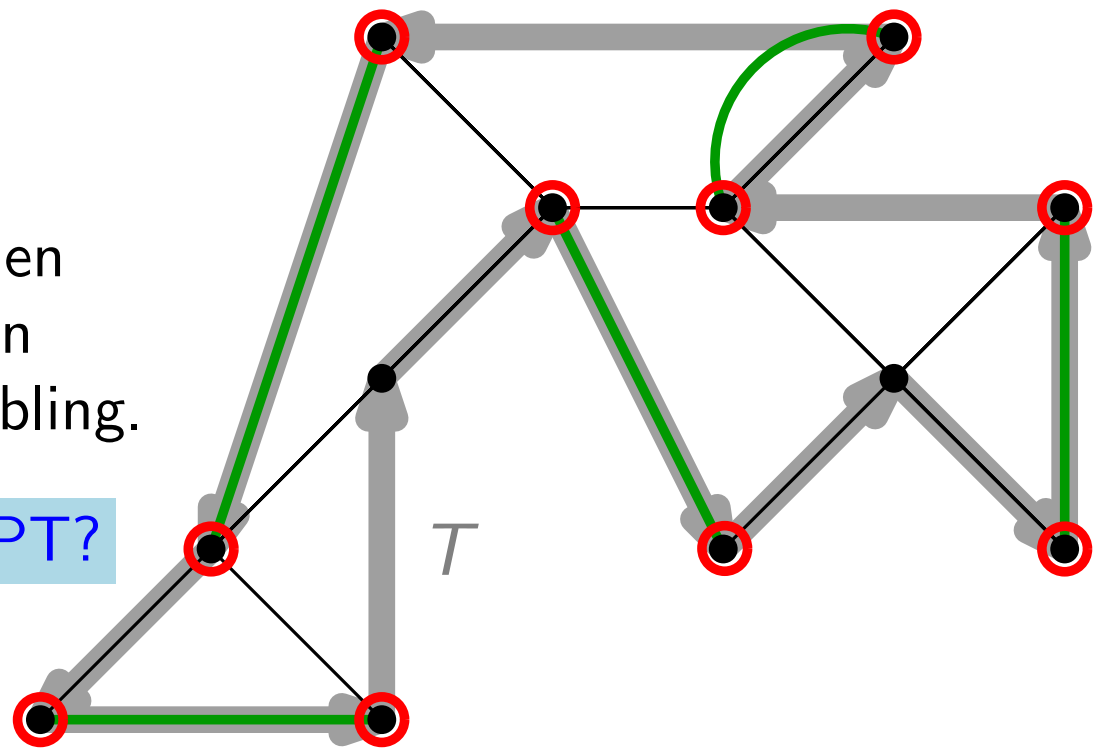
M ist unter allen perfekten Matchings in G eines mit minimalen Kosten $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$

Warum?

der von U *induzierte* Graph $(U, \{vw \in E(G) : v \in U, w \in U\})$

- Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie bei Tree-Doubling.

Wie gut ist T im Vergleich zu OPT?



Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.

Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

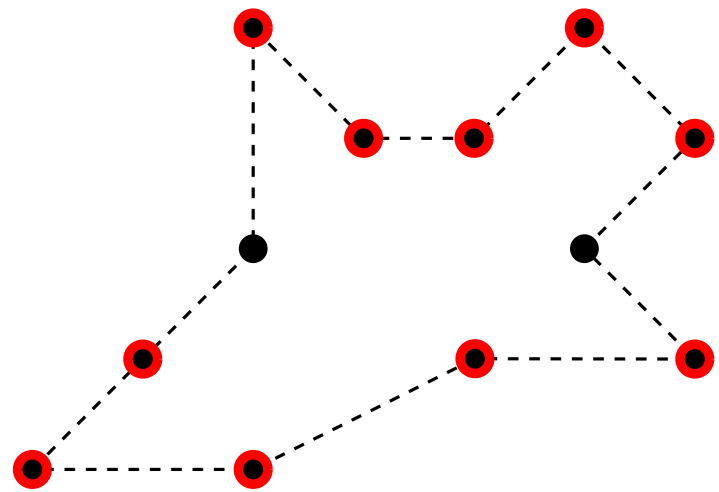
- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.

Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.

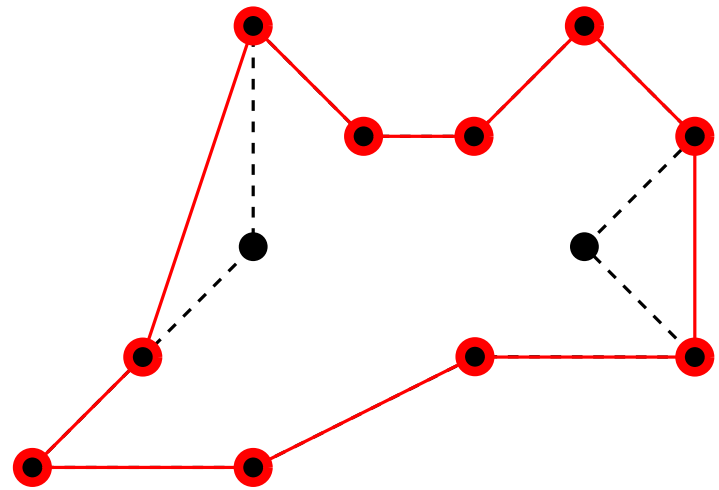


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.

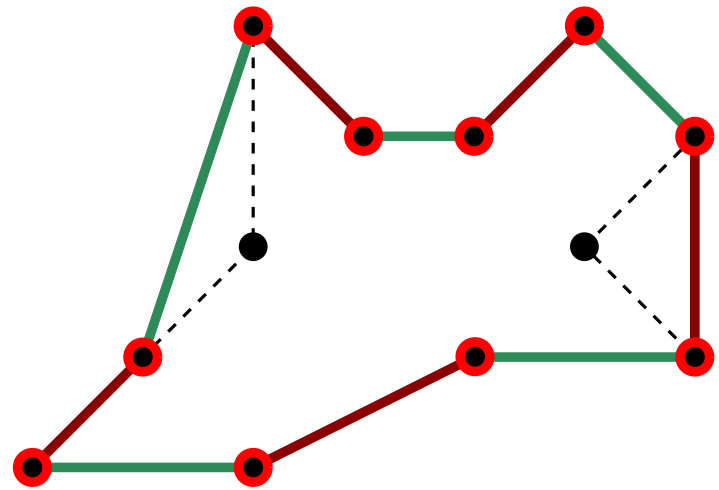


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.

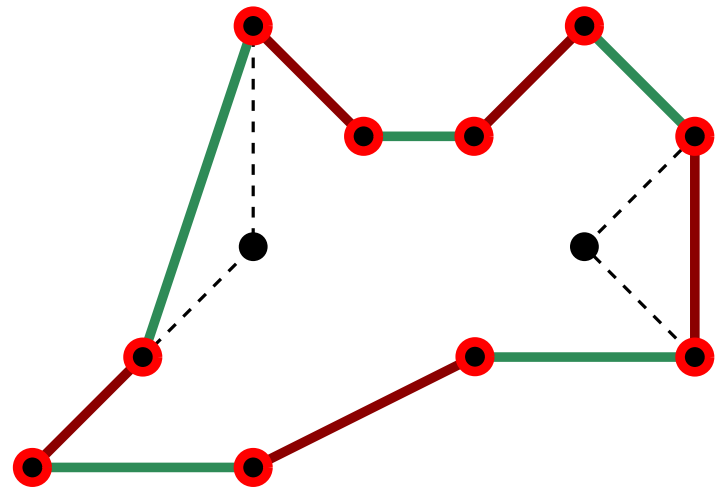


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.

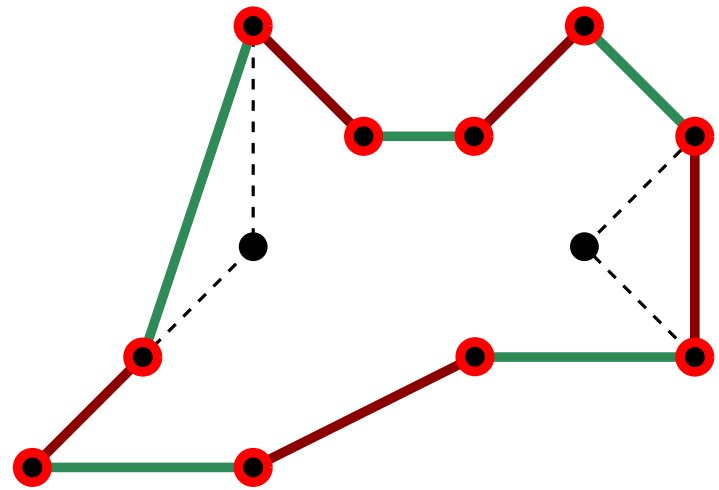


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.

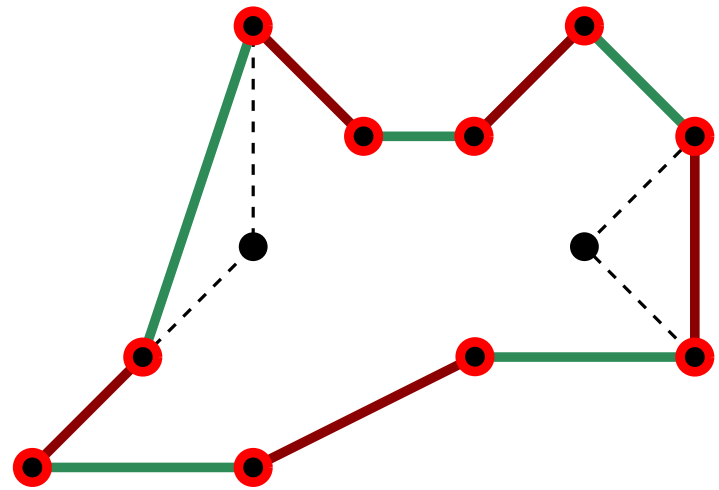


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da

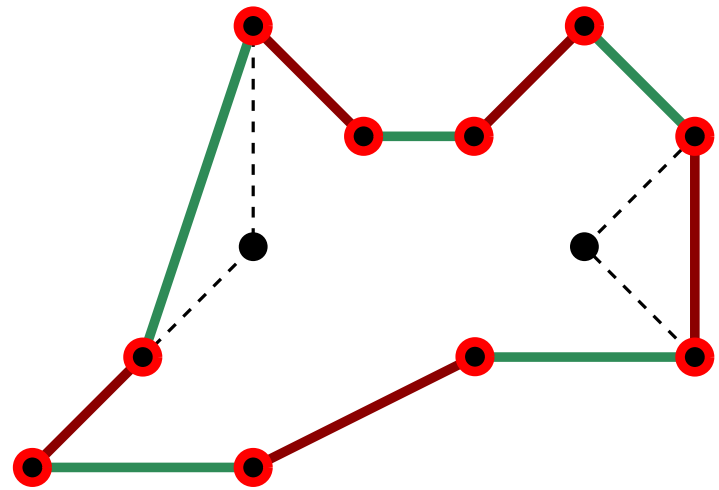


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da
  - M' perfektes Matching in $G[U]$

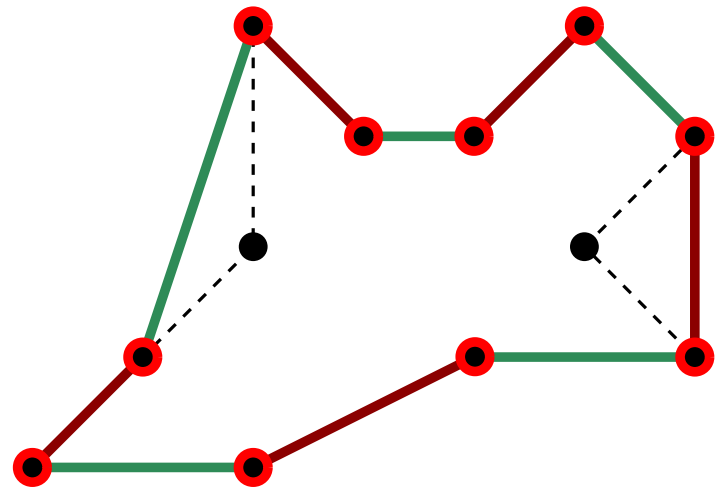


Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da
  - M' perfektes Matching in $G[U]$
  - M *kostenminimales* perfektes Matching in $G[U]$



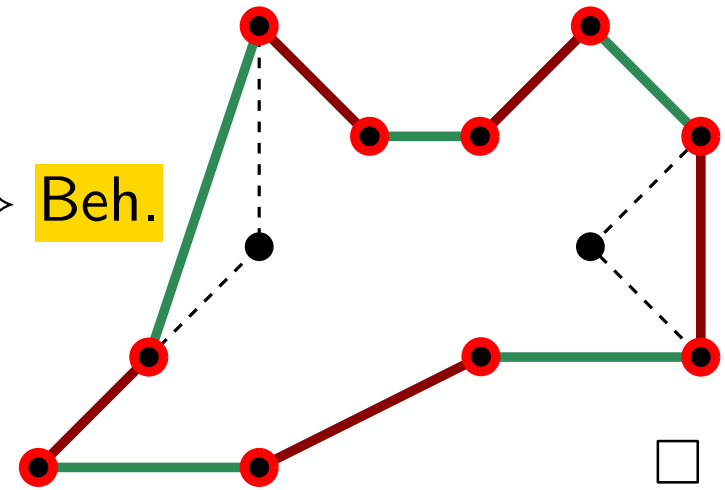
Analyse von Christofides

Satz. Christofides liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.

- Genügt zu zeigen, dass $c(B \cup M) \leq 3/2 \cdot \mathrm{OPT}$, da $c(T) \leq c(B \cup M)$.
- Da $c(B) \leq \mathrm{OPT}$, genügt es zu zeigen, dass $c(M) \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Betrachte optimale Tour T^*.
- Abkürzen von T^* liefert Tour T^{**} in $G[U]$ mit $c(T^{**}) \leq c(T^*) = \mathrm{OPT}$.
- Zerlege in T^{**} in zwei disjunkte perfekte Matchings M', M'' für $G[U]$.
- O.B.d.A. $c(M') \leq c(M'')$.
- Also gilt $c(M') \leq c(T^{**})/2 \leq \mathrm{OPT}/2$.
- Außerdem gilt $c(M) \leq c(M')$, da
  - M' perfektes Matching in $G[U]$
  - M *kostenminimales* perfektes Matching in $G[U]$

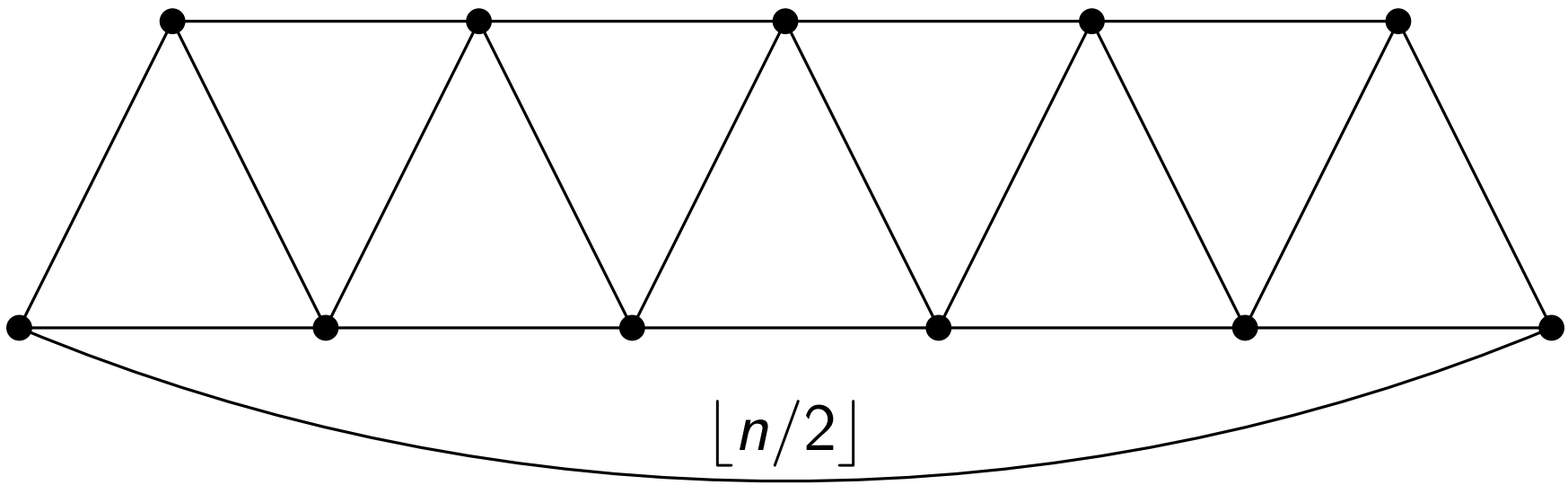
$\Rightarrow$ Beh.



□

Der Approximationsfaktor ist scharf

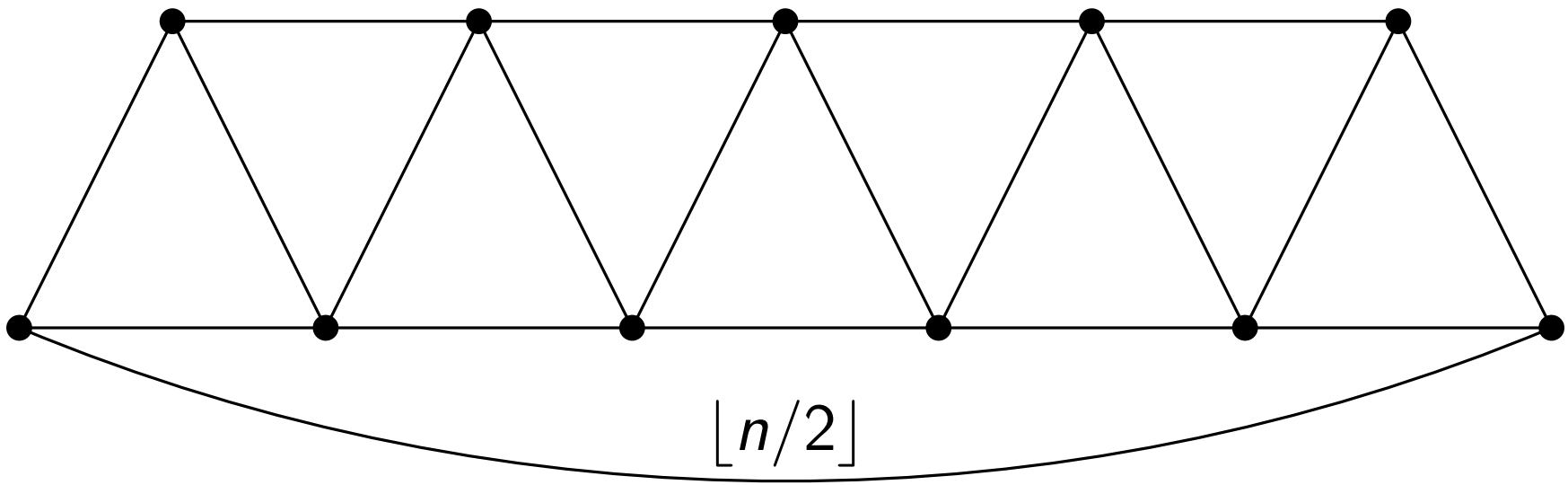
Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:



Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

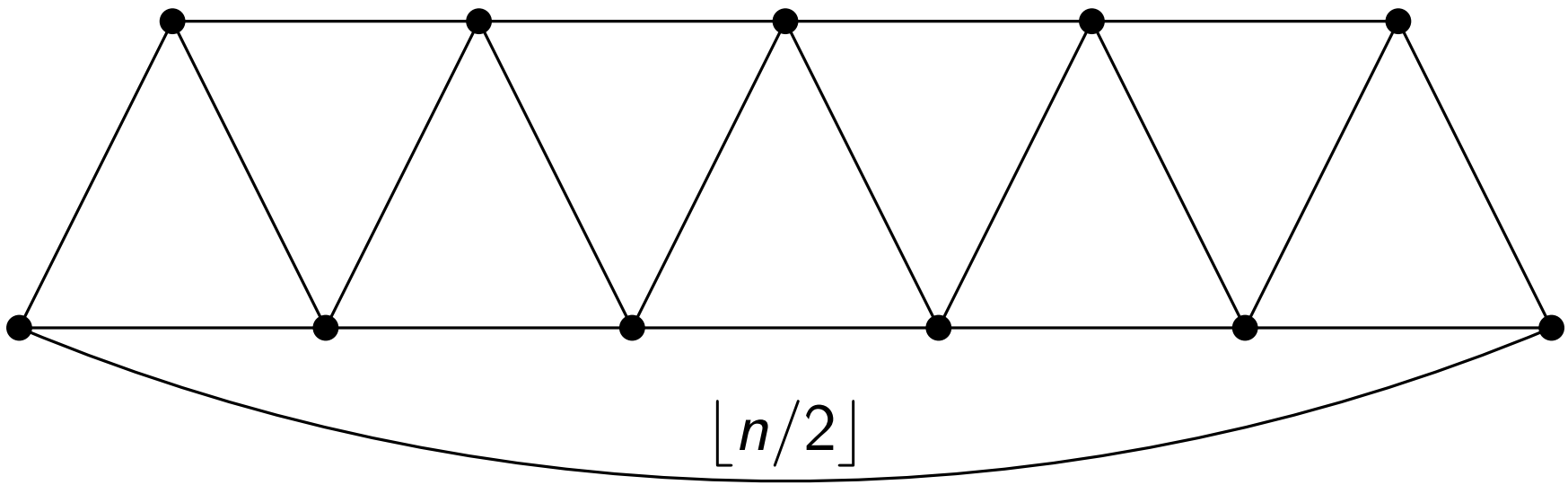


Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...

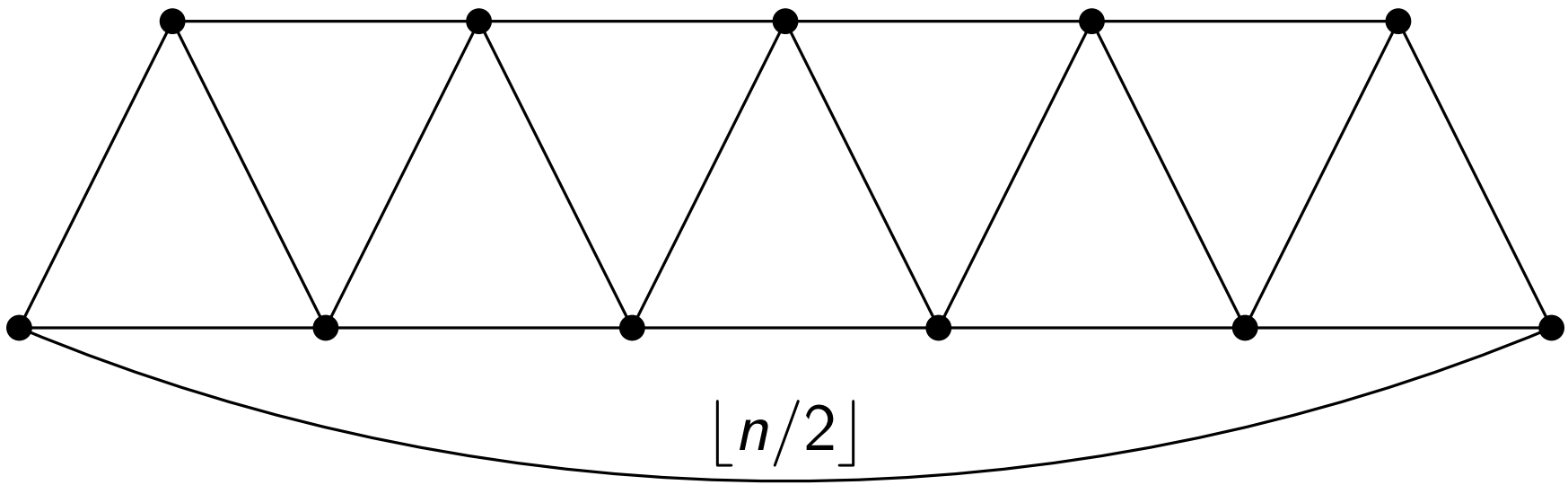


Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges

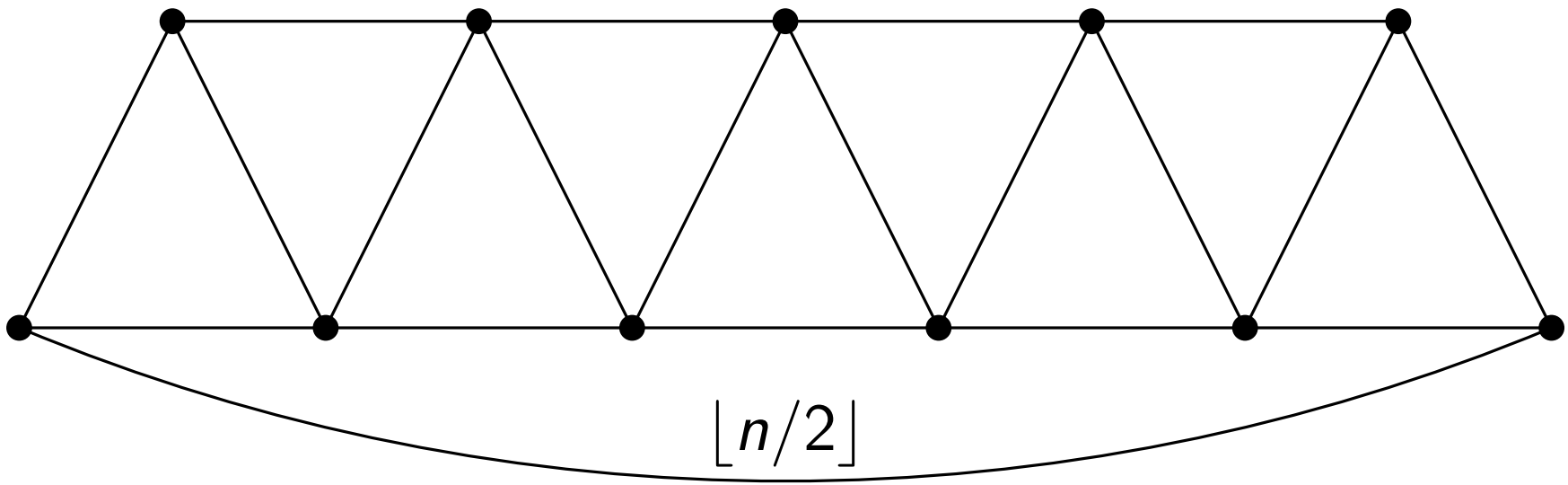


Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

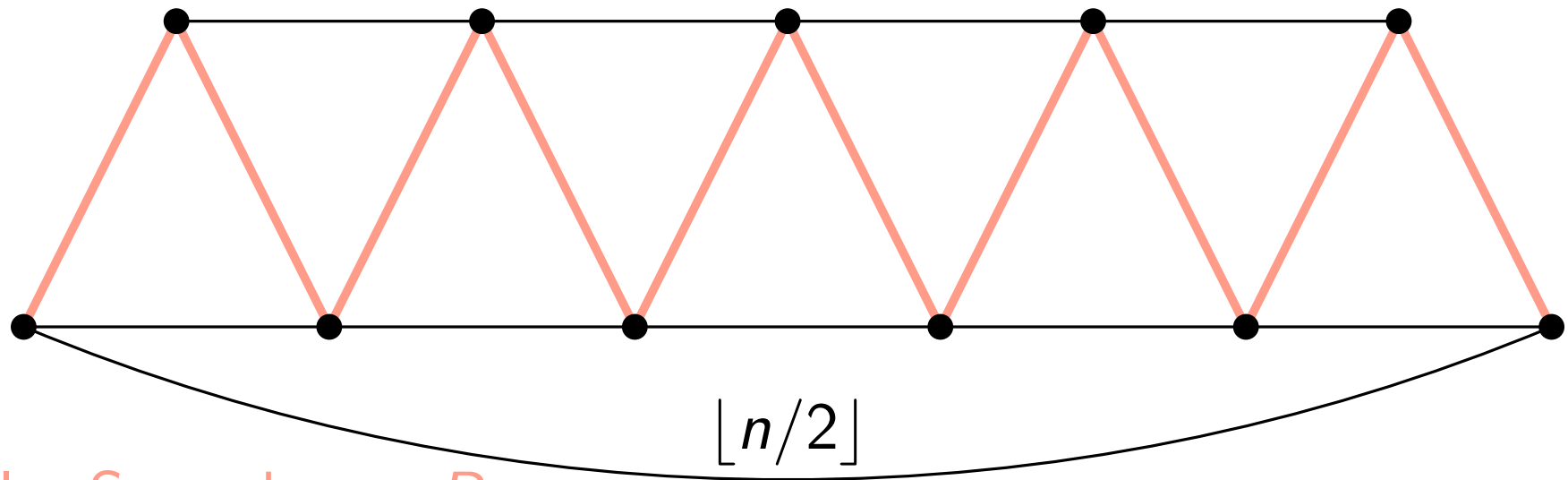


Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



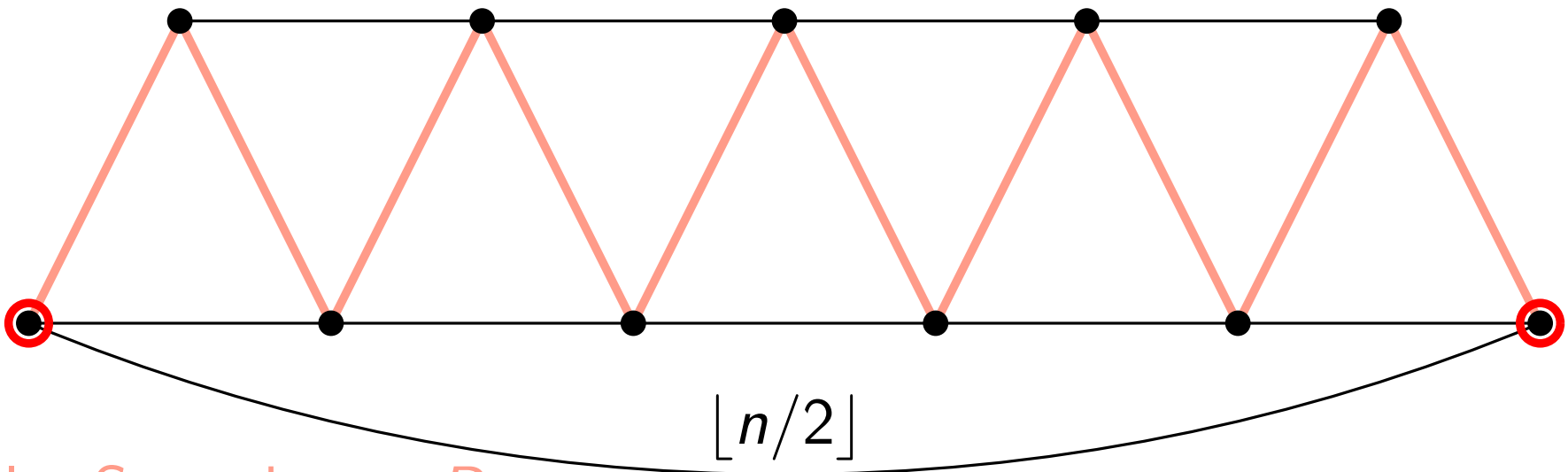
minimaler Spannbaum B

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



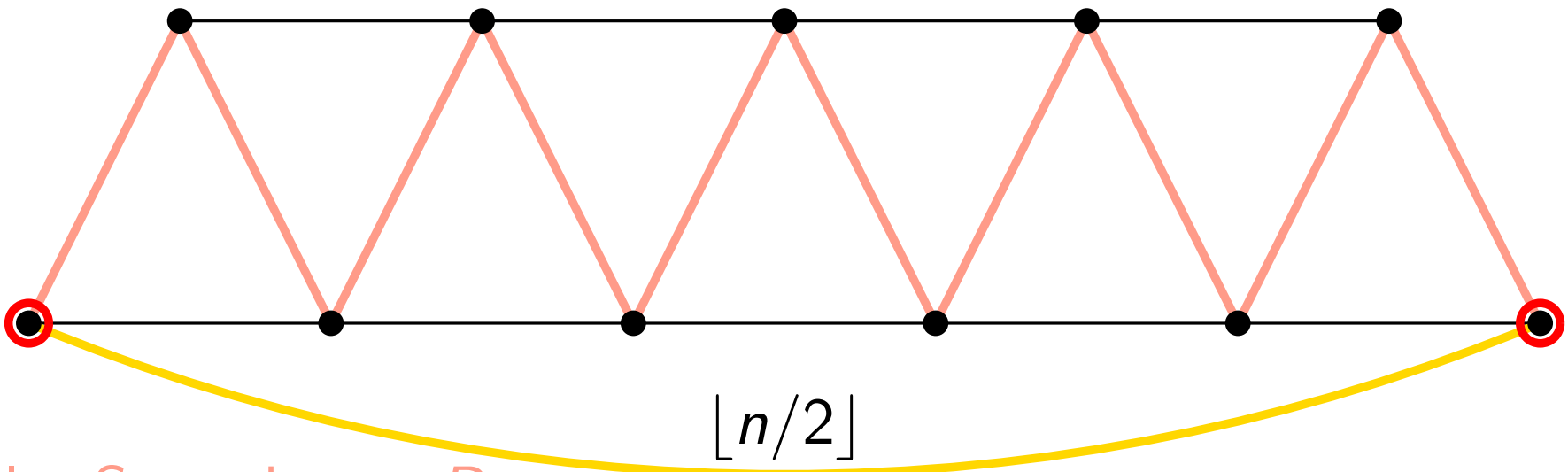
minimaler Spannbaum B

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

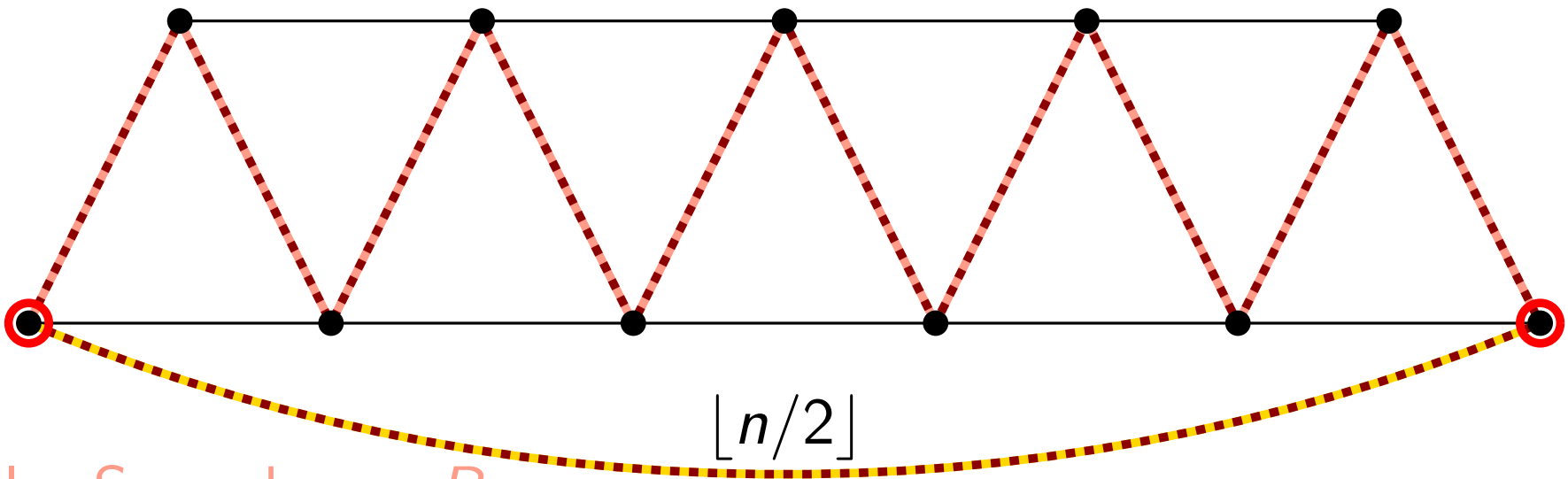


minimaler Spannbaum B
perfektes Matching M in $G[U]$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)

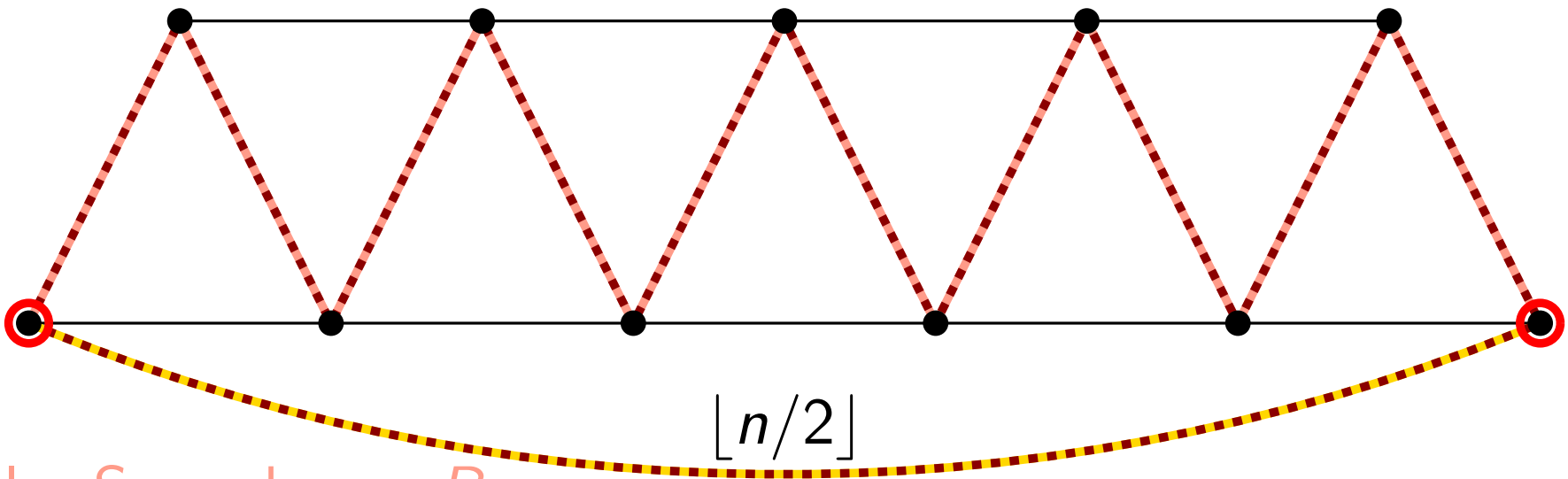


minimaler Spannbaum B
perfektes Matching M in $G[U]$
Christofides-Tour T mit Kosten ALG $=$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

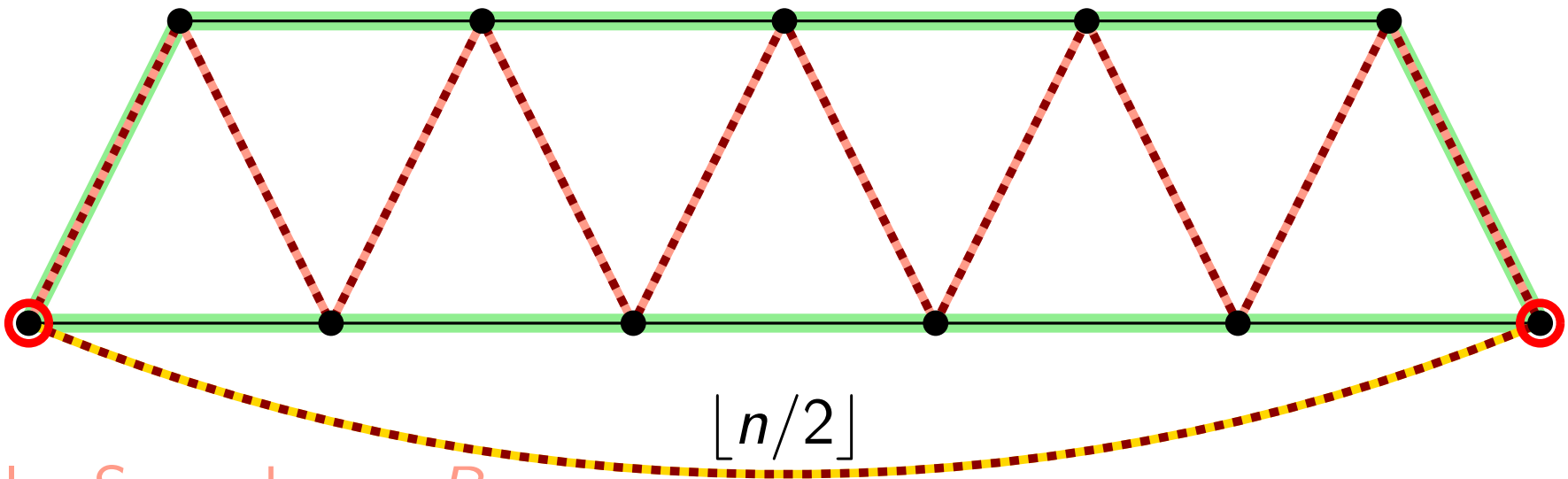
Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

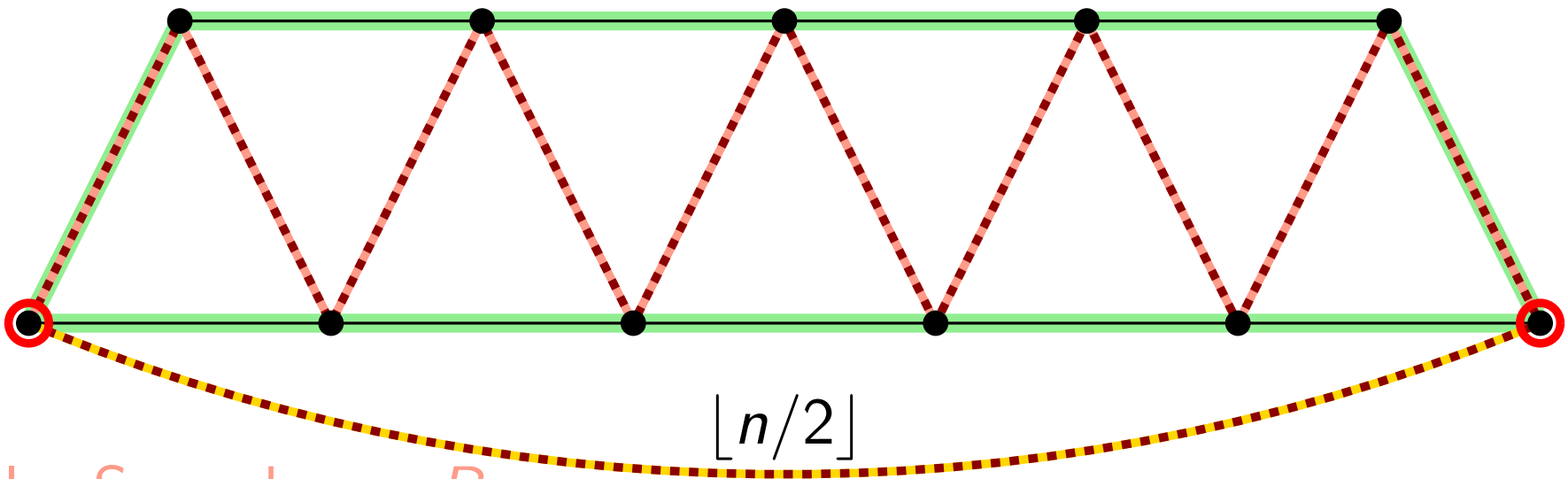
Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

OPT $=$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

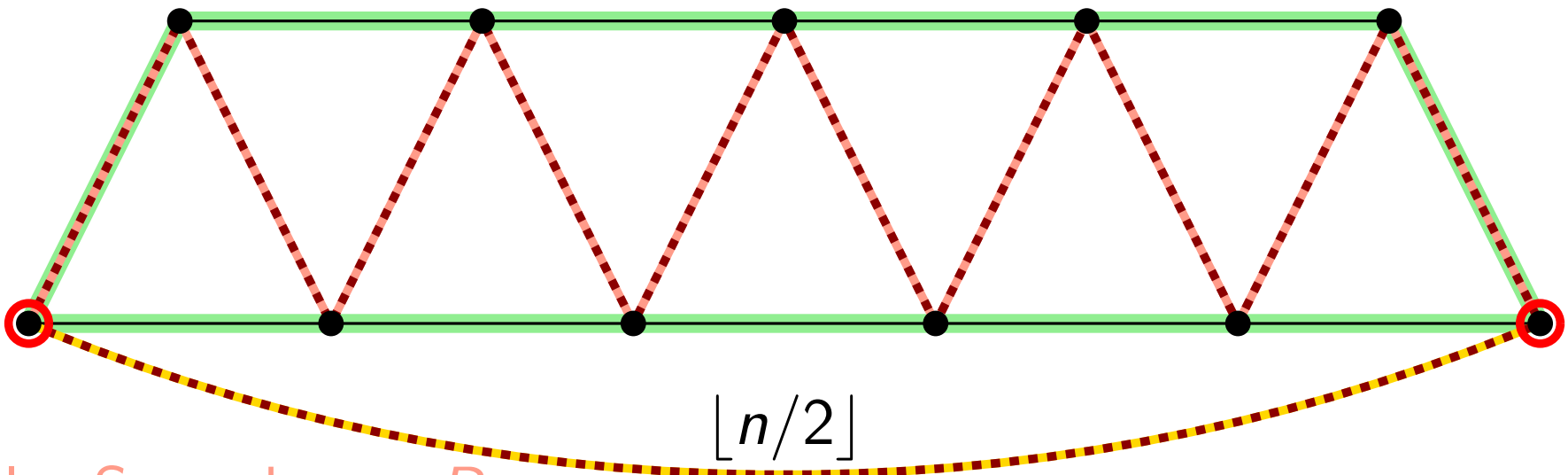
OPT $= n$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

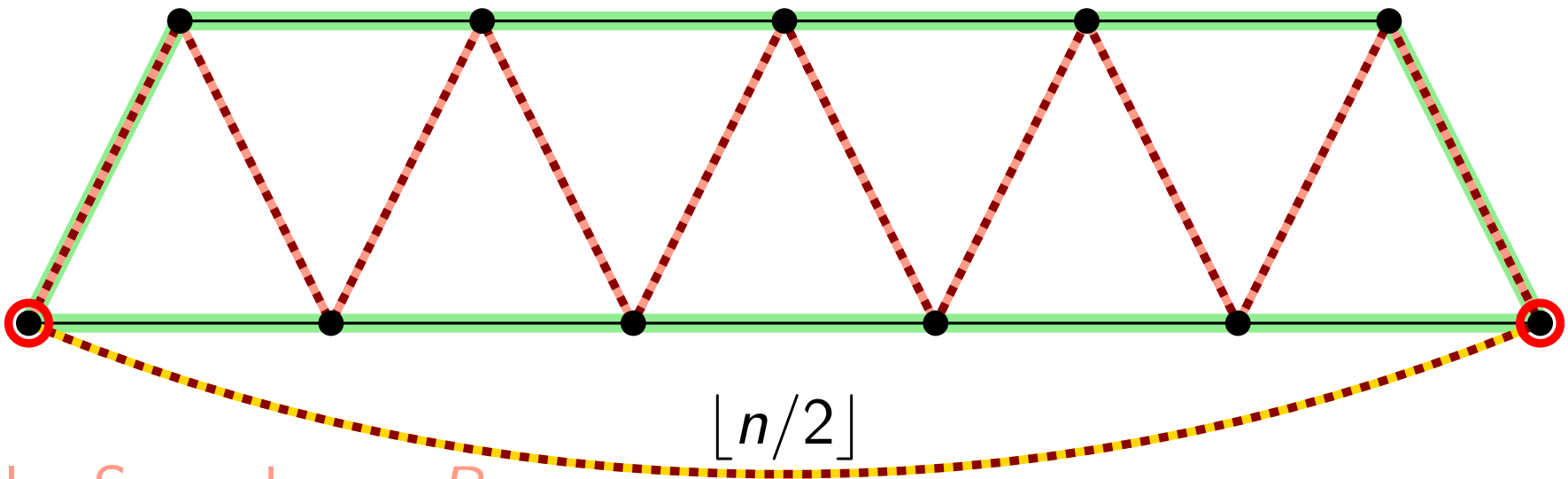
OPT $= n$

ALG / OPT $= (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1)/n \rightarrow$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

- Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.
- Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
  Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

OPT $= n$

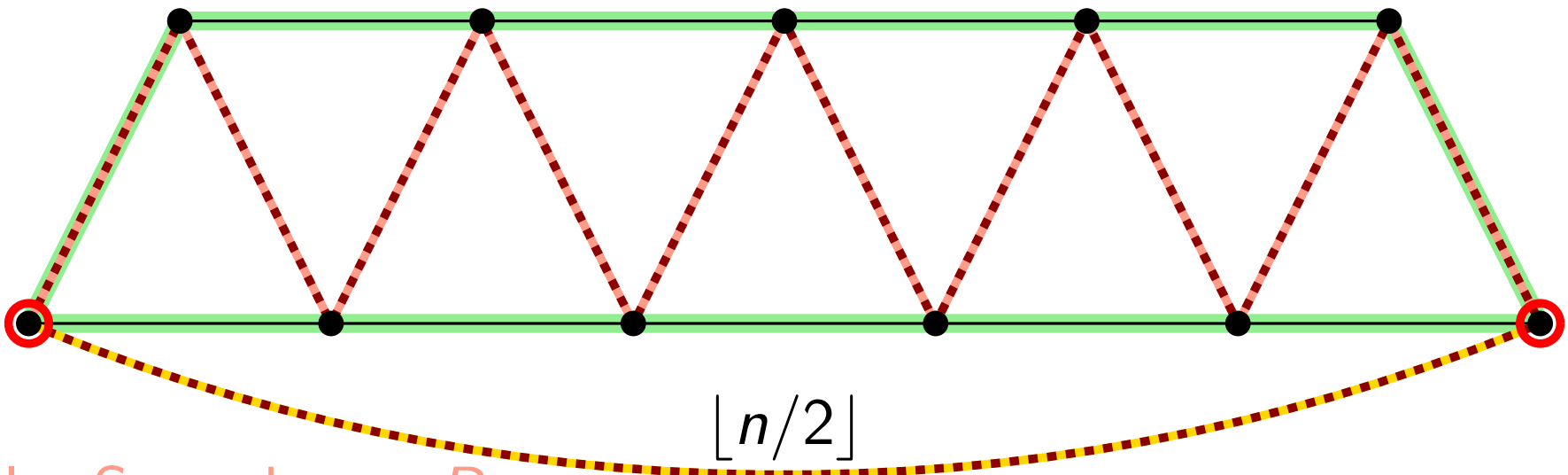
ALG / OPT $= (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1)/n \to 3/2$

Der Approximationsfaktor ist scharf

Konstruiere metrische Instanz G, für die Christofides möglichst *schlecht* ist:

– Unbeschriftete Kanten haben Kosten 1.

– Jede nicht gezeichnete Kante uv hat Kosten...
Länge eines kürzesten u-v-Weges ($\Rightarrow$ G metrisch!)



minimaler Spannbaum B

perfektes Matching M in $G[U]$

Christofides-Tour T mit Kosten ALG $= n + \lfloor n/2 \rfloor - 1$

OPT $= n$

ALG / OPT $= (n + \lfloor n/2 \rfloor - 1)/n \to 3/2$

Also:
Nicht die Analyse ist schlecht –
sondern der Algorithmus!

Kostenminimale perfekte Matchings

Def.

Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz. Ein kostenminimales perfektes Matching kann in $O(V^3)$ Zeit berechnet werden.

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz. Ein kostenminimales perfektes Matching kann in $O(V^3)$ Zeit berechnet werden.

Beweis. Siehe [Edmonds '65]; ziemlich kompliziert :-(□

Kostenminimale perfekte Matchings

Def. Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Gesucht: perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz. Ein kostenminimales perfektes Matching kann in $O(V^3)$ Zeit berechnet werden.

Beweis. Siehe [Edmonds '65]; ziemlich kompliziert :-(□

Im Folgenden betrachten wir das Problem nur in *bipartiten* Graphen $G = (A \cup B, E)$.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot{\cup} B, E)$ bipartit!

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot{\cup} B, E)$ bipartit!

Minimiere

unter den Nebenbed.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot{\cup} B, E)$ bipartit!

Minimiere

unter den Nebenbed.

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{für } uv \in E$$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot{\cup} B, E)$ bipartit!

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.

$x_{uv} \in \{0, 1\}$ für $uv \in E$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit!

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$

$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{für } uv \in E$

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit!

Minimiere $\displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\displaystyle\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$

$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{für } uv \in E$

- Effizient lösbar?

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit!

Minimiere $\displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\displaystyle\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$

$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{für } uv \in E$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit!

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

~~$x_{uv} \in \{0, 1\}$~~ für $uv \in E$

$x_{uv} \geq 0$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung* $\Rightarrow$ effizient lösbar!

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit!

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

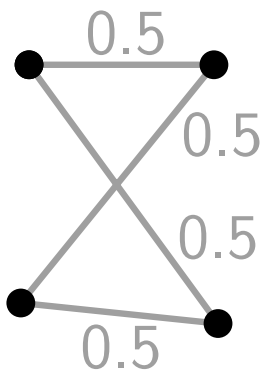
~~$x_{uv} \in \{0, 1\}$~~ für $uv \in E$

$x_{uv} \geq 0$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung* $\Rightarrow$ effizient lösbar!
  Bei Minimierungsproblemen gilt $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{ILP}}$.

Kostenminimale perfekte Matchings in bipartiten Graphen

- Aufgabe: Formulieren Sie ein ILP für $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit!



$\mathbf{x} \equiv 0.5$

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

~~$x_{uv} \in \{0, 1\}$~~ für $uv \in E$

$x_{uv} \geq 0$

- Effizient lösbar? I.A. nicht – VC is Spezialfall von ILP.
- Betrachte sogenannte *LP-Relaxierung* $\Rightarrow$ effizient lösbar!
  Bei Minimierungsproblemen gilt $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{ILP}}$.
- Problem: *fraktionale* Lösungen!

LP-Runden

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.

$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$

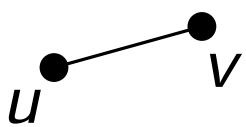
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

LP-Runden

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):



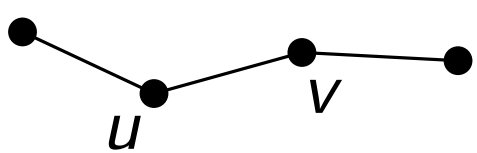
LP-Runden

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.



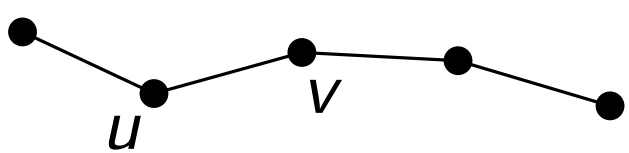
LP-Runden

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



LP-Runden

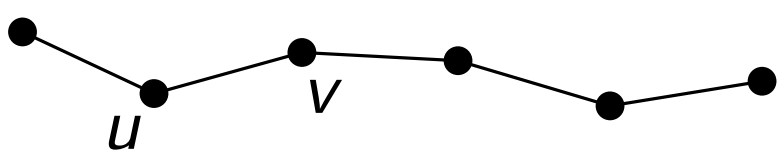
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



LP-Runden

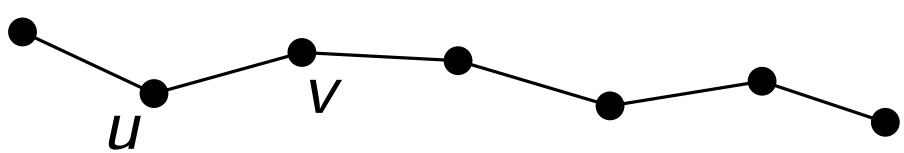
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



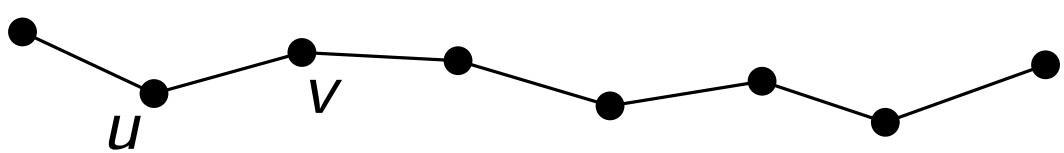
LP-Runden

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



LP-Runden

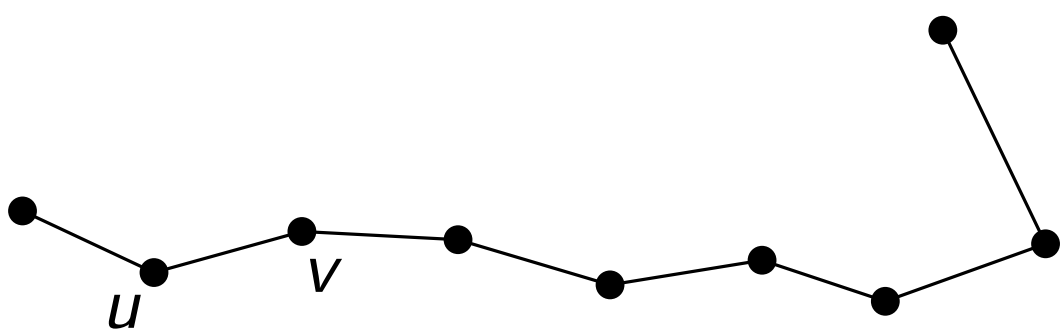
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



LP-Runden

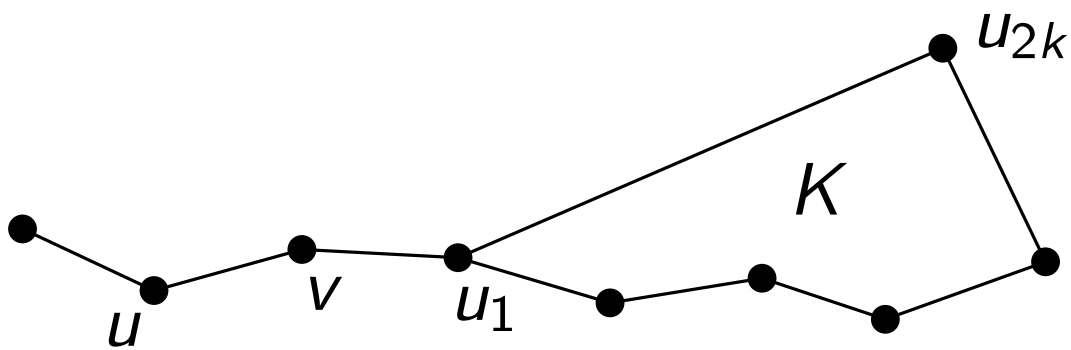
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



LP-Runden

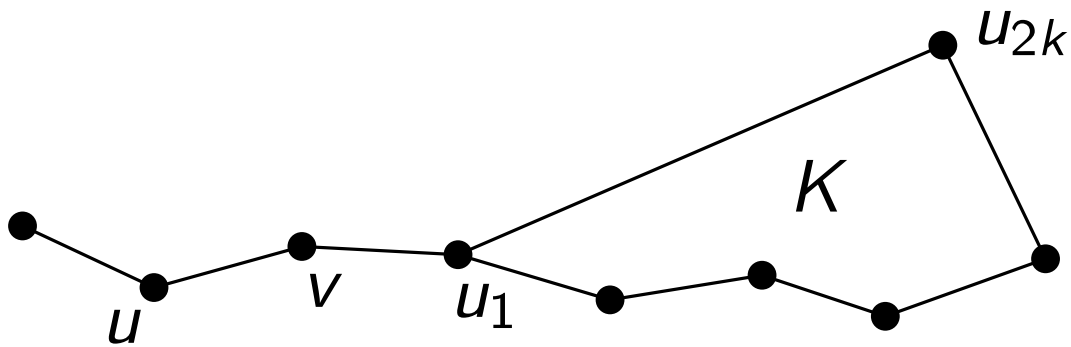
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Betrachte *fraktionale* Kante uv (d.h. $0 < x_{uv} < 1$):

u und v sind jeweils zu weiterer fraktionaler Kante adjazent.

Erweitere Pfad iterativ, bis fraktionaler Kreis $K = (u_1, \ldots, u_{2k})$ gefunden.



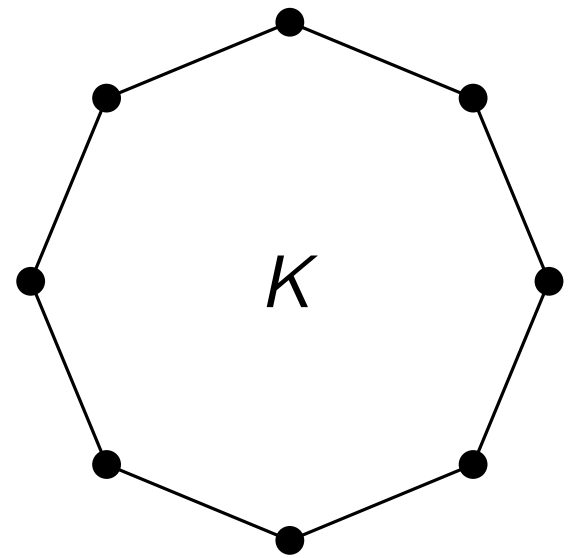
Kreis gerade, da Graph bipartit (siehe ÜA).

LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

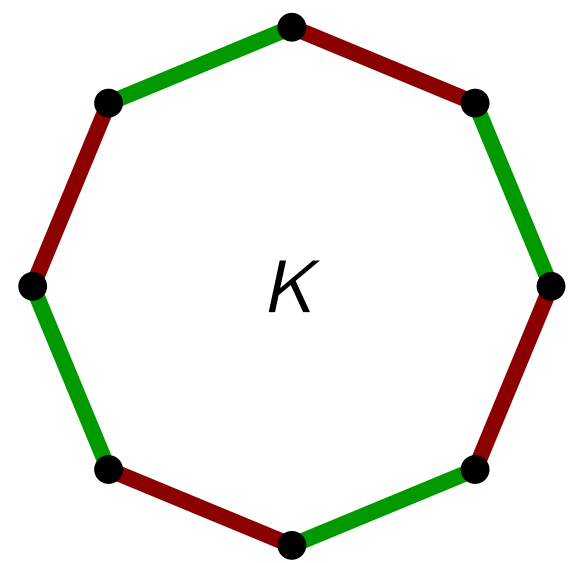


LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

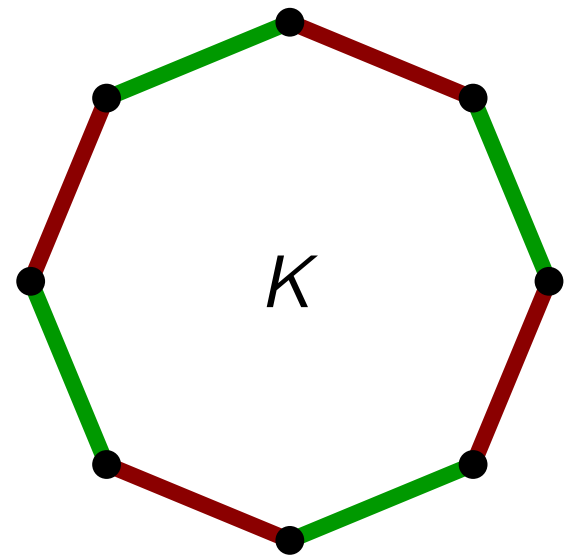


LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.



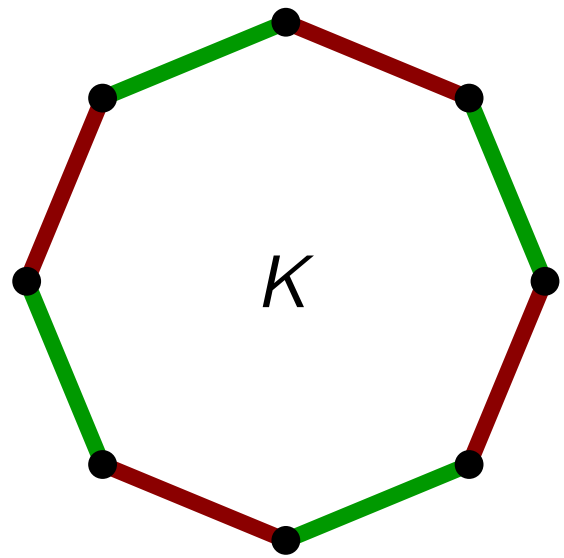
LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.
Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.



LP-Runden – Fortsetzung (I)

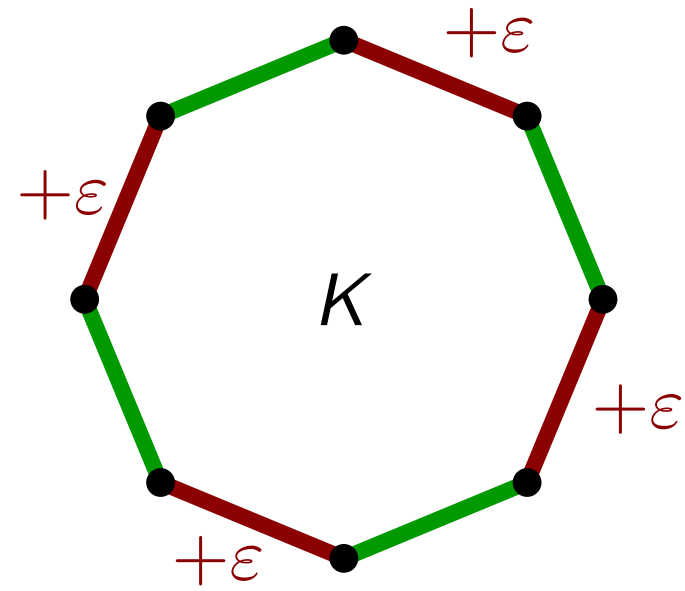
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze $x'_e := x_e + \varepsilon$ für $e \in M_1$,



LP-Runden – Fortsetzung (I)

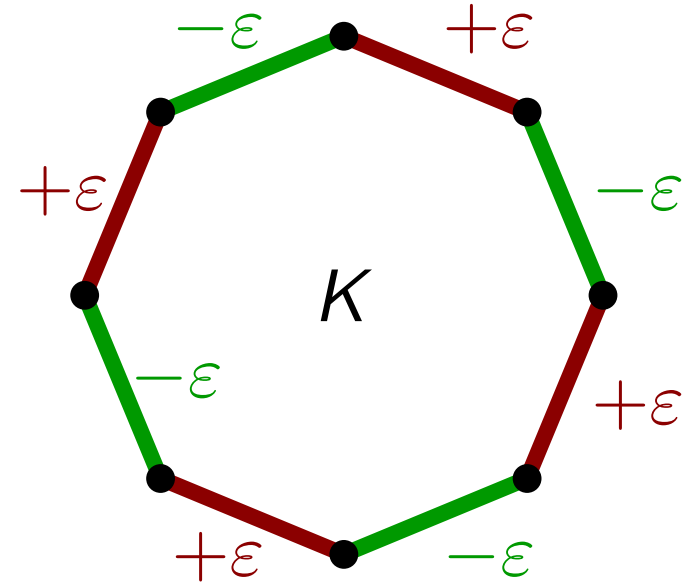
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$



LP-Runden – Fortsetzung (I)

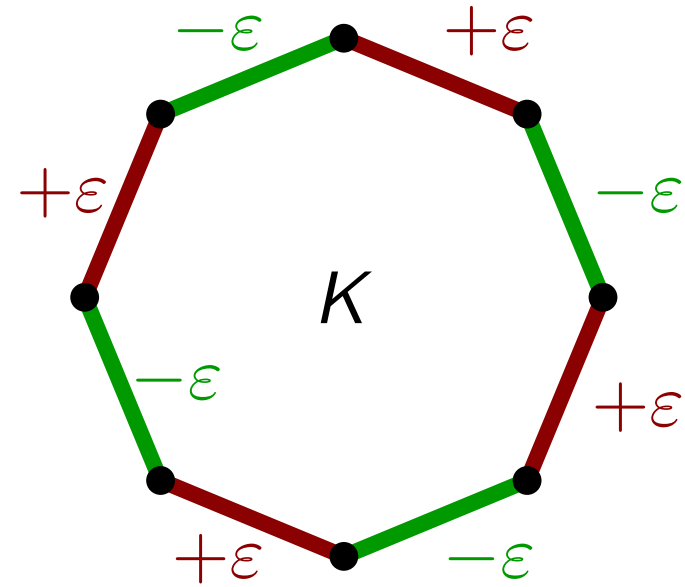
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$
$$x'_e := x_e \quad \text{für } e \in E \setminus K.$$



LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

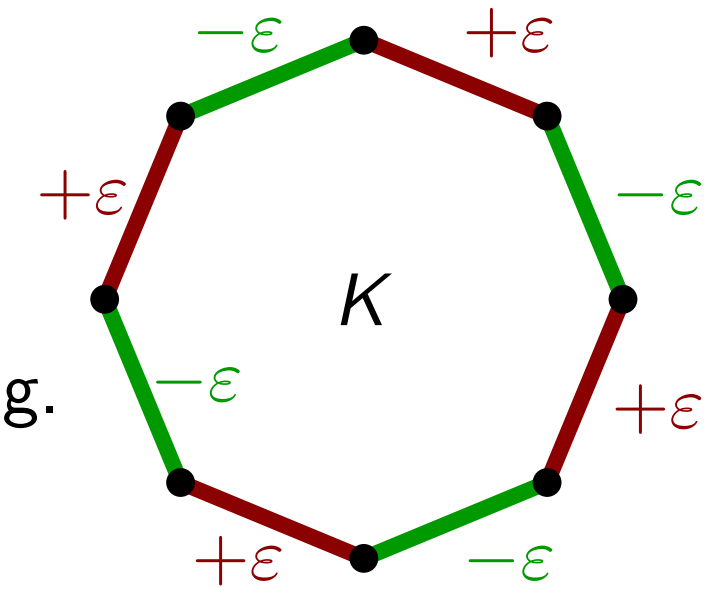
unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$
$$x'_e := x_e \quad \text{für } e \in E \setminus K.$$

– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.



LP-Runden – Fortsetzung (I)

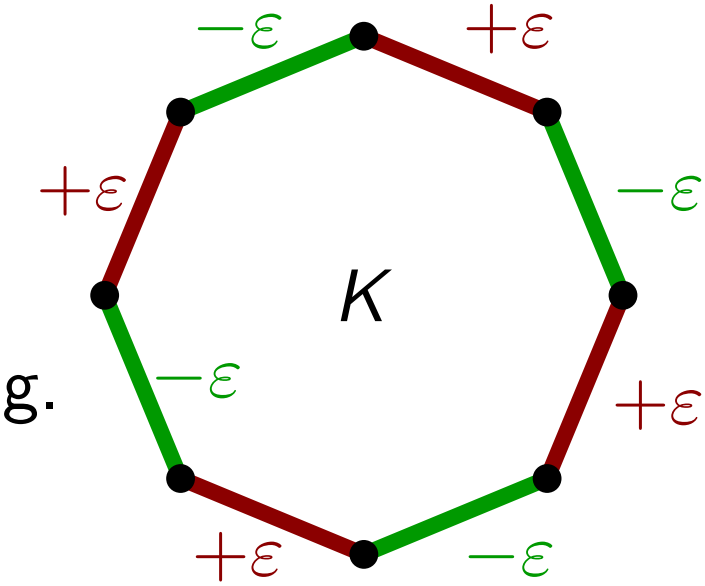
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$
$$x'_e := x_e \quad \text{für } e \in E \setminus K.$$



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
– Kostenänderung:

LP-Runden – Fortsetzung (I)

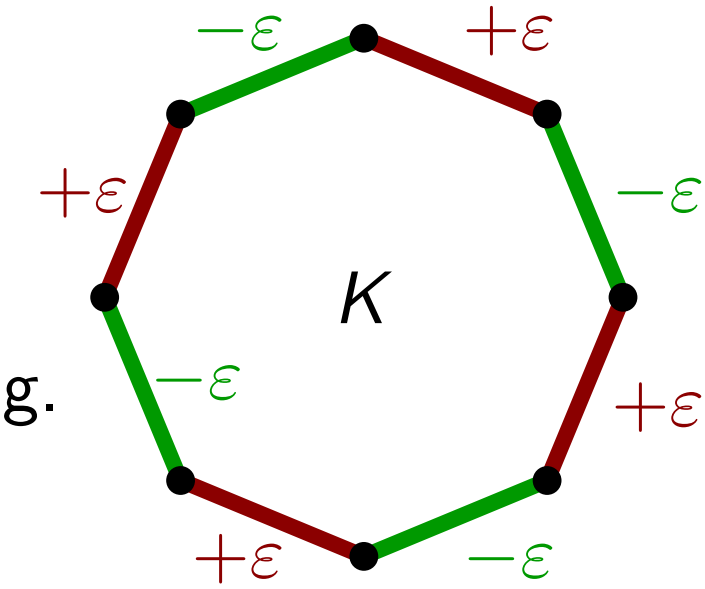
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$
$$x'_e := x_e \quad \text{für } e \in E \setminus K.$$



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
– Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1)$

LP-Runden – Fortsetzung (I)

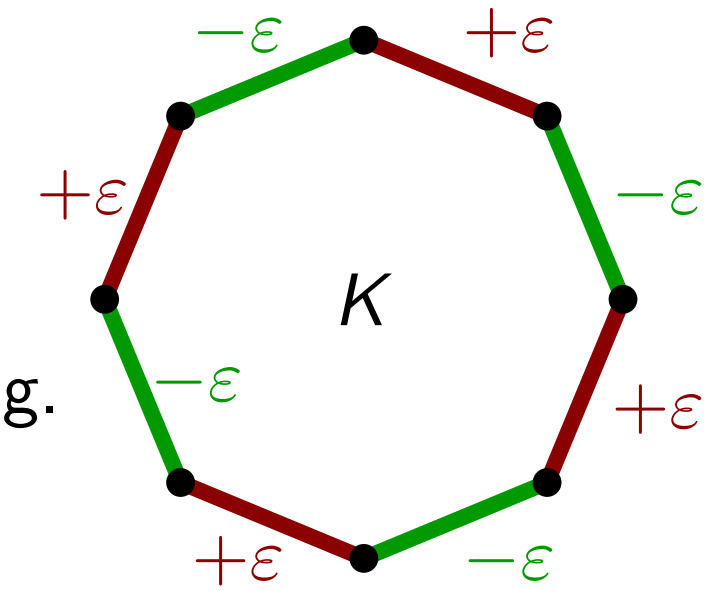
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$
$$x'_e := x_e \quad \text{für } e \in E \setminus K.$$



- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2)$

LP-Runden – Fortsetzung (I)

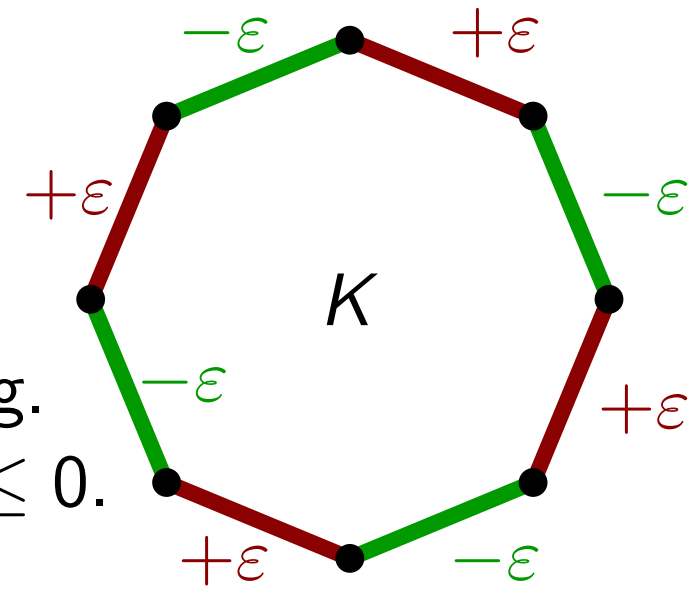
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$x'_e := x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1,$$
$$x'_e := x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2,$$
$$x'_e := x_e \quad \text{für } e \in E \setminus K.$$



- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.

LP-Runden – Fortsetzung (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

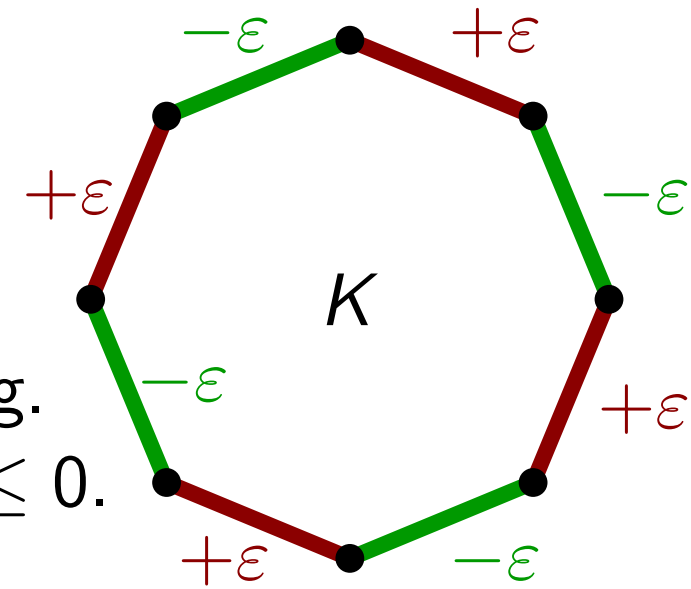
unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$x'_e := x_e + \varepsilon$ für $e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $e \in M_2$,
$x'_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.



– Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
– Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.

$\Rightarrow \mathbf{x}'$ ist auch optimal

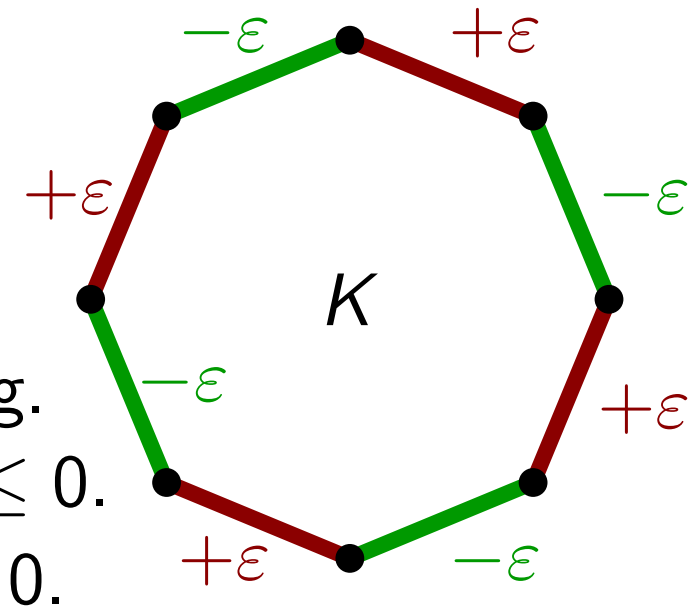
LP-Runden – Fortsetzung (I)

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} && \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} \\ &\text{unter den Nebenbed.} && \sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B \\ & && x_{uv} \geq 0 \qquad\quad \text{für } uv \in E \end{aligned}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$\begin{aligned} x'_e &:= x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1, \\ x'_e &:= x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2, \\ x'_e &:= x_e \qquad \text{für } e \in E \setminus K. \end{aligned}$$



- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.
- Für mind. eine Kante $e \in M_2$ gilt $x'_e = 0$.

$\Rightarrow \mathbf{x}'$ ist auch optimal

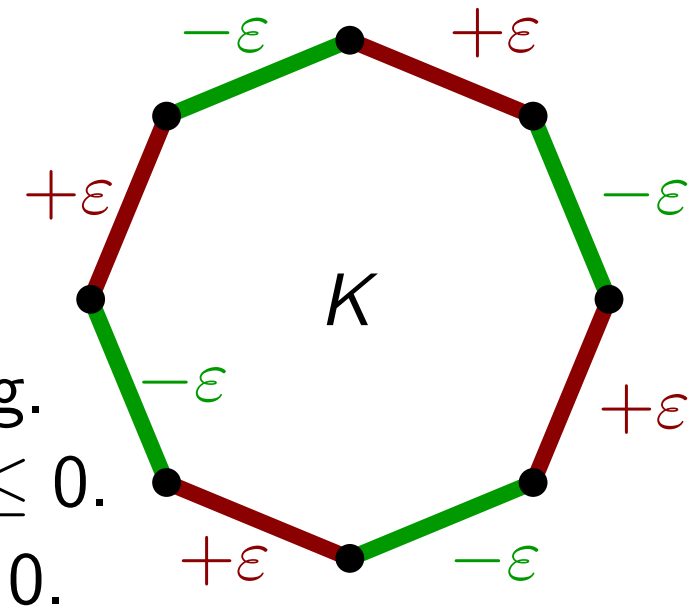
LP-Runden – Fortsetzung (I)

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} && \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} \\ &\text{unter den Nebenbed.} && \sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B \\ & && x_{uv} \geq 0 \qquad\quad \text{für } uv \in E \end{aligned}$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2. Sei $c(M_1) \leq c(M_2)$.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in M_2 \}$.

Setze
$$\begin{aligned} x'_e &:= x_e + \varepsilon \text{ für } e \in M_1, \\ x'_e &:= x_e - \varepsilon \text{ für } e \in M_2, \\ x'_e &:= x_e \qquad \text{für } e \in E \setminus K. \end{aligned}$$



- Resultierender Lösungsvektor $\mathbf{x}'$ zulässig.
- Kostenänderung: $\varepsilon \cdot c(M_1) - \varepsilon \cdot c(M_2) \leq 0$.
- Für mind. eine Kante $e \in M_2$ gilt $x'_e = 0$.

$\Rightarrow \mathbf{x}'$ ist auch optimal – und hat mehr integrale Variable als $\mathbf{x}$!!

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob. – Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob.
- Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
- Zielfunktion erhöht sich nicht.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob.
- Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
- Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach [redacted] Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob.
- Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
- Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach $\leq |E|$ Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob.
- Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
- Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach $\leq |E|$ Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

Satz.

LP-Runden – Fortsetzung (II)

Minimiere	$\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$	
unter den Nebenbed.	$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$	für $u \in A \cup B$
	$x_{uv} \geq 0$	für $uv \in E$

Wiederhole vorige Schritte, solange fraktionale Kanten existieren.

Beob.
- Integrale Kanten werden nicht weiter verändert.
- Zielfunktion erhöht sich nicht.

$\Rightarrow$ Algorithmus terminiert nach $\leq |E|$ Iterationen mit ganzzahliger und optimaler (!) Lösung.

Satz. In bipartiten Graphen kann man kostenminimale perfekte Matchings in Polynomialzeit ermitteln.

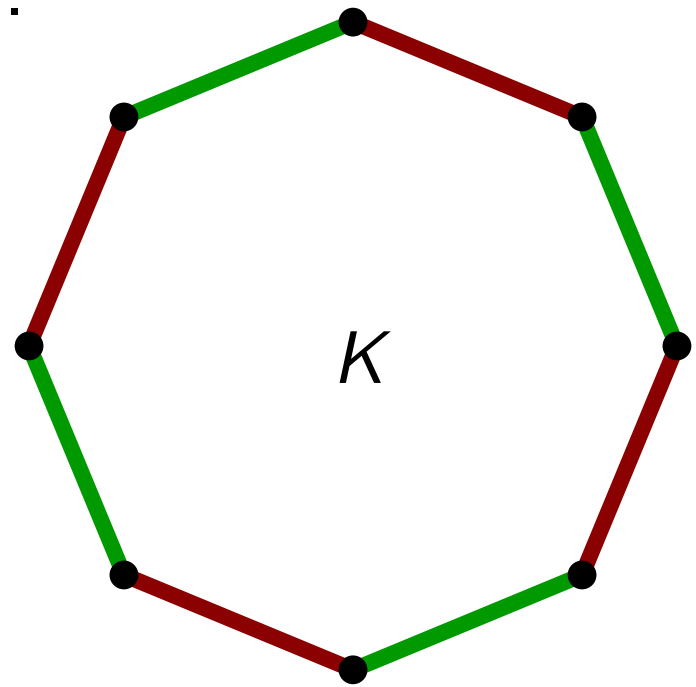
Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

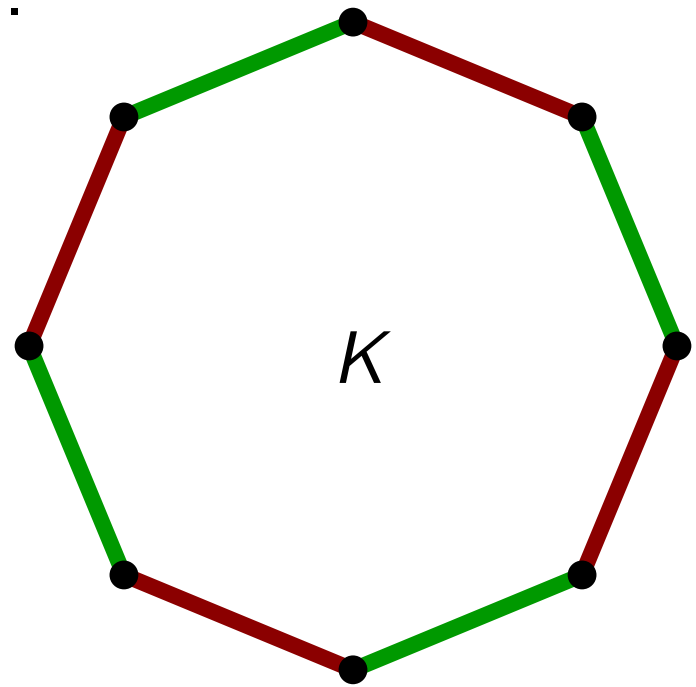


Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.
Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.



Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

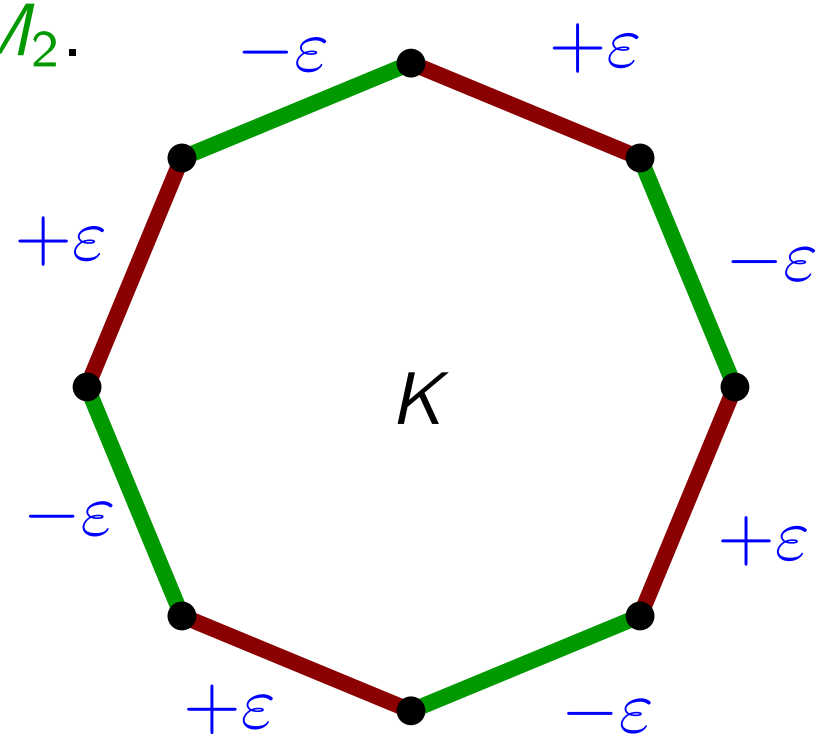
unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$x'_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_2$,
$x'_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.



Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

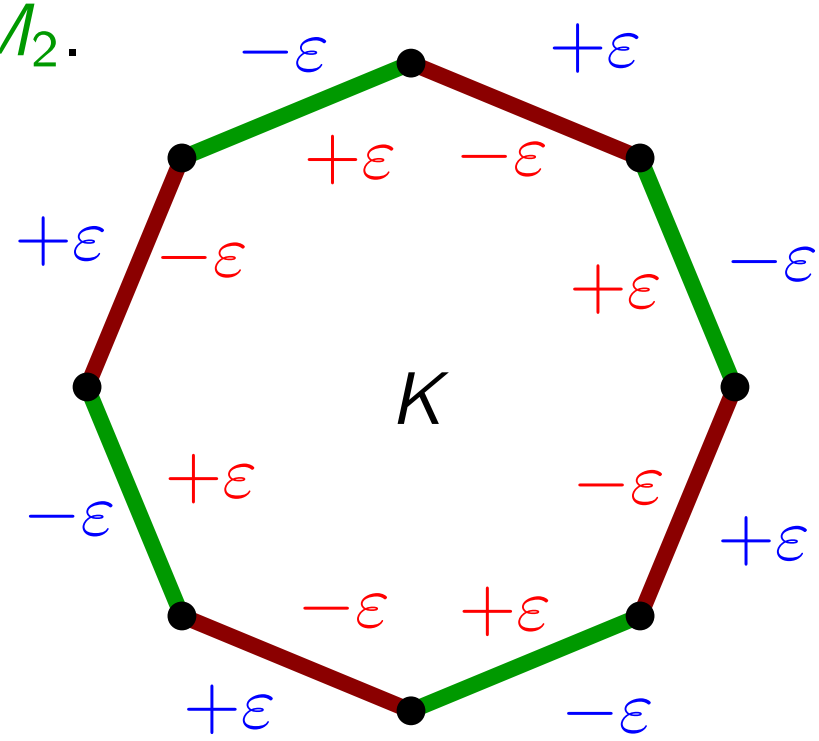
$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$x'_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_2$,
$x'_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.

Setze
$x''_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x''_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_2$.
$x''_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.



Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

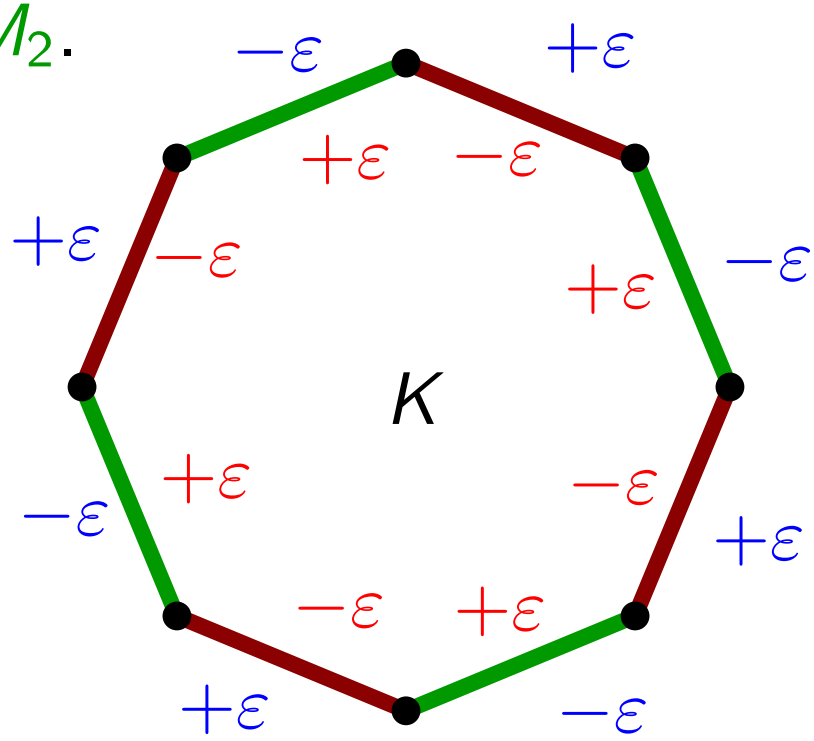
$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$x'_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_2$,
$x'_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.

Setze
$x''_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x''_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_2$.
$x''_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.



Beob.: Lösungen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ sind beide zulässig

Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

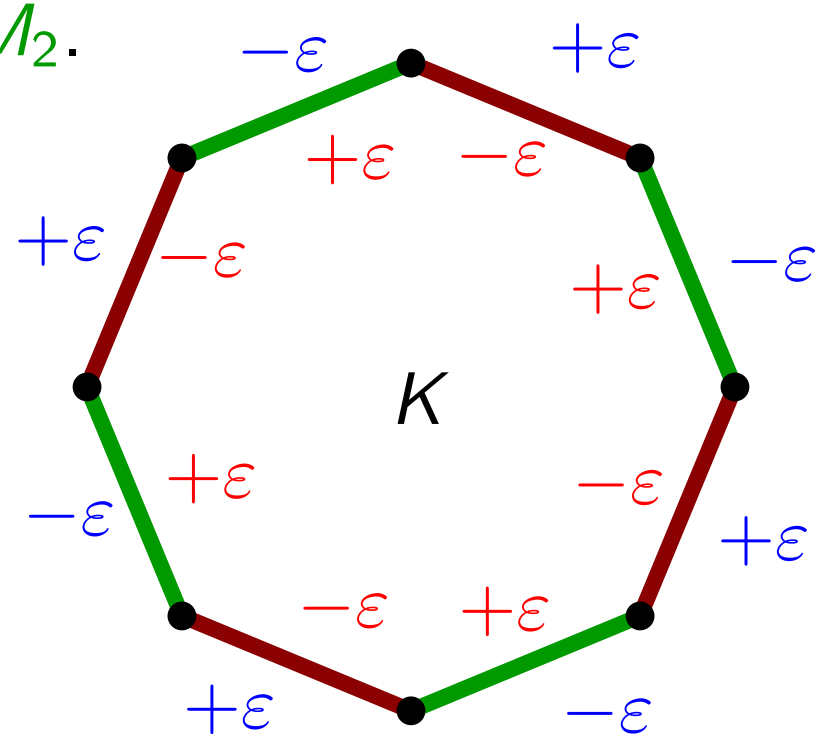
$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$x'_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_2$,
$x'_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.

Setze
$x''_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x''_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_2$.
$x''_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.



Beob.: Lösungen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ sind beide zulässig und $\mathbf{x} =$

Extrempunkt-Lösungen (I)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

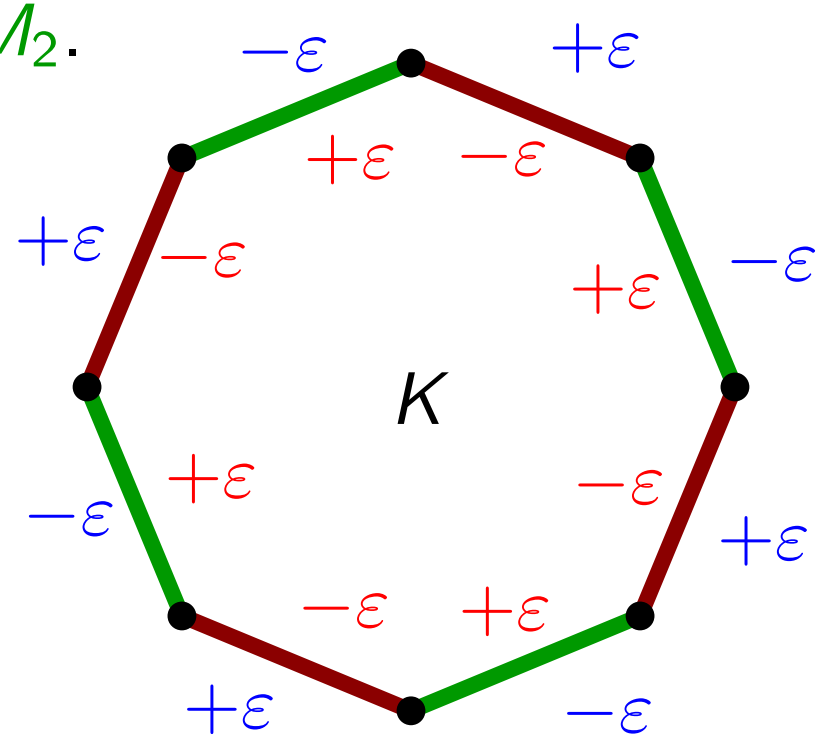
$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

Zerlege K in disjunkte Matchings M_1, M_2.

Wähle $\varepsilon := \min\{ x_e \mid e \in K \}$.

Setze
$x'_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x'_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_2$,
$x'_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.

Setze
$x''_e := x_e - \varepsilon$ für $x_e \in M_1$,
$x''_e := x_e + \varepsilon$ für $x_e \in M_2$.
$x''_e := x_e$ für $e \in E \setminus K$.



Beob.: Lösungen $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ sind beide zulässig und $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$!

Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed.
$$\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{für } uv \in E$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt

Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Extrempunkt-Lösungen (II)

Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

Extrempunkt-Lösungen (II)

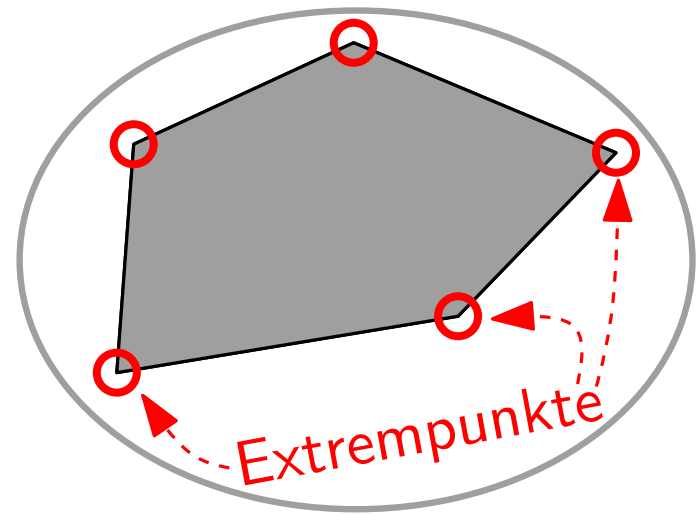
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.



Extrempunkt-Lösungen (II)

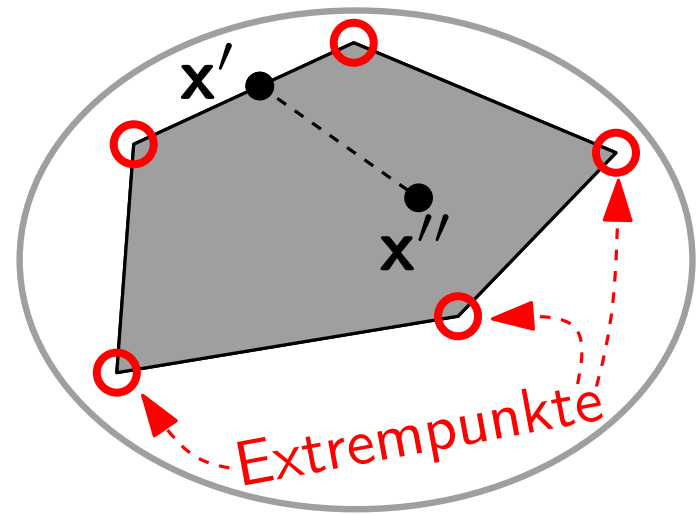
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.



Extrempunkt-Lösungen (II)

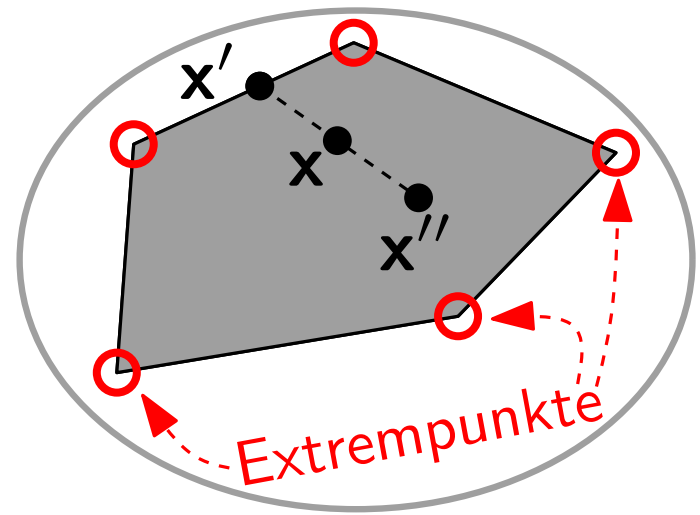
Minimiere $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$

unter den Nebenbed. $\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1$ für $u \in A \cup B$

$x_{uv} \geq 0$ für $uv \in E$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \Rightarrow \mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.



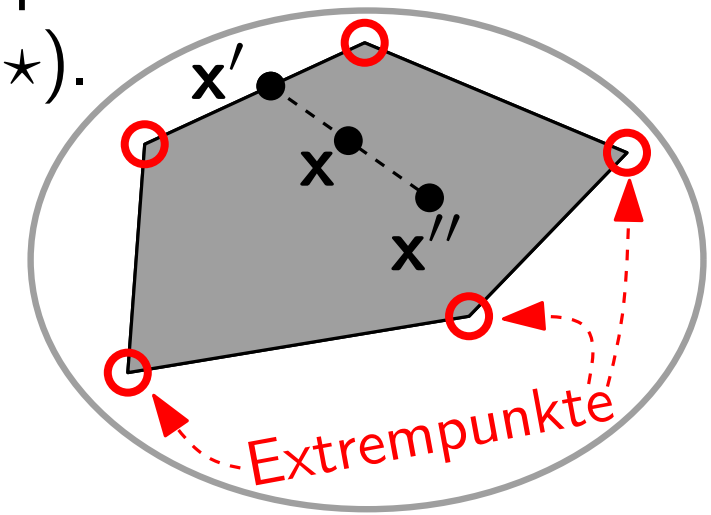
Extrempunkt-Lösungen (II)

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimiere} && \sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} && \\
&\text{unter den Nebenbed.} && \sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 && \text{für } u \in A \cup B \\
& && x_{uv} \geq 0 && \text{für } uv \in E
\end{aligned}
\Bigg\} (\star)
$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

$\Rightarrow$ Die fraktionale Lösung $\mathbf{x}$ ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von $(\star)$.



Extrempunkt-Lösungen (II)

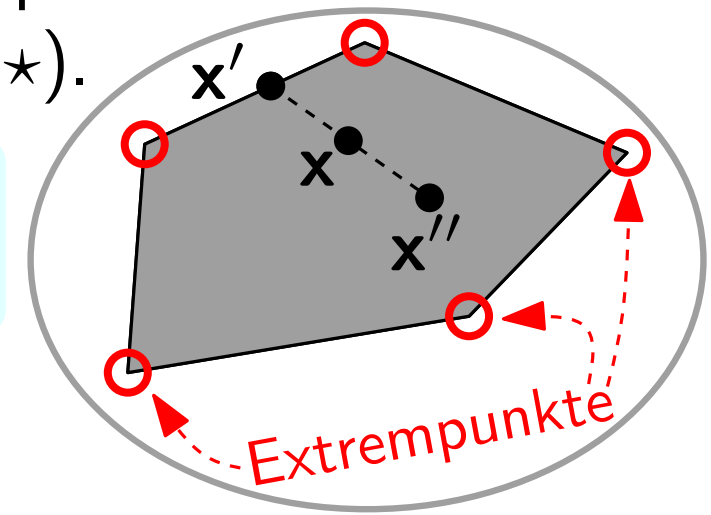
$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv} \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A \cup B \\
& x_{uv} \geq 0 \qquad\qquad \text{für } uv \in E
\end{array}
\right\} (\star)
$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

$\Rightarrow$ Die fraktionale Lösung $\mathbf{x}$ ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von $(\star)$.

Satz. Polytop $(\star)$ für bipartite Matchings hat nur *ganzzahlige* Extrempunkte.



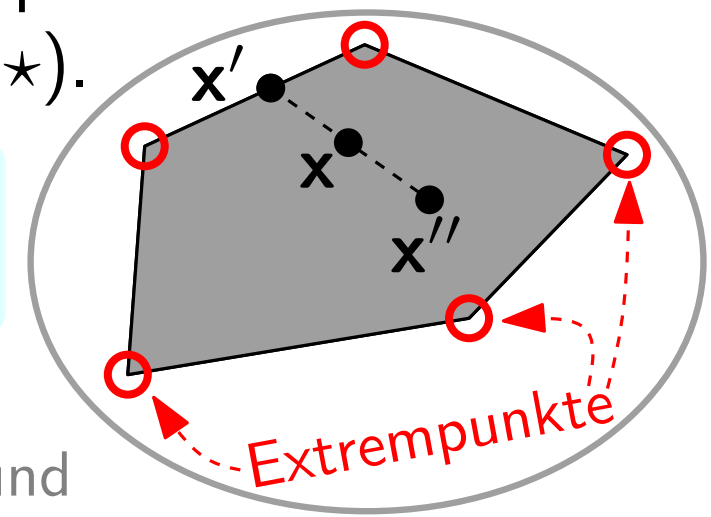
Extrempunkt-Lösungen (II)

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{Minimiere} & \displaystyle\sum_{uv\in E} c_{uv}x_{uv} \\
\text{unter den Nebenbed.} & \displaystyle\sum_{v\in \mathrm{Adj}[u]} x_{uv} = 1 \quad \text{für } u \in A\cup B \\
& x_{uv} \geq 0 \qquad\qquad \text{für } uv \in E
\end{array}\right\} (\star)
$$

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') \;\Rightarrow\;$ $\mathbf{x}$ liegt auf der Strecke $\overline{x'x''}$.

Außerdem sind x, x' und x'' paarweise verschieden.

$\Rightarrow$ Die fraktionale Lösung $\mathbf{x}$ ist *kein* Extrempunkt des Lösungsraums (konvexes Polytop) von $(\star)$.



Satz. Polytop $(\star)$ für bipartite Matchings hat nur *ganzzahlige* Extrempunkte.

Bem. Gängige LP-Algorithmen terminieren mit Extrempunkt-Lösungen (sofern existent) und erfordern für obiges LP *kein* anschließendes LP-Runden!!