

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

5. Vorlesung

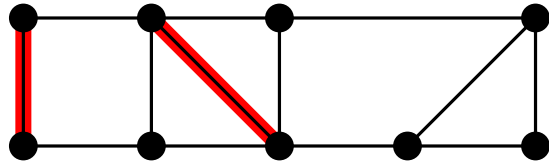
Matchings / Paarungen

– Kombinatorische Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems –

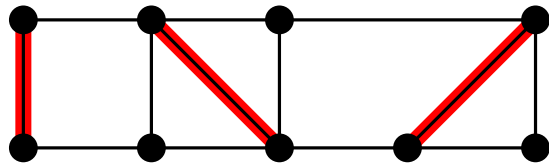
Paarungen (Matchings)

Def.

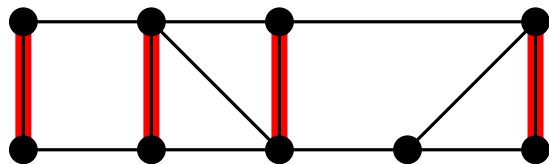
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.



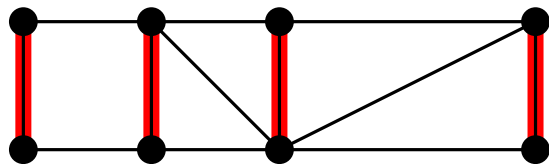
$M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante $e \notin M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. *maximal*).



Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine **größte Paarung** (engl. *maximum*).



Falls jeder Knoten in G durch M gepaart ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. *perfect*).

Übung: Formuliere *größte Paarung* als ILP!

1. Variable: $x_e \in \{0, 1\}$ für jede Kante e von G

2. Zielfunktion: maximiere $\sum_{e \in E(G)} x_e$

3. Nebenbedingungen:

Jeder Knoten ist zu höchstens einer Kante e mit $x_e = 1$ inzident.

$$\sum_{w \in \text{Adj}[v]} x_{vw} \leq 1 \quad \text{für jeden Knoten } v \text{ von } G$$

Bemerkung:

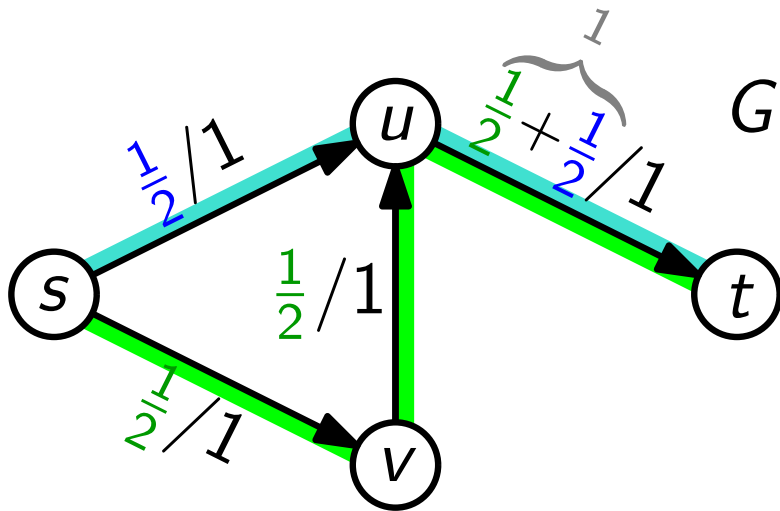
Das ist mit Kanonen nach Spatzen geschossen!

[z.B. Blütenalg.,
Edmonds, 1961]

Größte Paarung kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

(Beob.: Für G bipartit ist das fraktionale Matching-Polyeder ganzzahling, d.h. es genügt, das LP mit $x_e \geq 0$ zu lösen, um eine ganzzahlige Lösung zu bekommen.)

Ganzzahligkeitssatz



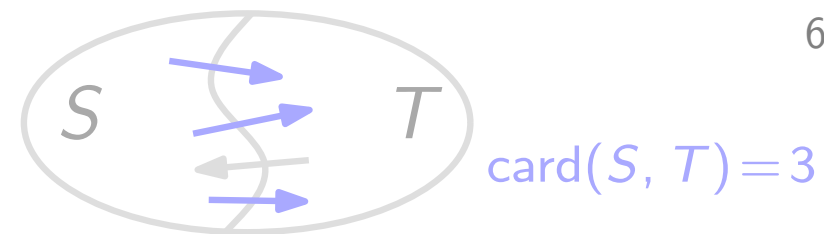
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

Korollar. Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c: E \rightarrow \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

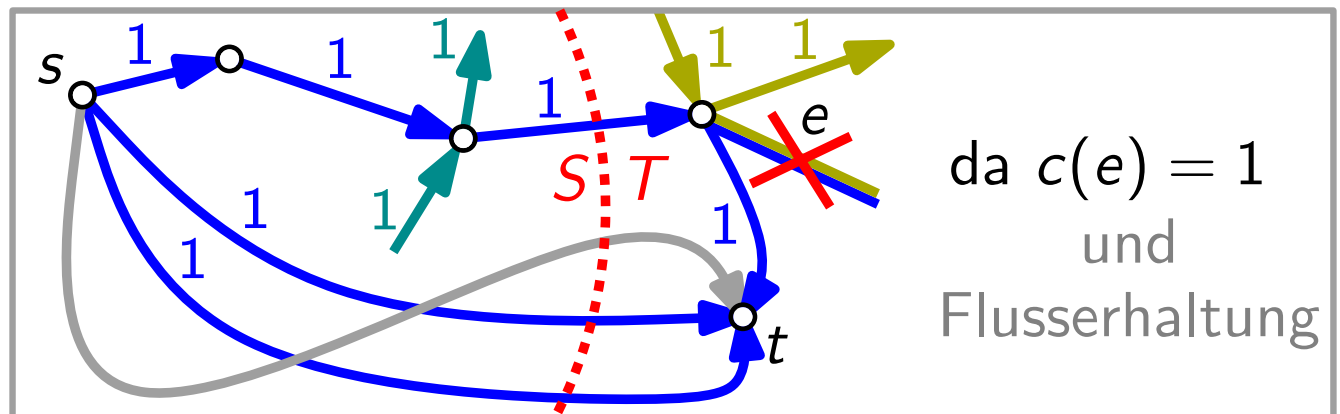
Beweis. Wende FordFulkerson oder EdmondsKarp an!

Kantendisjunkte Wege



Satz. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$.
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter s - t -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s - t -Schnittes.

Beweis. Wähle $c \equiv 1$. Sei f max. s - t -Fluss. \Rightarrow oBdA. $f: E \rightarrow \{0, 1\}$.
 Ganzz.-Satz
 Folge einer Kante mit Fluss, die s verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$ Anz. kantendisj. s - t -Wege $\geq |f|$

Sei (S, T) ein minimaler s - t -Schnitt.

\Rightarrow jeder s - t -Weg trägt ≥ 1 Kante zu $\text{Raus}(S)$ bei.

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$



Karl Menger
Wien 1902 – Illinois 1985

Satz von Menger

Wir wissen nun $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

↑
↑

Kapazität eines min. Schnittes
=
Wert eines max. Flusses

↑

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$

\Rightarrow Minimale Kardinalität eines s - t -Schnitts

$=$ maximale Anzahl kantendisjunkter s - t -Wege □

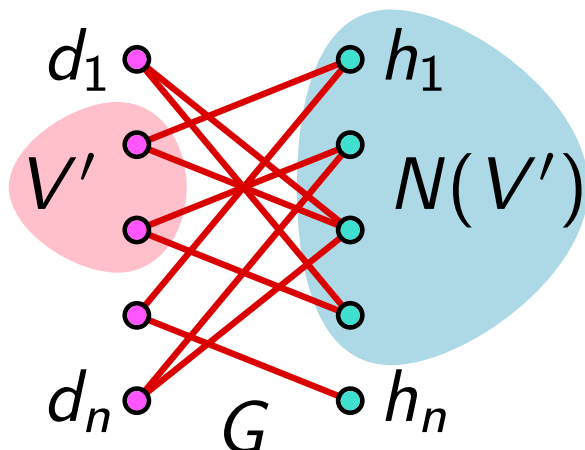
Satz. Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph, $s, t \in V$, $st \notin E$. Dann ist die max. Anzahl *knotendisjunkter* s - t -Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt. [Menger, 1927]

Perfekte Paarungen

Gegeben: eine Menge $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ von n Damen und
 eine Menge $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ von n Herren
 mit $D \cap H = \emptyset$,
 sowie ein unger. Sympathiegraph $G = (D \cup H, E)$.

Gesucht: eine Massenhochzeit,
 d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit
 genau einem Herren gepaart, den sie sympathisch
 findet – und umgekehrt.

Modell.



Nachbarschaft von $v \in V$ ist
 $N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist
 $N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$

Der Heiratssatz

[Hall 1935]

Aufgabe. Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in $G = (D \dot{\cup} H, E)$!

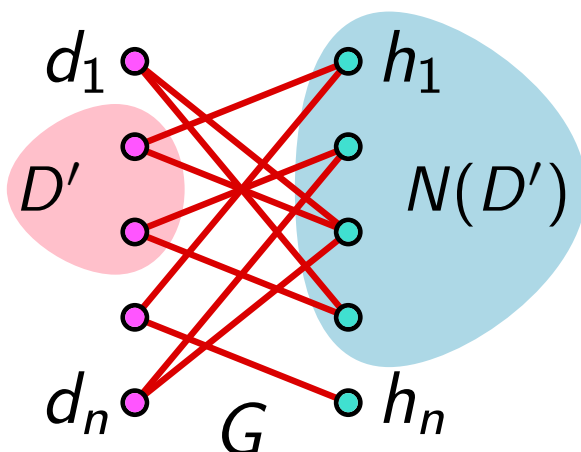
Lösung. Für jedes $D' \subseteq D$ muss gelten: $|D'| \leq |N(D')|$.

Satz. Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

G hat eine perfekte Paarung \Leftrightarrow
für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Modell.



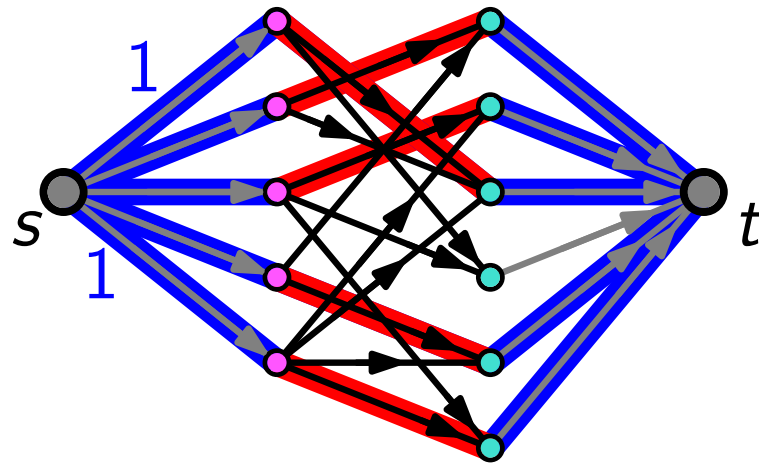
Beweis
später!

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge



Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

Aufgabe. Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen **größte** Paarungen berechnet.

Beob.

<i>größter</i>		<i>größte</i>
Ganzzahl. s - t -Fluss in G'	\longleftrightarrow 1-zu-1 \longleftrightarrow	Paarung in G
\updownarrow		\updownarrow
<i>größte</i>		<i>größte</i>
Menge <i>kantendisjunkter</i> s - t -Wege in G'	\longleftrightarrow	Menge <i>unabhängiger</i> Kanten in G

Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**
 in $O(V)$ Zeit **reduziert**
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

sehr speziellen

mit Kap. $\equiv 1$

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph.
 Dann lässt sich eine größte Paarung in G in $O(VE^2)$
 Zeit bestimmen.

ausnutzen!

Beweis.

- Konstruktion von G' : *Laufzeit*
 $O(V)$
- ~~Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für G' :~~ ~~$O(V \cdot (E')^2)$~~
- ~~Berechne $\leq |V|$ s - t -Wege in je $O(E')$ Zeit~~ ~~$= O(VE^2)$~~

$O(VE^2)$

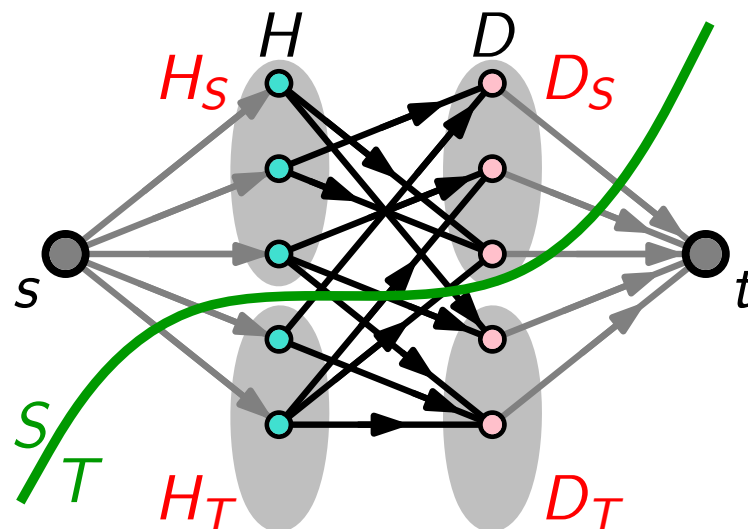
Anmerkungen

- Bem.** Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
- maximale Flüsse in allg. Graphen in $O(V^2E)$ Zeit
 - Matchings in bipartiten Graphen in $O(\sqrt{VE})$ Zeit.
- [KN, Kapitel 9.6]

Satz. Selbst in einem beliebigen Graphen $G = (V, E)$ lässt sich eine größte Paarung in $O(\sqrt{VE})$ Zeit berechnen.

[Micali & Vazirani, FOCS'80]

Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

Satz. $G = (D \dot{\cup} H, E)$ bipartit hat eine perfekte Paarung
 \Leftrightarrow für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis.
 „ \Leftarrow “

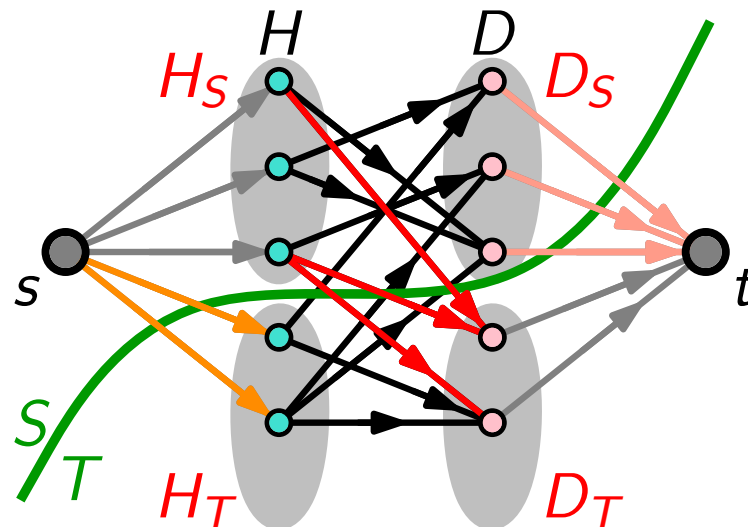
G hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$ hat Fluss f mit $|f| = |D| = |H|$

\Leftarrow für jeden s - t -Schnitt (S, T) in G' gilt $c(S) \geq |D|$

zu zeigen!

Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

Satz. $G = (D \dot{\cup} H, E)$ bipartit hat eine perfekte Paarung
 \Leftrightarrow für jedes $D' \subseteq D$ gilt $|D'| \leq |N(D')|$.

Beweis.
 „ \Leftarrow “

z.z.: (S, T) s - t -Schnitt in $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$\geq |D_T| + |D_S| = |D|$$

□