Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Lehrstuhl für INFORMATIK I Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2022

1. Vorlesung

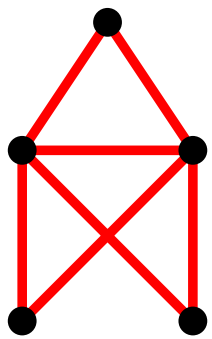
Rundreiseprobleme: Teil II – Hamiltonkreise

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Übersicht

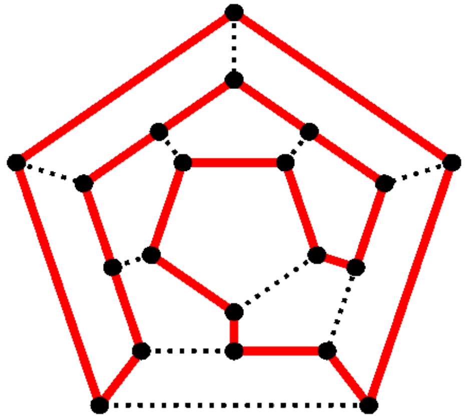
I) Eulerkreise



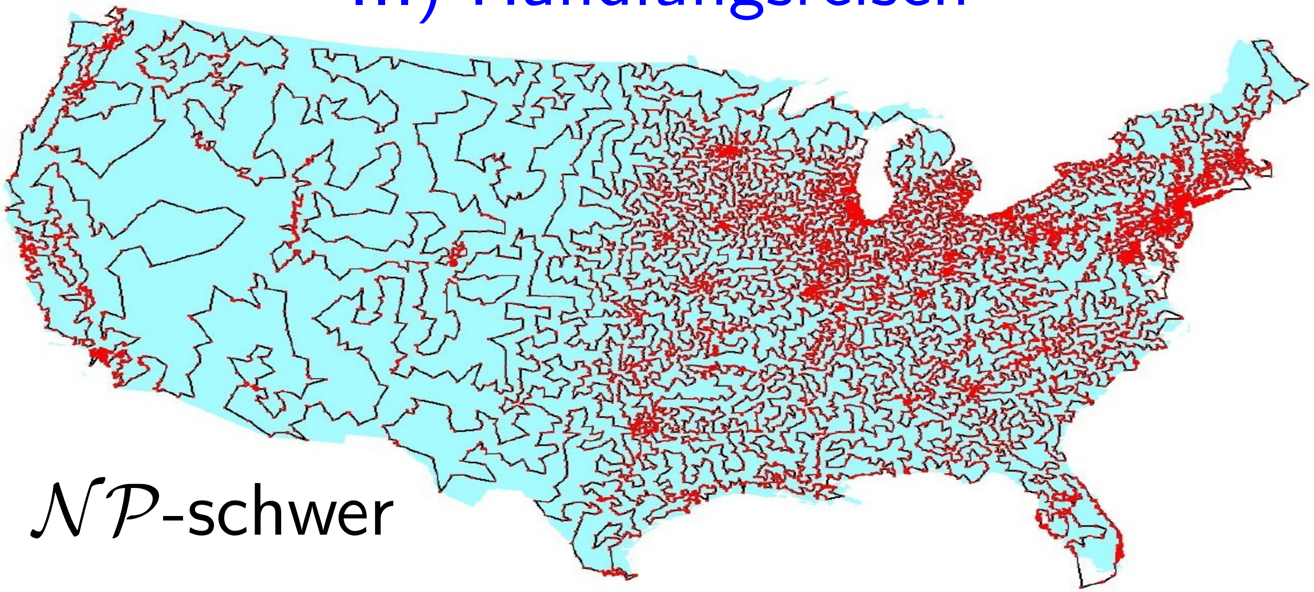
$\mathcal{P}$

II) Hamiltonkreise

$\mathcal{NP}$-schwer



III) Handlungsreisen



$\mathcal{NP}$-schwer

II) Hamiltonkreise

Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
Ein *Hamiltonkreis* (*-weg*) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden *Knoten* genau einmal durchläuft.

Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen Hamiltonkreis enthält.

Sir William Rowan Hamilton

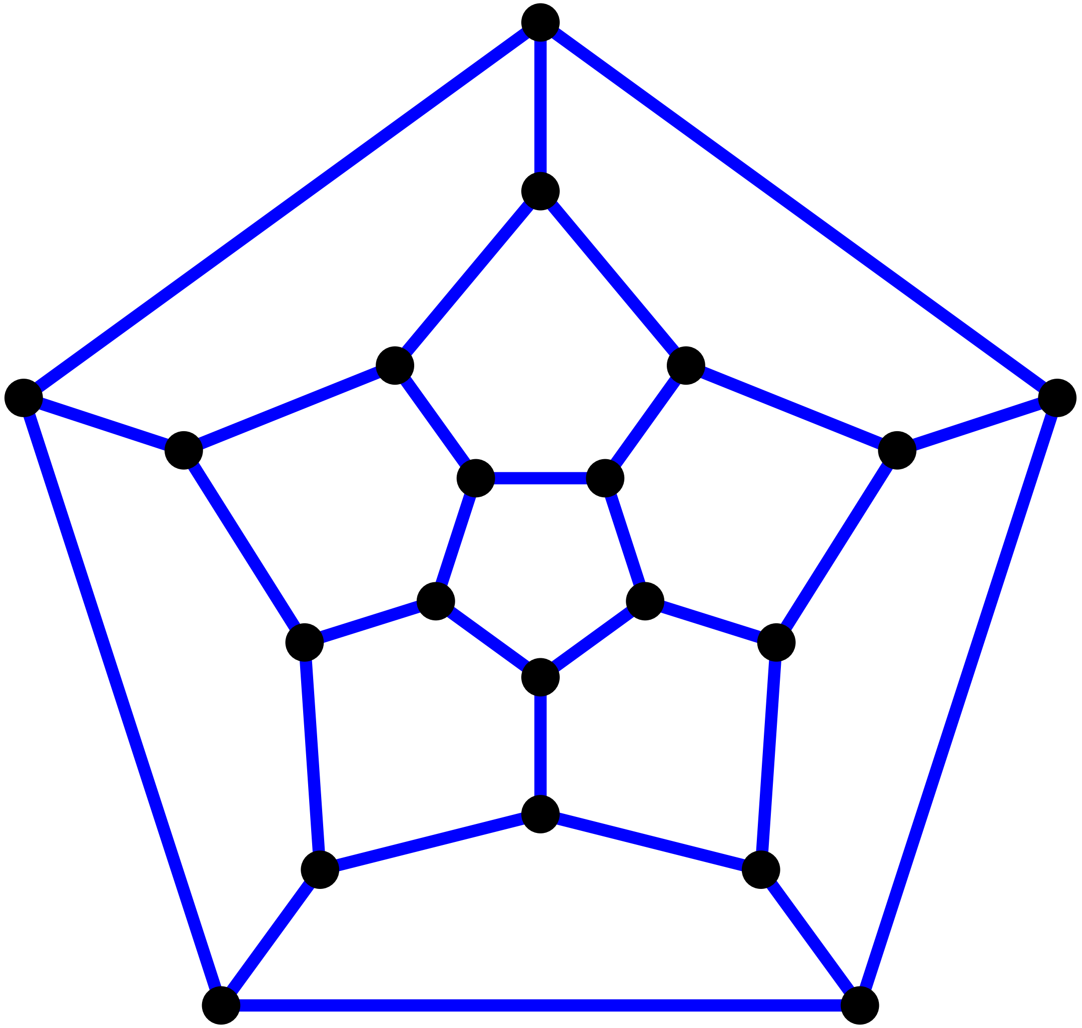
1805 Dublin – 1865 Dunsink

Icosian Game / Traveller’s Dodecahedron

(c) 2002 James Dalgety, The Puzzle Museum

A Voyage Round the World

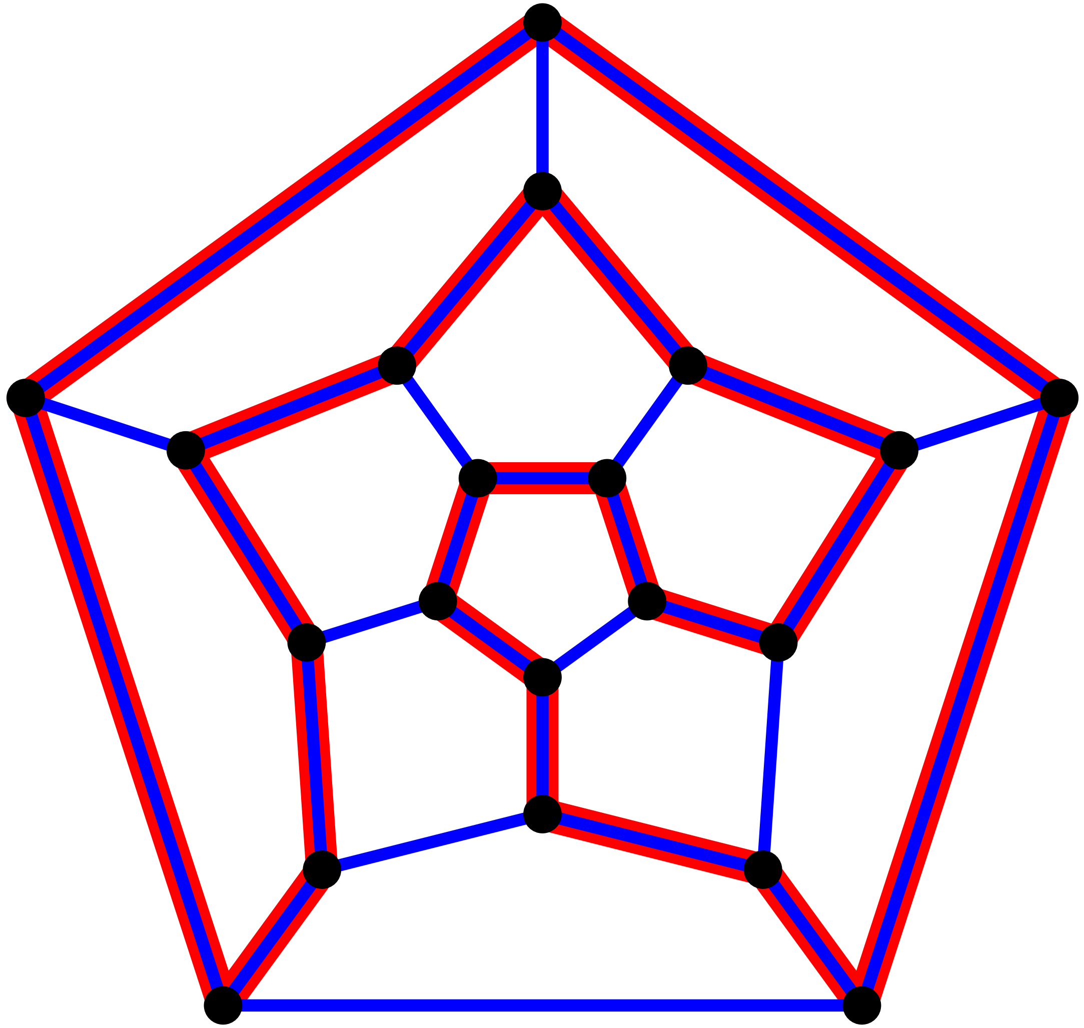
Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?



A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

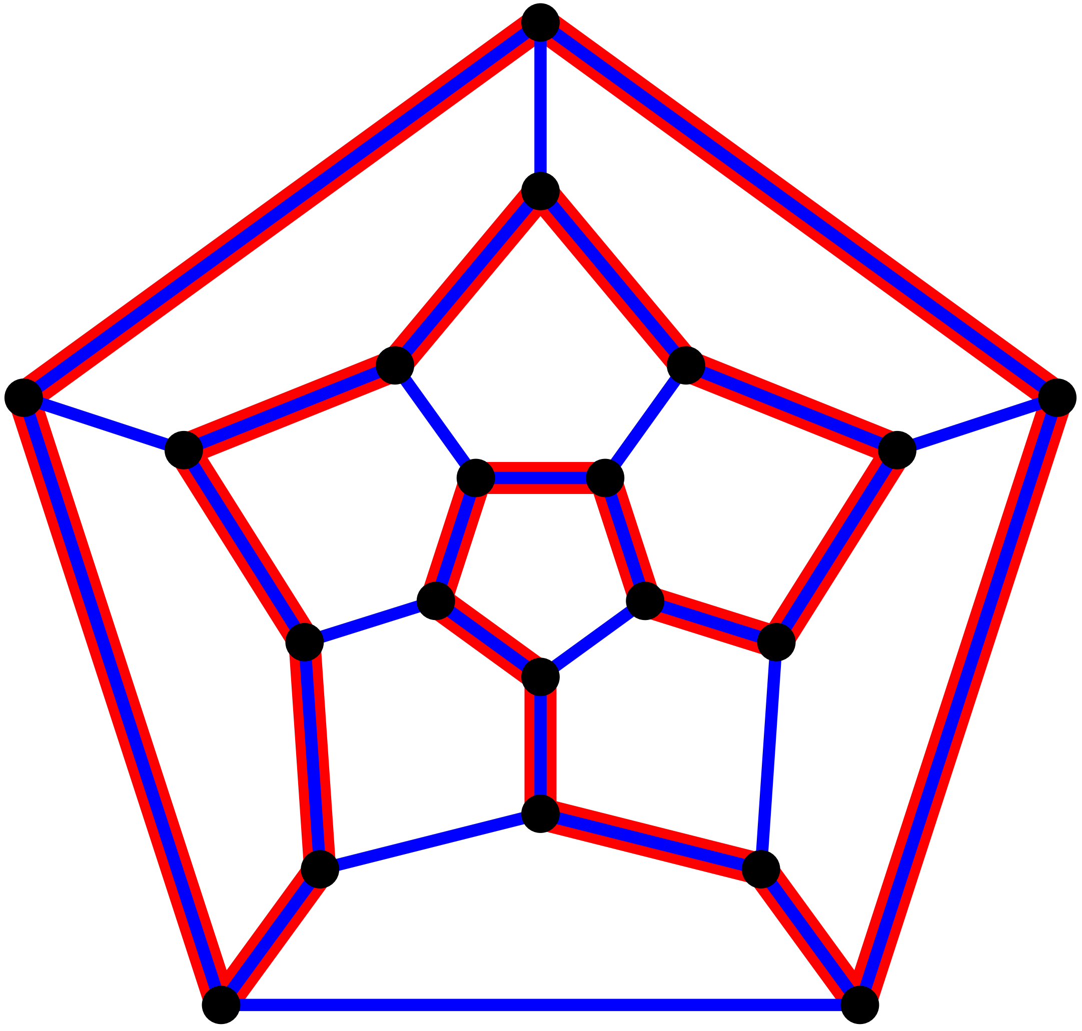
Antwort: Ja!



A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

Antwort: Ja!



Die Skelette der vier anderen platonischen Körper auch.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
– „ist höchstens so schwer wie“

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_\mathrm{p}$ CLIQUE $\preceq_\mathrm{p}$ VC $\preceq_\mathrm{p}$ gerHK $\preceq_\mathrm{p}$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
– „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
– „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
– „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf"
– „ist höchstens so schwer wie"

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* hinreichende *Bedingungen* dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]
(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

SAT $\preceq_p$ CLIQUE $\preceq_p$ VC $\preceq_p$ gerHK $\preceq_p$ HK

– „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf"
– „ist höchstens so schwer wie"

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* hinreichende *Bedingungen* dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch } \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch } \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
$\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

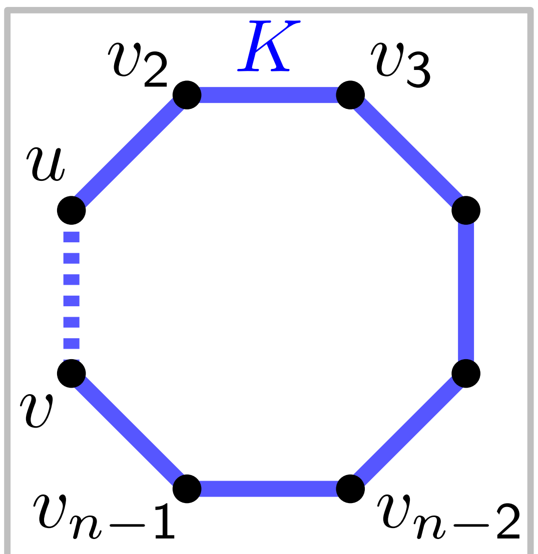
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

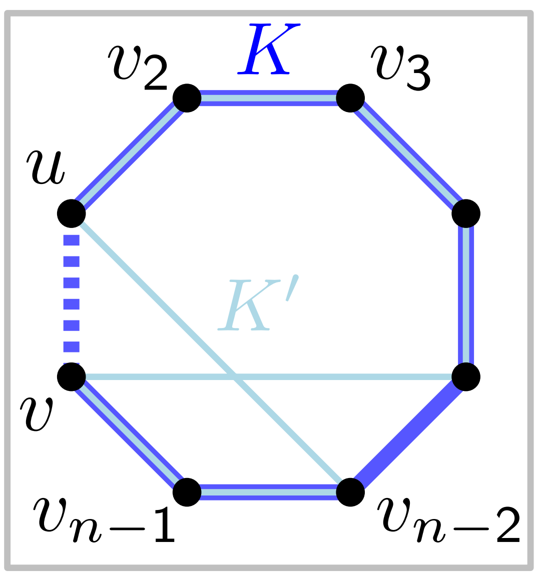
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u\rangle$ ein solcher HK.

z.z. es existiert HK K' ohne Kante uv.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

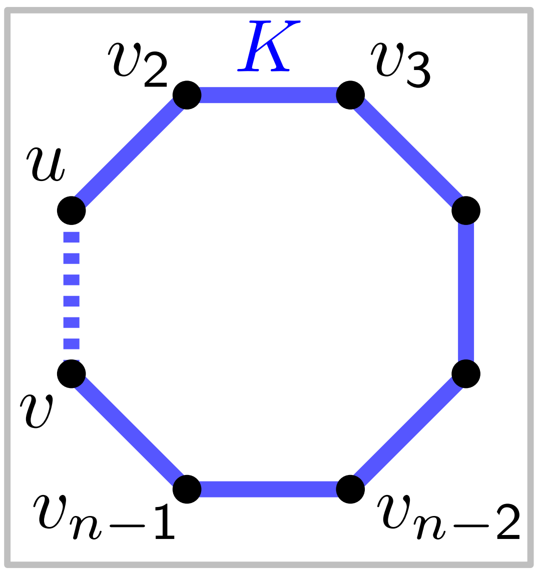
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \iff G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

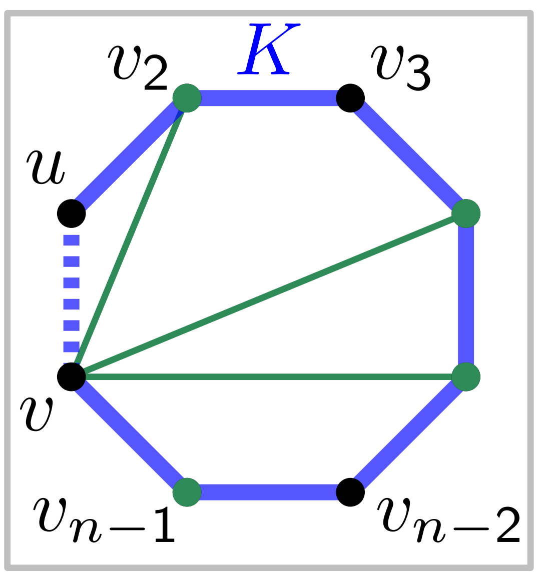
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
$\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

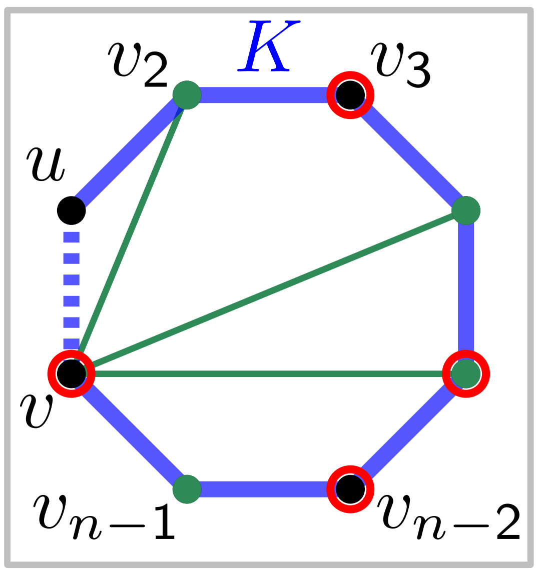
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

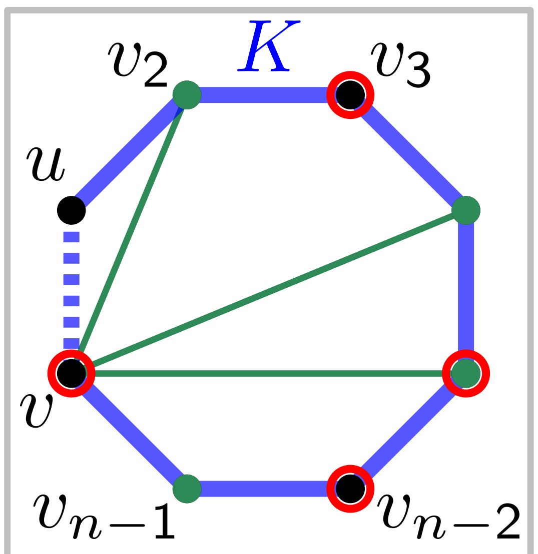
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) =$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

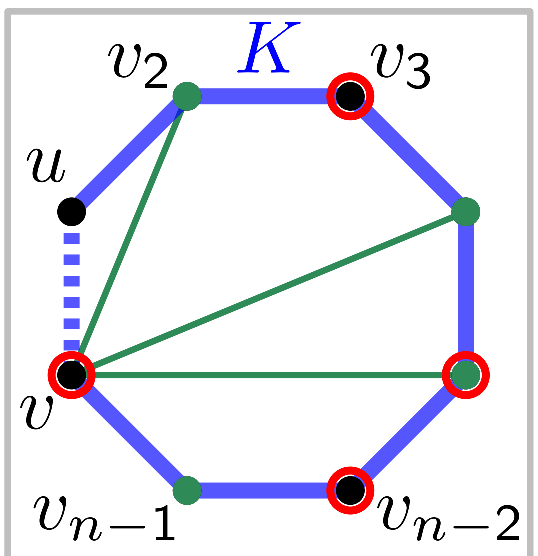
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u\rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| =$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

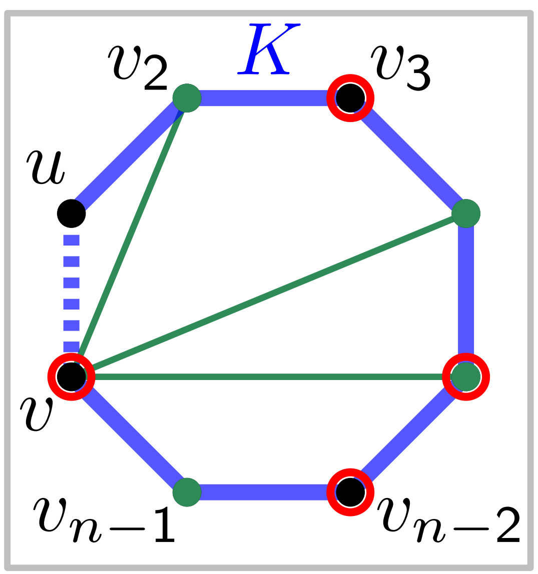
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

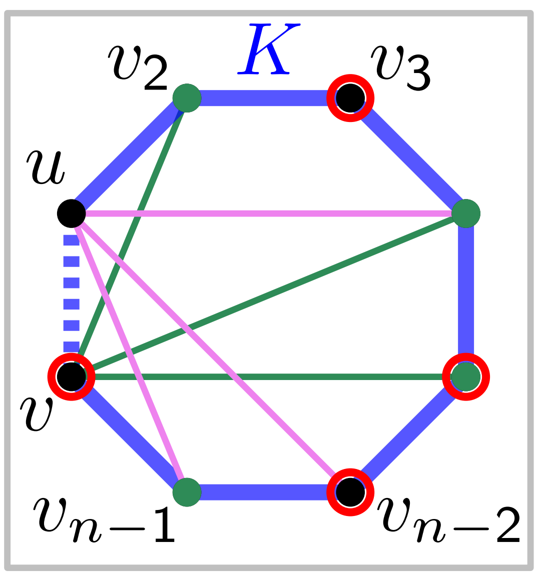
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

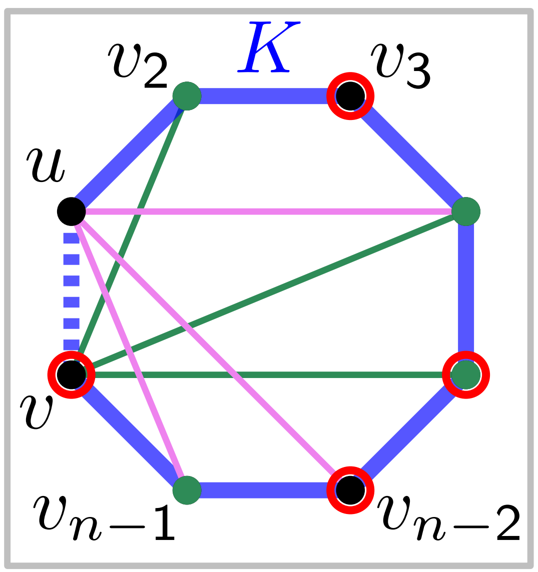
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \iff G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v)$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

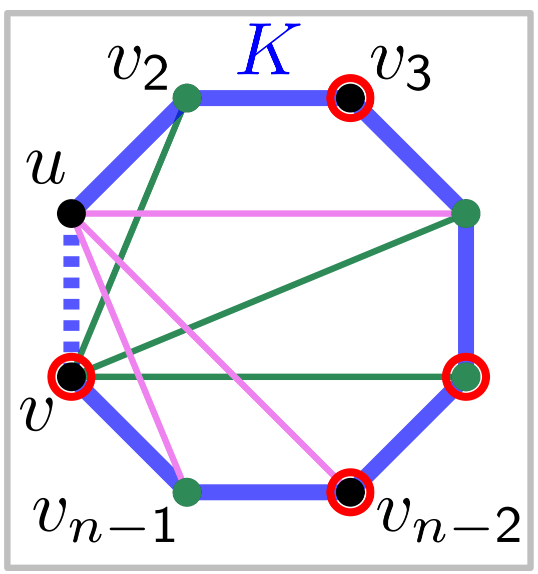
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \;\; \Rightarrow \;\; |N(u) \cup F(v)| \leq$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

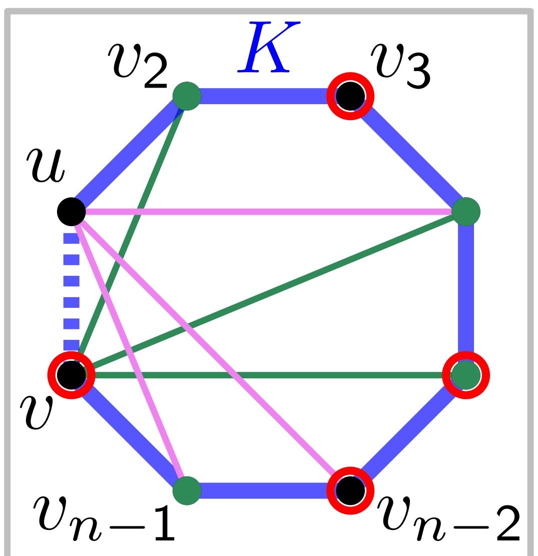
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u\rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \;\Rightarrow\; |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

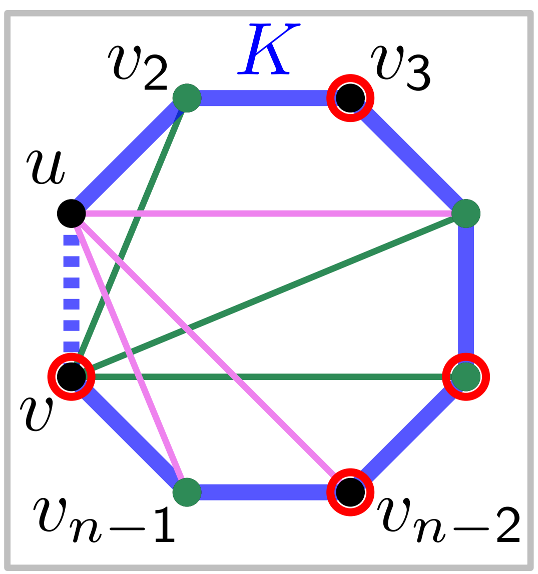
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
$\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch } \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

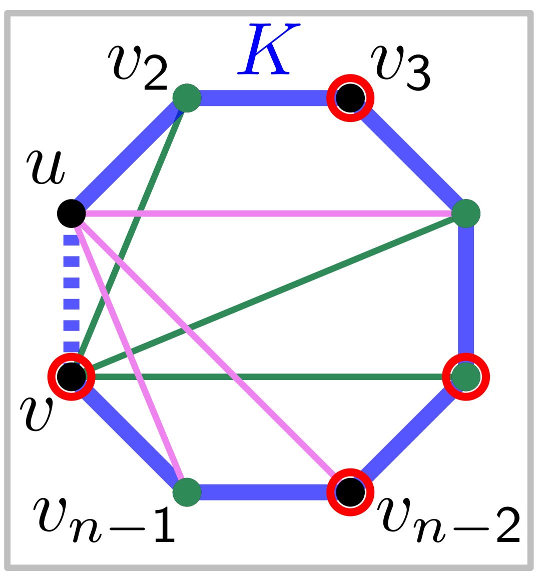
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u\rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \quad \Rightarrow \quad |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

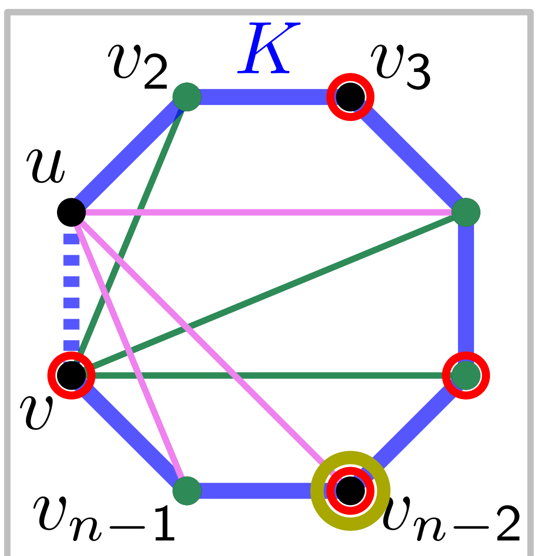
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| =$ deg$(u) +$ deg$(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

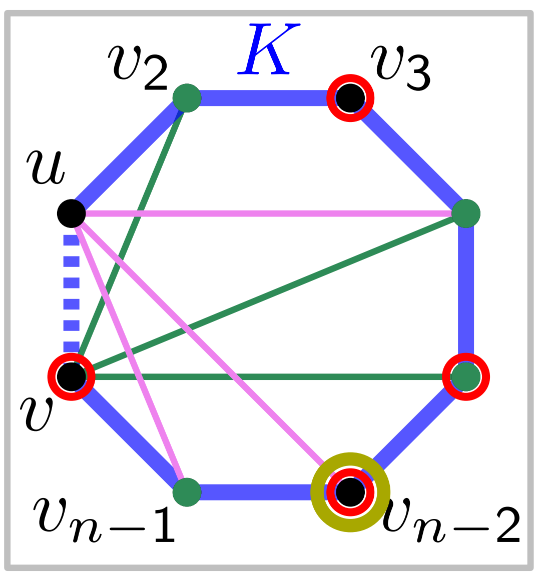
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch } \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$" Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u\rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \;\Rightarrow\; |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

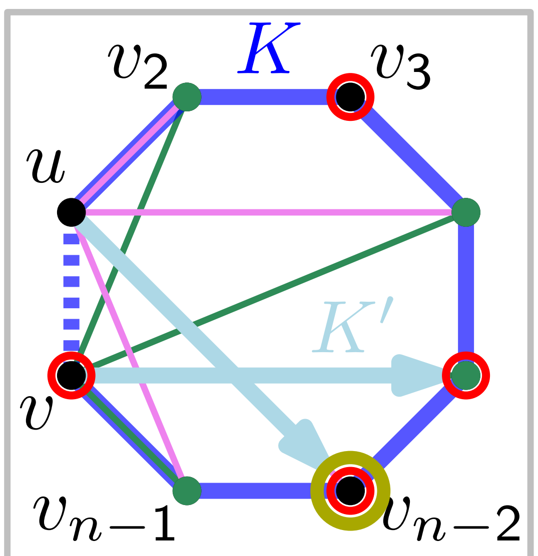
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow$ $G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \;\Rightarrow\; |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

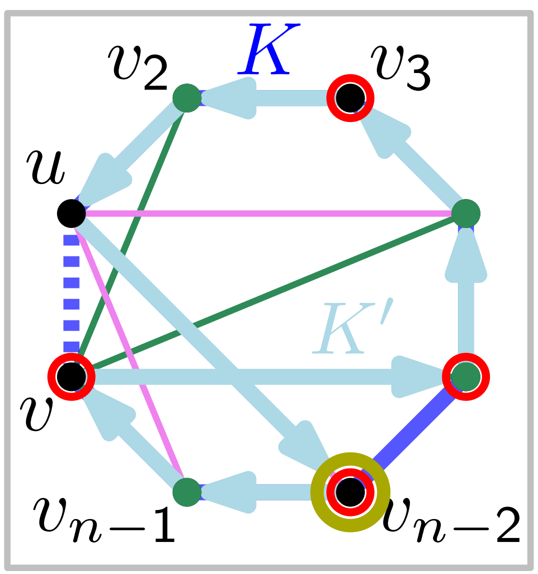
$(V(G), E(G) \cup \{uv\})$

Satz. Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \quad \Leftrightarrow \quad G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv.



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v.

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u.

$u \notin N(u) \cup F(v) \quad \Rightarrow \quad |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$

Satz von Dirac

Satz. [Chvátal & Bondy]
Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \;\Leftrightarrow\; G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Satz von Dirac

Satz. [Chvátal & Bondy]
Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \iff G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Kor. Sei G ein ungerichteter Graph mit $n := |V(G)| \geq 3$. Falls jeder Knoten von G Grad $\geq n/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Satz von Dirac

Satz. [Chvátal & Bondy]
Sei G ein ungerichteter Graph mit $|V(G)| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$. Dann gilt:

$$G \text{ hamiltonsch } \Leftrightarrow G + uv \text{ hamiltonsch.}$$

Kor. Sei G ein ungerichteter Graph mit $n := |V(G)| \geq 3$. Falls jeder Knoten von G Grad $\geq n/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Beweis. Probieren Sie's!