Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 8. Juli 2021

Prof. Dr. Alexander Wolff
Johannes Zink, M. Sc.

1. Tutoriumsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2021)

Aufgabe 1 – Lineare Programme

a) Das Problem VERTEX COVER lässt sich durch folgendes ILP modellieren, das von einem Graphen $G = (V, E)$ abhängt.

$$\begin{array}{lrcll} \text{Minimiere} & \sum_{v \in V} x_v & & & \\ \text{unter den Nebenbed.} & x_u + x_v & \geq & 1 & \text{für jede Kante } uv \in E, \\ & x_v & \in & \{0, 1\} & \text{für jeden Knoten } v \in V. \end{array}$$

Gegeben sei der Graph $K_3 = (\{a, b, c\}, \{\{ab\}, \{bc\}, \{ac\}\})$. Zeichnen Sie die Ränder der Beschränkungen für diese Instanz als verschieden schraffierte Ebenen in dreidimensionale Koordinatensysteme ein. Markieren Sie in einer Zeichnung alle Punkte, die optimalen Lösungen des ILPs und der entsprechenden LP-Relaxierung entsprechen.

Hinweis: Koordinatensystem-Vorlagen finden Sie auf der letzten Seite.

b) Argumentieren Sie, warum der folgende Algorithmus ein Faktor-2-Approximationsalgorithmus für VERTEX COVER ist.

LP-VC($G = (V, E)$)
  $(x_v)_{v \in V}$ = Lösung der LP-Relaxierung aus Teilaufgabe (a).
  $x'_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_v \geq 0{,}5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
  return $(x'_v)_{v \in V}$

Zeigen Sie dazu, dass die Lösung zulässig ist, den Approximationsfaktor einhält und der Algorithmus nur polynomielle Laufzeit benötigt.

Hinweis: Greifen sie nicht auf Blatt 6 zurück, sondern argumentieren Sie hier ohne Verwendung von früheren Übungsaufgaben.

c) Betrachten Sie das Problem MINIMUM MAXIMAL MATCHING, das in einem ungerichteten Graphen ein nicht-erweiterbares Matching kleinster Kardinalität sucht.

Geben Sie für dieses Problem ein ganzzahliges lineares Programm an.

Aufgabe 2 – Chordale Graphen

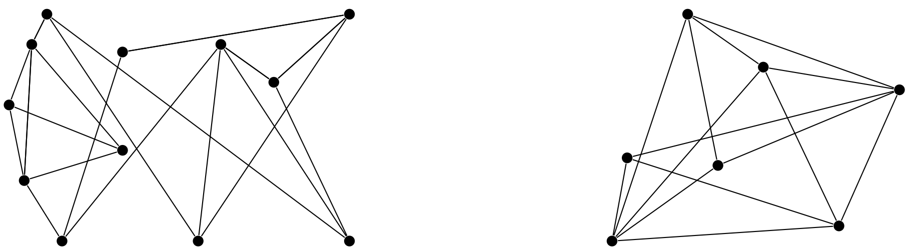
Entscheiden Sie für die Graphen aus Abbildung 1, ob es sich um chordale Graphen handelt. Geben Sie dazu entweder ein perfektes Eliminationsschema der Knoten oder einen Kreis mit Länge mindestens 4 an, bei dem eine Sehne fehlt.

(a) (b)

ABBILDUNG 1: Graphen für Aufgabe 2.

Aufgabe 3 – Planarität

Testen Sie die Graphen aus Abbildung 2 planar sind. Geben Sie dazu entweder eine planare Zeichnung oder einen entsprechenden Störgraphen oder nicht-planaren Minoren an.



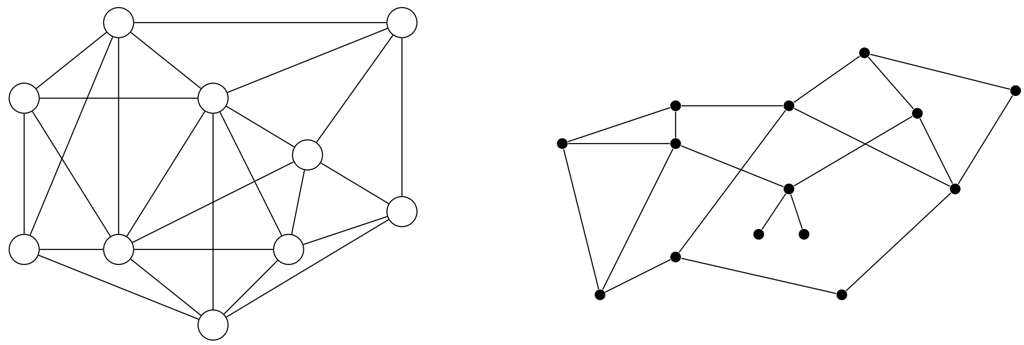
(a) (b)

ABBILDUNG 2: Graphen für Aufgabe 3.

Aufgabe 4 – Matchings & Färbungen

a) Geben Sie für den Graphen aus Abbildung 3 (a) eine Färbung mit minimaler Anzahl an Farben an. Begründen Sie die Minimalität Ihrer Lösung.

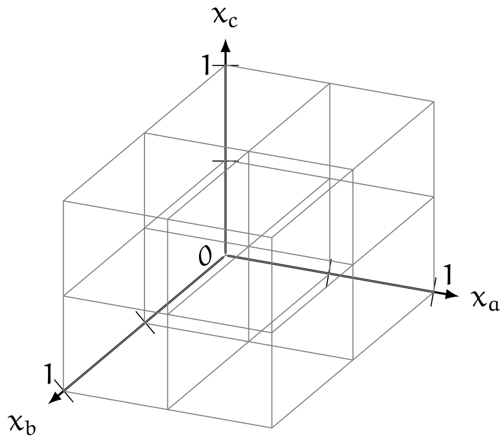
b) Geben Sie für den Graphen aus Abbildung 3 (b) ein größtes Matching an. Begründen Sie, warum das ein größtes Matching ist.

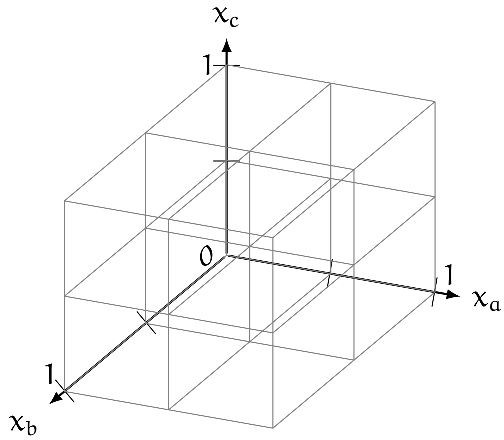


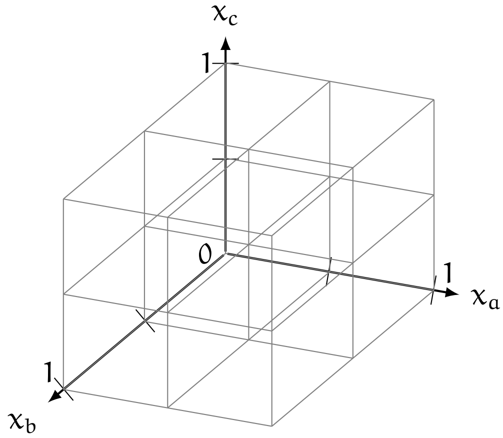
(a) (b)

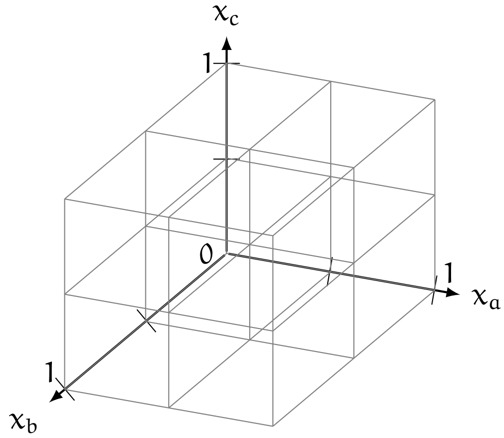
ABBILDUNG 3: Graphen für Aufgabe 4.

Koordinatensysteme für die Lösung von Aufgabe 1a.









Die Lösungen dieser Aufgaben werden in den Übungen am **Freitag, 16. Juli 2021** besprochen. Sie brauchen dieses Blatt nicht abzugeben, Sie sollten es allerdings trotzdem bearbeiten, um an der Diskussion teilnehmen und gegebenenfalls Fragen stellen zu können.