

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2021

10. Vorlesung

Festparameter-Berechenbarkeit

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialalgorithmen, z.B. Backtracking

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialalgorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
Tausche Qualität gegen Laufzeit

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialalgorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialalgorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks
- Randomisierung: Suche nach der Nadel im Heuhaufen

Herangehensweisen an NP-schwere Probleme

- Exponentialalgorithmen, z.B. Backtracking
- Approximationsalgorithmen:
Tausche Qualität gegen Laufzeit
- Heuristiken: empirische Untersuchung auf Benchmarks
- Randomisierung: Suche nach der Nadel im Heuhaufen
- Entwurf von parametrisierten Algorithmen



NEU

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

$C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung* (engl. *vertex cover*) von G , falls .

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

$C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung* (engl. *vertex cover*) von G , falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

$C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung* (engl. *vertex cover*) von G , falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Prob. *Kleinste Knotenüberdeckung*

Gegeben: Graph G

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von G

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

$C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung* (engl. *vertex cover*) von G , falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Prob. *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph G

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von G

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

$C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung* (engl. *vertex cover*) von G , falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Prob. *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph G

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von G

Prob. – Entscheidungsproblem

Ein Beispiel: Vertex Cover

Def. (Zur Erinnerung)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

$C \subseteq V$ heißt *Knotenüberdeckung* (engl. *vertex cover*) von G , falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$.

Prob. *Kleinste Knotenüberdeckung* – Optimierungsproblem

Gegeben: Graph G

Gesucht: eine kleinste Knotenüberdeckung von G

Prob. *k-Knotenüberdeckung (k-VC)* – Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph G , natürliche Zahl k

Gesucht: Knotenüberdeckung der Größe $\leq k$ von G – falls eine solche existiert (sonst gib „nein“ zurück)

Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde

Previous Work

- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT \preceq_p CLIQUE \preceq_p VC \preceq_p ...)

Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde (SAT \preceq_p CLIQUE \preceq_p VC \preceq_p ...) [Karp, 1972]

Previous Work

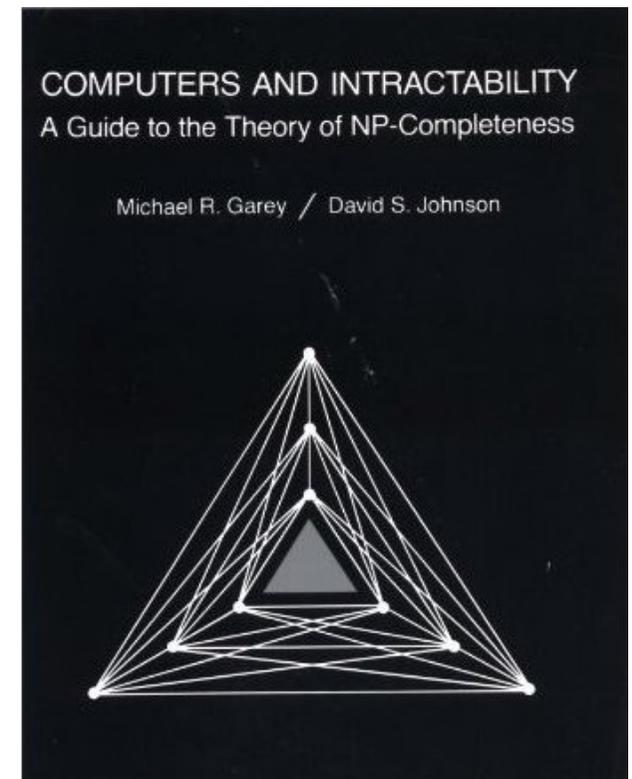


- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

Previous Work



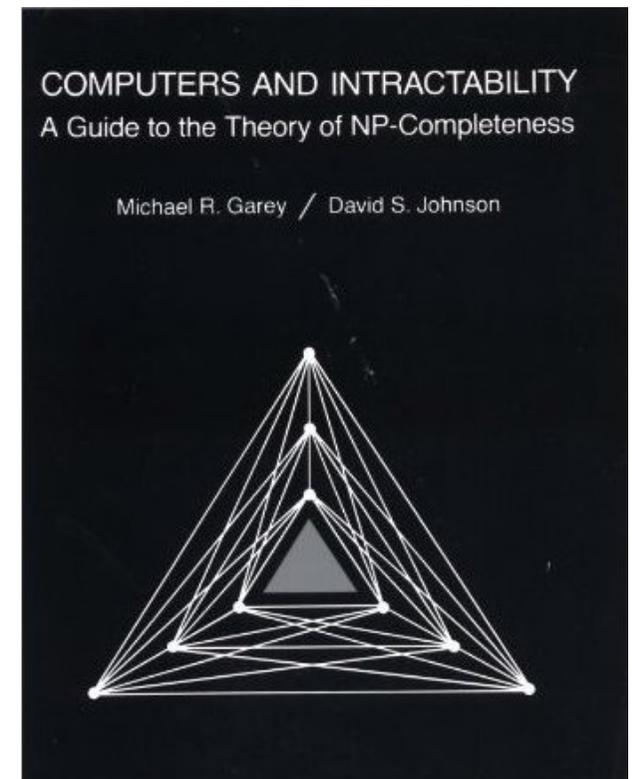
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]



Previous Work



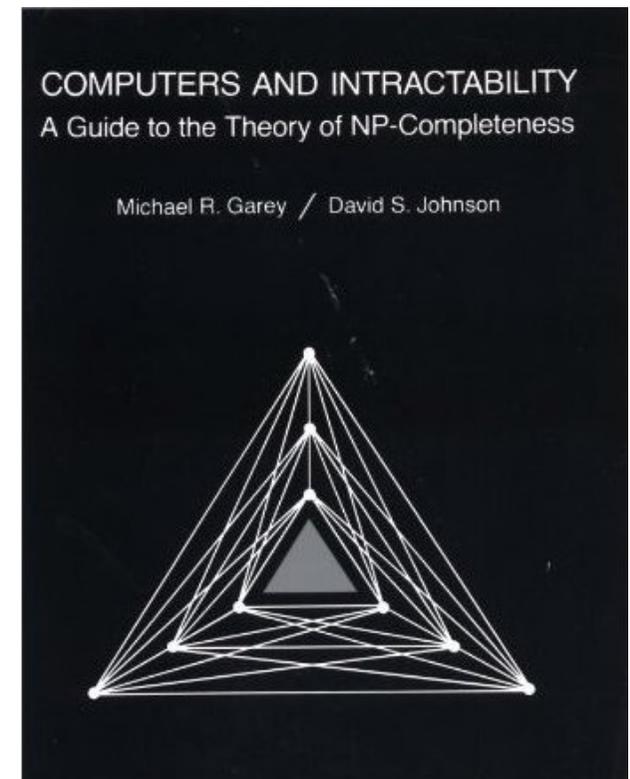
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]
- approximierbar:



Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]
- approximierbar:
Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.



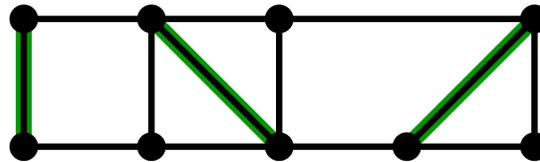
Previous Work



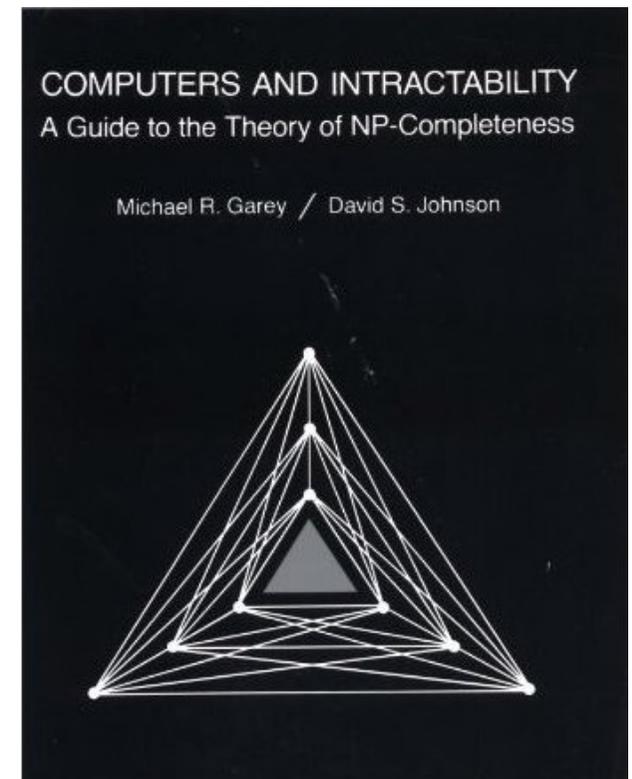
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.



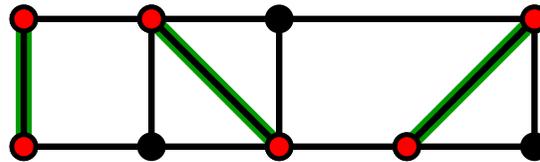
Previous Work



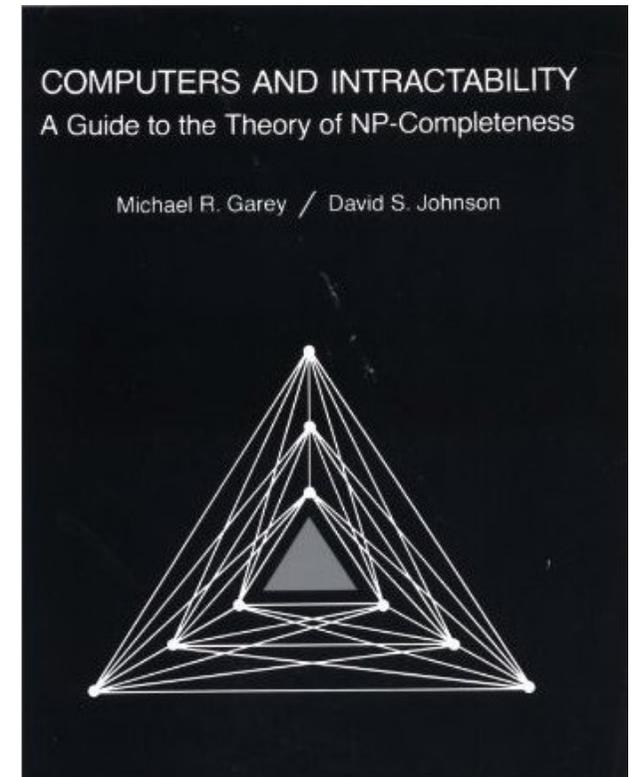
- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“
Faktor-2-Approximation für **VC**.



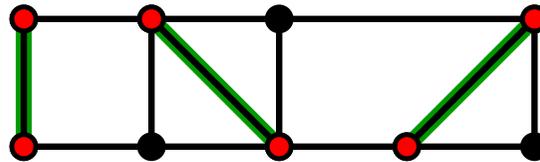
Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

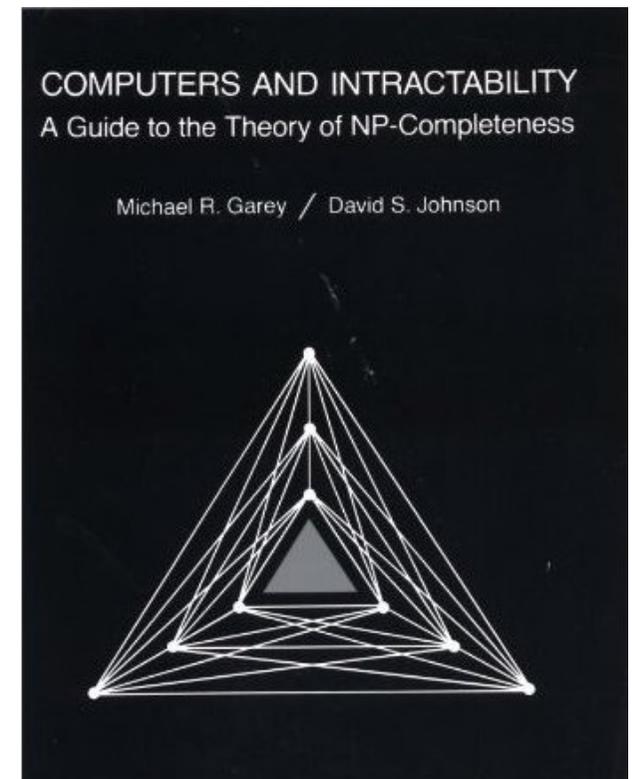
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.

- \dots , aber nicht beliebig gut:



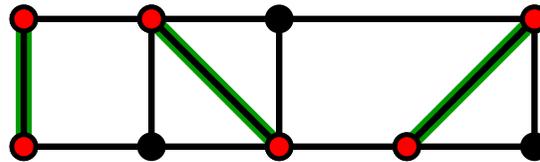
Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

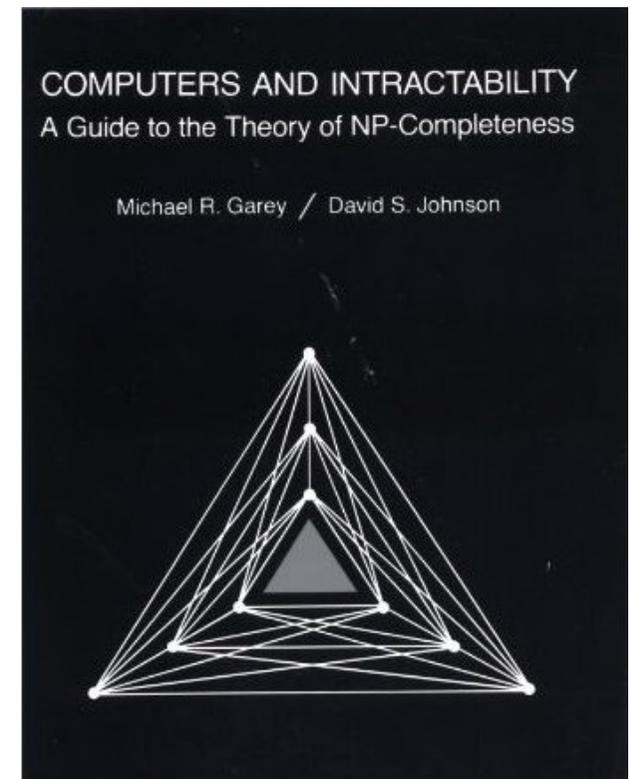
- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.

- ..., aber nicht beliebig gut:
Es gibt keine Faktor-1,3606-Approximation für VC



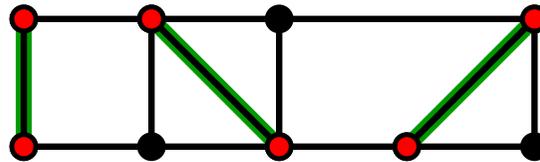
Previous Work



- eines der ersten Probleme, dessen NP-Schwere gezeigt wurde ($\text{SAT} \preceq_p \text{CLIQUE} \preceq_p \text{VC} \preceq_p \dots$) [Karp, 1972]

- eines der sechs grundlegenden NP-vollständigen Probleme in dem Klassiker: [Garey & Johnson, 1979]

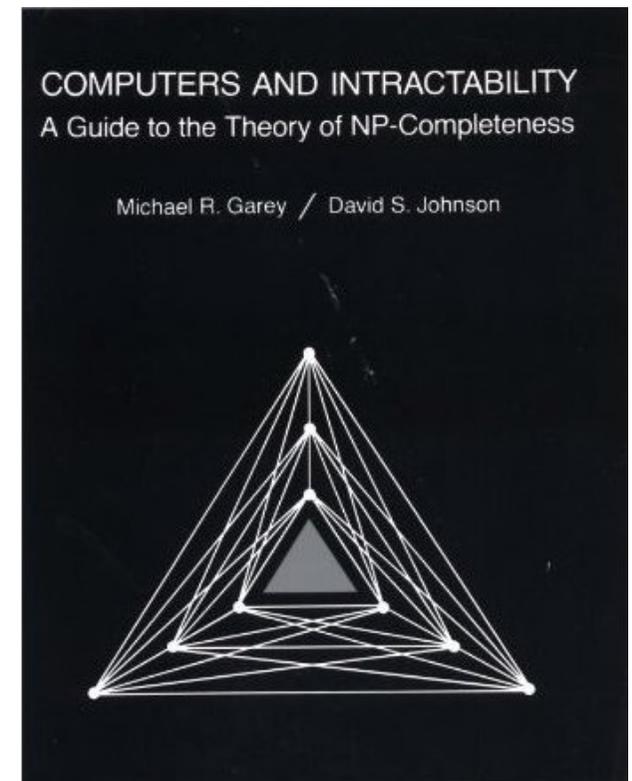
- approximierbar:



Nicht-erweiterbares **Matching** „liefert“ Faktor-2-Approximation für **VC**.

- ..., aber nicht beliebig gut:

Es gibt keine Faktor-1,3606-Approximation für VC, falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
[Dinur & Safra, 2004]



Ein exakter Algorithmus für k -VC

BruteForceVC(Graph G , Integer k)



Ein exakter Algorithmus für k -VC

```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )
```

```
  foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do
```

```
    // teste, ob  $C$  VC
```

```
     $vc = true$ 
```

```
      if  $vc$  then
```

```
        | return ("yes",  $C$ )
```

```
  return ("no",  $\emptyset$ )
```

Ein exakter Algorithmus für k -VC

```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )  
  foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do  
    // teste, ob  $C$  VC  
     $vc = true$   
    foreach  $uv \in E$  do  
      if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then  
         $vc = false$   
    if  $vc$  then  
      return ("yes",  $C$ )  
return ("no",  $\emptyset$ )
```

Ein exakter Algorithmus für k -VC

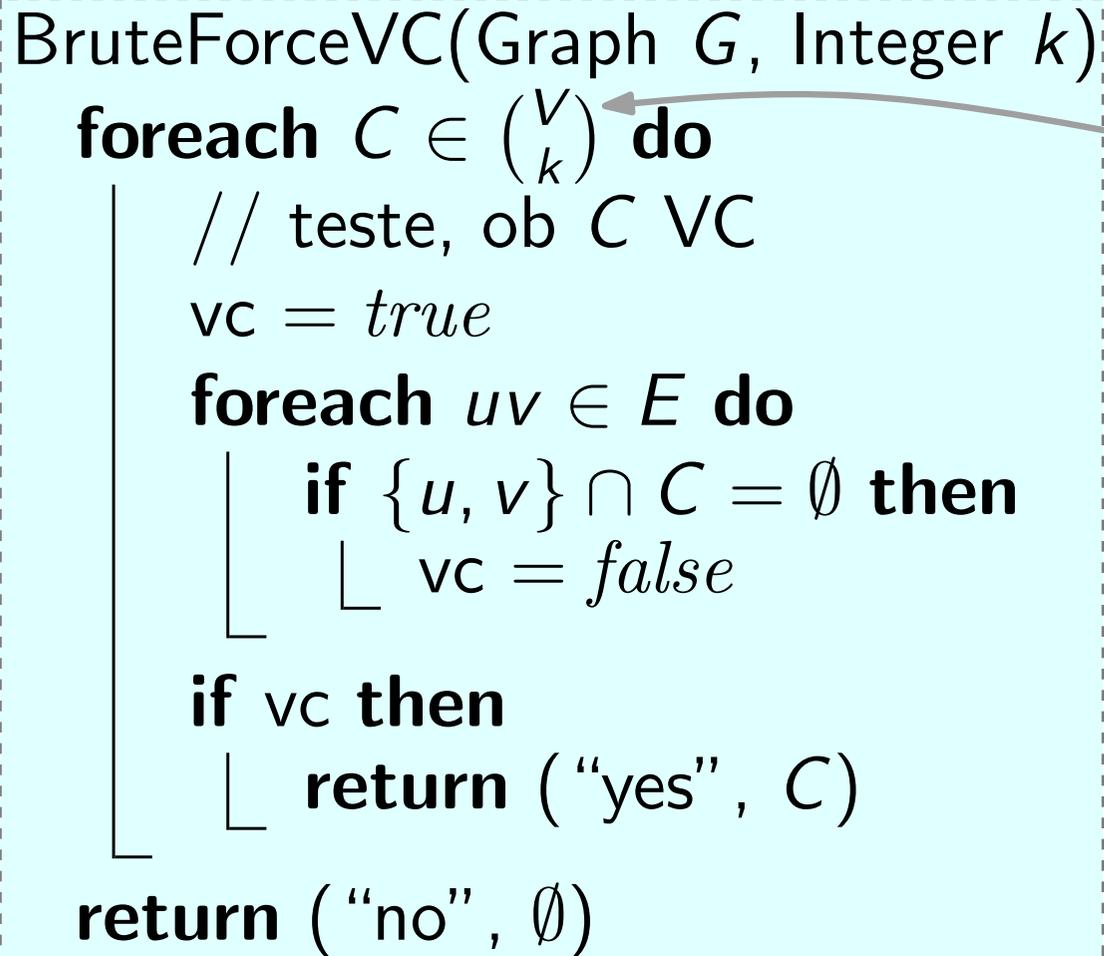
```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )
  foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do
    // teste, ob  $C$  VC
     $vc = true$ 
    foreach  $uv \in E$  do
      if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then
         $vc = false$ 
    if  $vc$  then
      return ("yes",  $C$ )
  return ("no",  $\emptyset$ )
```

Laufzeit.

Ein exakter Algorithmus für k -VC

BruteForceVC(Graph G , Integer k)

```
foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do  
  // teste, ob  $C$  VC  
   $vc = true$   
  foreach  $uv \in E$  do  
    if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then  
       $vc = false$   
  if  $vc$  then  
    return ("yes",  $C$ )  
return ("no",  $\emptyset$ )
```



Laufzeit.

Ein exakter Algorithmus für k -VC

BruteForceVC(Graph G , Integer k)

foreach $C \in \binom{V}{k}$ **do**

 // teste, ob C VC

$vc = true$

foreach $uv \in E$ **do**

if $\{u, v\} \cap C = \emptyset$ **then**

$vc = false$

if vc **then**

return ("yes", C)

return ("no", \emptyset)

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(\quad)$$

Laufzeit.

Ein exakter Algorithmus für k -VC

```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )
```

```
  foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do
```

```
    // teste, ob  $C$  VC
```

```
     $vc = true$ 
```

```
    foreach  $uv \in E$  do
```

```
      if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then
```

```
         $vc = false$ 
```

```
    if  $vc$  then
```

```
      return ("yes",  $C$ )
```

```
  return ("no",  $\emptyset$ )
```

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

Laufzeit.

Ein exakter Algorithmus für k -VC

```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )
```

```
  foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do
```

```
    // teste, ob  $C$  VC
```

```
     $vc = true$ 
```

```
    foreach  $uv \in E$  do
```

```
      if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then
```

```
         $vc = false$ 
```

```
    if  $vc$  then
```

```
      return ("yes",  $C$ )
```

```
  return ("no",  $\emptyset$ )
```

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

Laufzeit.

Ein exakter Algorithmus für k -VC

BruteForceVC(Graph G , Integer k)

foreach $C \in \binom{V}{k}$ **do**

 // teste, ob C VC

$vc = true$

foreach $uv \in E$ **do**

if $\{u, v\} \cap C = \emptyset$ **then**

$vc = false$

if vc **then**

return ("yes", C)

return ("no", \emptyset)

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

$$O(E) = O(m)$$

Laufzeit.

Ein exakter Algorithmus für k -VC

BruteForceVC(Graph G , Integer k)

foreach $C \in \binom{V}{k}$ **do**

 // teste, ob C VC

$vc = true$

foreach $uv \in E$ **do**

if $\{u, v\} \cap C = \emptyset$ **then**

$vc = false$

if vc **then**

return ("yes", C)

return ("no", \emptyset)

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

$$O(E) = O(m)$$

Laufzeit. $O(n^k m)$

Ein exakter Algorithmus für k -VC

```
BruteForceVC(Graph  $G$ , Integer  $k$ )
```

```
  foreach  $C \in \binom{V}{k}$  do
```

```
    // teste, ob  $C$  VC
```

```
     $vc = true$ 
```

```
    foreach  $uv \in E$  do
```

```
      if  $\{u, v\} \cap C = \emptyset$  then
```

```
         $vc = false$ 
```

```
    if  $vc$  then
```

```
      return ("yes",  $C$ )
```

```
  return ("no",  $\emptyset$ )
```

$$\left| \binom{V}{k} \right| = \binom{|V|}{k} = \binom{n}{k} = O(n^k)$$

$$O(E) = O(m)$$

Laufzeit. $O(n^k m)$ – Dies ist *nicht* polynomiell in der Größe der Eingabe ($= n + m$), da k keine Konstante, sondern Teil der Eingabe.

Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,  *Schwierigkeit der Instanz*
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,  *Schwierigkeit der Instanz*
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

Ein neues Ziel

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,  Schwierigkeit der Instanz
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c)$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Schwierigkeit der Instanz

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O^*(f(k))$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Schwierigkeit der Instanz

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O_{\zeta}^*(f(k))$$

ignoriert polynomielle Faktoren!

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O_{\text{ignoriert polynomielle Faktoren!}}^*(f(k))$$

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Bem. BruteForceVC hat die gewünschte Laufzeit.

Ein neues Ziel

Bemerkung.

Die Klasse \mathcal{FPT} ändert sich nicht, wenn statt $+$ hier \cdot steht.

Finde einen Algorithmus für k -VC mit Laufzeit

$$O(f(k) + |I|^c) =: O_{\zeta}^*(f(k))$$

ignoriert polynomielle Faktoren!

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbare Funktion (unabh. von I),
 I gegebene Instanz, c Konstante (unabh. von I)

D.h. die Laufzeit soll abhängen

- beliebig vom Parameter k ,
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I .

Ein Problem, das in dieser Zeit gelöst werden kann, heißt *festparameterberechenbar* (*fixed-parameter tractable*) bzgl. k .

\mathcal{FPT} = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme.

Bem. BruteForceVC hat *nicht* die gewünschte Laufzeit.

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N(v) \subseteq C$.

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem k -VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem k -VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

Beob. 2. Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem k -VC
enthalten.

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem k -VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

Beob. 2. Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem k -VC
enthalten.

Was gilt, falls $|E| > k^2$ und alle Knoten Grad $\leq k$ haben?

Ein paar einfache Beobachtungen...

Sei G Graph, C ein VC für G , v Knoten, der nicht in C liegt.
Welche Knoten liegen dann sicher in C ?

Beob. 1. Sei G ein Graph, C ein VC für G , v ein Knoten.
Dann gilt: $v \in C$ oder $N(v) \subseteq C$.

Betrachte Entscheidungsproblem k -VC.
Was gilt für Knoten mit Grad $> k$?

Beob. 2. Jeder Knoten mit Grad $> k$ ist in jedem k -VC
enthalten.

Was gilt, falls $|E| > k^2$ und alle Knoten Grad $\leq k$ haben?

Beob. 3. Falls $|E| > k^2$ und $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg v \leq k$,
so hat G kein k -VC.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

Benützen Sie Beobachtungen 2 & 3, um eine Instanz (G, k) in eine Instanz (G', k') zu verwandeln, so dass $|G'| \in O(k^2)$!

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$$

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$$G' = (V', E') := G[V \setminus C] \quad (\text{ohne isolierte Knoten})$$

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$$G' = (V', E') := G[V \setminus C] \quad (\text{ohne isolierte Knoten})$$

$$k' = k - |C|$$

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit.

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k)$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(n + m + k^2 2^k k^{2k})$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(n + m + k^2 2^k k^{2k})$

Also:

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(n + m + k^2 2^k k^{2k})$

Also: $k\text{-VC} \in \mathcal{FPT}$!

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(\underbrace{n + m}_{|||} + k^2 2^k k^{2k})$

Also: $k\text{-VC} \in \mathcal{FPT}!$

$|||$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(\underbrace{n + m}_{|I|^1} + \underbrace{k^2 2^k k^{2k}}_{f(k)})$

Also: $k\text{-VC} \in \mathcal{FPT}!$

Algorithmus von Buss

BussVC(Graph G , Integer k)

I) Reduktion der Instanz auf ihren harten Kern

$C = \{v \in V \mid \deg v > k\}$

if $|C| > k$ **then return** ("no", \emptyset)

$G' = (V', E') := G[V \setminus C]$ (ohne isolierte Knoten)

$k' = k - |C|$

if $|E'| > k^2$ **then return** ("no", \emptyset)

$O(n + m)$
Zeit

II) Lösung der Restinstanz mit roher Gewalt

$(vc, C') = \text{BruteForceVC}(G', k')$

return $(vc, C \cup C')$

$O(m' \cdot (n')^{k'})$ Zeit
wobei $m' := |E'| \leq k^2$
 $\Rightarrow n' := |V'| \leq 2k^2$

Laufzeit. $O(n + m + k^2 \cdot (2k^2)^k) = O(\underbrace{n + m}_{|I|^1} + \underbrace{k^2 2^k k^{2k}}_{f(k)})$

Also: $k\text{-VC} \in \mathcal{FPT}!$

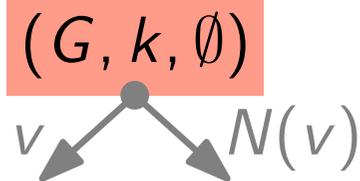
Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

(G, k, \emptyset)

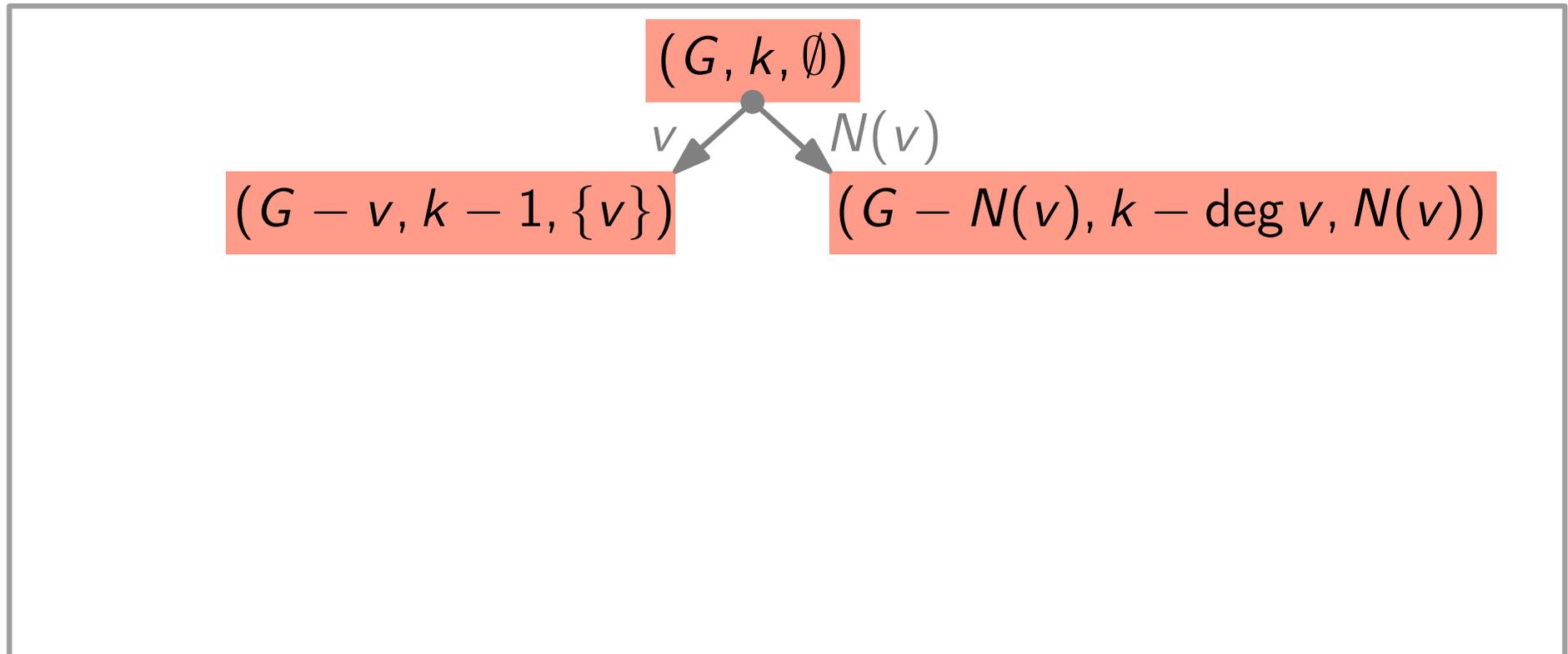
Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



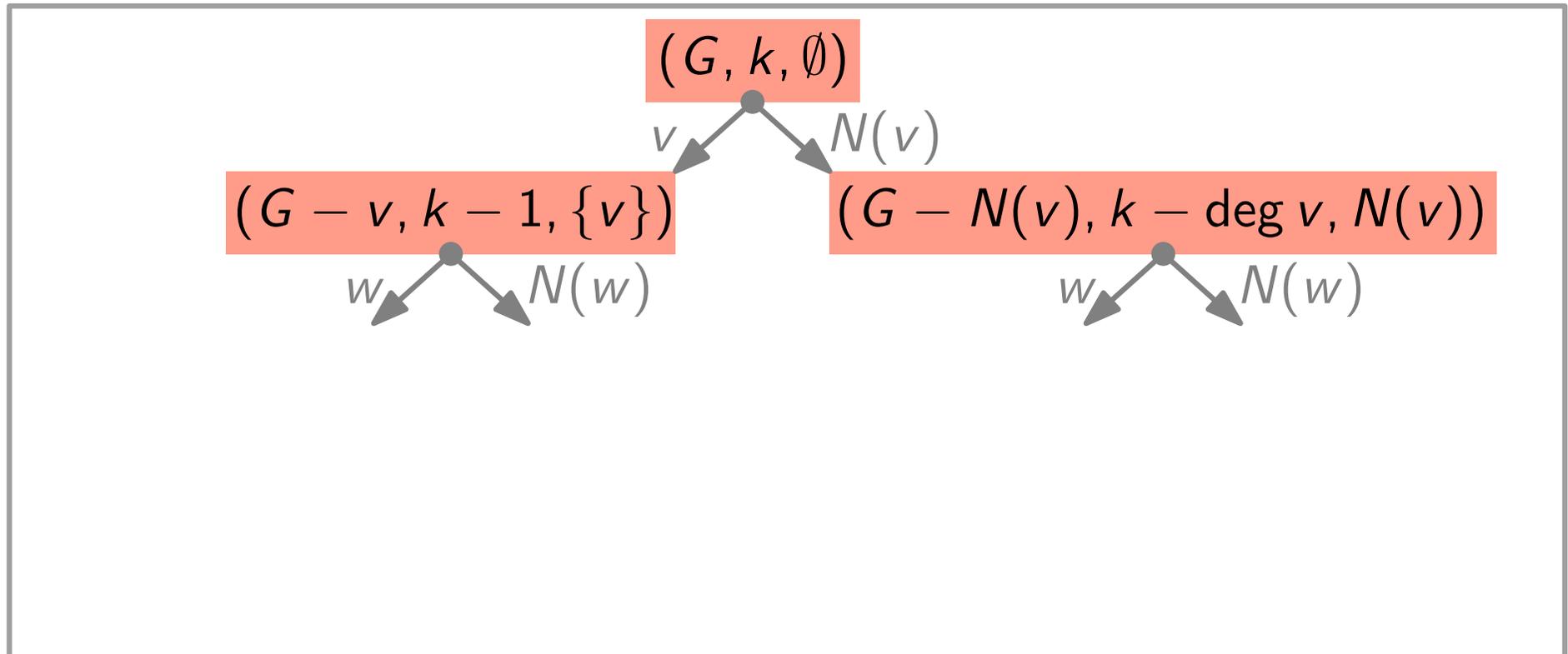
Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



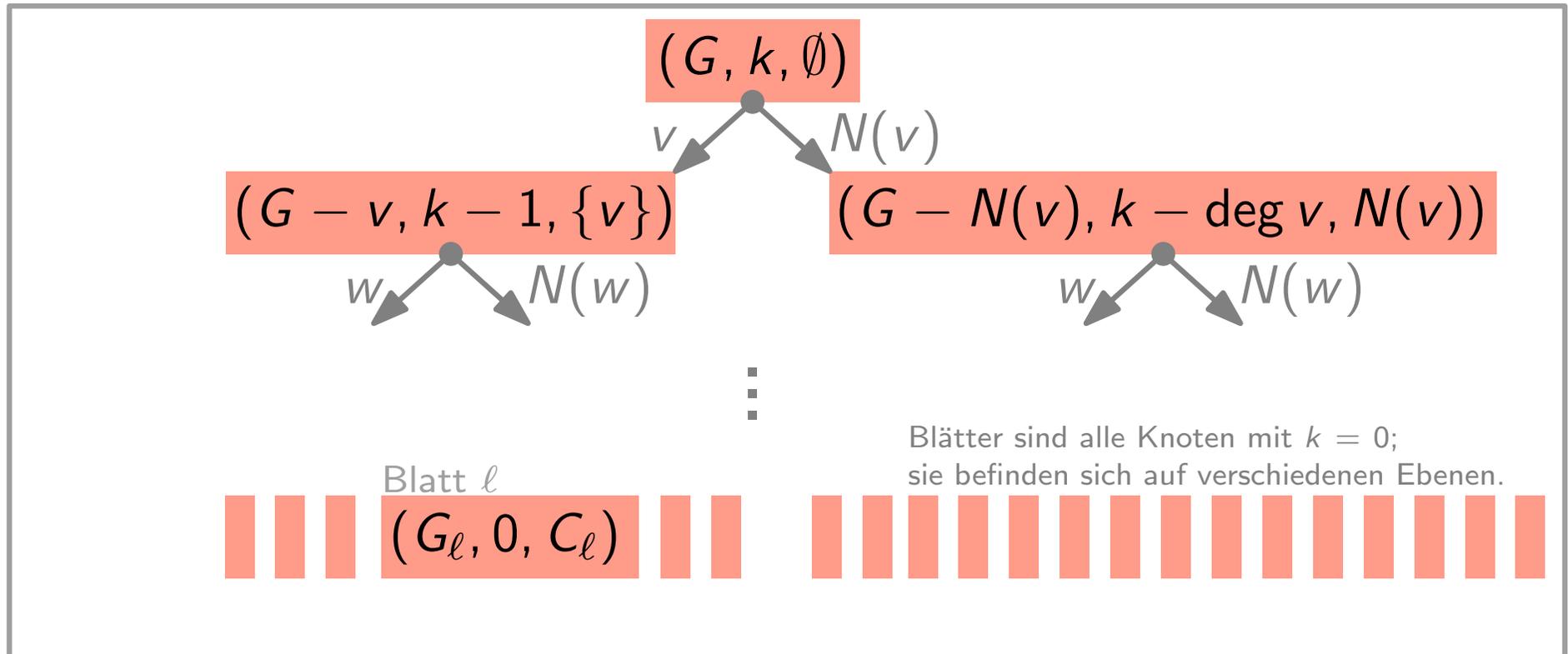
Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



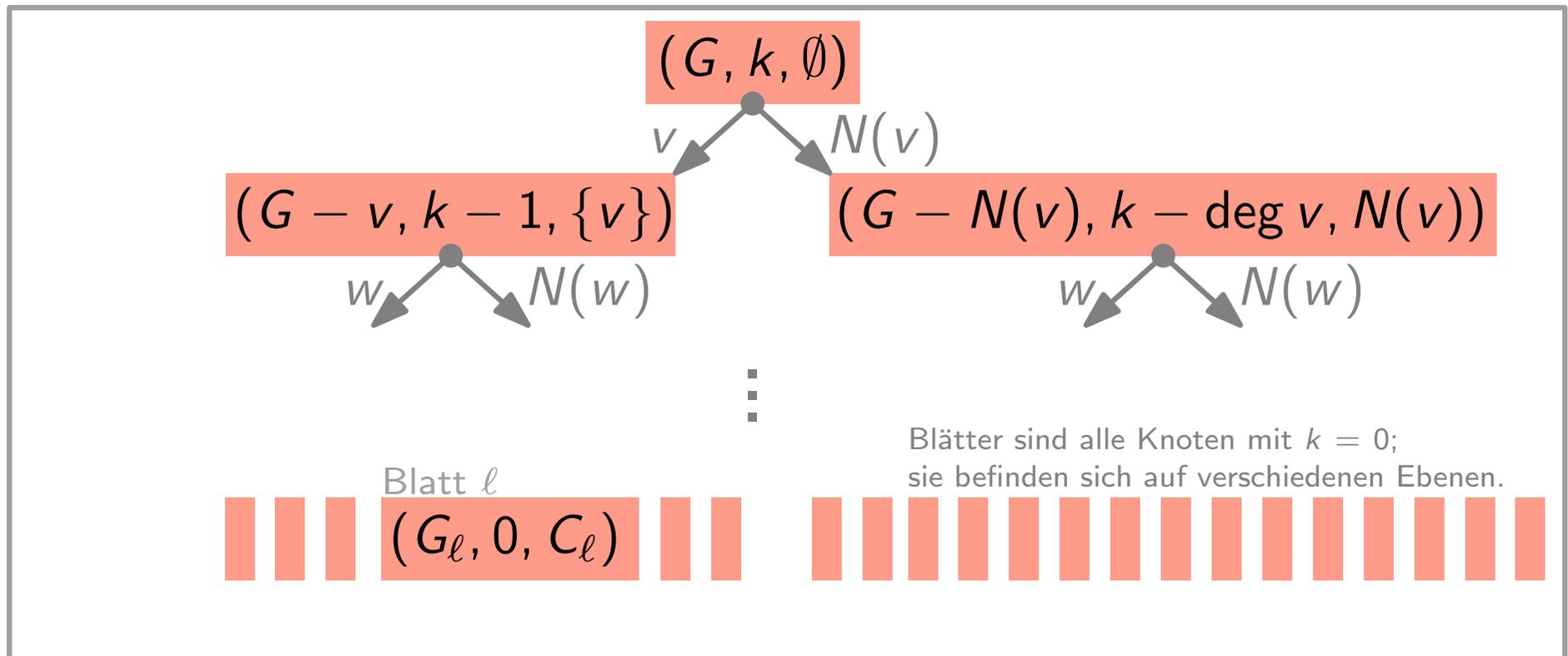
Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



Suchbaum-Algorithmus

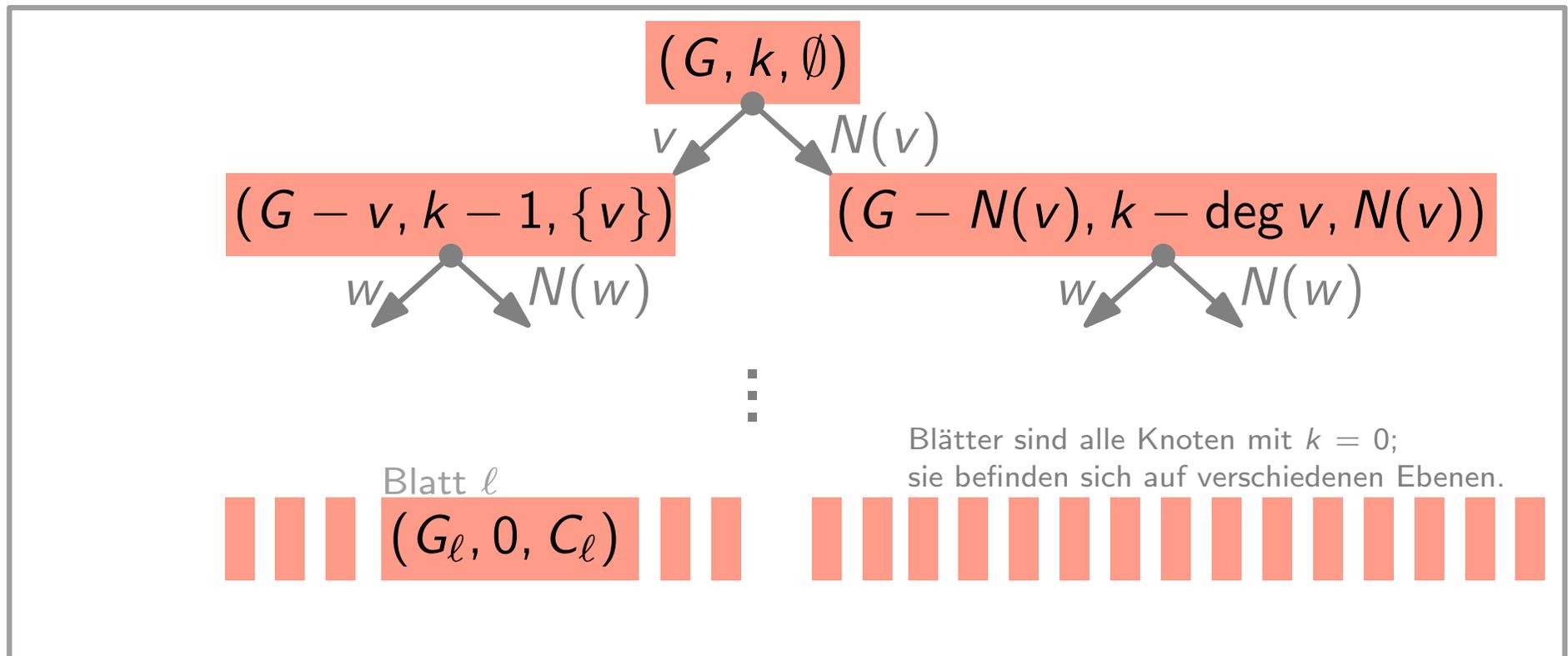
Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



JA:

Suchbaum-Algorithmus

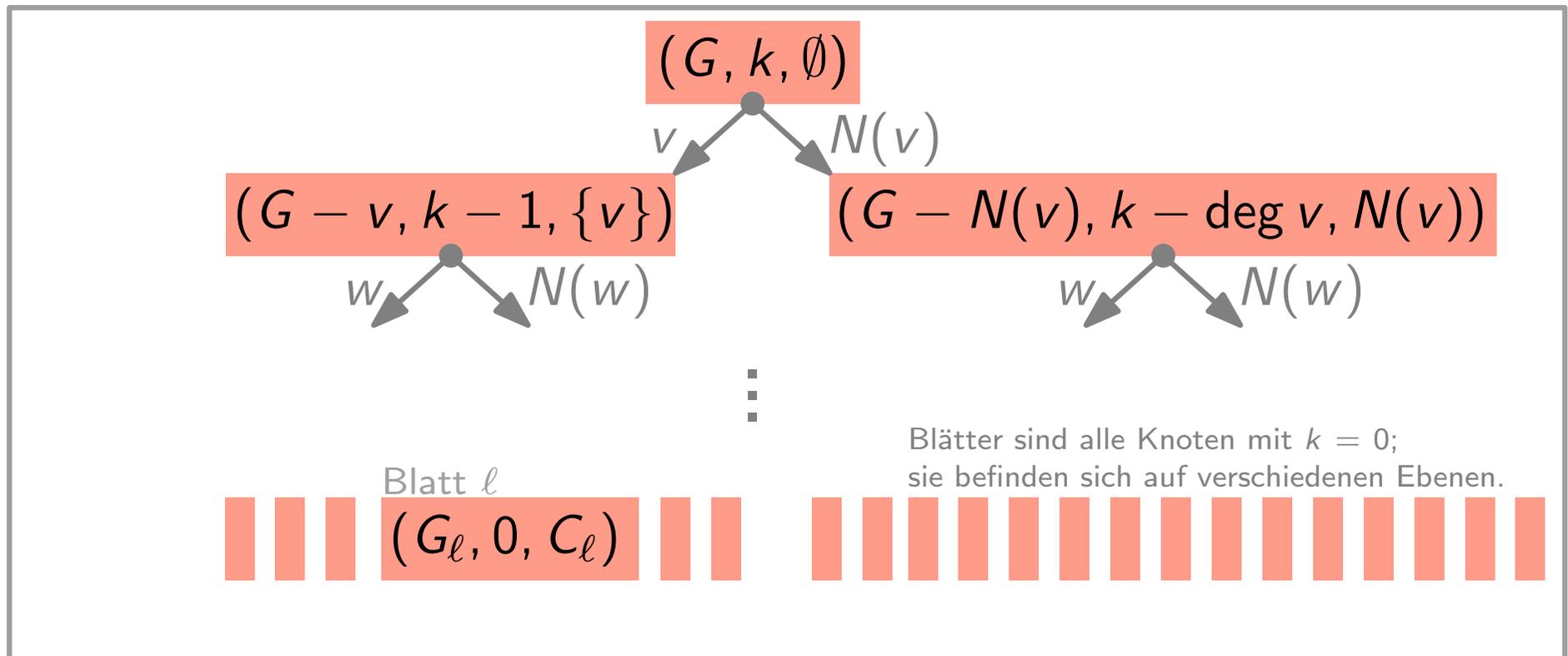
Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

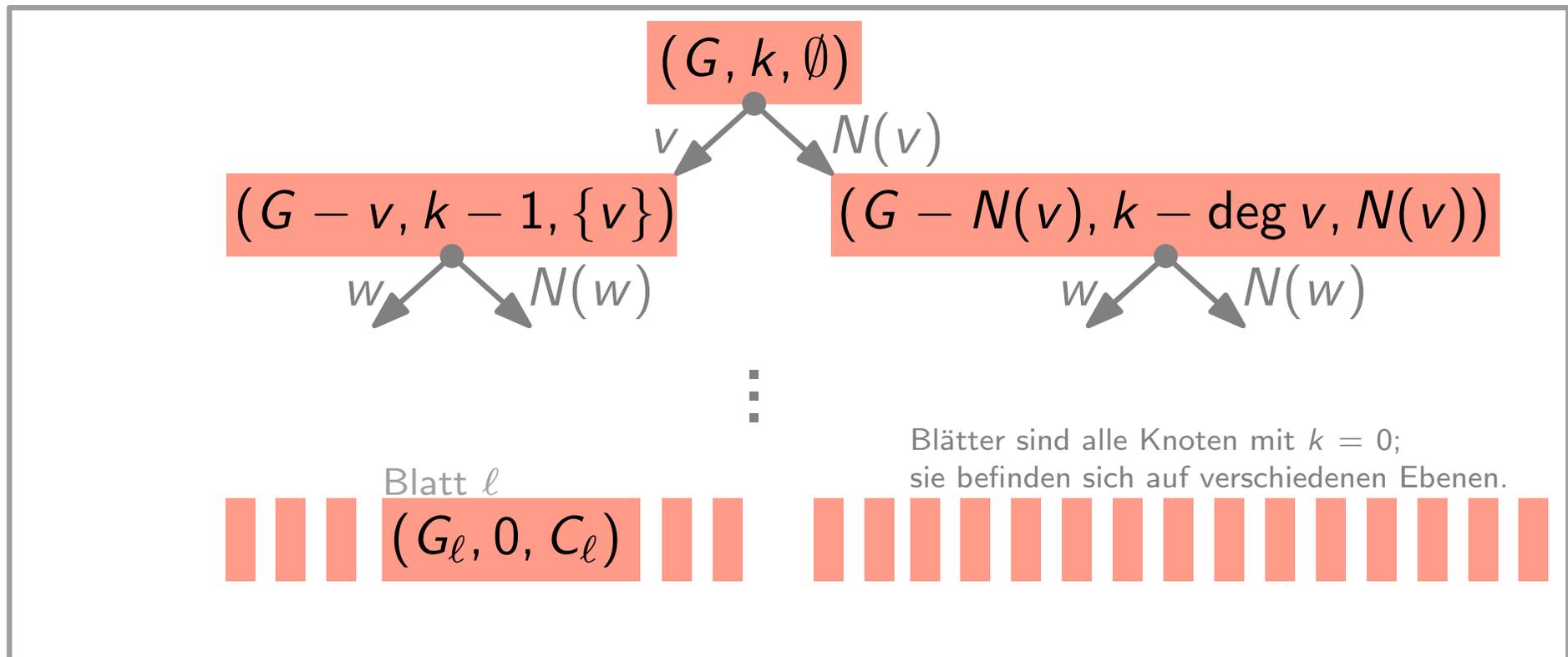


JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

NEIN:

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

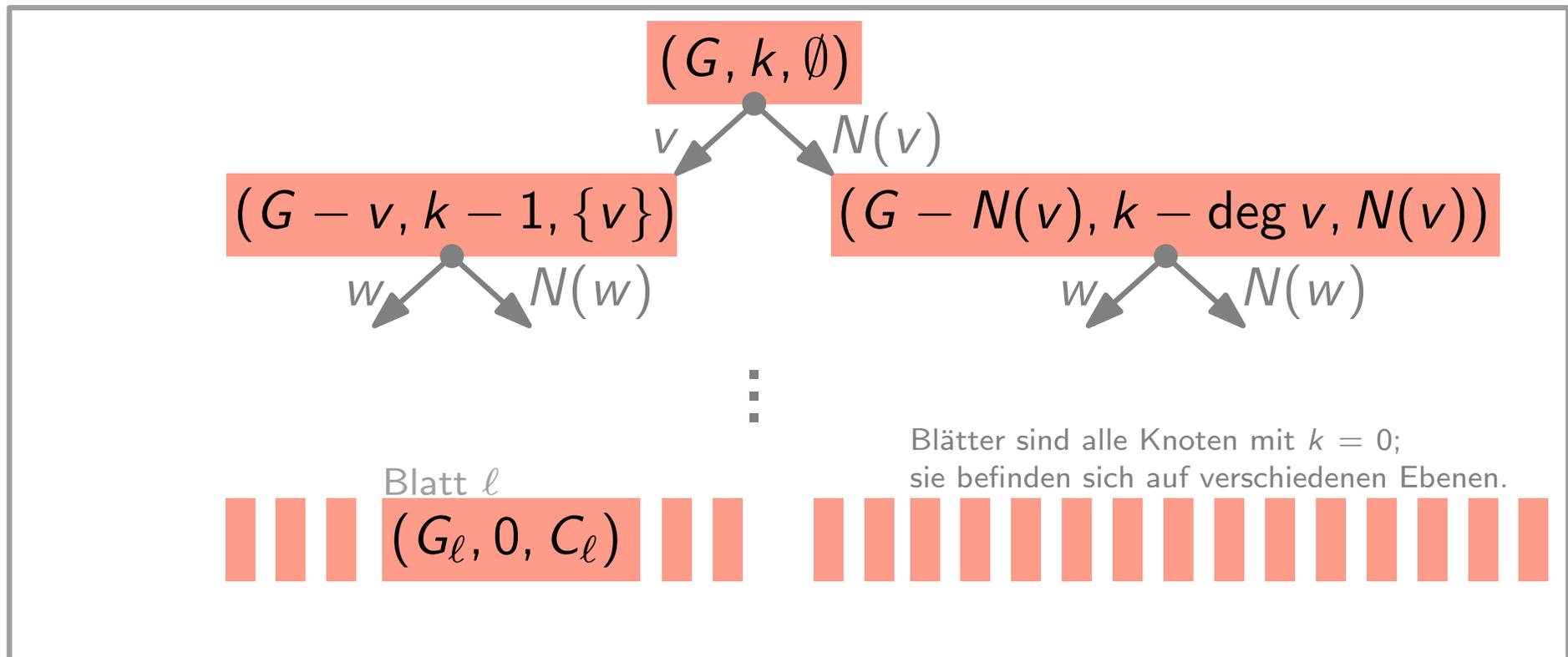


JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC.

Suchbaum-Algorithmus

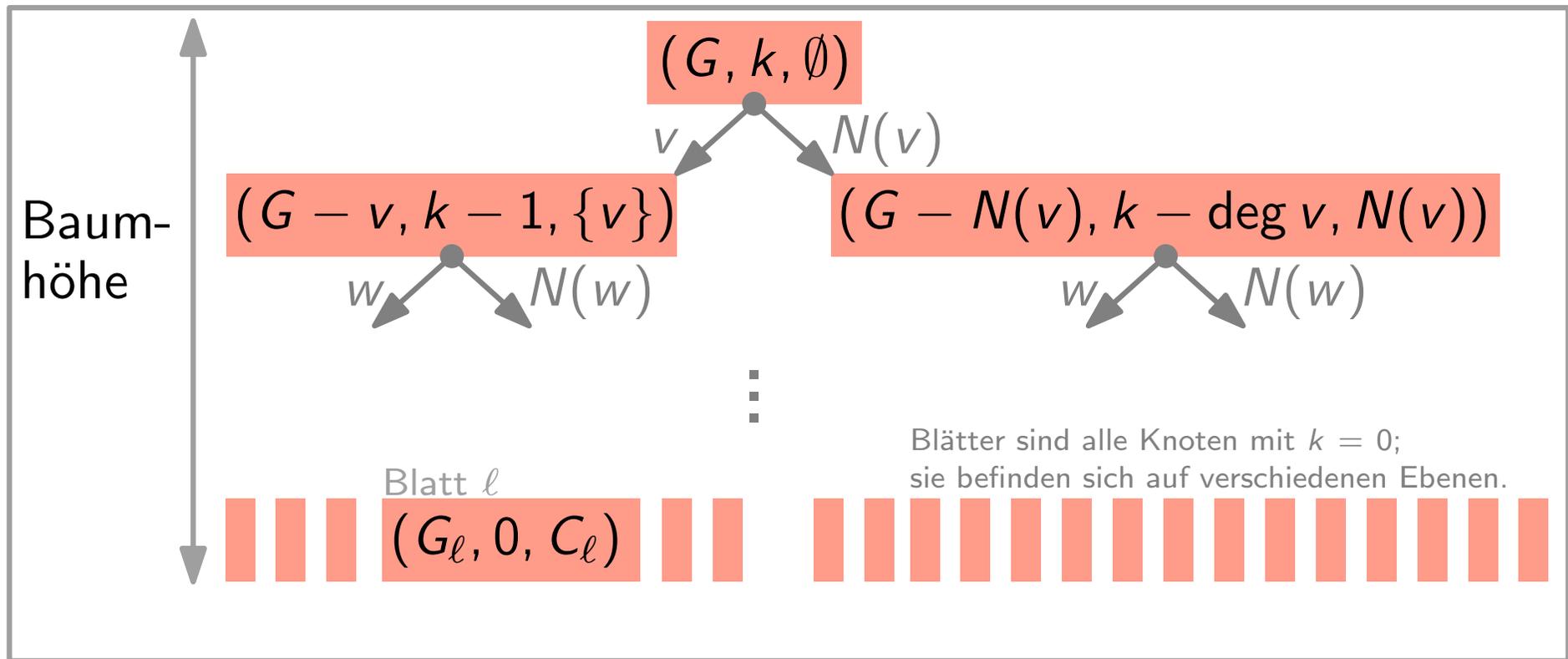
Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

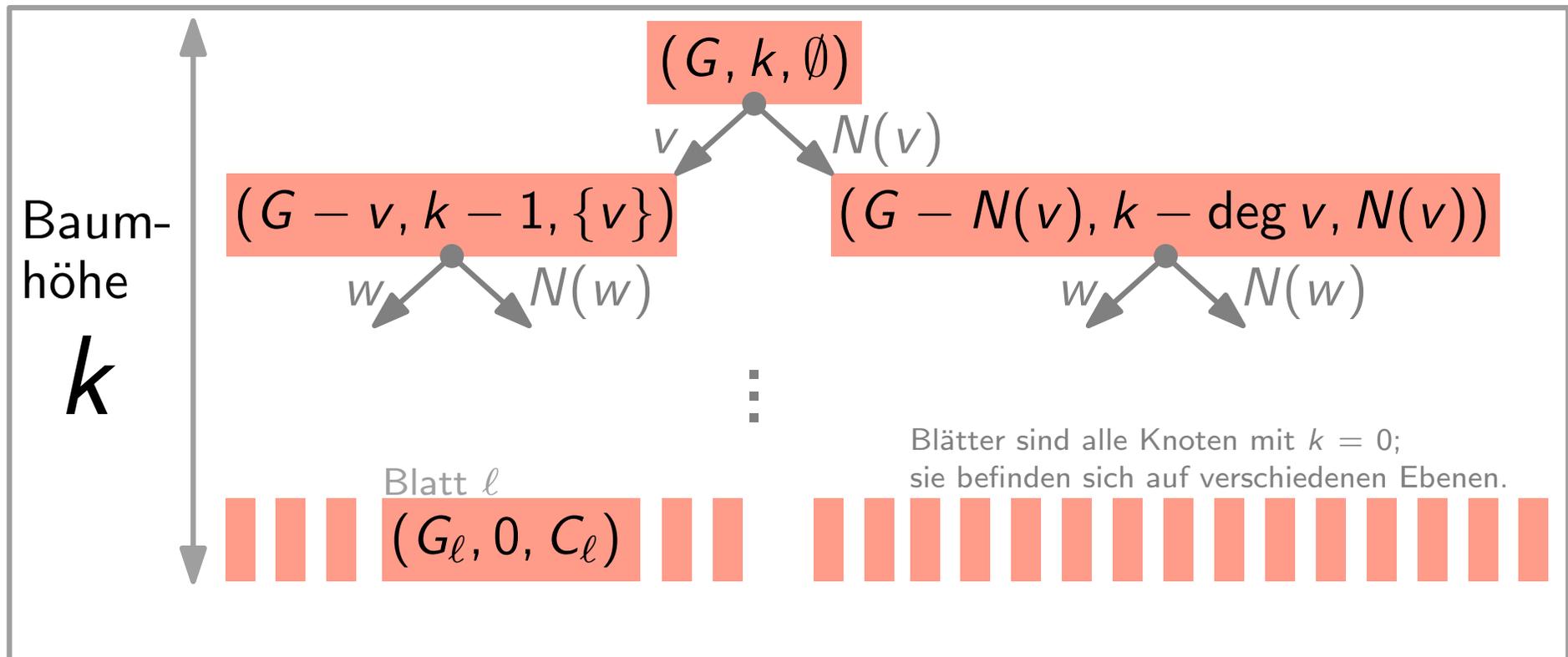
Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

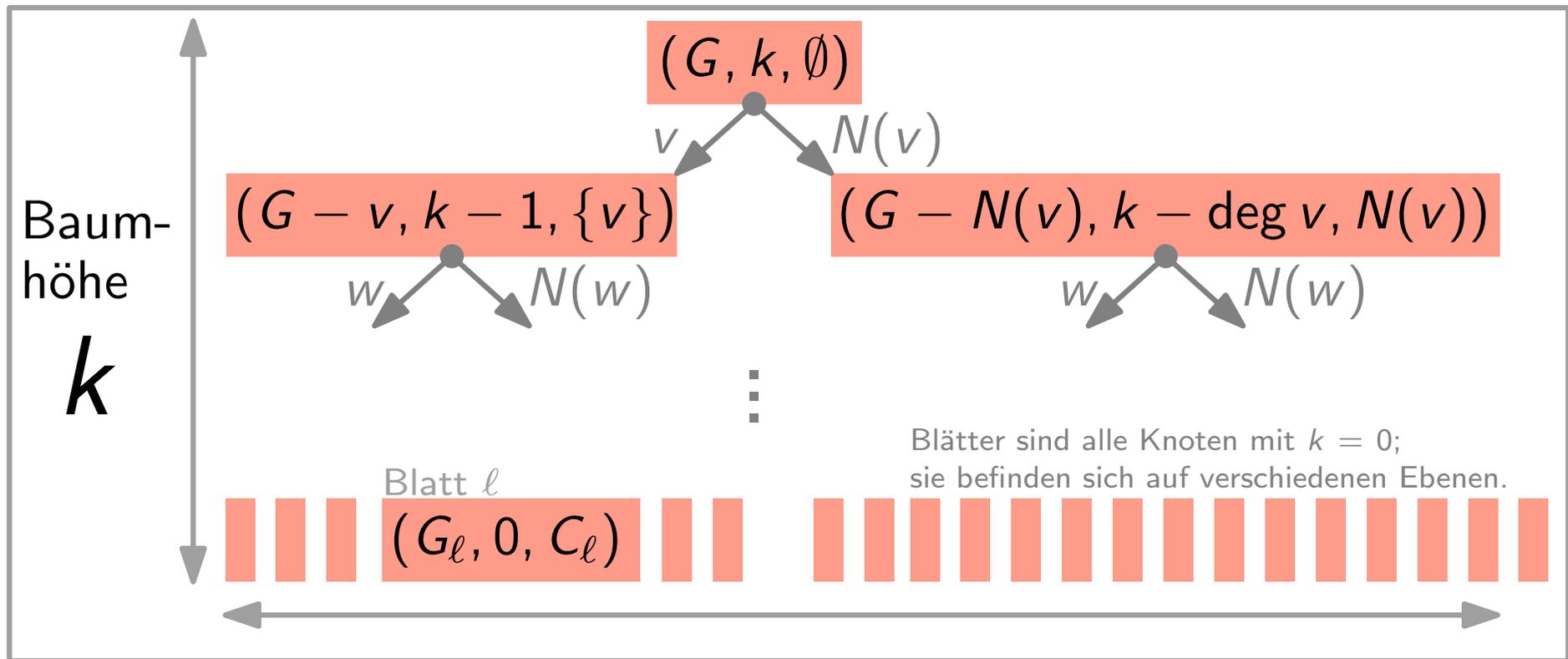
Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

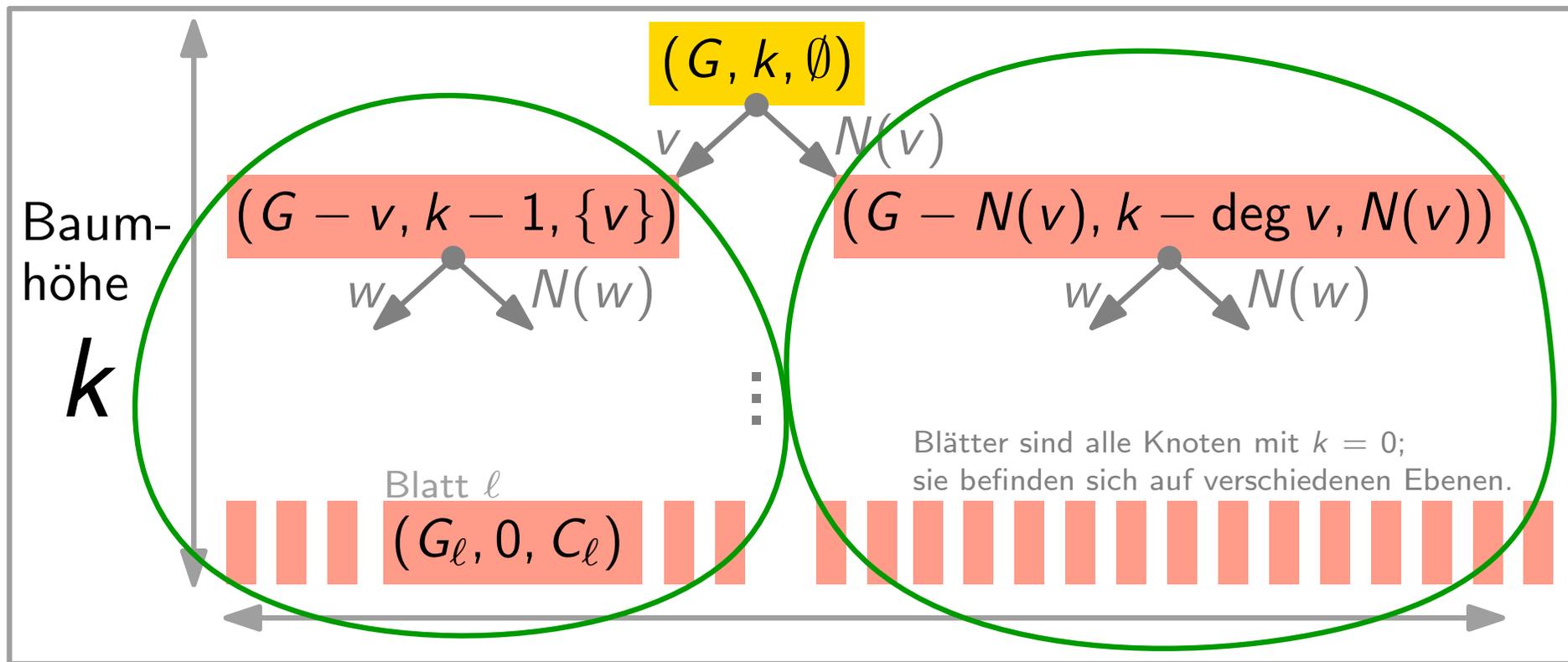


#Knoten: $T(k) \leq$

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



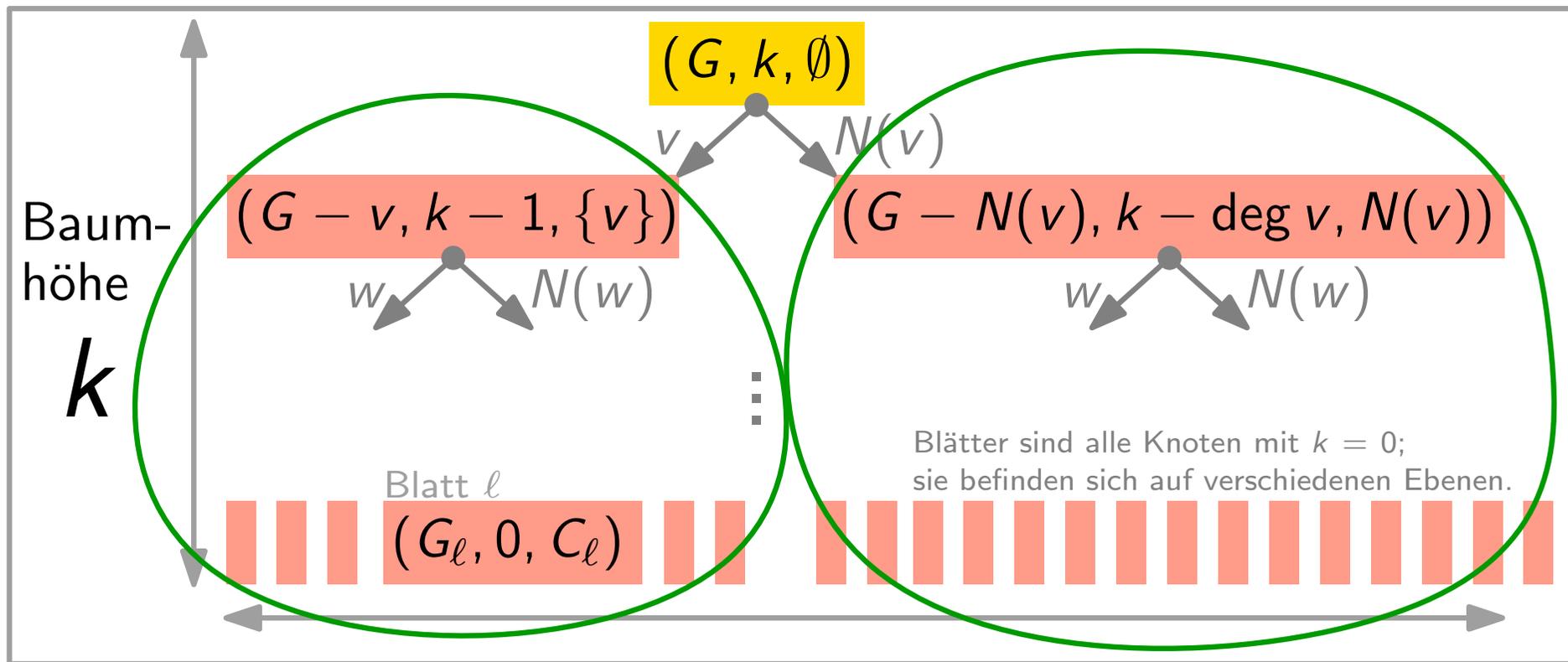
#Knoten: $T(k) \leq$ 

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



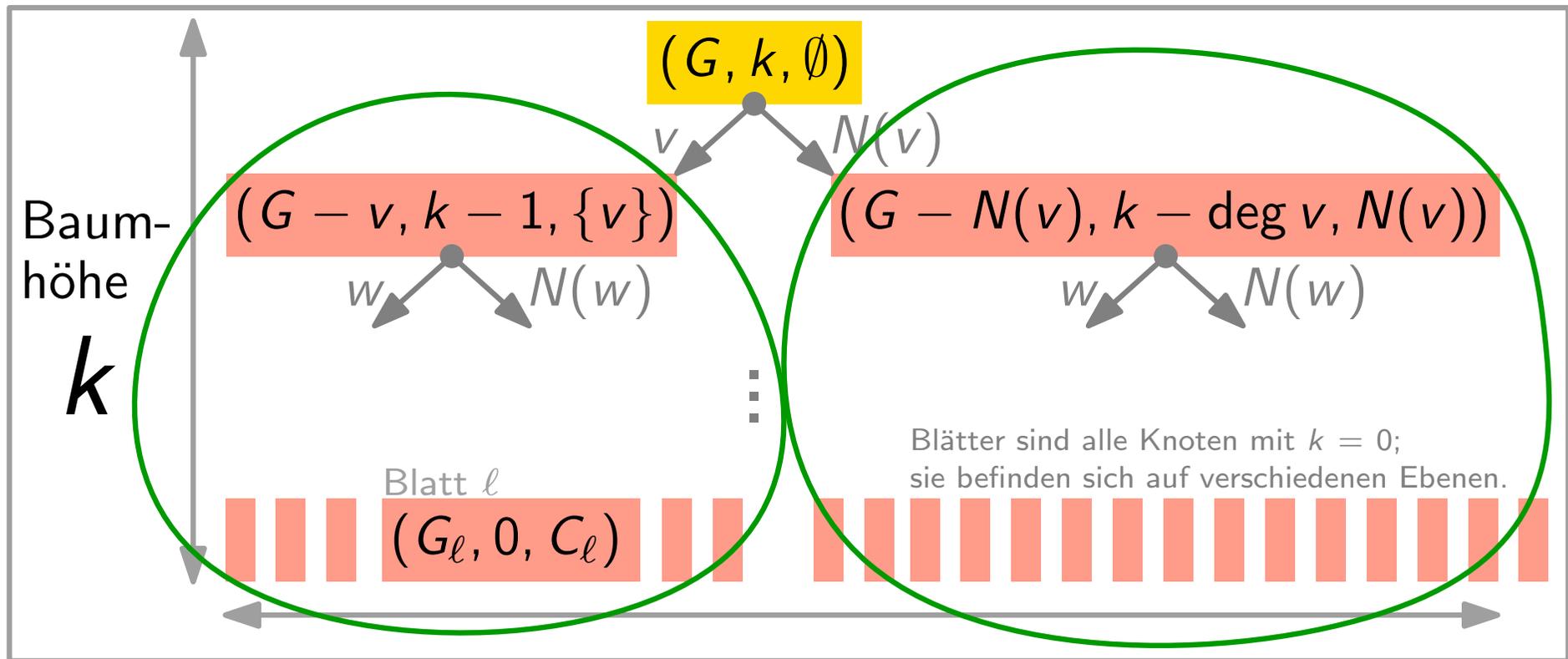
#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

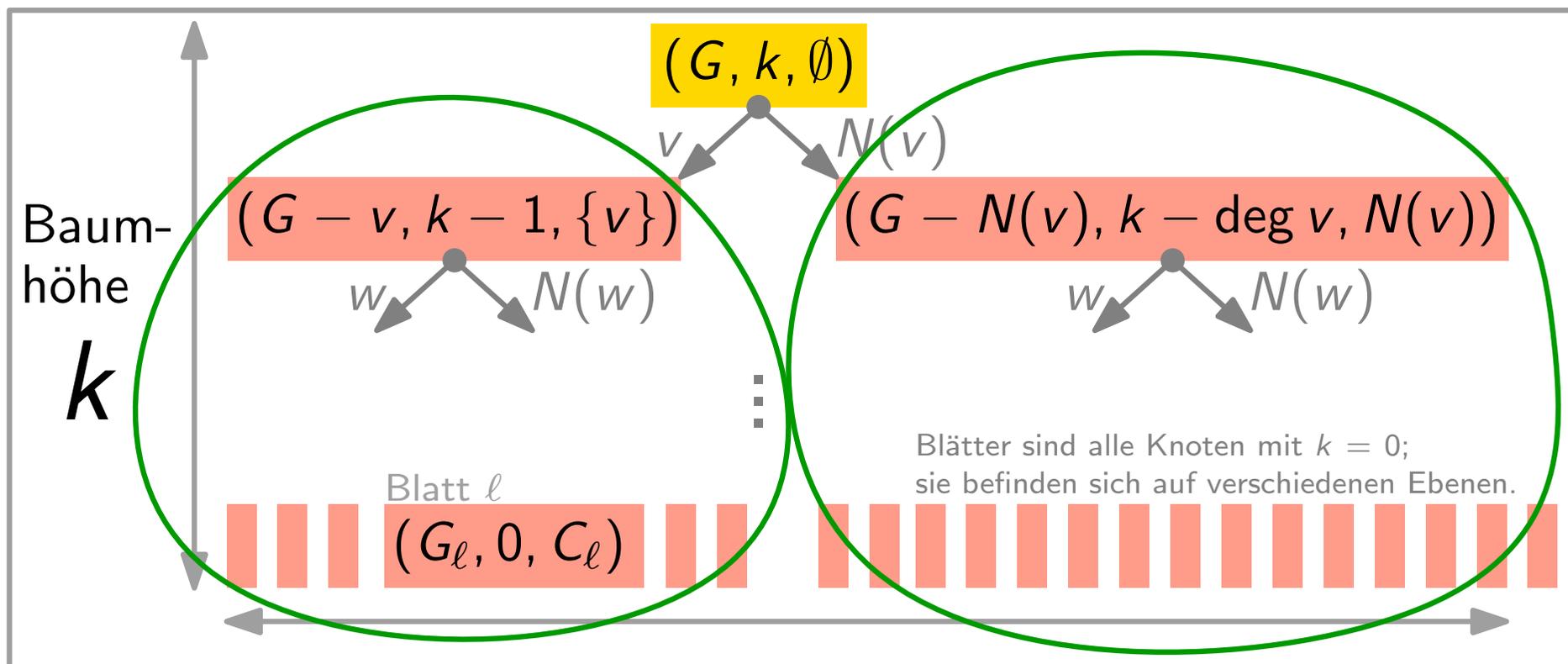


#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1$

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



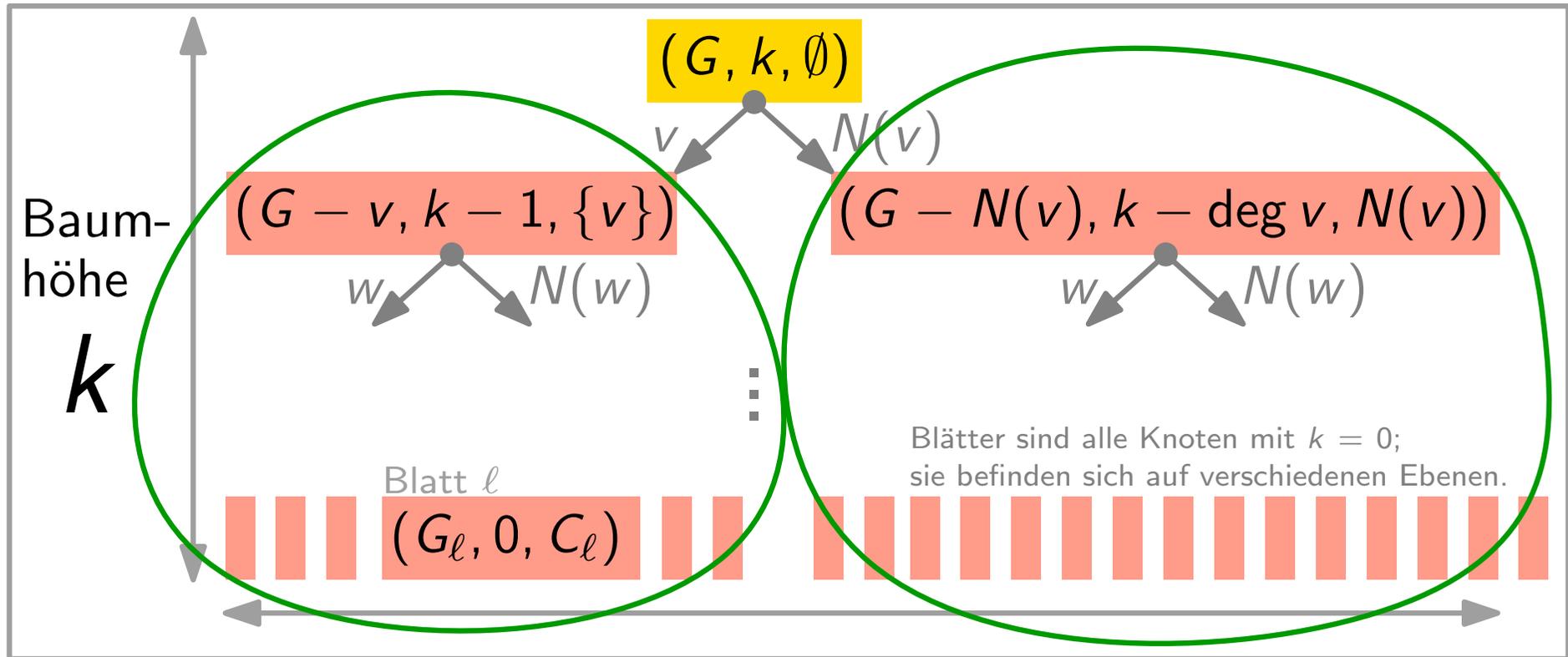
#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.

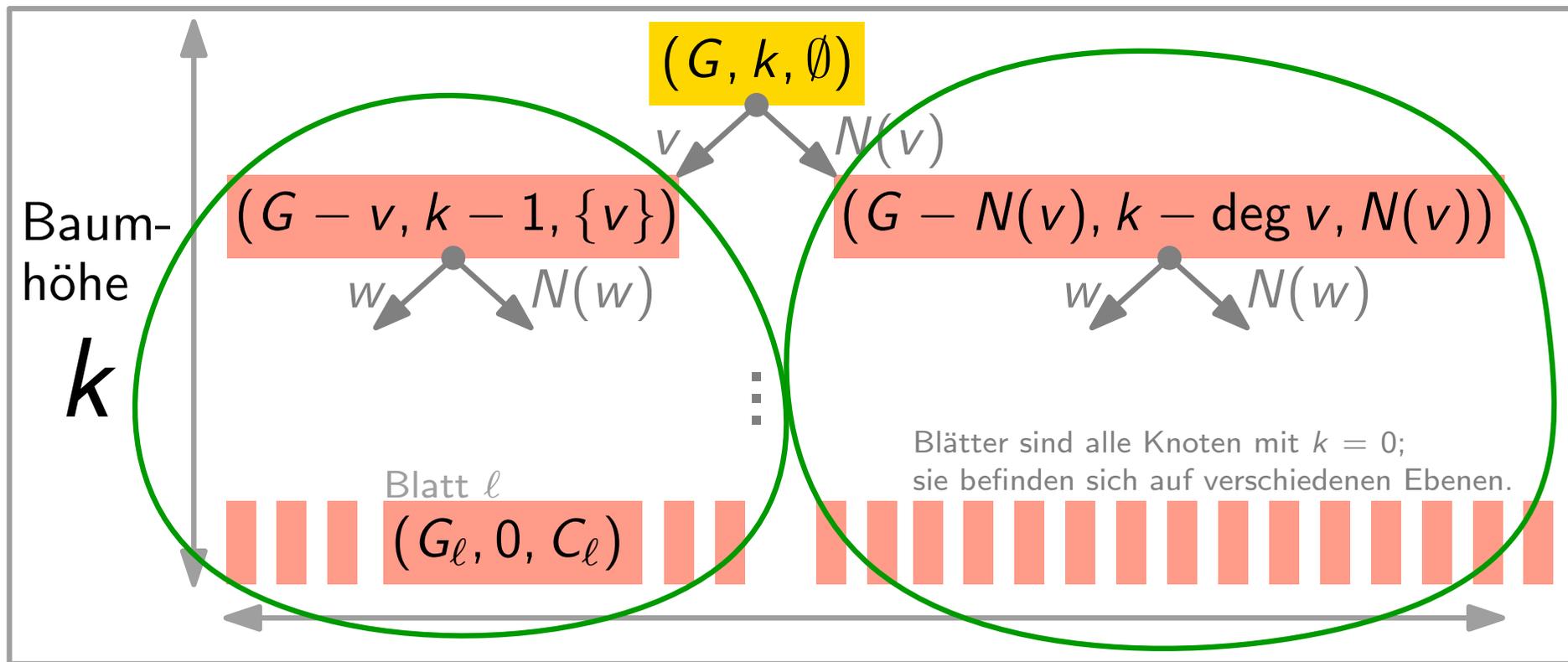


#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$
 \Rightarrow **Laufzeit:**

JA: Gibt es ein Blatt ℓ mit $E_\ell = \emptyset$, so ist C_ℓ ein k -VC von G .
 NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Suchbaum-Algorithmus

Idee. Verbessere Phase II durch Aufbau eines Suchbaums.



#Knoten: $T(k) \leq 2T(k-1) + 1$, $T(0) = 1 \Rightarrow T(k) \leq 2^{k+1} - 1 \in O(2^k)$
 \Rightarrow **Laufzeit:** $O^*(2^k)$

JA: Gibt es ein Blatt l mit $E_l = \emptyset$, so ist C_l ein k -VC von G .

NEIN: Gibt es kein solches Blatt, so hat G kein k -VC. (Warum?)

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.

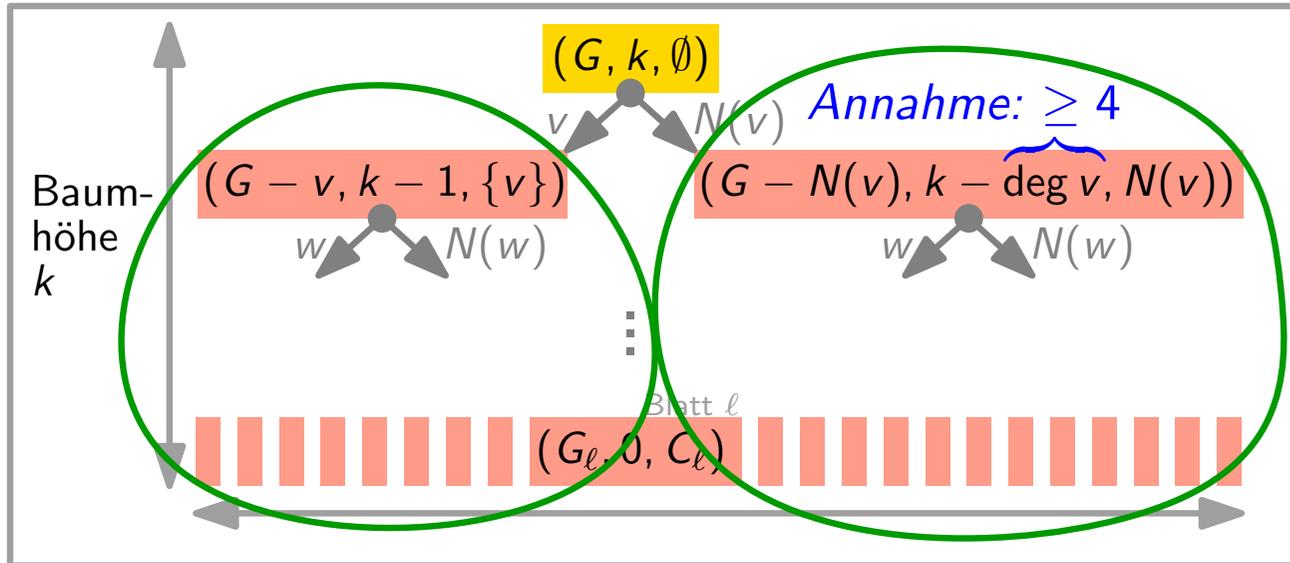
Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.

Was wäre, wenn wir garantieren könnten, dass wir immer mit einem Knoten v verzweigen, dessen Grad mindestens 4 ist?

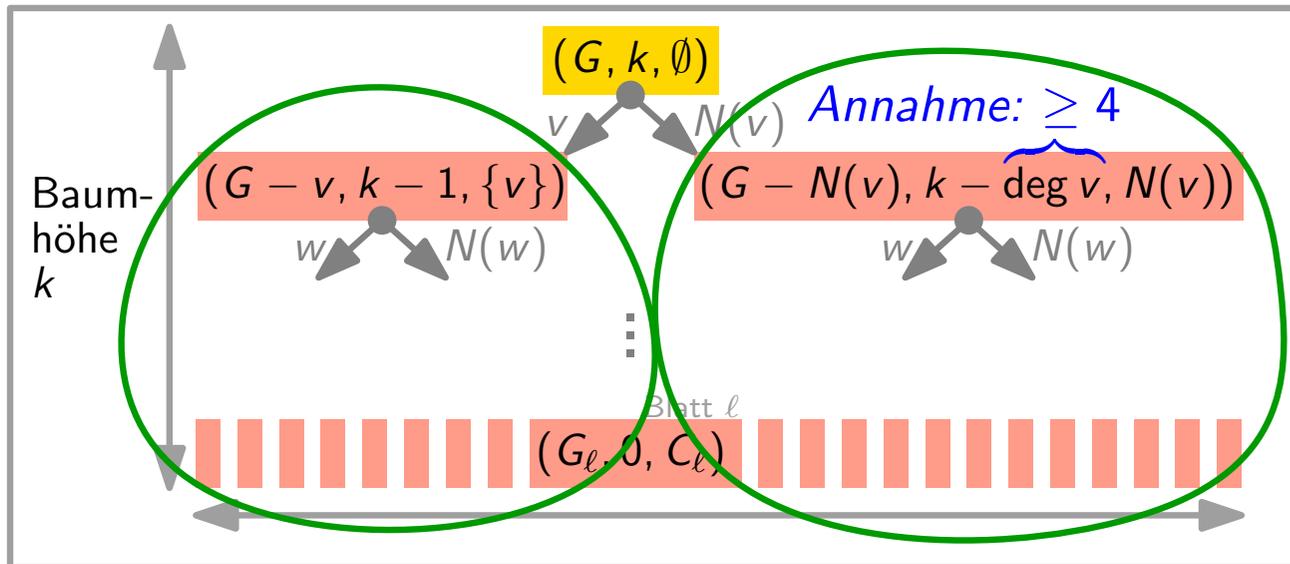
Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



Der Grad-4-Algorithmus

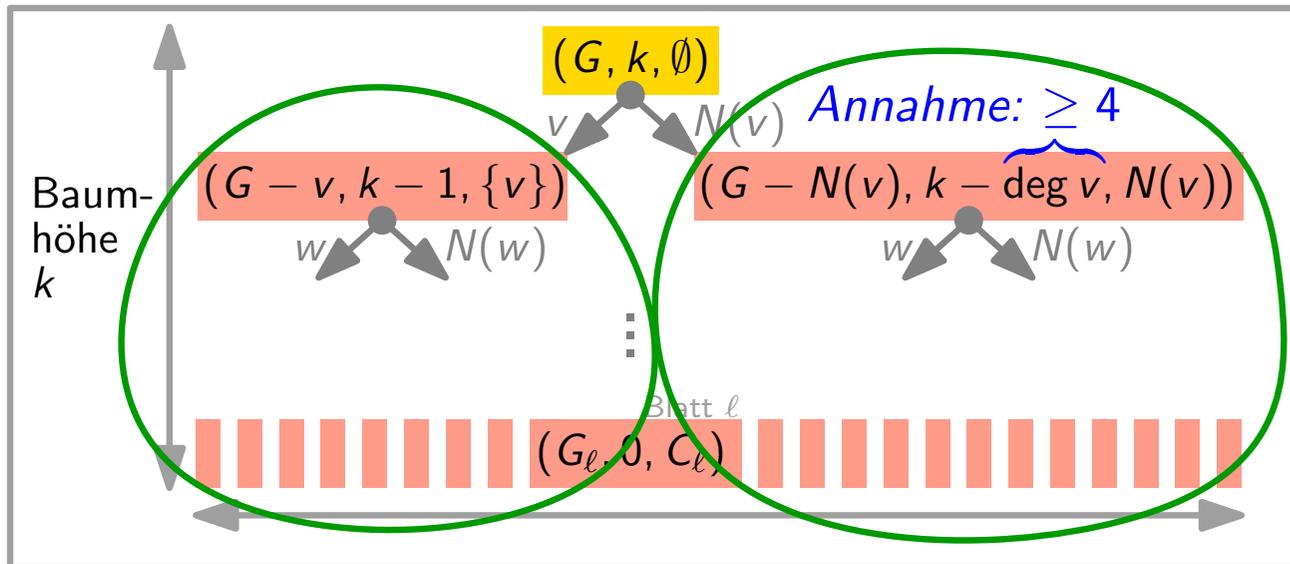
Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$\Rightarrow T(k) =$

Der Grad-4-Algorithmus

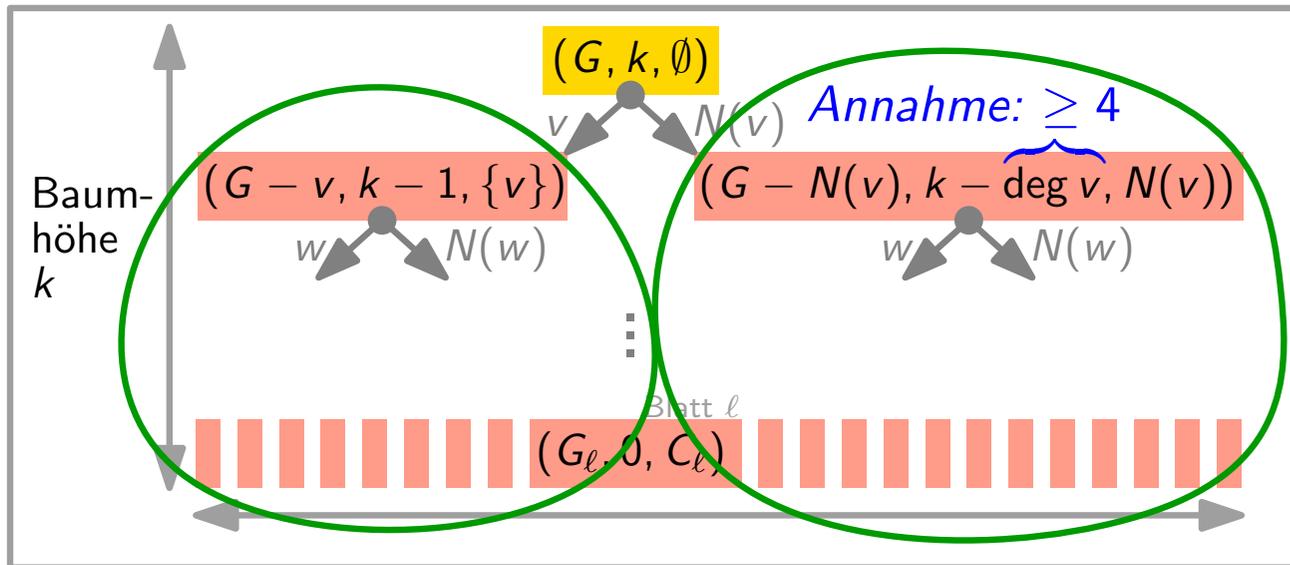
Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.

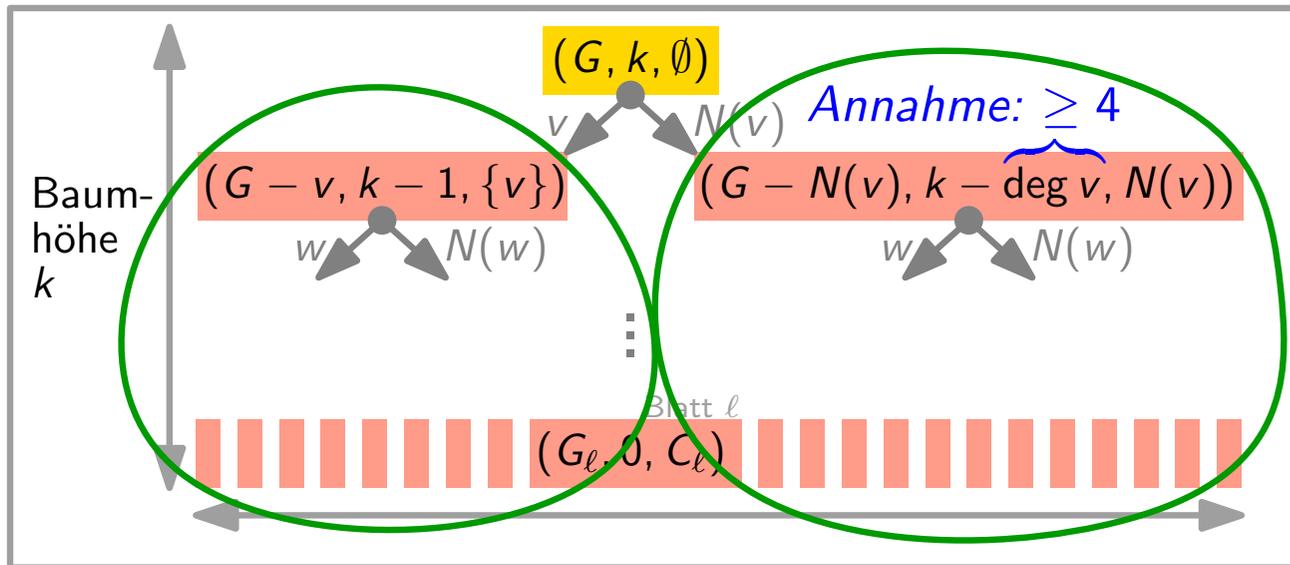


$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



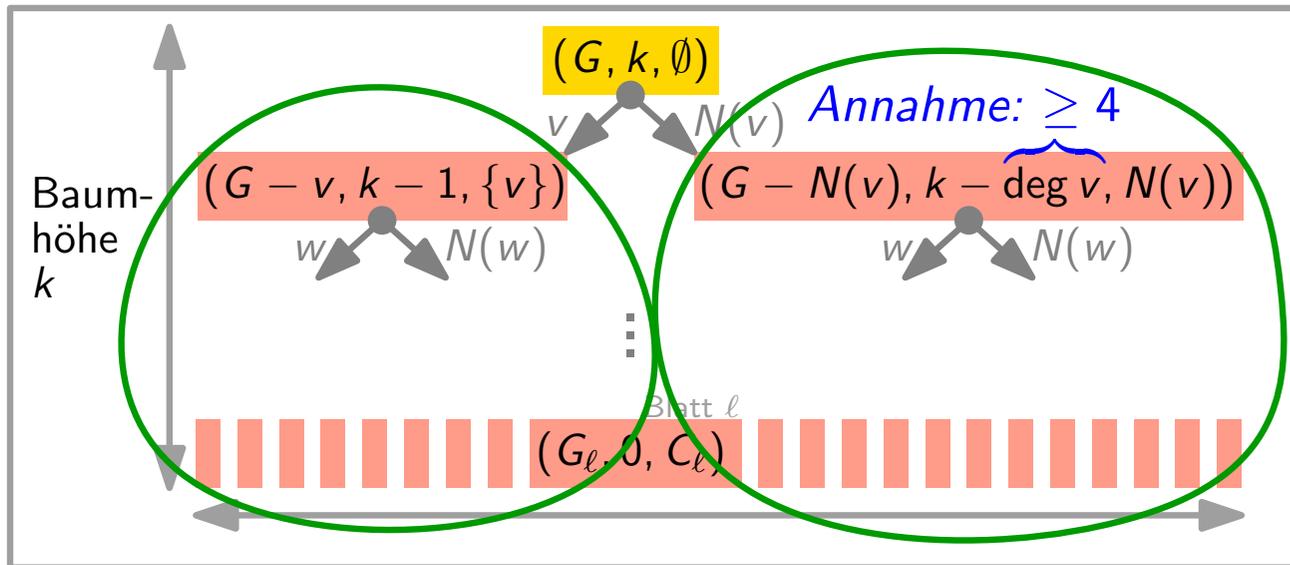
$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

Teste $T(k) = z^k - 1$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



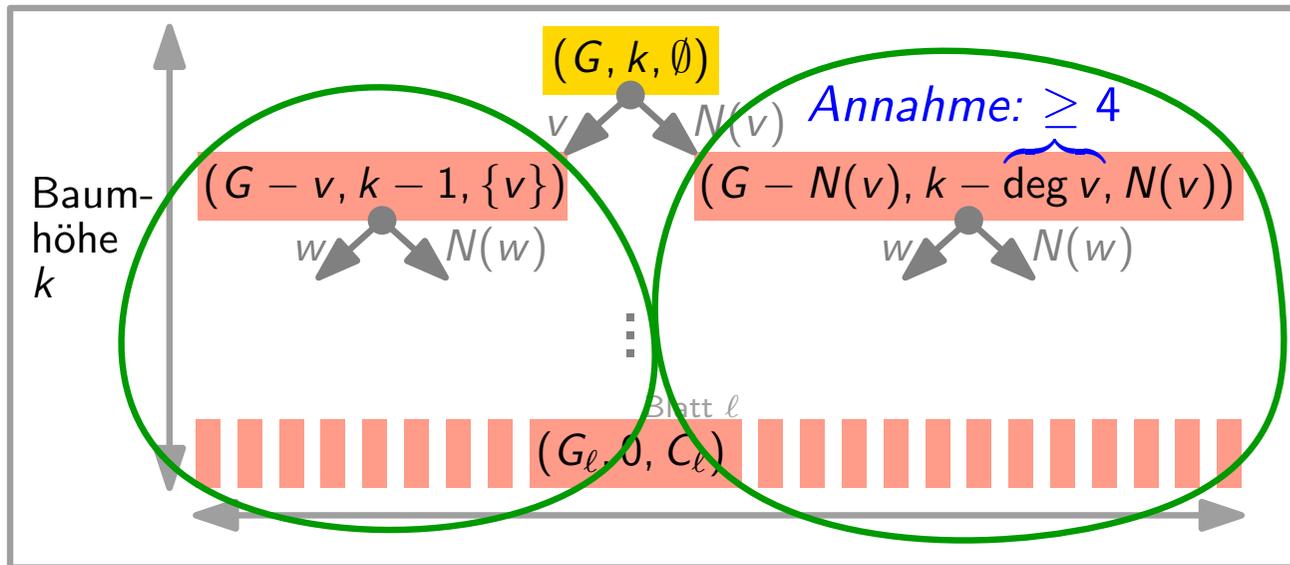
$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k =$$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



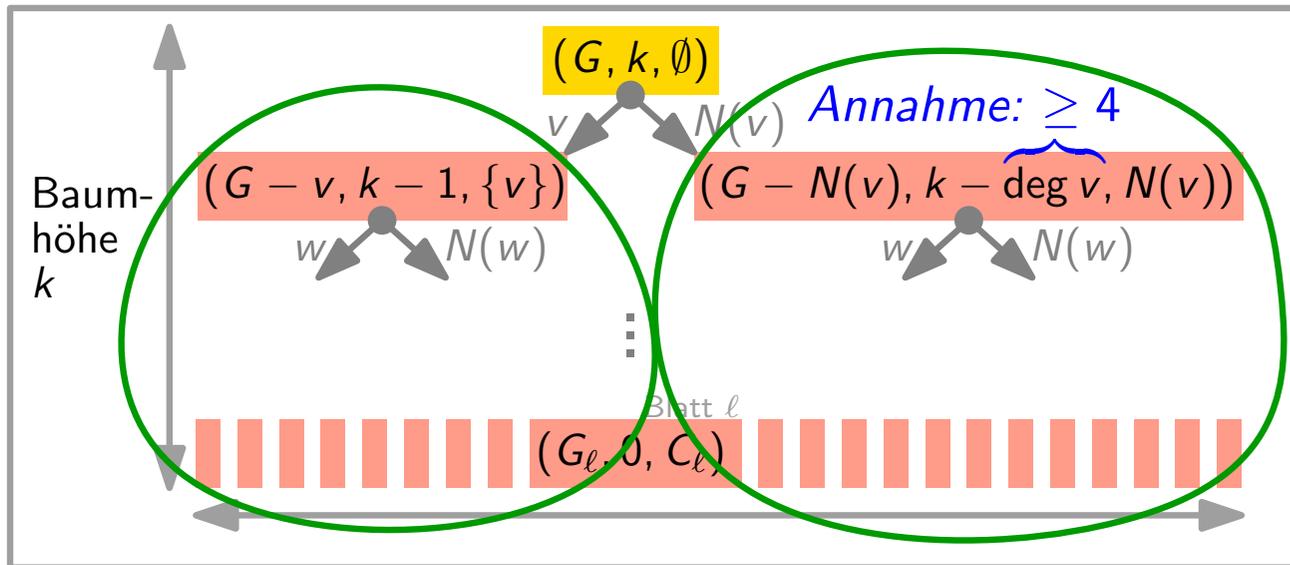
$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1}$$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



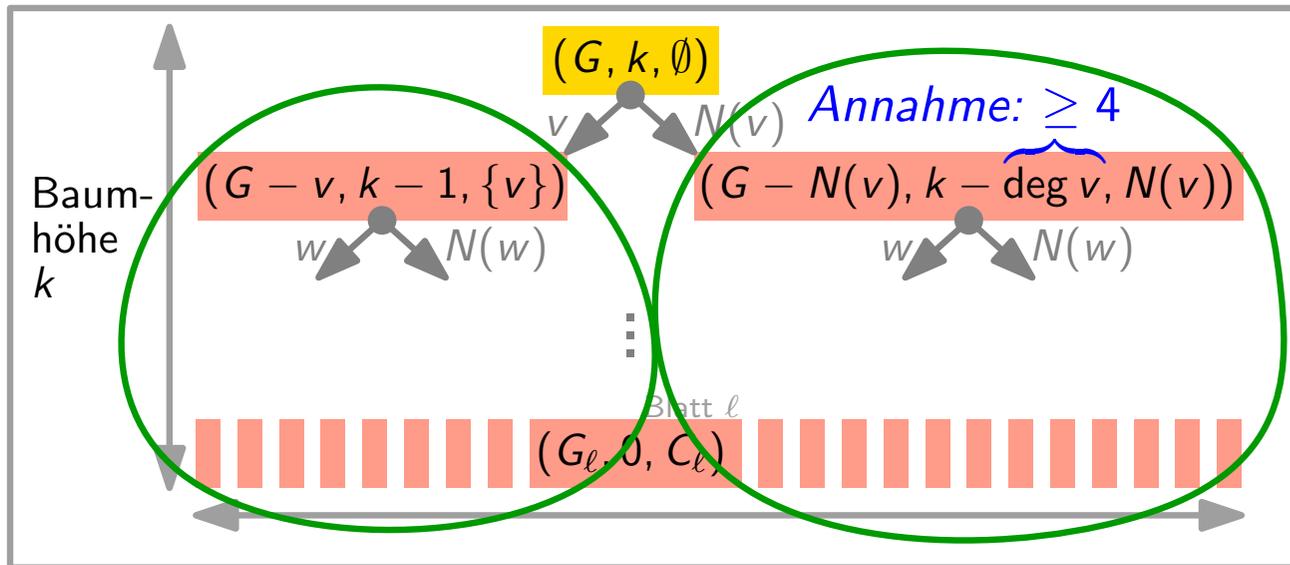
$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1}$$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



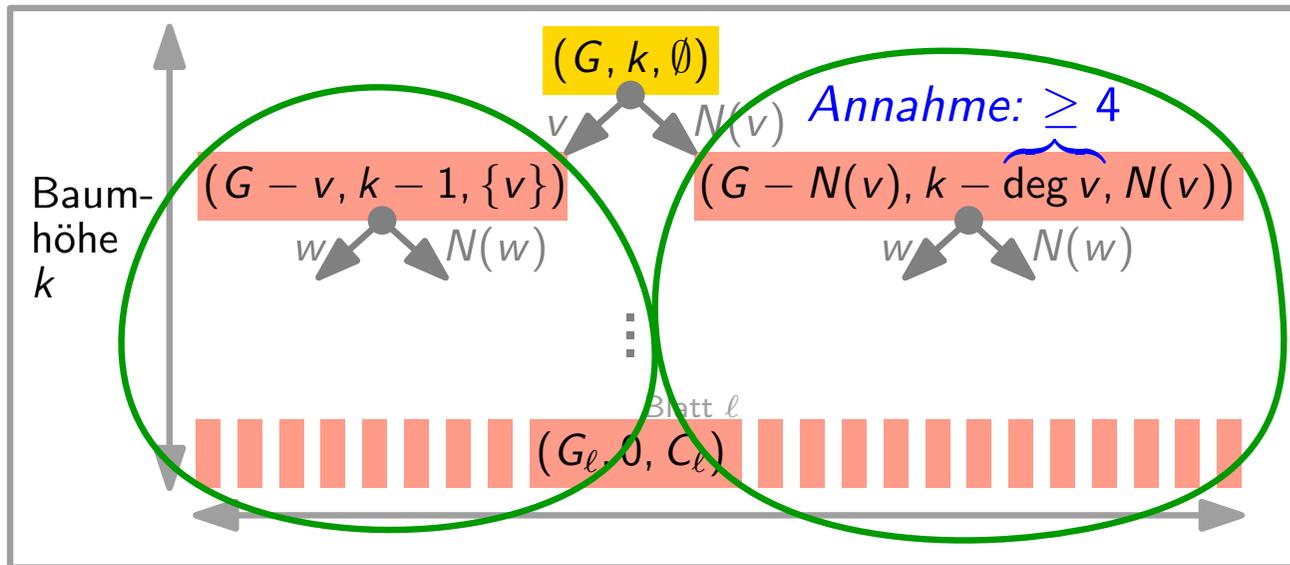
$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-4}}$$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

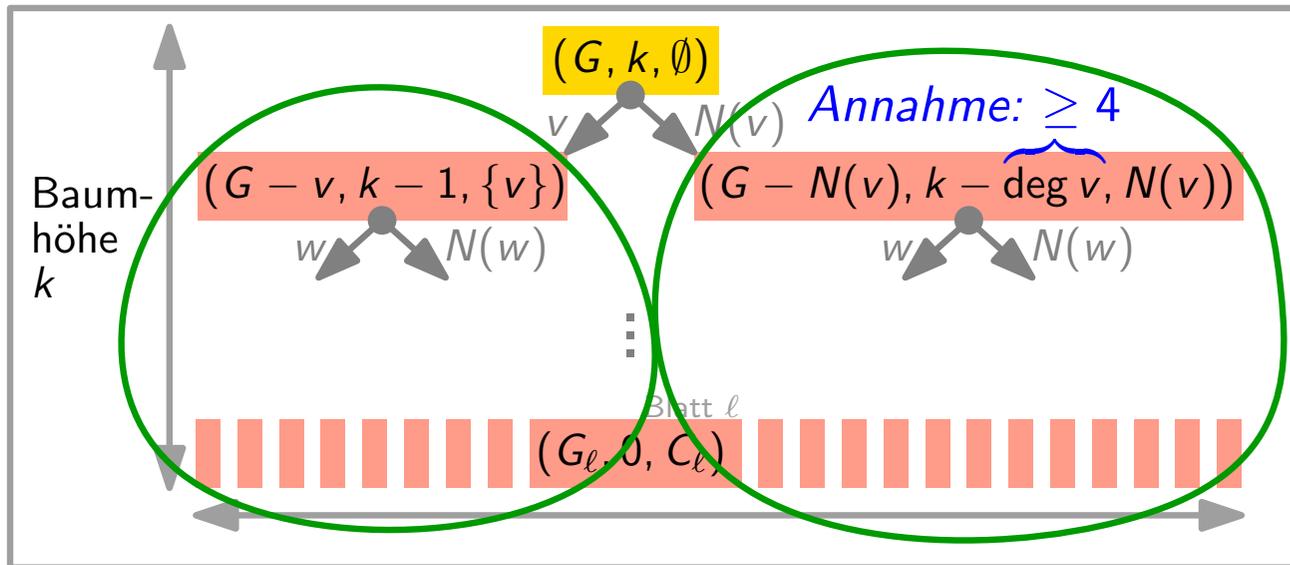
$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1}$$

$$\Rightarrow \text{Charakteristisches Polynom: } z^4 = 1 + z^3$$

$$\cdot \frac{1}{z^{k-4}}$$

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

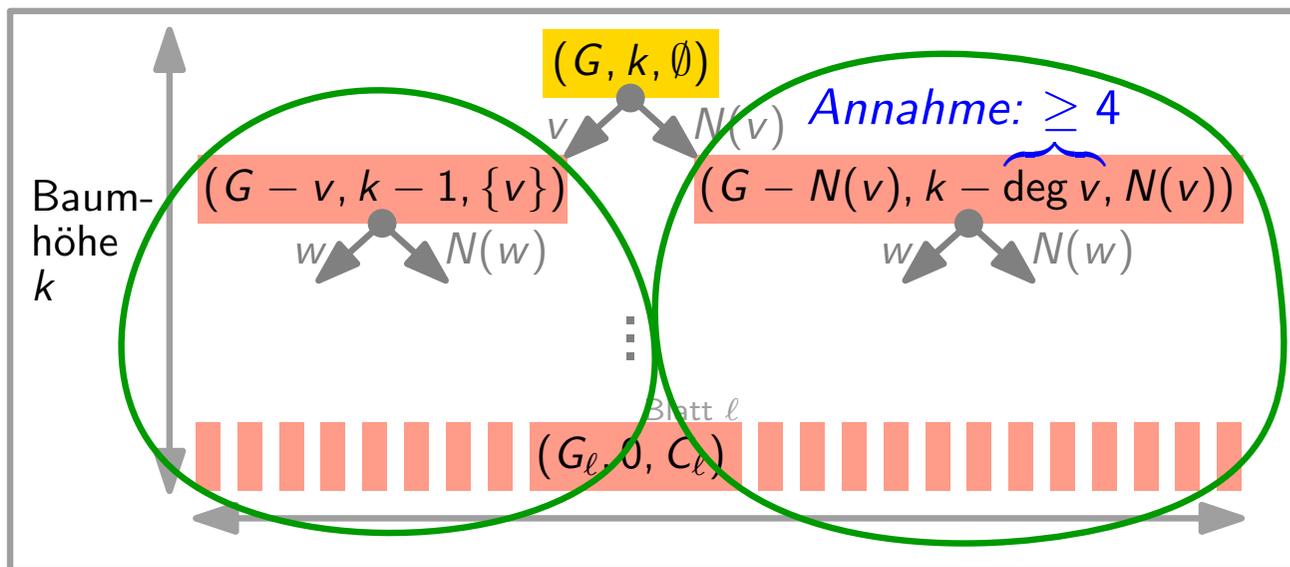
$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-4}}$$

\Rightarrow Charakteristisches Polynom: $z^4 = 1 + z^3$

\Rightarrow Größte positive Lösung:

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

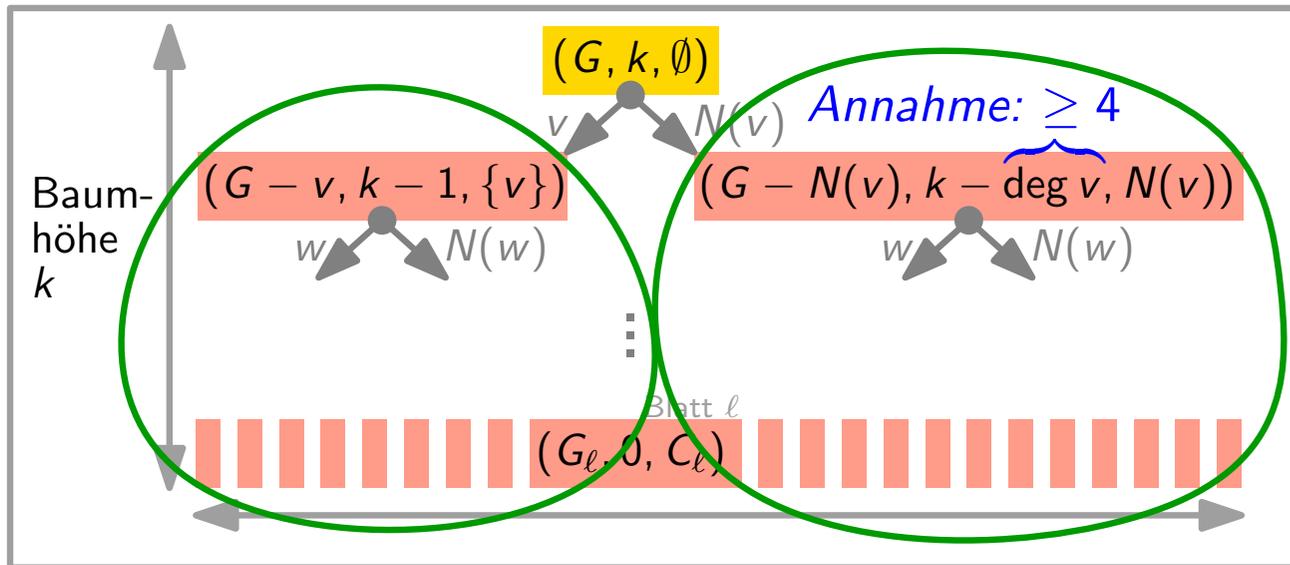
$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-4}}$$

\Rightarrow Charakteristisches Polynom: $z^4 = 1 + z^3$

\Rightarrow Größte positive Lösung: $z \approx 1,38$ (Verzweigungszahl)

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k-4) + T(k-1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-4}}$$

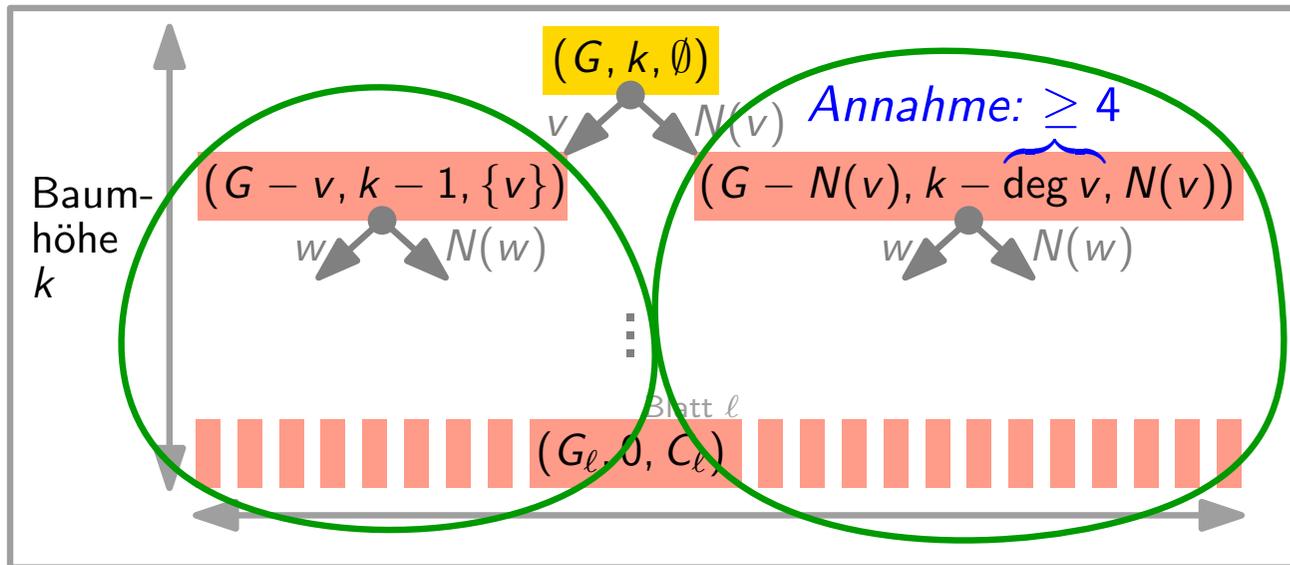
\Rightarrow Charakteristisches Polynom: $z^4 = 1 + z^3$

\Rightarrow Größte positive Lösung: $z \approx 1,38$ (Verzweigungszahl)

$\Rightarrow T(k) \in O(1,38^k)$.

Der Grad-4-Algorithmus

Idee. Verbessere Abschätzung von $|N(v)|$.



$$\Rightarrow T(k) = T(k - 4) + T(k - 1) + 1, \quad T(\leq 4) = \text{const.}$$

Verzweigungsvektor $(4, 1)$

$$\text{Teste } T(k) = z^k - 1 \quad \Rightarrow \quad z^k = z^{k-4} + z^{k-1} \quad \cdot \frac{1}{z^{k-4}}$$

\Rightarrow Charakteristisches Polynom: $z^4 = 1 + z^3$

\Rightarrow Größte positive Lösung: $z \approx 1,38$ (Verzweigungszahl)

$\Rightarrow T(k) \in O(1,38^k)$. **Aber wie stellen wir $\deg v \geq 4$ sicher?**

Kernbildung II

Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Kernbildung II

Bisherige Kernbildung:

Regel K : Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0 : Eliminiere Knoten mit Grad 0

Kernbildung II

Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

Regel 1:

Regel 2:

Kernbildung II

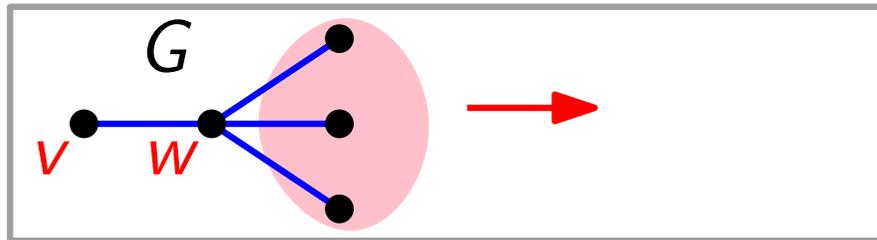
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Regel 2:

Kernbildung II

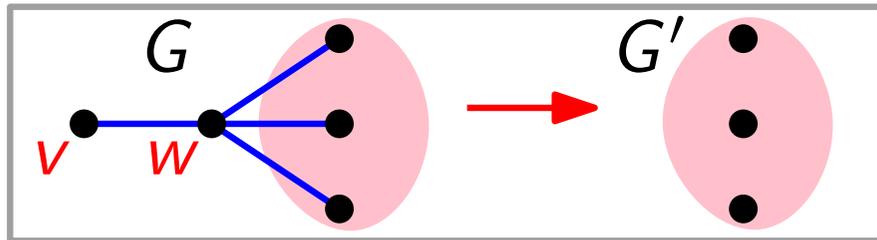
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Regel 2:

Kernbildung II

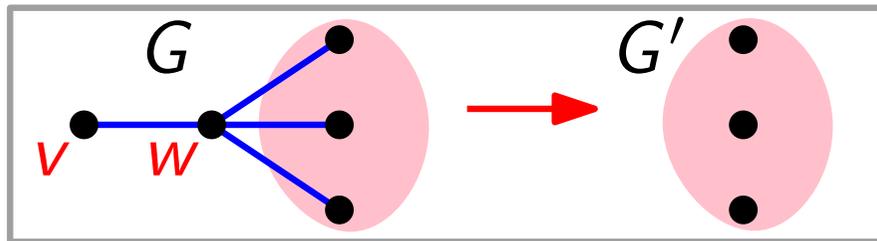
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 0$

Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 1$



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

Regel 2:

Kernbildung II

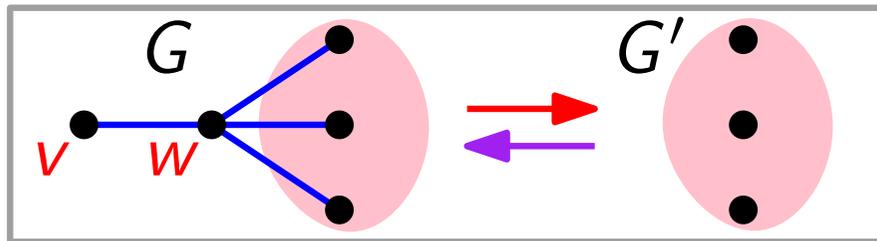
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 0$

Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 1$



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

Regel 2:

Kernbildung II

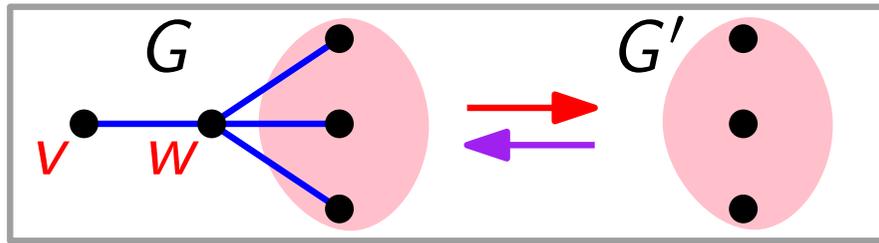
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 0$

Verbesserte Kernbildung:

Regel 1: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 1$



Setze $k' = k - 1$.

Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2:

Kernbildung II

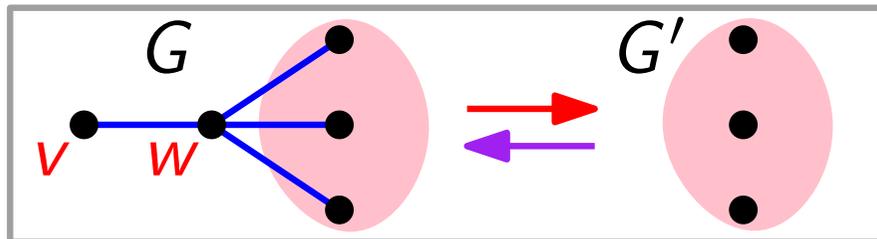
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

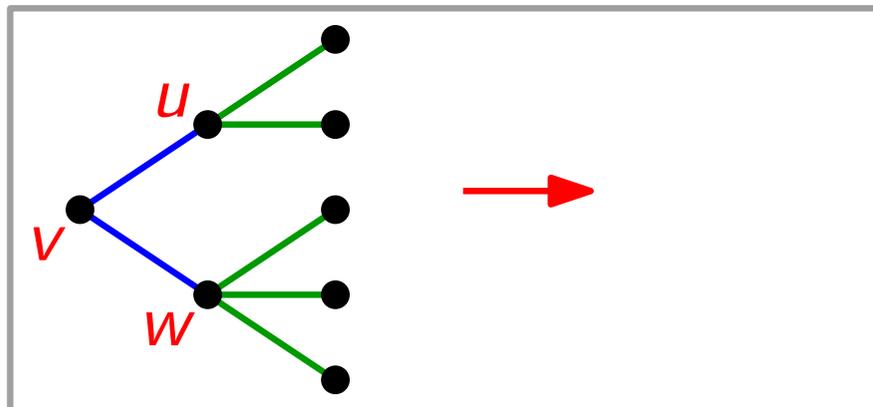
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



Kernbildung II

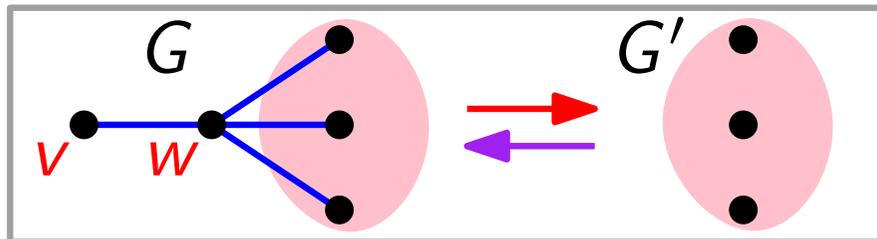
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

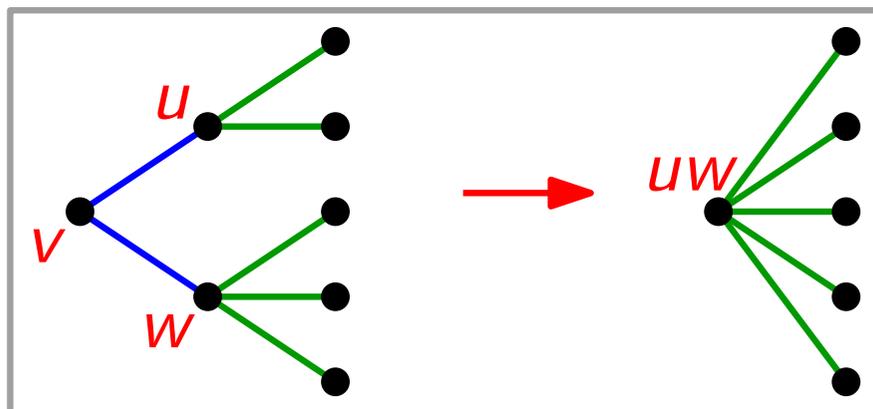
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



Kernbildung II

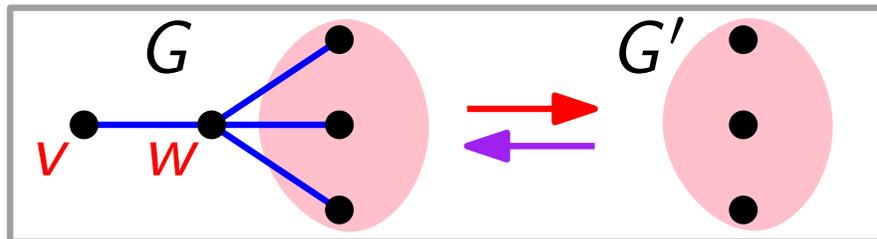
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

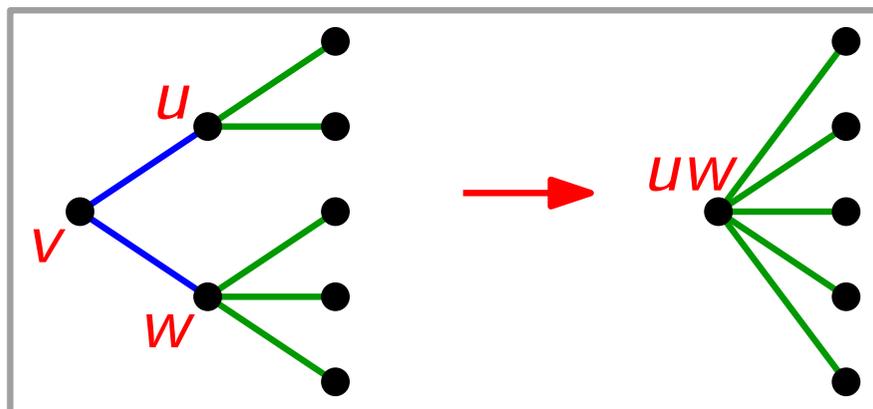
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



Setze $k' = k - 1$.

Kernbildung II

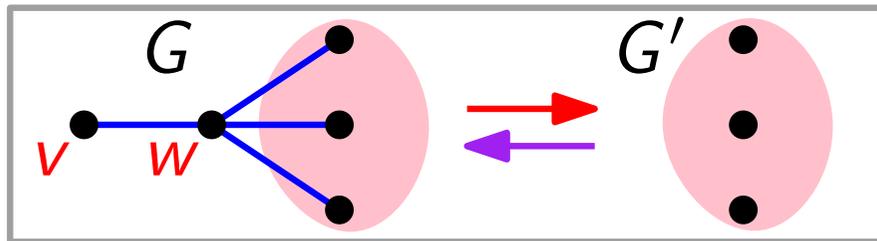
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

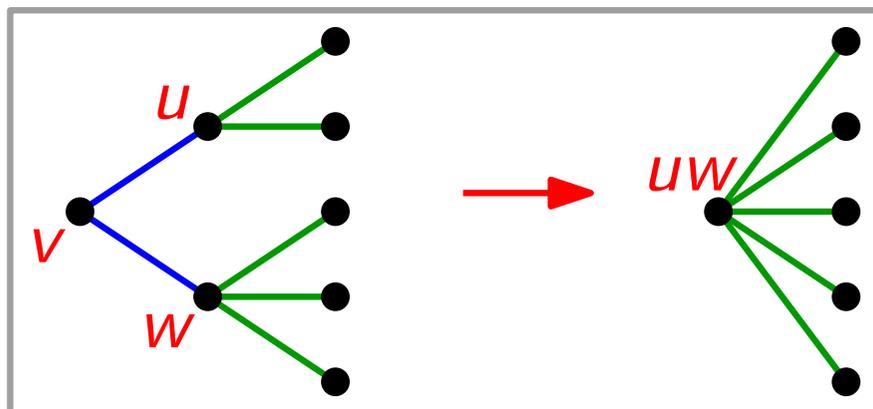
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

Kernbildung II

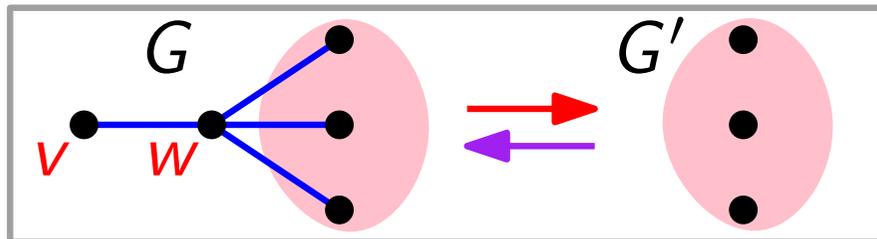
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit Grad $> k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit Grad 0

Verbesserte Kernbildung:

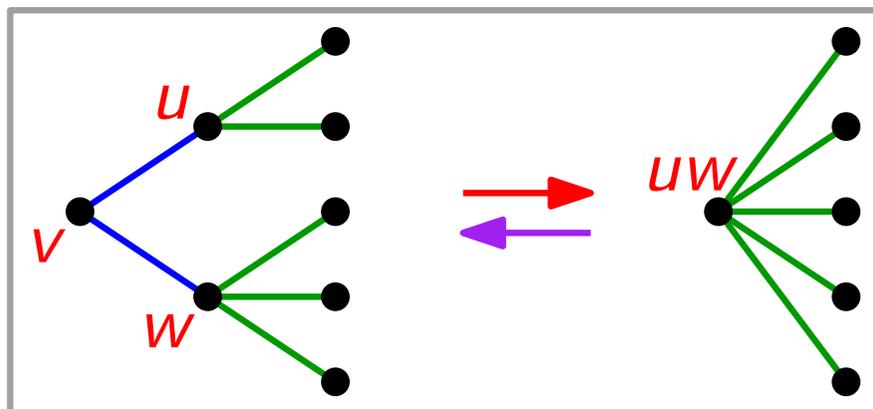
Regel 1: Eliminiere Knoten mit Grad 1



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit Grad 2



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

Kernbildung II

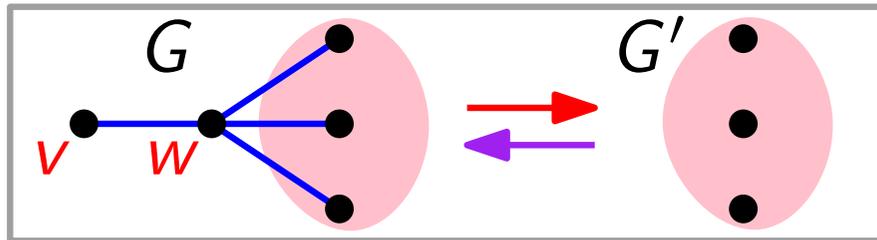
Bisherige Kernbildung:

Regel K: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} > k$

Regel 0: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 0$

Verbesserte Kernbildung:

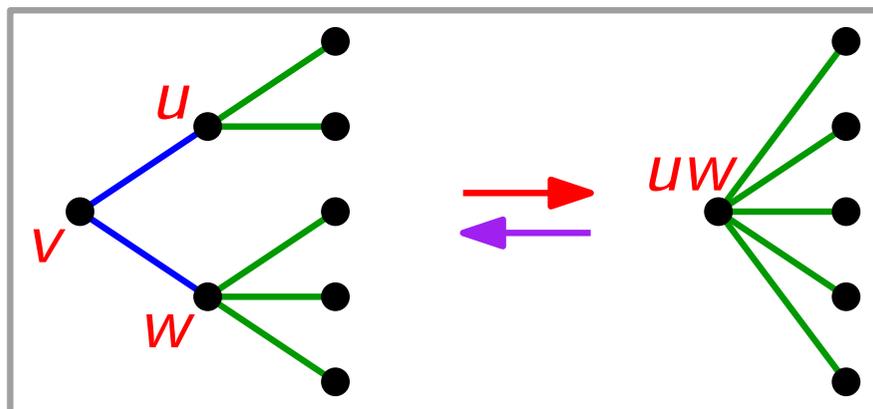
Regel 1: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 1$



Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

$$C = C' \cup \{w\}$$

Regel 2: Eliminiere Knoten mit $\text{Grad} = 2$

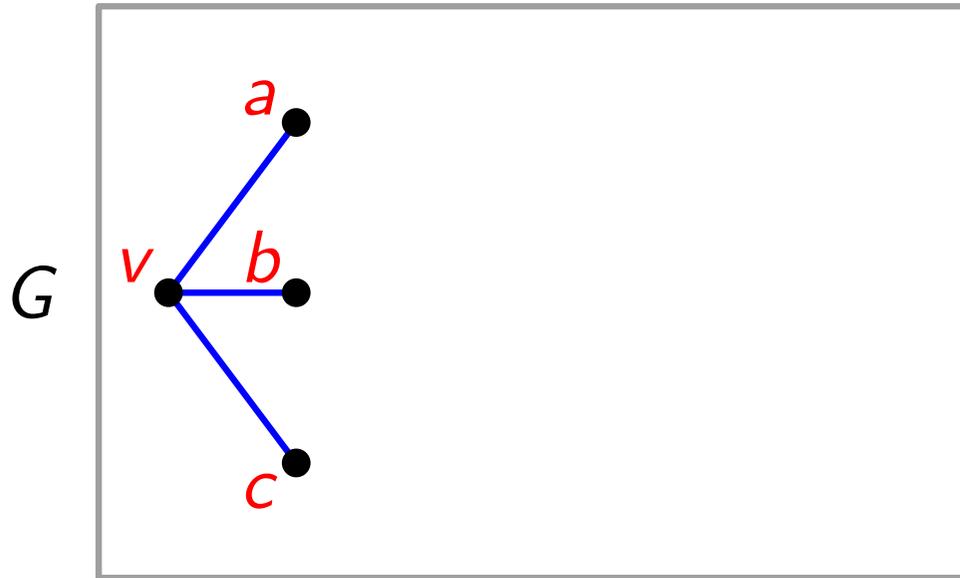


Setze $k' = k - 1$.
Berechne C' .

Falls $uw \in C'$,
nimm u und w in C ,
sonst v .

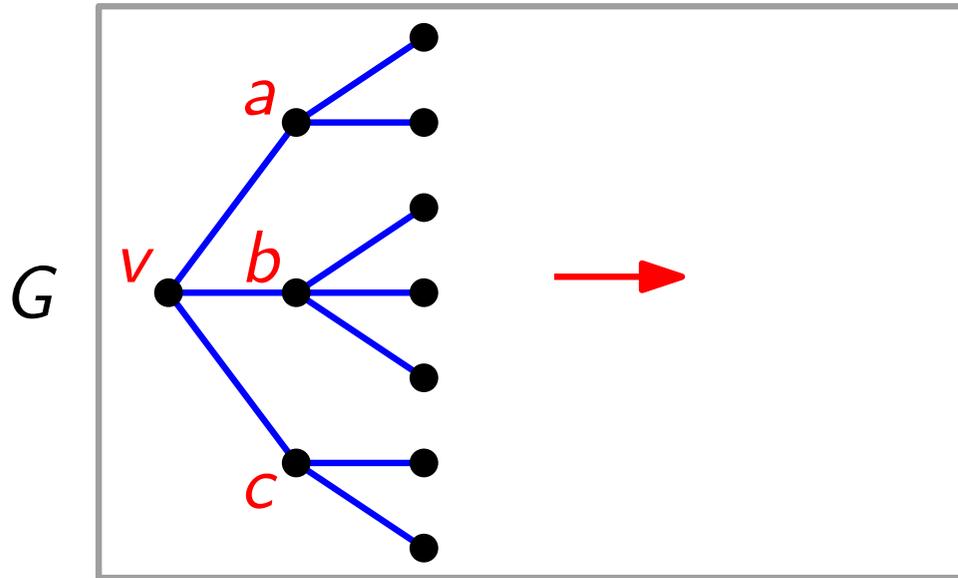
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



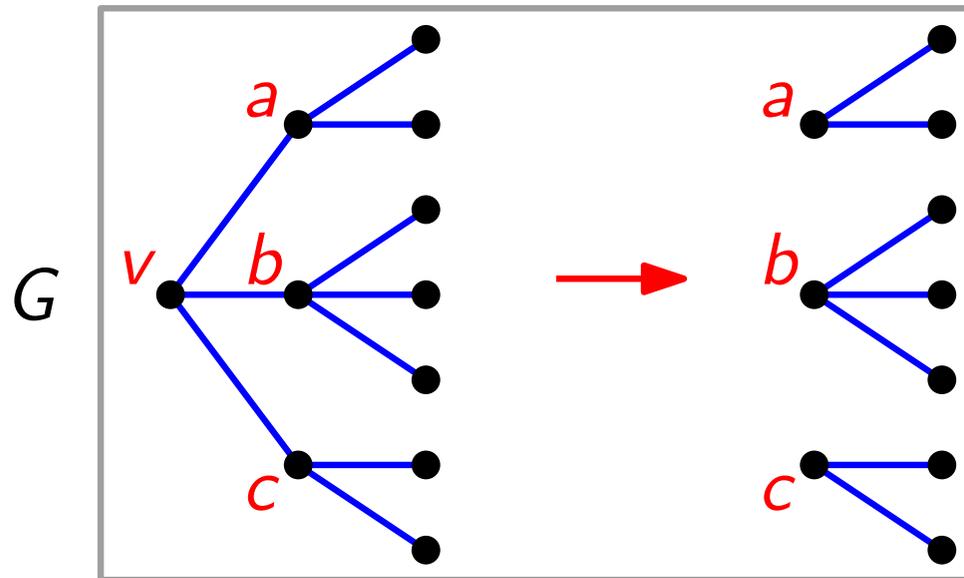
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



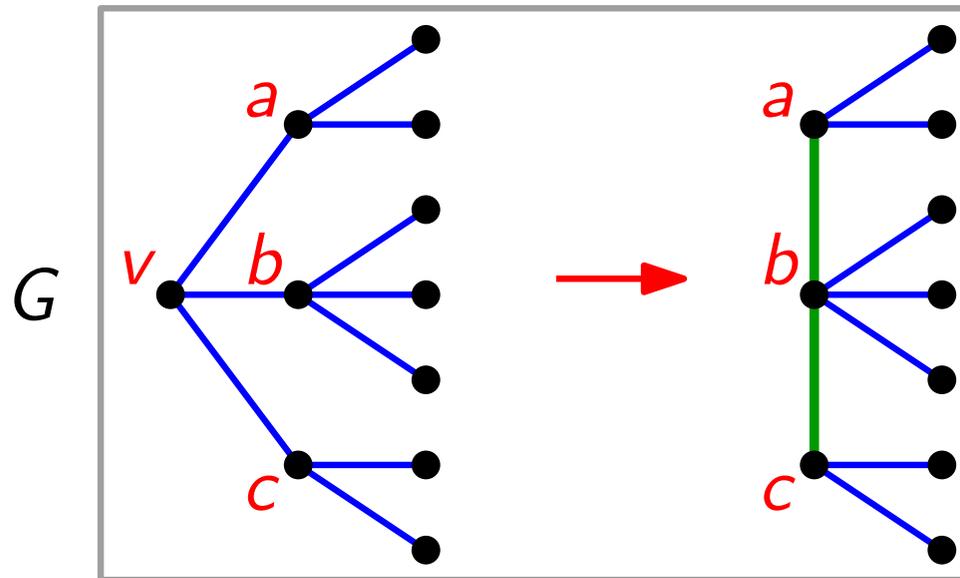
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



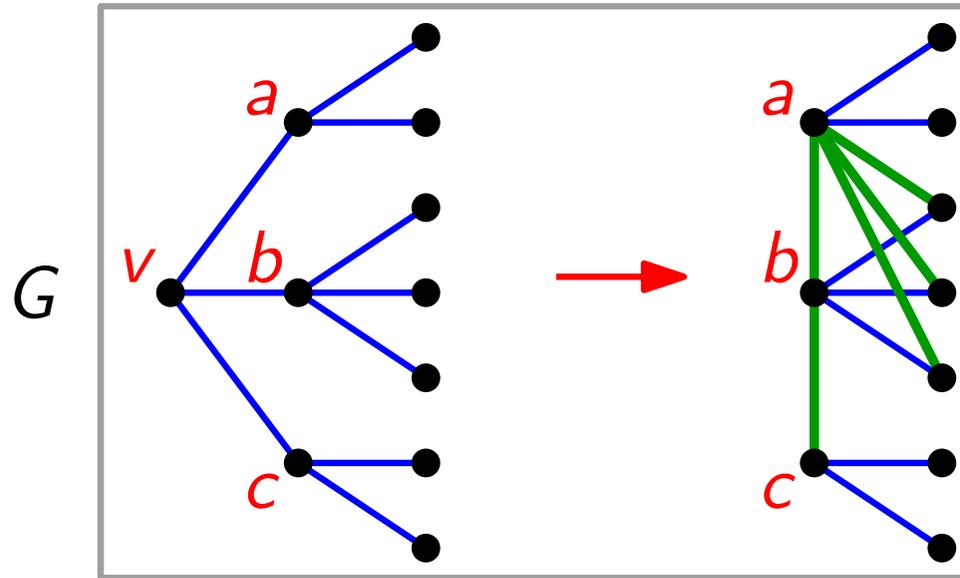
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



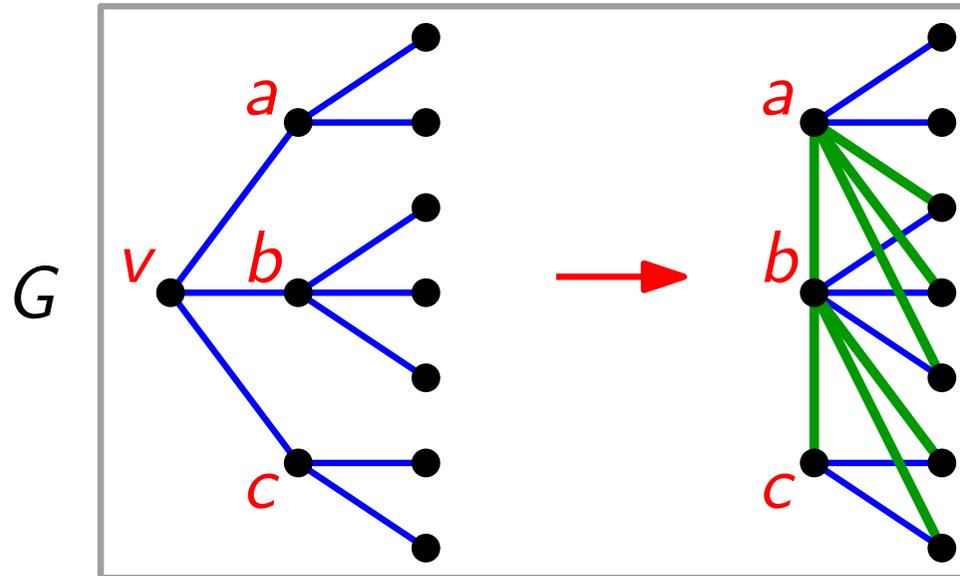
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



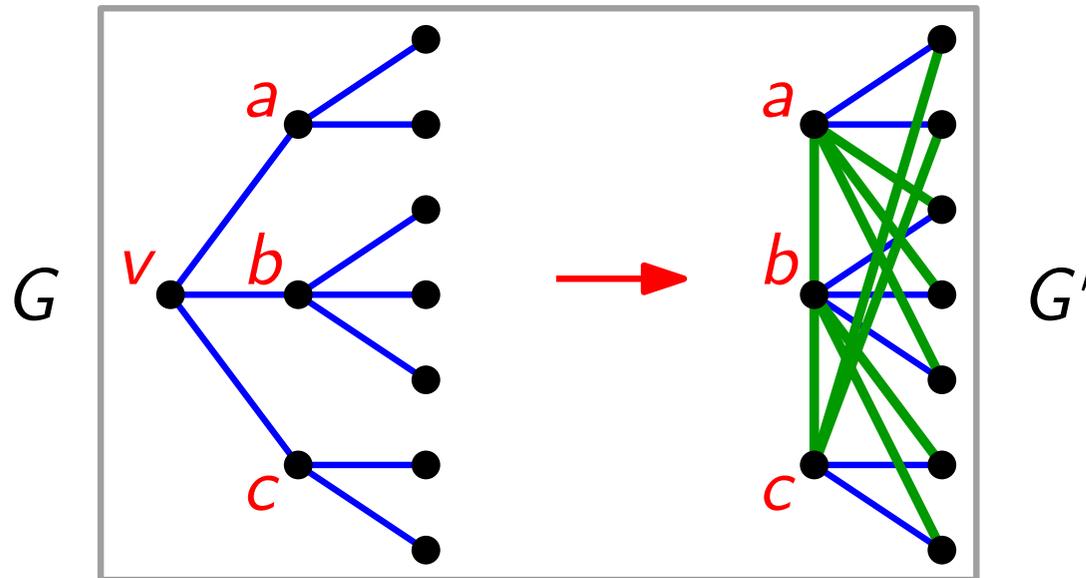
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



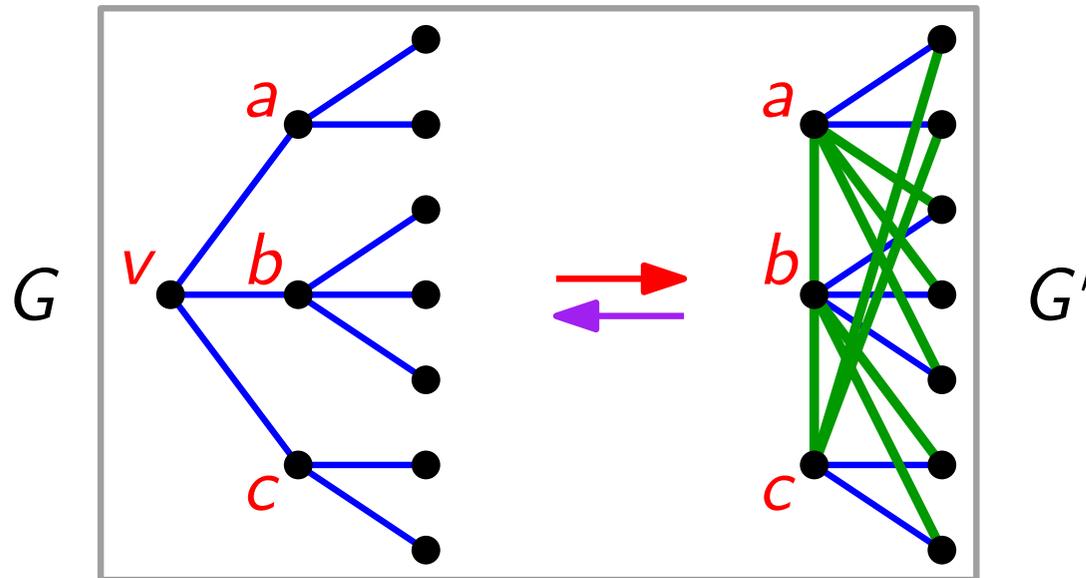
Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.

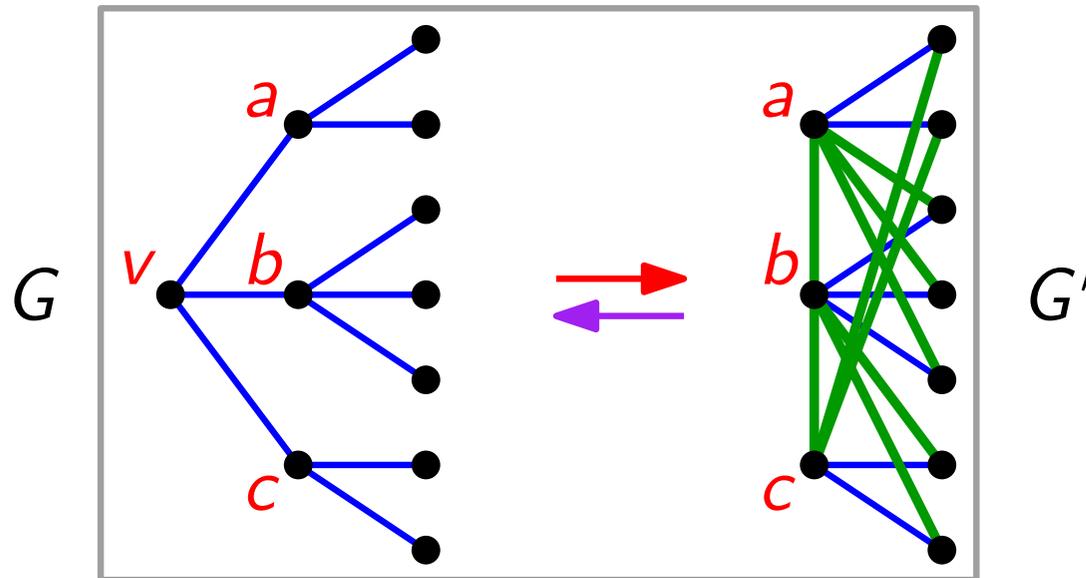


Beh. Es gibt ein k -VC in $G \Leftrightarrow$ Es gibt ein k -VC in G' .

[Beweis ausgelassen]

Regel 3: Eliminiere Knoten mit Grad 3

Regel 3.1: $G[N(v)]$ enthält keine Kanten.



Beh. Es gibt ein k -VC in $G \Leftrightarrow$ Es gibt ein k -VC in G' .

[Beweis ausgelassen]

Regel 3.2: Es gibt Kanten in $G[N(v)]$.

...

Der Grad-4-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

Der Grad-4-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:**

Der Grad-4-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:** $O(\blacksquare + \blacksquare \cdot 1,38^k)$

Vorverarbeitung

Kernbildung in jedem Knoten

Der Grad-4-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:** $O(\boxed{nk} + \boxed{} \cdot 1,38^k)$

Vorverarbeitung

Kernbildung in jedem Knoten

Der Grad-4-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:** $O(nk + k^2 \cdot 1,38^k)$

Vorverarbeitung

Kernbildung in jedem Knoten

Der Grad-4-Algorithmus

Idee: Wende die verbesserte Kernbildung *in jedem Knoten* des Suchbaums *erschöpfend* an!

⇒ **Laufzeit:** $O(\boxed{nk} + \boxed{k^2} \cdot 1,38^k) \subseteq O^*(1,38^k)$

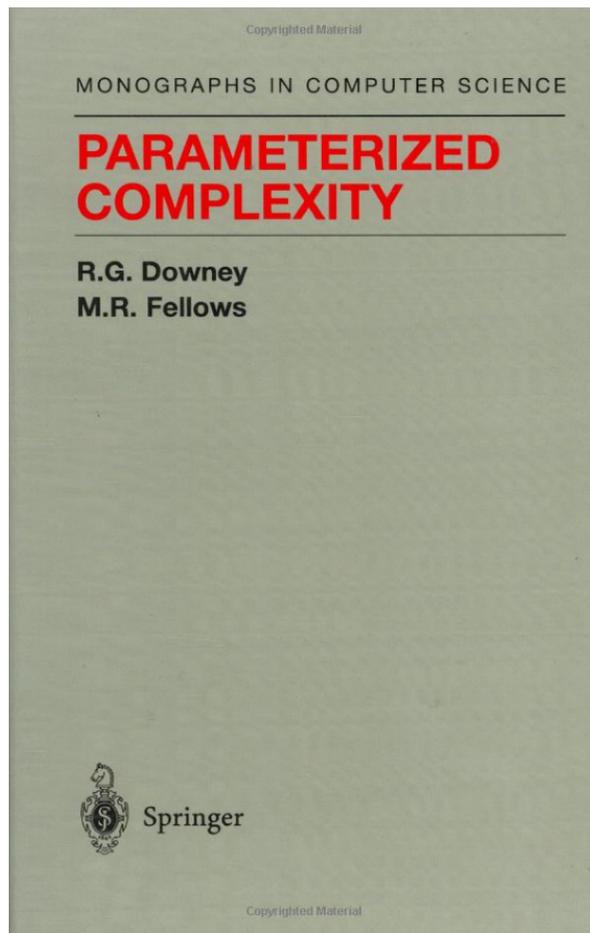
Vorverarbeitung

Kernbildung in jedem Knoten

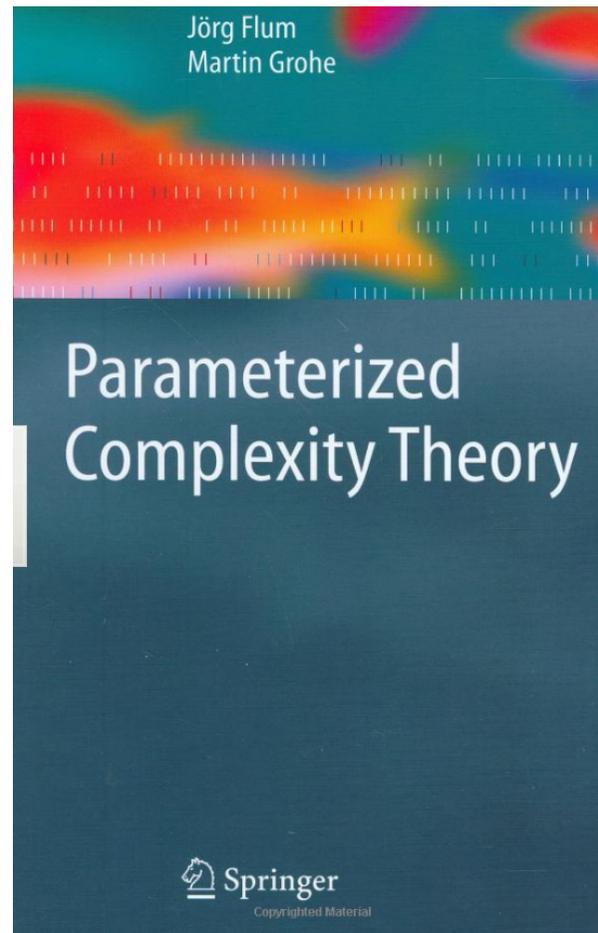
Fazit

- k -VC kann in $O(nk + 1,38^k k^2)$ Zeit gelöst werden.
- Parametrisierte Komplexität =
neuer Werkzeugkasten für schwere Probleme:
Kernbildung, Tabellen, Suchbäume, ...
- Es ist immer sinnvoll, beschränkte Parameter zu identifizieren – FPT nutzt sie!
- Hoffnung:
„natürliches“ Problem $P \in \mathcal{FPT} \Rightarrow f(k)$ erträglich.

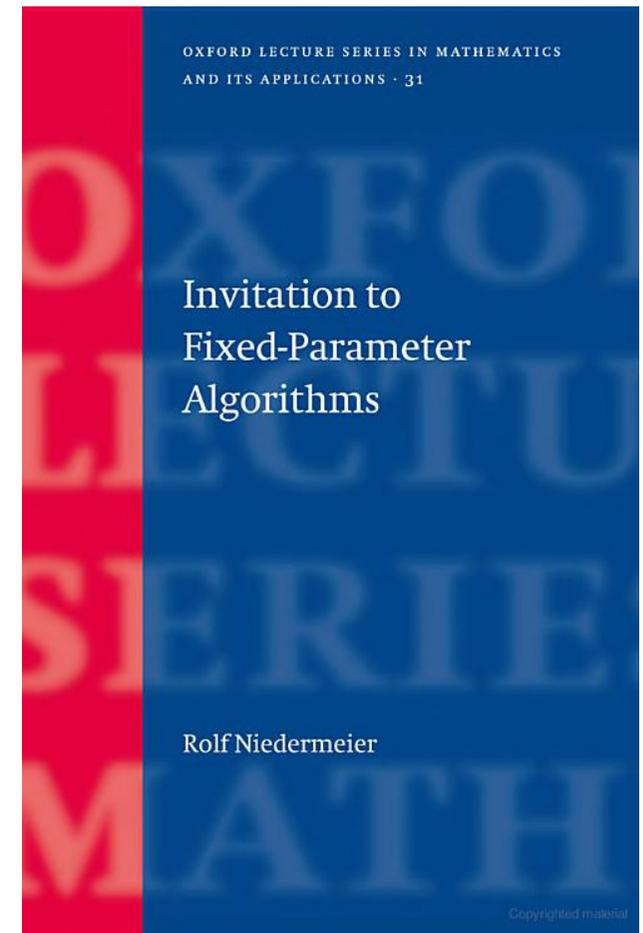
Bücher zum Thema



1999



2006



2006