

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2021

7. Vorlesung

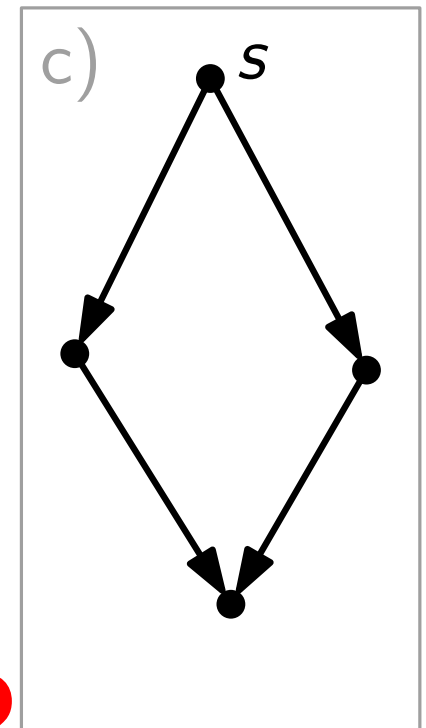
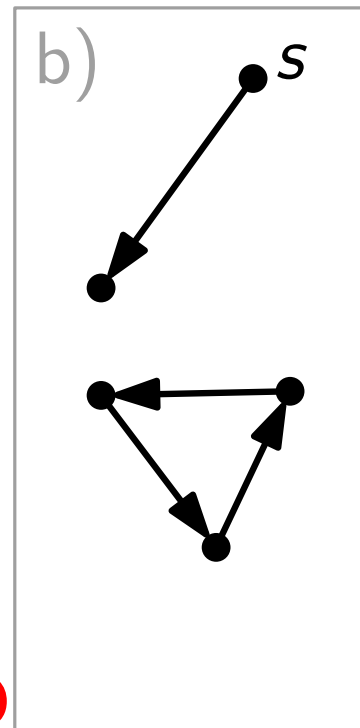
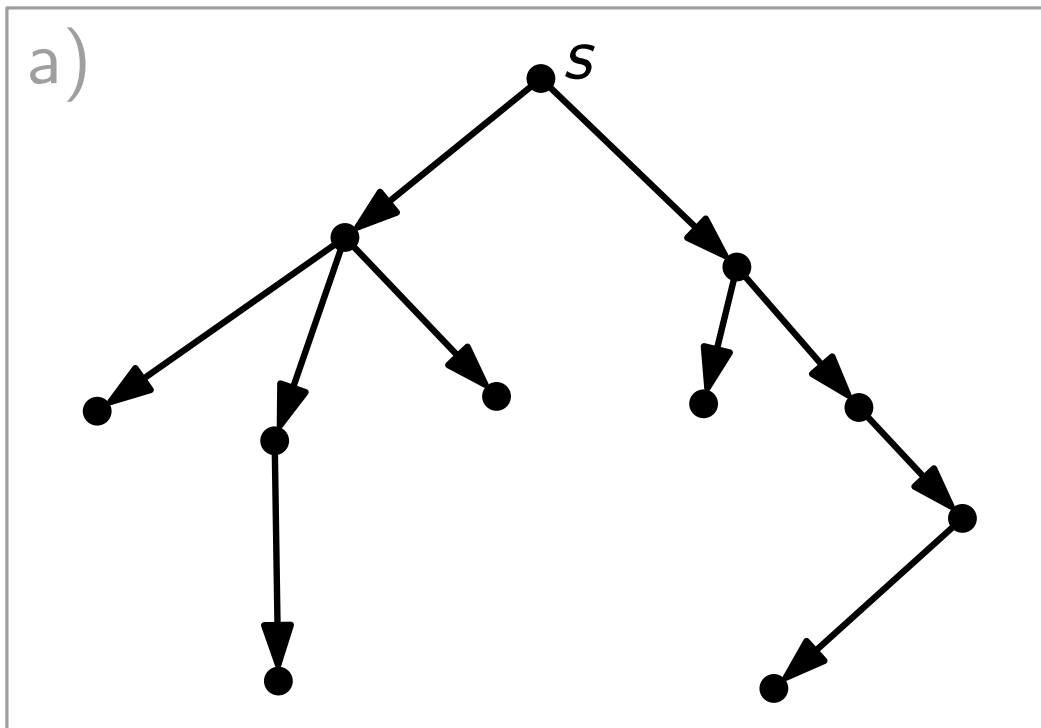
## Wurzelspannbäume

# Wurzelbäume

**Def.** Ein gerichteter Graph  $T = (V, E)$  mit Knoten  $s \in V$  heißt  **$s$ -Wurzelbaum**, wenn

- $T$  azyklisch,
- $\text{indeg}(s) = 0$  und
- $\text{indeg}(v) = 1$  für jeden Knoten  $v \in V \setminus \{s\}$ .

$T$  enthält keinen  
(gerichteten) Kreis.

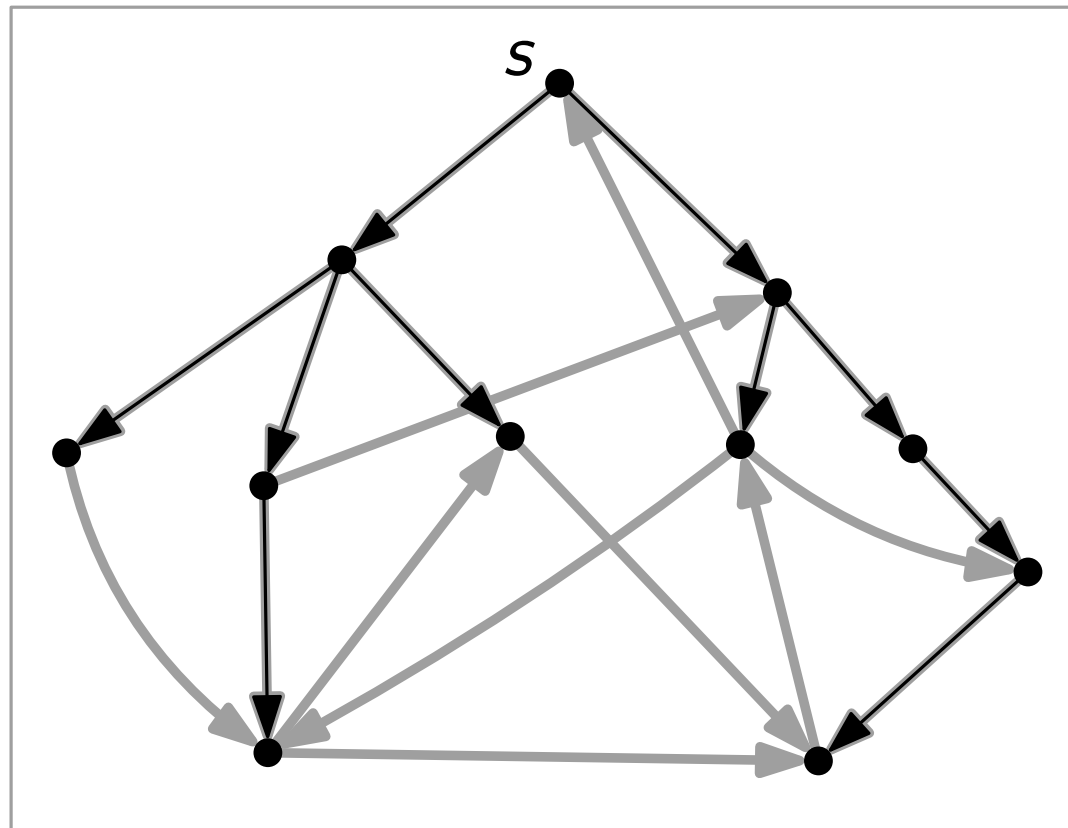


?

?

# Wurzelspannbäume

**Def.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten  $s \in V$ . Ein Teilgraph  $T$  von  $G$  mit Knotenmenge  $V$  heißt  **$s$ -Wurzelspannbaum** von  $G$ , wenn  $T$  ein  $s$ -Wurzelbaum ist.



# Existenz von Wurzelspannbäumen

**Beob.** Sei  $G$  ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten  $s$ .  
 $G$  besitzt einen  $s$ -Wurzelspannbaum  
 $\Leftrightarrow$  jeder Knoten  $v \in V$  ist von  $s$  in  $G$  erreichbar.

Es existiert ein  
 $s$ - $v$ -Pfad in  $G$ .

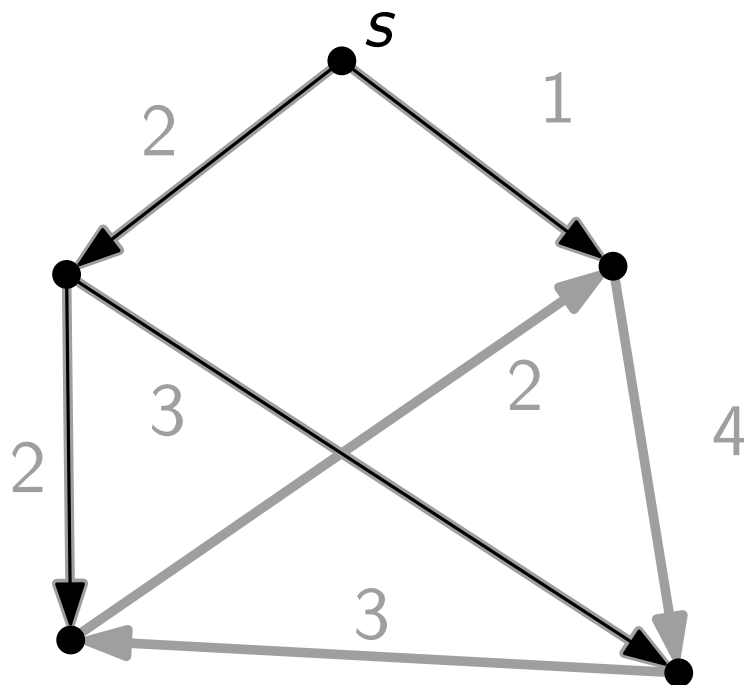
*Beweis.* Siehe Übungsblatt. □

**Bem.** DFS( $s$ ) liefert  $s$ -Wurzelspannbaum  
(sofern es einen gibt).

# Minimale Wurzelspannbäume

**Def.** Gegeben: gerichteter (Multi-) Graph  $G = (V, E)$  mit  $s \in V$  und Kantenkosten  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Gesucht:  $s$ -Wurzelspannbaum  $T = (V, E_T)$  von  $G$  (sofern existent) mit minimalen Kosten  $c(E_T) = \sum_{e \in E_T} c(e)$ .



## Motivation:

Broadcast (Versenden von Information von  $s$  an alle Knoten) in einem Kommunikationsnetzwerk.

## Übungsaufgabe:

Kruskal und Jarník-Prim schlagen i.A. fehl!

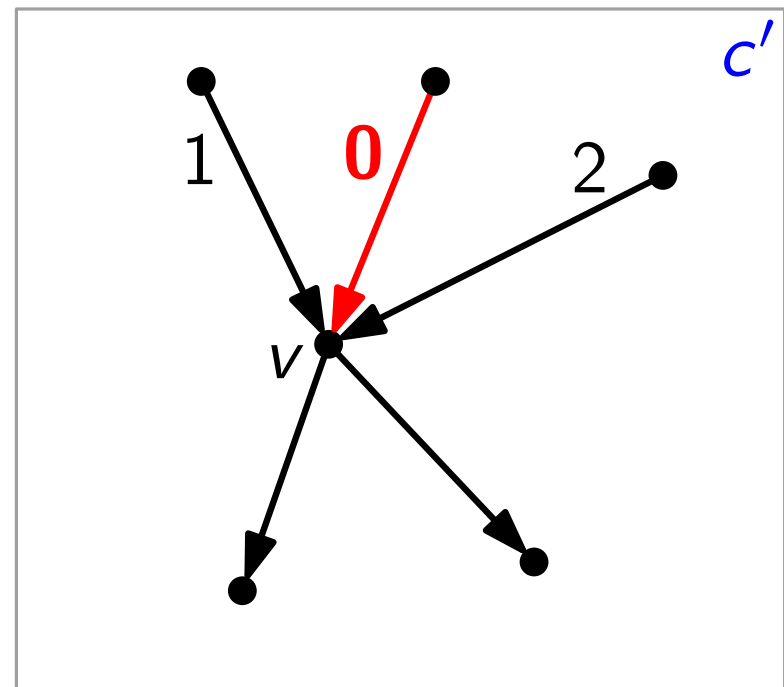
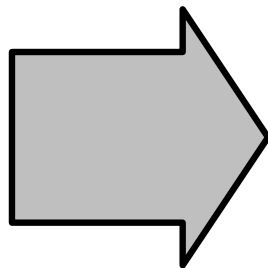
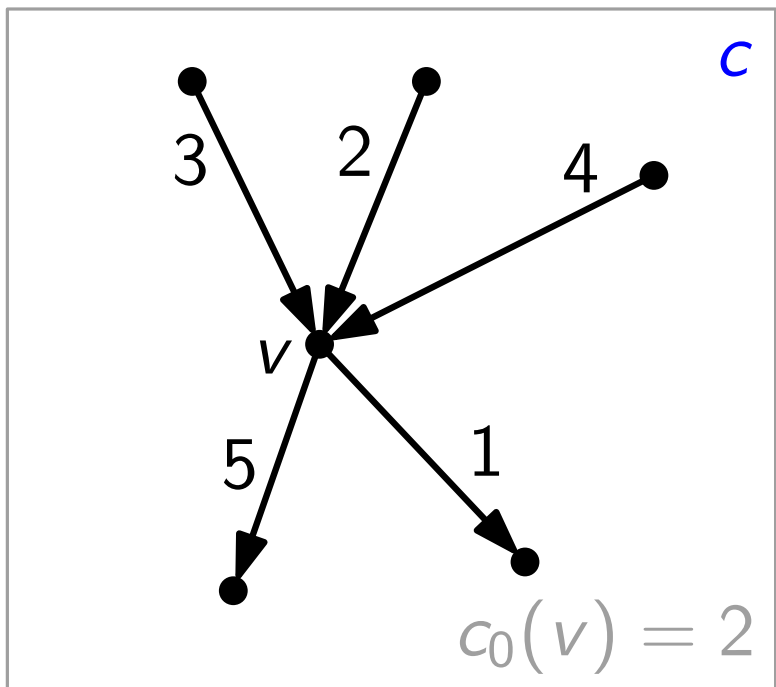
# Kostenmodifikation

Für jedes  $v \neq s$  setze  $c_0(v) := \min\{c(u, v) \mid (u, v) \in E\}$ .

O.B.d.A.  $\text{indeg}(v) \geq 1$  für jedes  $v \neq s$ .

Für jede Kante  $(u, v)$  setze  $c'(u, v) := c(u, v) - c_0(v)$ .

$\Rightarrow$  Jeder Knoten  $v \neq s$  hat eingehende 0-Kante.



# Validität der Kostenmodifikation

**Lem. 1.** Ein  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$  ist genau dann optimal bezüglich  $c$ , wenn er optimal bezüglich  $c'$  ist.

*Beweis.* Für jeden  $s$ -Wurzelspannbaum  $T = (V, E_T)$  gilt

$$c'(E_T) = \sum_{(u,v) \in E_T} (c(u,v) - c_0(v))$$

indeg $_T(s) = 0$   
und für alle  $v \neq s$   
indeg $_T(v) = 1$

$$= \sum_{(u,v) \in E_T} c(u,v) - \sum_{v \in V \setminus s} c_0(v)$$

$$= c(E_T) - \sum_{v \in V \setminus s} c_0(v)$$

unabhängig von  $T$ !



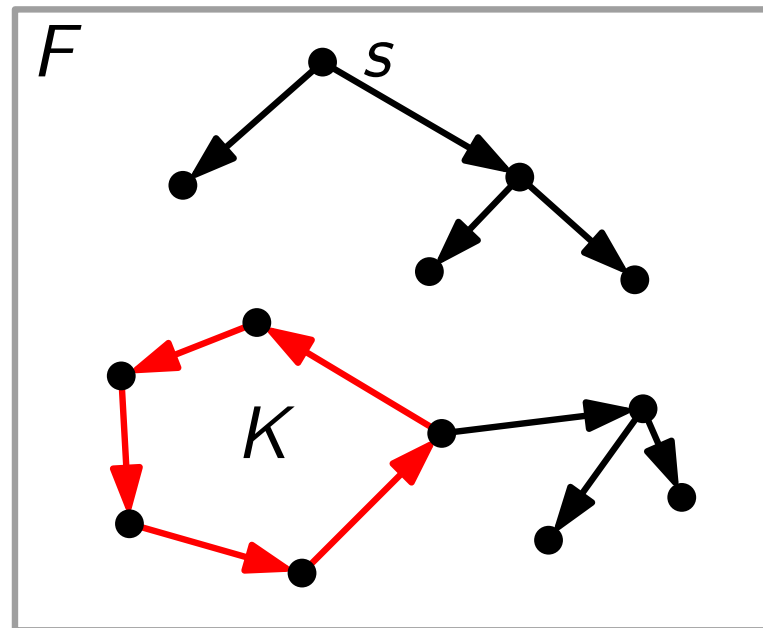
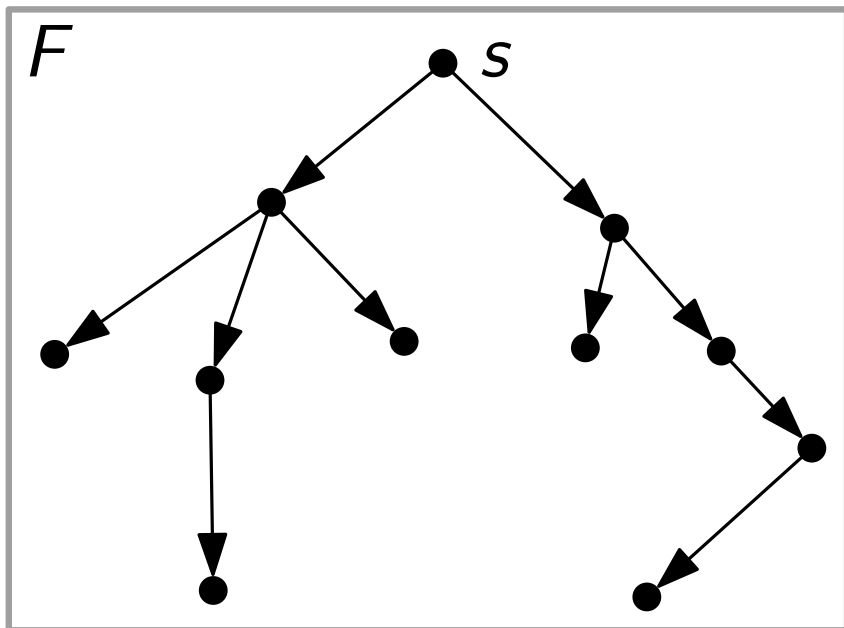
# Ein Versuch

Wähle für jedes  $v \neq s$  eine eingehende 0-Kante  
 $\rightsquigarrow$  Teilgraph  $F = (V, E_F)$  von  $G$

Falls  $F$  azyklisch  $\Rightarrow F$  ist  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ !

**Beachte:**  $F$  ist *optimal* bzgl.  $c'$  (und somit auch bzgl.  $c$ ),  
 da  $c'(F) = 0$ .

Problem: **Was tun, wenn  $F$  einen Kreis  $K$  enthält?**

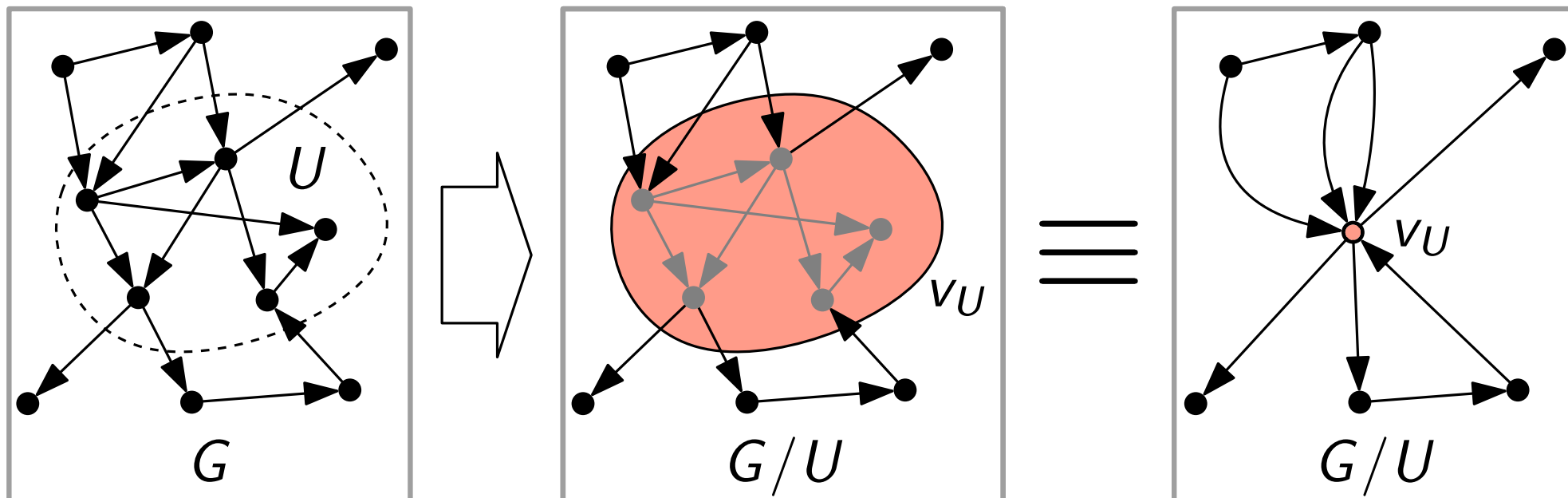




# Kontraktion

Betrachte gerichteten (Multi-) Graphen  $G = (V, E)$  mit Kantenkosten  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Sei  $U \subseteq V$ .

*Kontraktion* von  $U$ : Ersetze  $G[U]$  durch neuen Knoten  $v_U$ .  
Kantenkosten werden auf  $G/U$  vererbt.



# Expansion

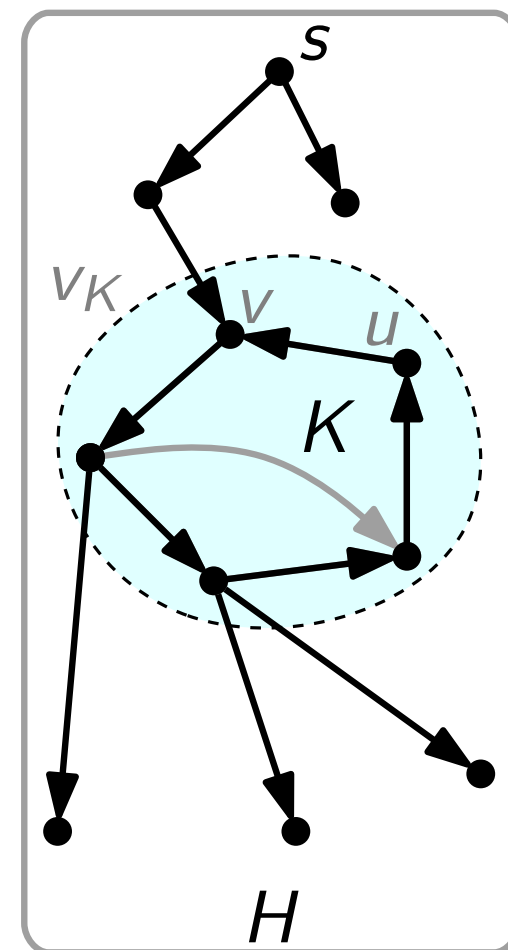
**Lem. 2.** Sei  $K$  Kreis in  $F$  und  $\tilde{T}$   $s$ -Wurzelspannbaum von  $G/K$ .  
Dann gibt es einen  $s$ -Wurzelspannbaum  $T$  von  $G$  mit  
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in  $\tilde{T}$  korrespondiert zu Kante in  $G$ .

$\rightsquigarrow$  Teilgraph  $H$  von  $G$  mit Knotenmenge  $V$ .

Füge Kreis  $K$  zu  $H$  hinzu.



# Expansion

**Lem. 2.** Sei  $K$  Kreis in  $F$  und  $\tilde{T}$   $s$ -Wurzelspannbaum von  $G/K$ .  
Dann gibt es einen  $s$ -Wurzelspannbaum  $T$  von  $G$  mit  
$$c'(T) \leq c'(\tilde{T}).$$

*Beweis.*

Jede Kante in  $\tilde{T}$  korrespondiert zu Kante in  $G$ .

$\rightsquigarrow$  Teilgraph  $H$  von  $G$  mit Knotenmenge  $V$ .

Füge Kreis  $K$  zu  $H$  hinzu.  $\Rightarrow c'(H) = c'(\tilde{T})$ .

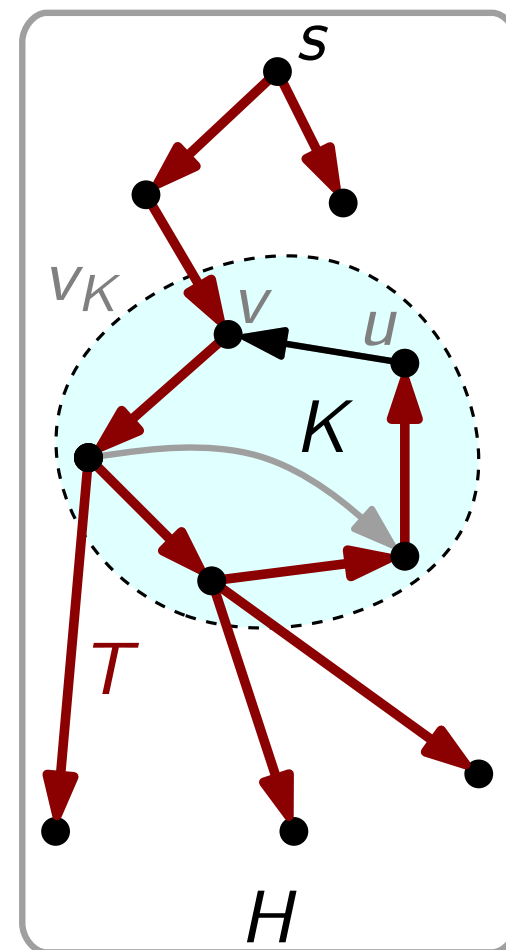
Jeder Knoten in  $V$  ist in  $H$  von  $s$  erreichbar.

Ermittle  $s$ -Wurzelspannbaum  $T$  ( $= H - uv$ ) von  $H$ .

$T$  ist  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ .

$$c'(T) \leq c'(H) = c'(\tilde{T})$$

□



# Algorithmus

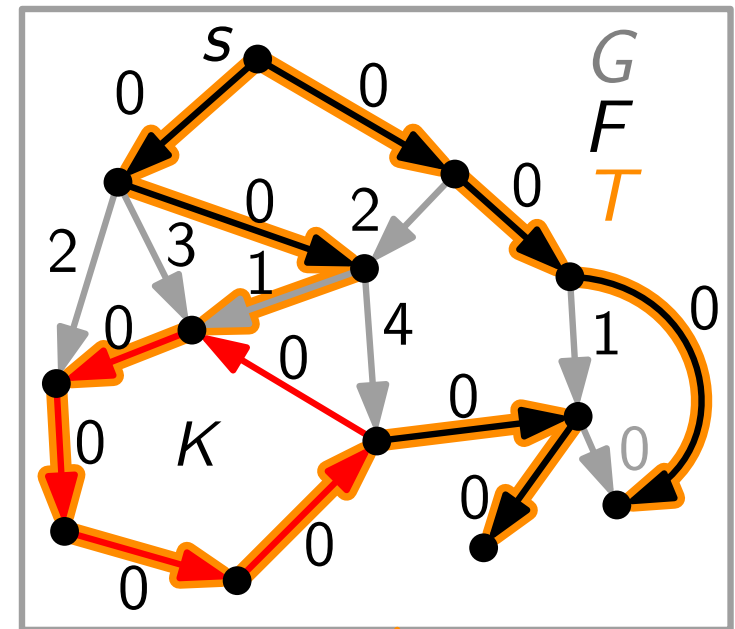
[Edmonds 1967]

- Berechne modifizierte Kantenkosten  $c'$ .
- Bestimme Teilgraph  $F$ .
- Falls  $F$  azyklisch, gib  $F$  zurück.
- Ansonsten ermittle Kreis  $K$  in  $F$ .
- Kontrahiere  $G$  zu  $G/K$ .
- Wende Algorithmus rekursiv auf  $(G/K, c')$  an  
 $\rightsquigarrow$   $s$ -Wurzelspannbaum  $\tilde{T}$  für  $G/K$ .
- Expandiere  $\tilde{T}$  zu  $s$ -Wurzelspannbaum  $T$  von  $G$ .  
(nach Lemma 2!)
- Gib  $T$  zurück.

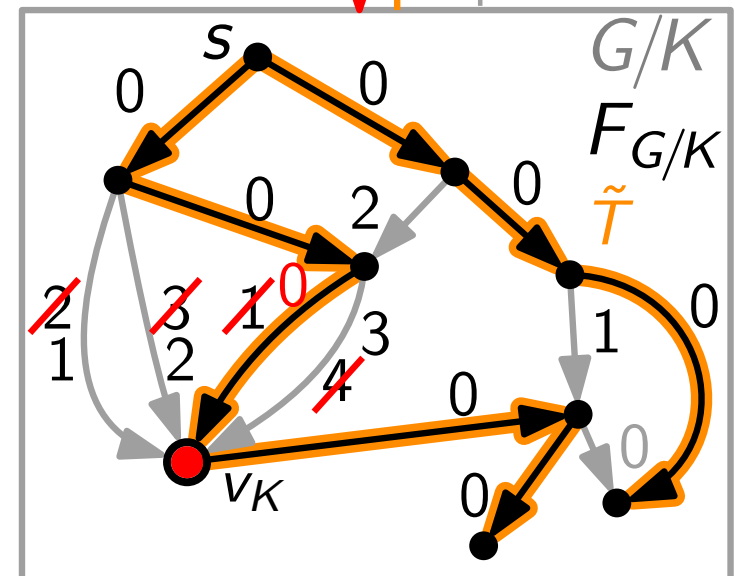
– Optimalität?  
 – Laufzeit?



Jack R. Edmonds  
 \*1934



kontrahiere  $K$   $\downarrow \uparrow$  expandiere  $\tilde{T}$



# Laufzeit

Algorithmus terminiert spätestens, wenn  $|V| \leq 2$ .

In jeder Rekursionsstufe verringert sich die Knotenanzahl um mindestens 1.  $\Rightarrow O(V)$  rekursive Aufrufe.

Kostenmodifikation, Kreisbestimmung, Kontraktion und Expansion dauern jeweils  $O(E)$  Zeit.

**Satz.** Angewandt auf einen gewichteten (Multi-) Graphen  $G = (V, E)$ , läuft Edmonds' Algorithmus in  $O(VE)$  Zeit.

# Optimalität

**Lem. 3.** Sei  $K$  Kreis in  $F$  und  $T$   $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ .  
Dann gibt es einen  $s$ -Wurzelspannbaum  $\tilde{T}$  von  $G/K$   
mit  $c'(\tilde{T}) \leq c'(T)$ .

**Beweis.** Setze  $H := T/K$ .

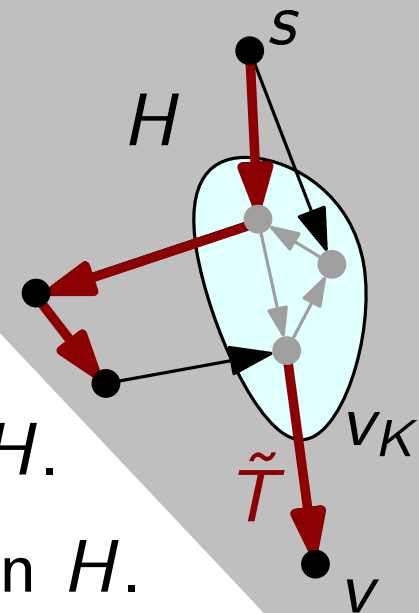
$H$  ist Teilgraph von  $G/K$  mit  $c'(H) \leq c'(T)$ .

- Jeder  $s$ - $v$ -Weg ( $v \in V \setminus K$ ) in  $T$  wird zu  
(nicht notwendigerweise einfachem)  $s$ - $v$ -Weg in  $H$ .
- Jeder  $s$ - $u$ -Weg ( $u \in K$ ) in  $T$  wird zu  $s$ - $v_K$ -Weg in  $H$ .

$\Rightarrow$  Jeder Knoten in  $G/K$  ist in  $H$  von  $s$  erreichbar.

Betrachte (beliebigen)  $s$ -Wurzelspannbaum  $\tilde{T}$  von  $H$ .

$\Rightarrow \tilde{T}$  ist auch  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G/K$   
und es gilt  $c'(\tilde{T}) \leq c'(H) \leq c'(T)$ .



□

# Korrektheit

**Satz.** Edmonds' Algorithmus berechnet einen minimalen  $s$ -Wurzelspannbaum.

**Beweis.** Falls  $F$  azyklisch ist, so ist der Algorithmus korrekt. ✓  
Ansonsten: Vollständige Induktion über Knotenzahl  $n$ .

Anfang ( $n = 1$ ):  $V = \{s\}$ ,  $G$  azyklisch. ✓

Schritt ( $n > 1$ ):

Annahme: Algo. korrekt für alle Graphen mit  $k < n$  Knoten.

Sei  $K$  Kreis in  $F$  und  $T^*$  min.  $s$ -Wurzelspannbaum von  $G$ .

Lem. 3  $\Rightarrow \exists$   $s$ -WSB  $\tilde{T}$  von  $G/K$  mit  $c'(\tilde{T}) \leq c'(T^*) =: \text{OPT}'$

IA  $\Rightarrow$  Algorithmus liefert optimalen  $s$ -WSB  $\hat{T}$  von  $G/K$ .

$\Rightarrow c'(\hat{T}) \leq c'(\tilde{T})$ .

Lem. 2 liefert  $s$ -WSB  $T$  von  $G$  mit  $c'(T) \leq c'(\hat{T}) \leq \text{OPT}'$ .

$\Rightarrow T$  ist optimal bzgl.  $c'$  und somit bzgl.  $c$ . ✓ □