

# Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2021

5. Vorlesung

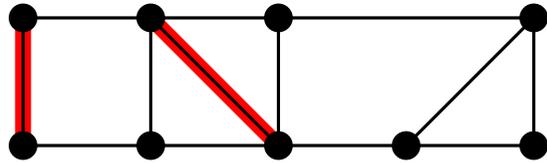
## Matchings / Paarungen

– Kombinatorische Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems –

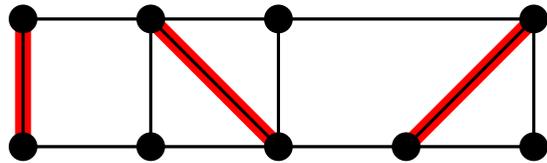
# Paarungen (Matchings)

## Def.

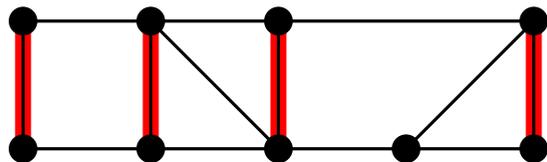
Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.



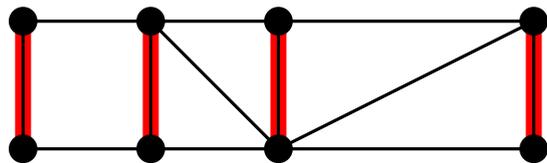
$M \subseteq E$  ist eine **Paarung** (engl. *matching*), wenn je zwei Kanten in  $M$  keinen gleichen Endpunkt haben.



Falls für jede Kante  $e \notin M$  gilt, dass  $M \cup \{e\}$  keine Paarung ist, so ist  $M$  **nicht erweiterbar** (engl. *maximal*).

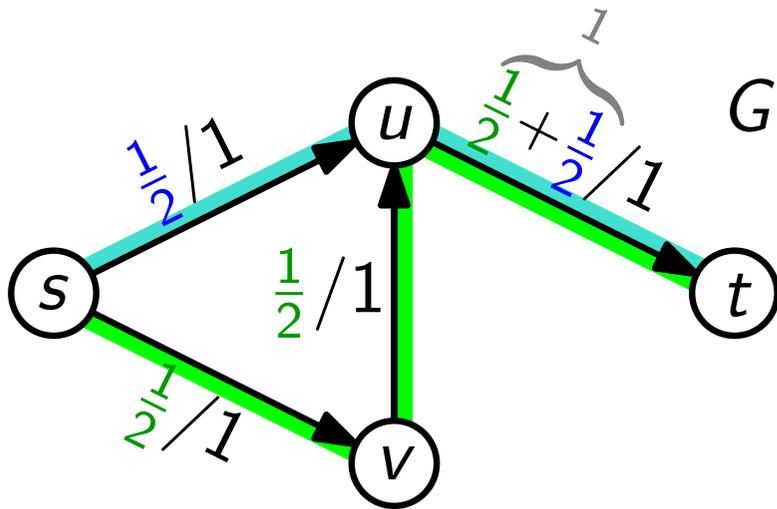


Falls für alle Paarungen  $M'$  in  $G$  gilt, dass  $|M'| \leq |M|$ , so ist  $M$  eine **größte Paarung** (engl. *maximum*).



Falls jeder Knoten in  $G$  durch  $M$  gepaart ist, so ist  $M$  eine **perfekte Paarung** (engl. *perfect*).

# Ganzzahligkeitssatz



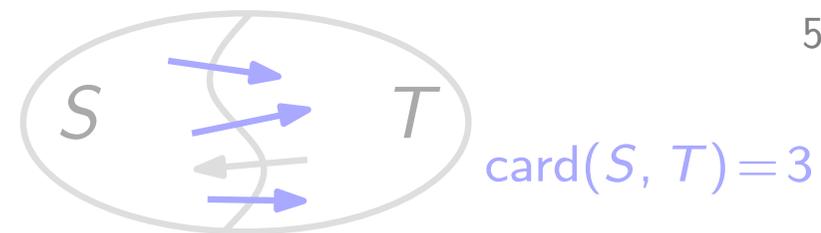
Gibt es *noch* einen maximalen Fluss? **Ja!**

- Wenn es mind. *zwei* verschiedene maximale Flüsse gibt, so gibt es ein ganzes *Kontinuum* maximaler Flüsse.
- Aber:

**Korollar.** Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h.  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$ , so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

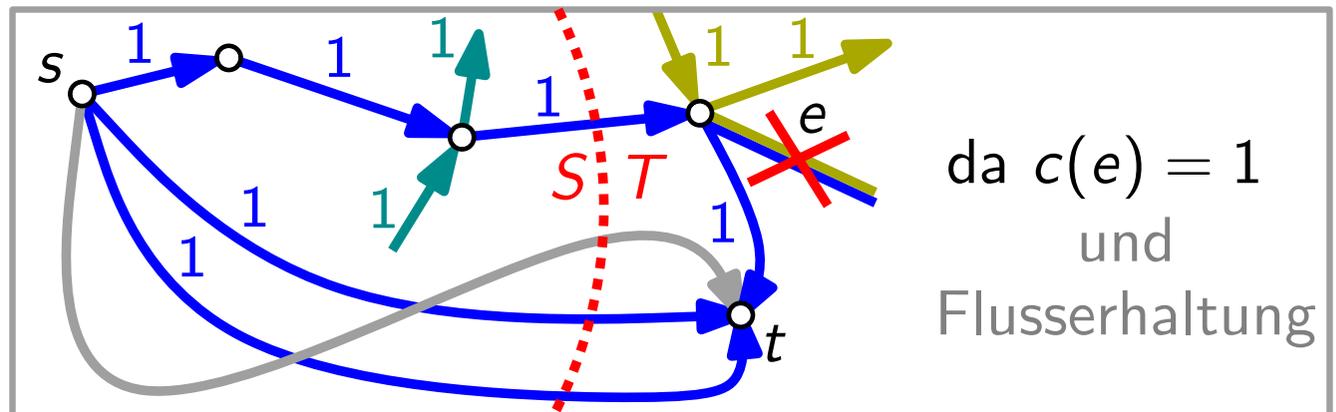
*Beweis.* Wende FordFulkerson oder EdmondsKarp an! □

# Kantendisjunkte Wege



**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $s, t \in V$ .  
 [Menger, 1927] Dann ist die maximale Anz. kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnittes.

**Beweis.** Wähle  $c \equiv 1$ . Sei  $f$  max.  $s$ - $t$ -Fluss.  $\Rightarrow$  oBdA.  $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ .  
 Ganzz.-Satz  
 Folge einer Kante mit Fluss, die  $s$  verlässt:



$\Rightarrow A := \max.$  Anz. kantendisj.  $s$ - $t$ -Wege  $\geq |f|$

Sei  $(S, T)$  ein minimaler  $s$ - $t$ -Schnitt.

$\Rightarrow$  jeder  $s$ - $t$ -Weg trägt  $\geq 1$  Kante zu  $\text{Raus}(S)$  bei.

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$



Karl Menger  
Wien 1902 – Illinois 1985

# Satz von Menger

Wir wissen nun  $\text{card}(S, T) = c(\text{Raus}(S)) = c(S) \geq A \geq |f|$

↑
↑

Kapazität eines min. Schnittes
=
Wert eines max. Flusses

↑

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

$\Rightarrow \text{card}(S, T) = c(S) = A = |f|.$

$\Rightarrow$  Minimale Kardinalität eines  $s$ - $t$ -Schnitts

$=$  maximale Anzahl kantendisjunkter  $s$ - $t$ -Wege □

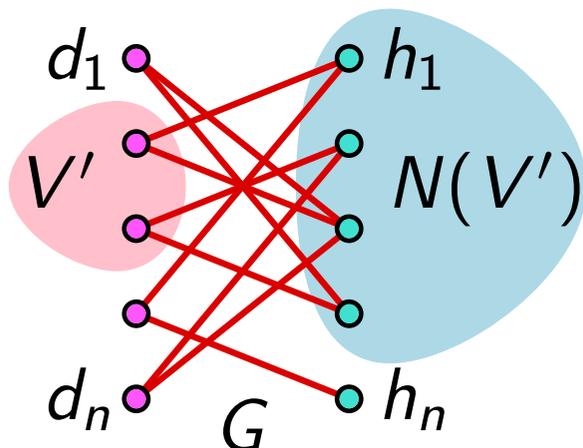
**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  gerichteter Graph,  $s, t \in V$ ,  $st \notin E$ . Dann ist die max. Anzahl *knotendisjunkter*  $s$ - $t$ -Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die  $s$  und  $t$  trennt. [Menger, 1927]

# Perfekte Paarungen

**Gegeben:** eine Menge  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  von  $n$  Damen und eine Menge  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  von  $n$  Herren mit  $D \cap H = \emptyset$ , sowie ein unger. Sympathiegraph  $G = (D \cup H, E)$ .

**Gesucht:** eine Massenhochzeit, d.h. eine *perfekte Paarung*: jede Dame wird mit genau einem Herren gepaart, den sie sympatisch findet – und umgekehrt.

**Modell.**



Nachbarschaft von  $v \in V$  ist  

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von  $V' \subseteq V$  ist  

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

# Der Heiratssatz

[Hall 1935]

**Aufgabe.** Finden Sie eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer perfekten Paarung in  $G = (D \dot{\cup} H, E)$ !

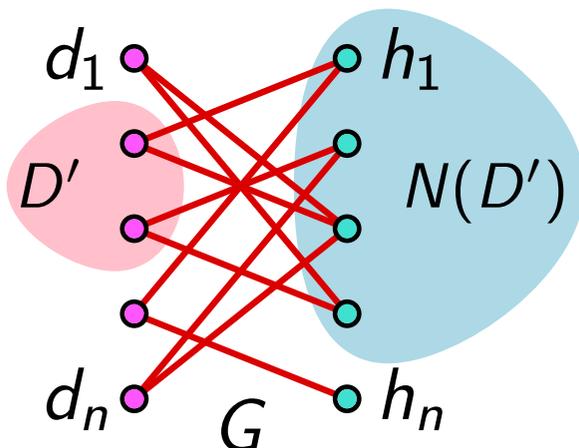
**Lösung.** Für jedes  $D' \subseteq D$  muss gelten:  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Satz.** Dies ist auch hinreichend.

Das heißt:

$G$  hat eine perfekte Paarung  $\Leftrightarrow$   
für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Modell.**



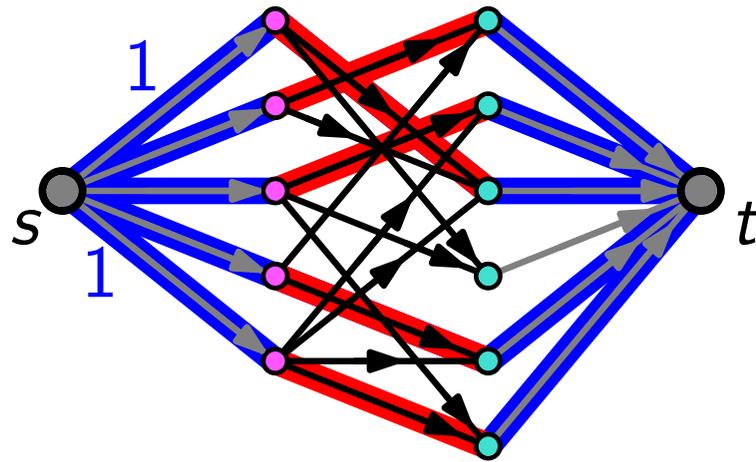
Beweis  
später!

Philip Hall

1904 London – 1982 Cambridge



# Größte Paarungen in bipartiten Graphen



$$G \rightarrow G', \quad c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Aufgabe.** Geben Sie eine effiziente Methode an, die in bipartiten Graphen **größte** Paarungen berechnet.

**Beob.**

<i>größter</i> Ganzzahl. $s$ - $t$ -Fluss in $G'$	$\xleftrightarrow{1\text{-zu-1}}$	<i>größte</i> Paarung in $G$
$\updownarrow$		$\updownarrow$
<i>größte</i> Menge <i>kantendisjunkter</i> $s$ - $t$ -Wege in $G'$	$\leftrightarrow$	<i>größte</i> Menge <i>unabhängiger</i> Kanten in $G$

# Ergebnis

Wir haben das Problem **größte Paarungen in bipartiten Graphen**  
 in  $O(V)$  Zeit **reduziert**  
 auf das Problem **maximale Flüsse in gerichteten Graphen.**

*sehr speziellen*

*mit Kap.  $\equiv 1$*

**Satz.** Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph.  
 Dann lässt sich eine größte Paarung in  $G$  in  $O(VE^2)$   
 Zeit bestimmen.

*ausnutzen!*

**Beweis.**

- Konstruktion von  $G'$ : *Laufzeit*  
 $O(V)$
- ~~Aufruf von EdmondsKarp (o.ä.) für  $G'$ :~~  ~~$O(V \cdot (E')^2)$~~
- ~~Berechne  $\leq |V|$   $s$ - $t$ -Wege in je  $O(E')$  Zeit~~  ~~$= O(VE^2)$~~

---

$O(VE^2)$

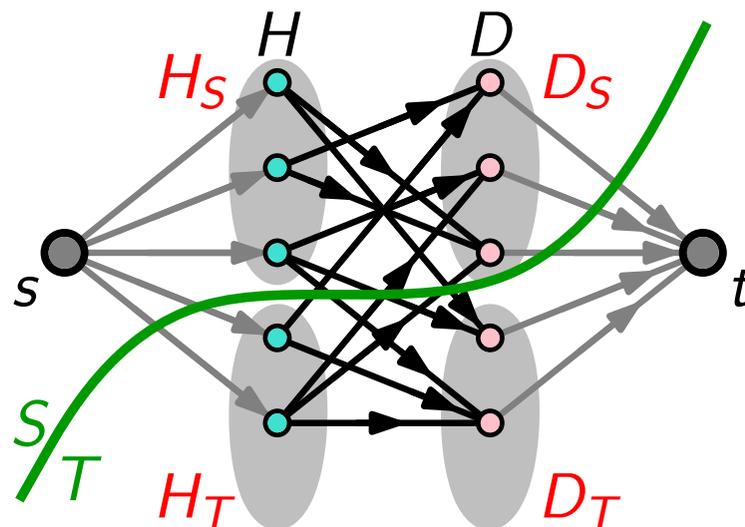
# Anmerkungen

- Bem.** Der Fluss-Algorithmus von Dinic berechnet
- maximale Flüsse in allg. Graphen in  $O(V^2E)$  Zeit
  - Matchings in bipartiten Graphen in  $O(\sqrt{VE})$  Zeit.
- [KN, Kapitel 9.6]

**Satz.** Selbst in einem beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  lässt sich eine größte Paarung in  $O(\sqrt{VE})$  Zeit berechnen.

[Micali & Vazirani, FOCS'80]

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \cup H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

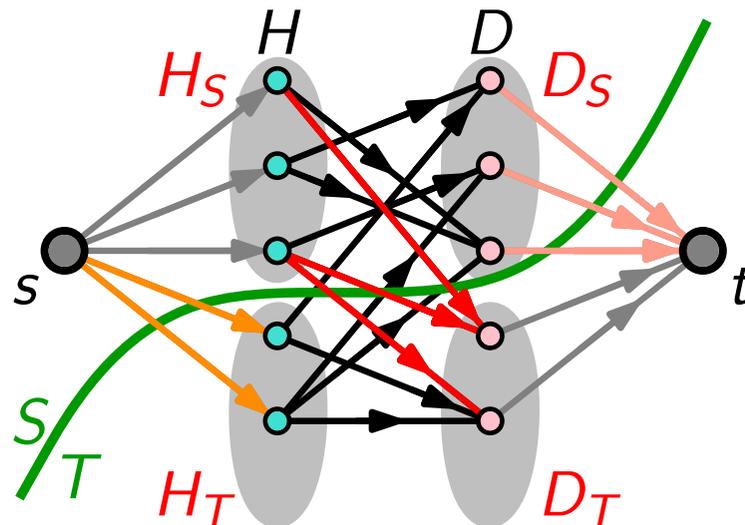
$G$  hat eine perfekte Paarung

$\Leftarrow G'$  hat Fluss  $f$  mit  $|f| = |D| = |H|$

$\Leftarrow$  für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $(S, T)$  in  $G'$  gilt  $c(S) \geq |D|$

zu zeigen!

# Beweis des Heiratssatzes



$$G \rightarrow G'$$

$$V \rightarrow V' = V \cup \{s, t\}$$

$$c: E' \rightarrow \{1\}$$

**Satz.**  $G = (D \cup H, E)$  bipartit hat eine perfekte Paarung  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $D' \subseteq D$  gilt  $|D'| \leq |N(D')|$ .

**Beweis.**  
 „ $\Leftarrow$ “

z.z.:  $(S, T)$   $s$ - $t$ -Schnitt in  $G' \Rightarrow c(S) \geq |D|$

Es gilt  $c(S) = c(\text{Raus}(S)) = \sum_{e \in \text{Raus}(S)} c(e) = |\text{Raus}(S)|$

$$\geq |H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$\geq |N_G(D_T) \cap H_T| + |N_G(D_T) \cap H_S| + |D_S|$$

$$= |N_G(D_T) \cap H| + |D_S| = |N_G(D_T)| + |D_S|$$

$$\geq |D_T| + |D_S| = |D|$$

□