

Algorithmische Graphentheorie

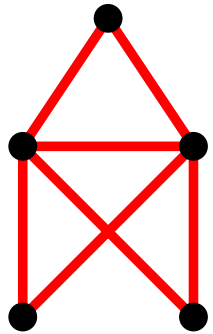
Sommersemester 2021

1. Vorlesung

Rundreiseprobleme: Teil II – Hamiltonkreise

Übersicht

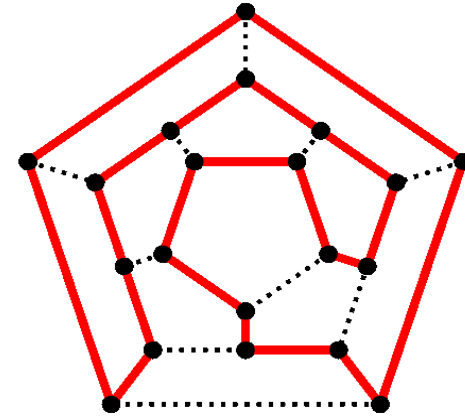
I) Eulerkreise



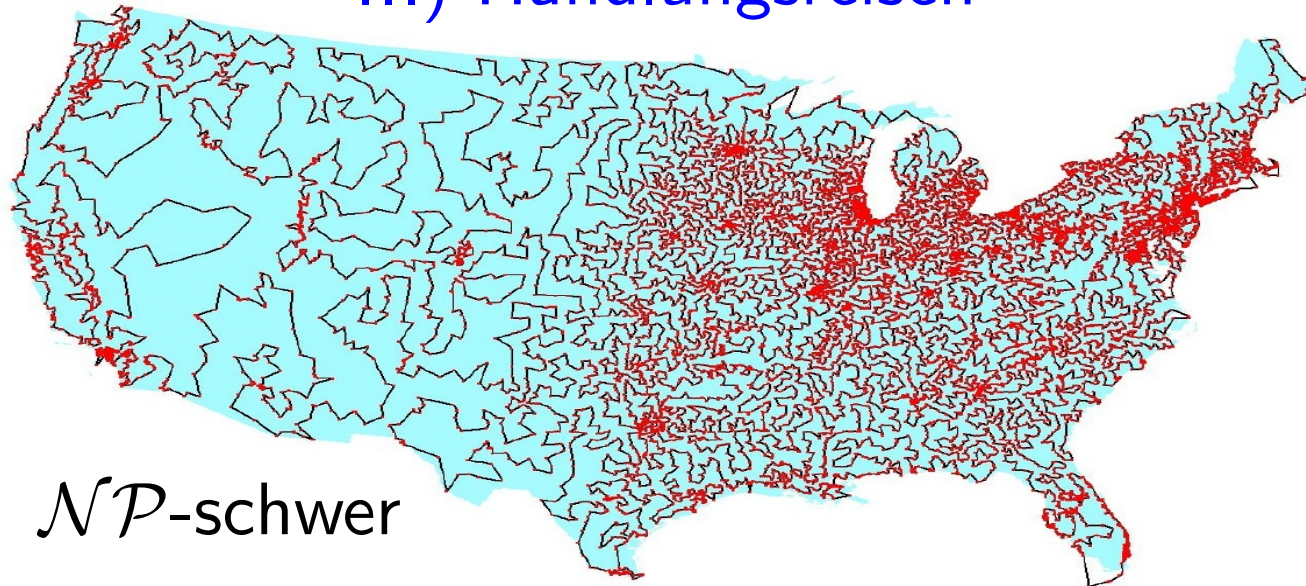
\mathcal{P}

\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise



III) Handlungsreisen



\mathcal{NP} -schwer

II) Hamiltonkreise

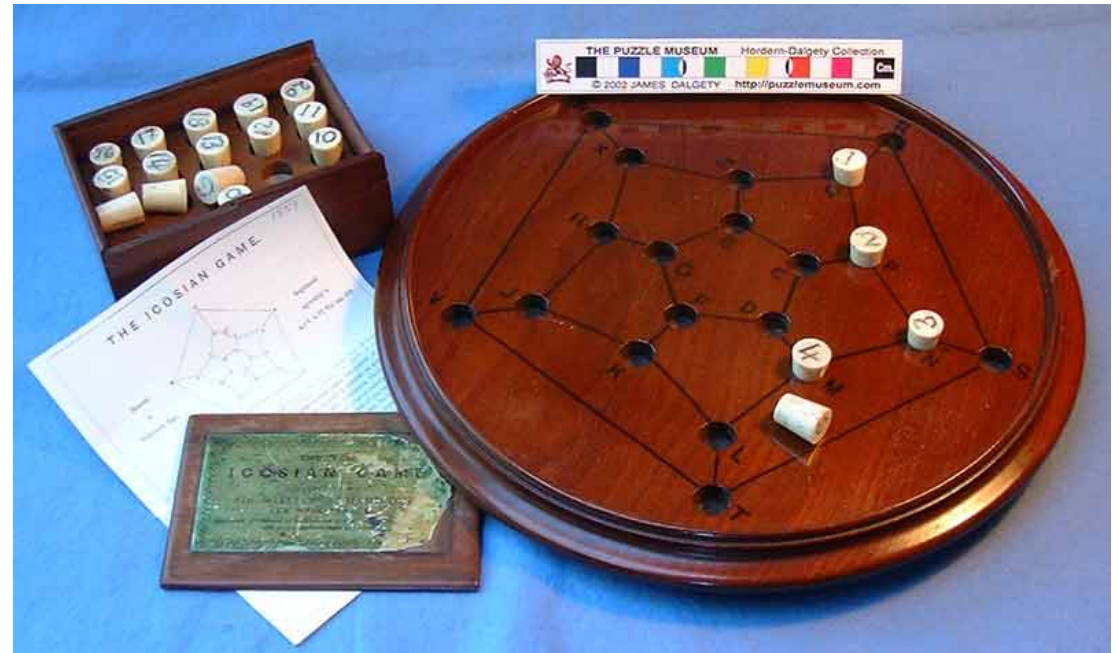
Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
 Ein *Hamiltonkreis* (-weg) in G ist ein Kreis (Weg),
 der jeden *Knoten* genau einmal durchläuft.
 Ein Graph heißt *hamiltonsch*, falls er einen
 Hamiltonkreis enthält.

Sir William Rowan Hamilton



1805 Dublin – 1865 Dunsink

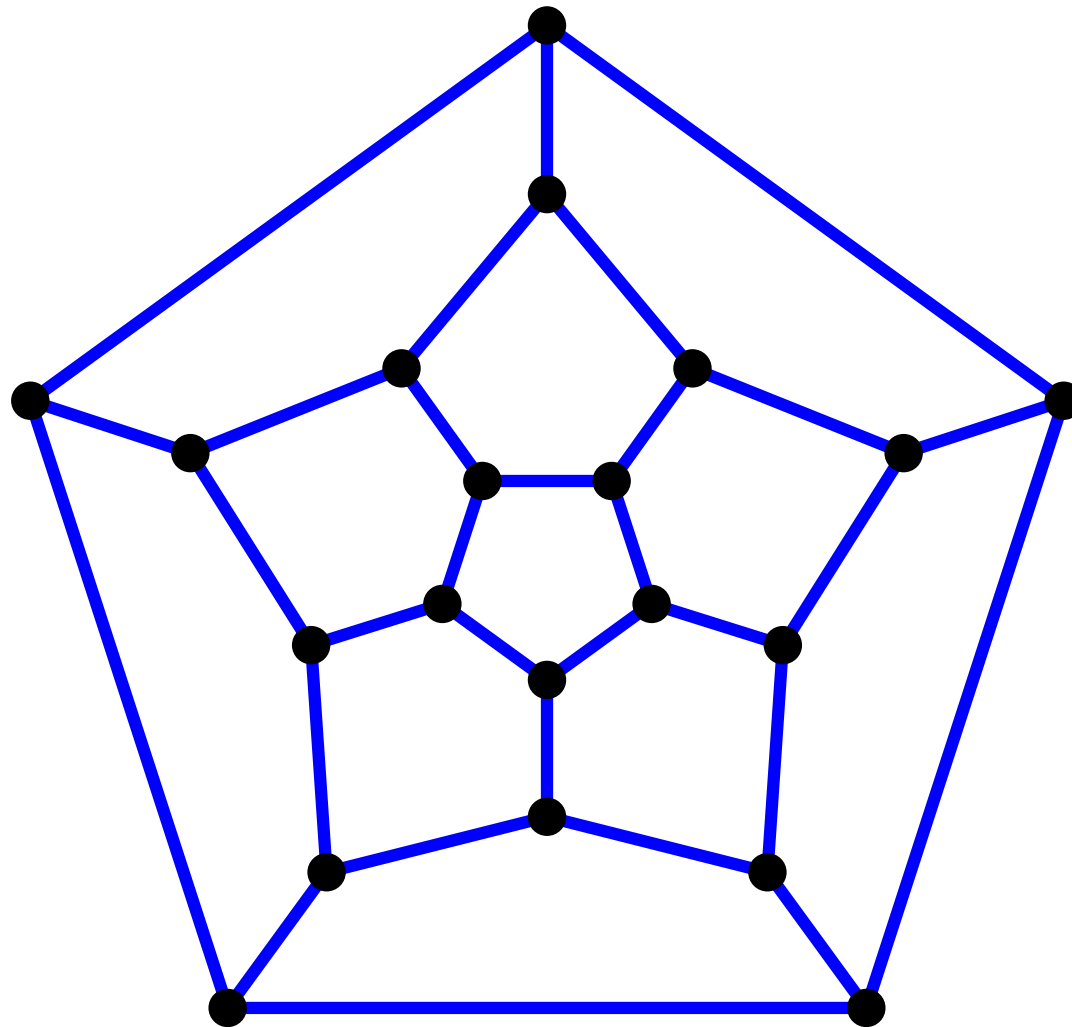
Icosian Game / Traveller's Dodecahedron



(c) 2002 James Dalgety, The Puzzle Museum

A Voyage Round the World

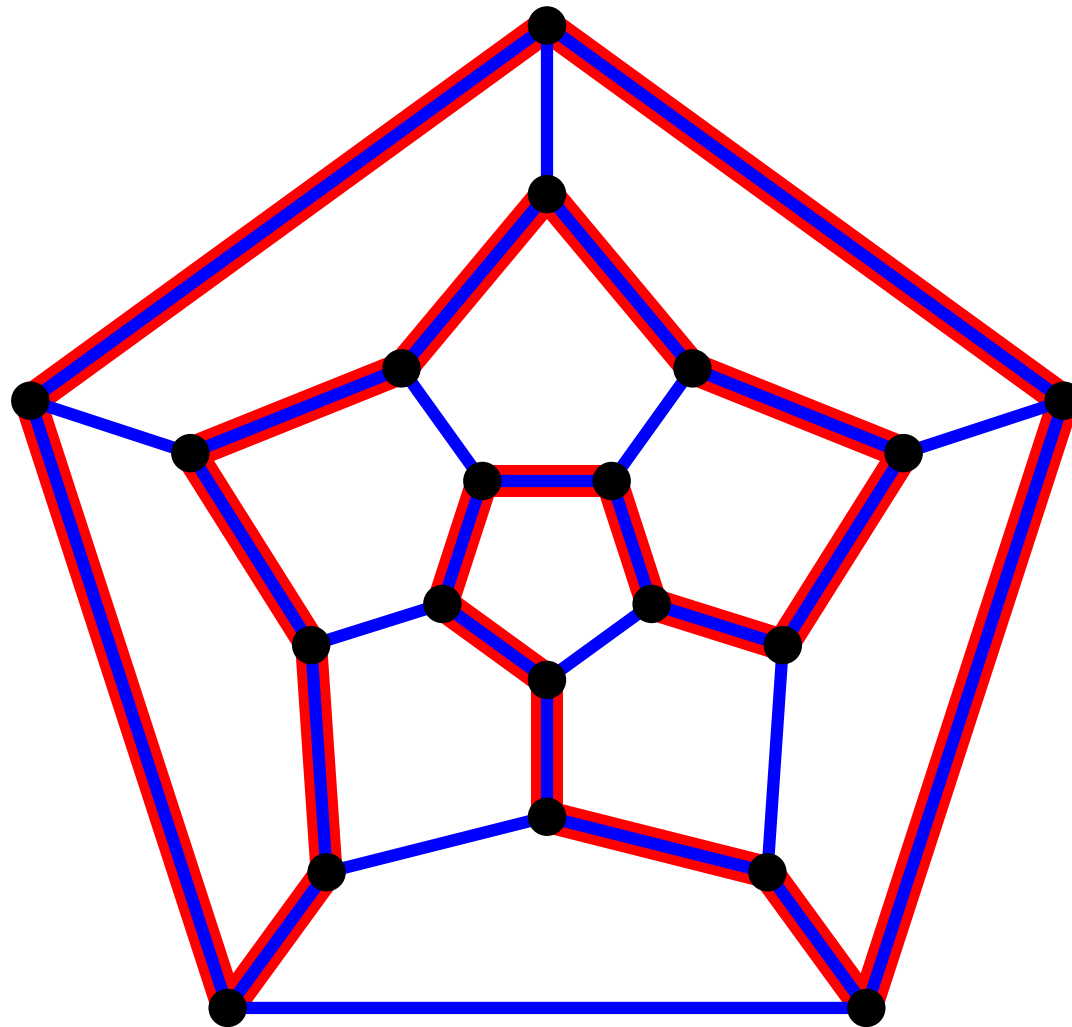
Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?



A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

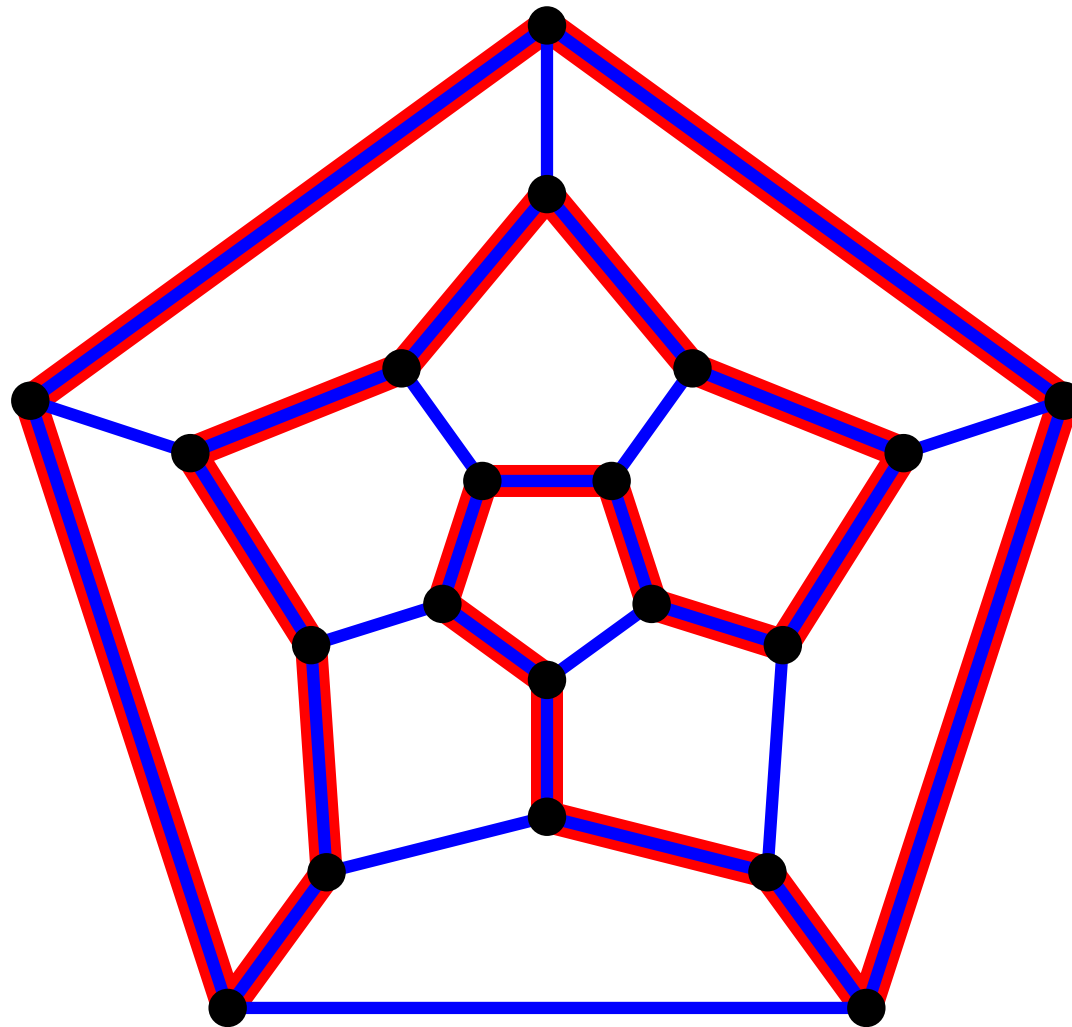
Antwort: Ja!



A Voyage Round the World

Frage: Ist das Skelett des Dodekaeders hamiltonsch?

Antwort: Ja!



Die Skelette der vier anderen platonischen Körper auch.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]



Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Bad News

Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



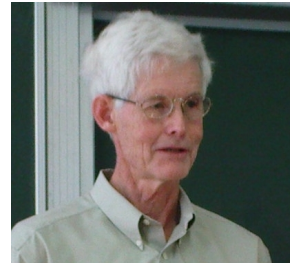
Bad News

Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]

$SAT \preceq_p CLIQUE \preceq_p VC \preceq_p gerHK \preceq_p HK$



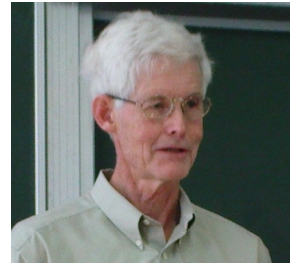
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

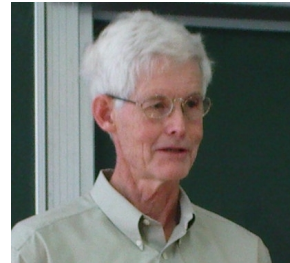
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

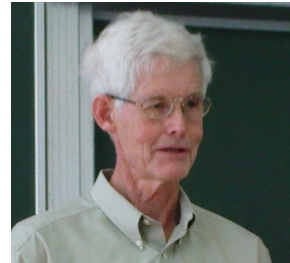
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.

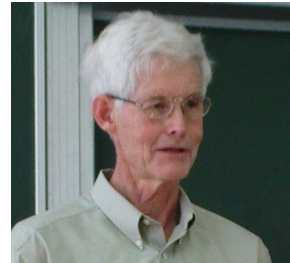
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.

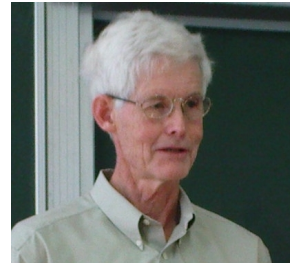
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\text{p}}{\leq}$ CLIQUE \preceq_p VC \preceq_p gerHK \preceq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.

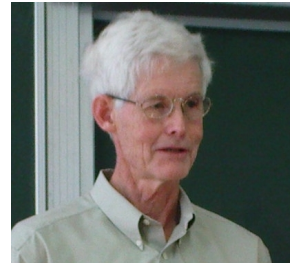
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* hinreichende *Bedingungen* dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

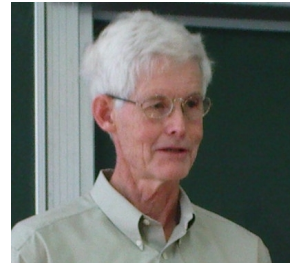
Bad News



Satz. [Karp, 1972]

(Un)gerichteter Hamiltonkreis und -weg sind NP-schwer.

Beweis. SAT ist NP-schwer [Cook, 1971]



SAT $\stackrel{\circ}{\leq}_p$ CLIQUE \leq_p VC \leq_p gerHK \leq_p HK

- „lässt sich (in Polynomialzeit) reduzieren auf“
- „ist höchstens so schwer wie“

Was nun?

- Finde Graphenklassen, in denen *alle* Graphen hamiltonsch sind.
- Finde möglichst *große* Graphenklassen, in denen das Hamiltonkreis-Problem *polynomiell* lösbar ist.
- Finde notwendige *oder* **hinreichende Bedingungen** dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
 Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $:= (V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
 Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $:= (V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $:= (V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $:= (V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.

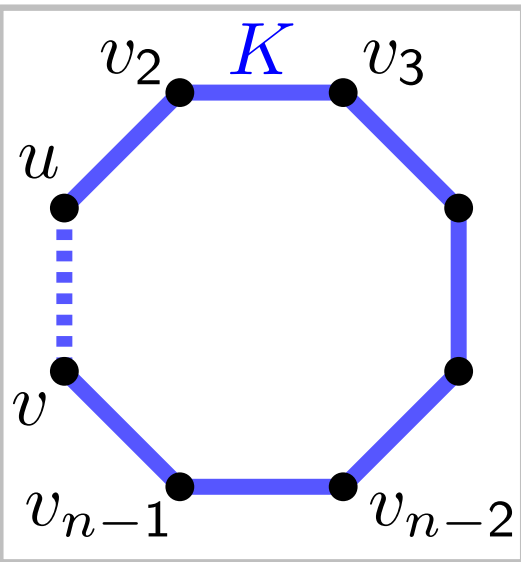
„ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $(V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

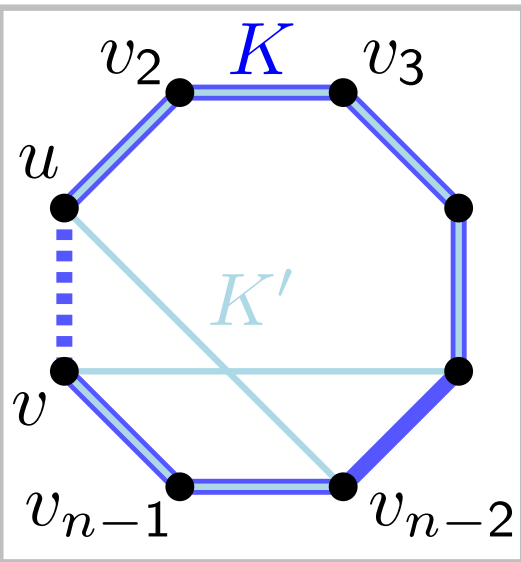


Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $(V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 z.z. es existiert HK K' ohne Kante uv .

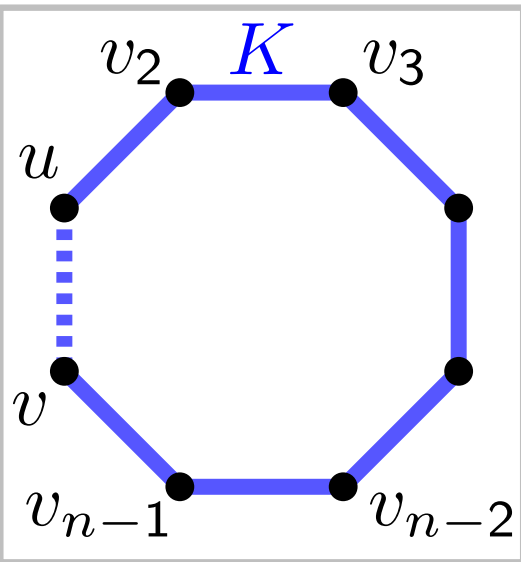


Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $(V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

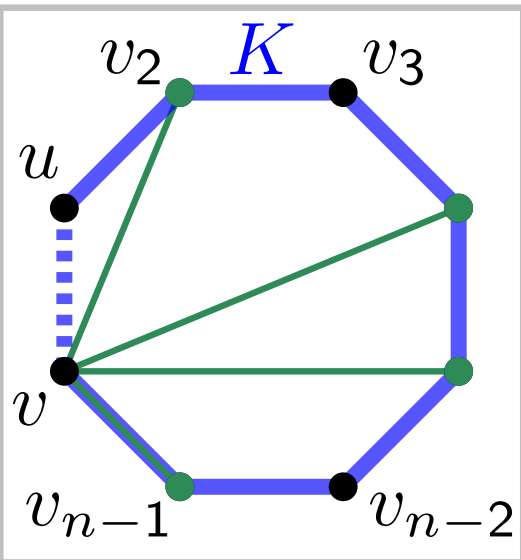


Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $(V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .

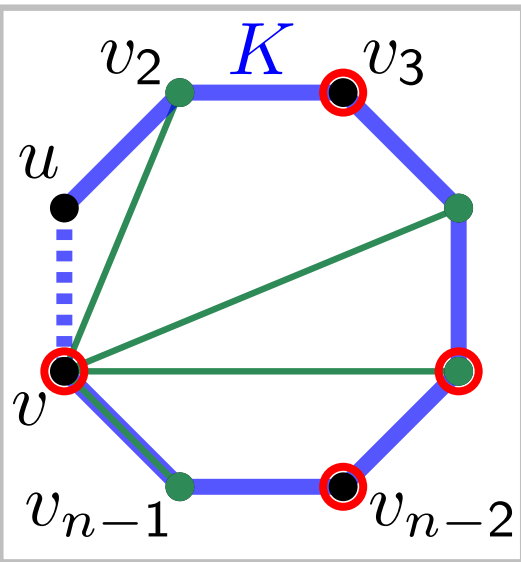


Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

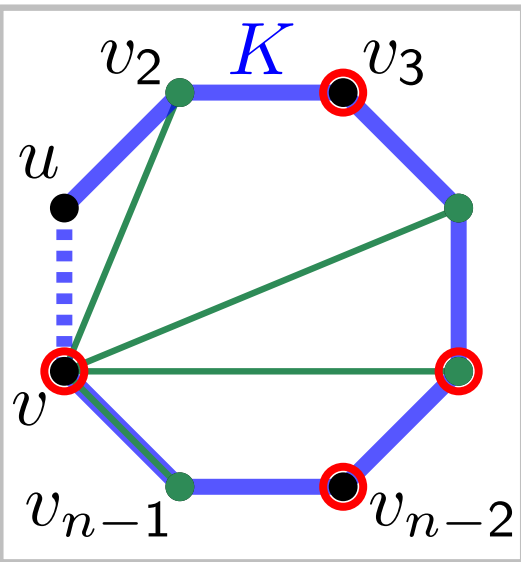


Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| =$

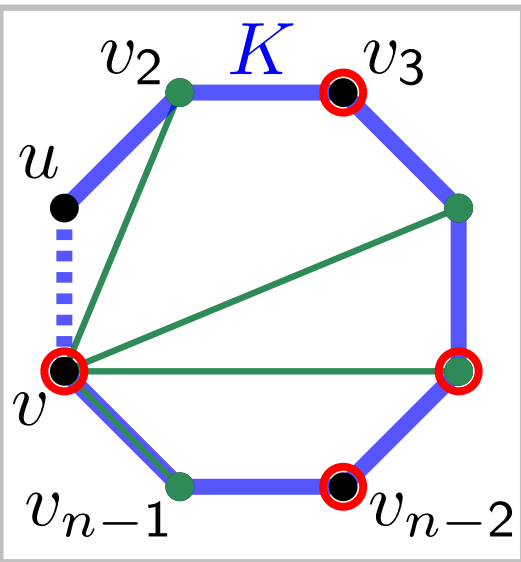


Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.



Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $(V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

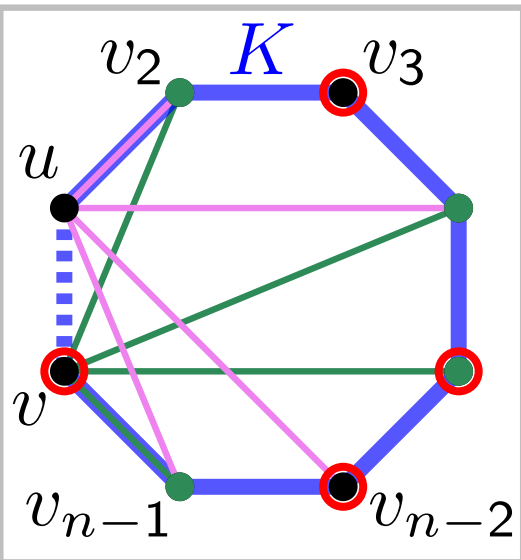
Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .



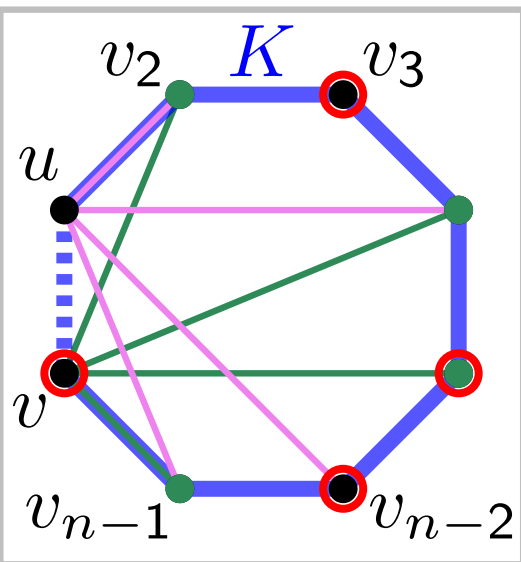
Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $(V, E \cup \{uv\})$
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v)$



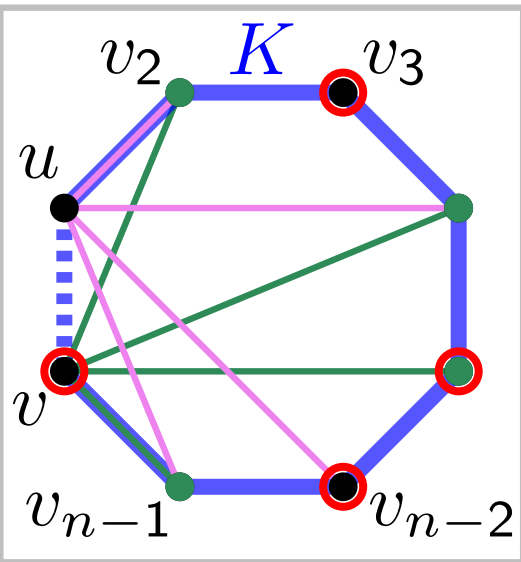
Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq$



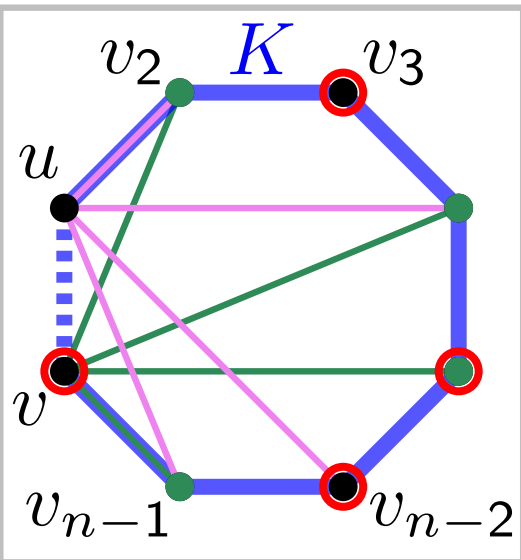
Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.



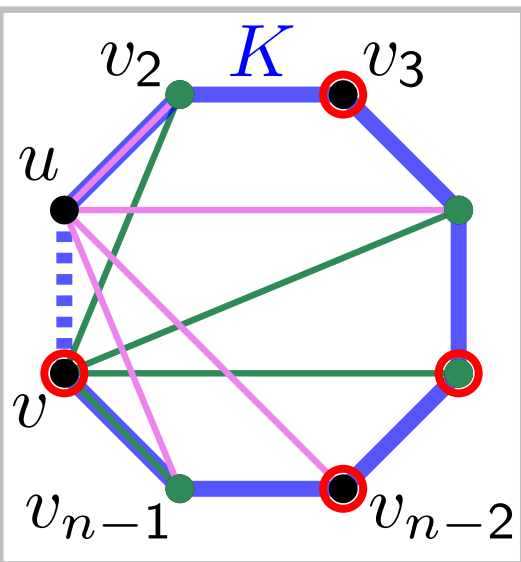
Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

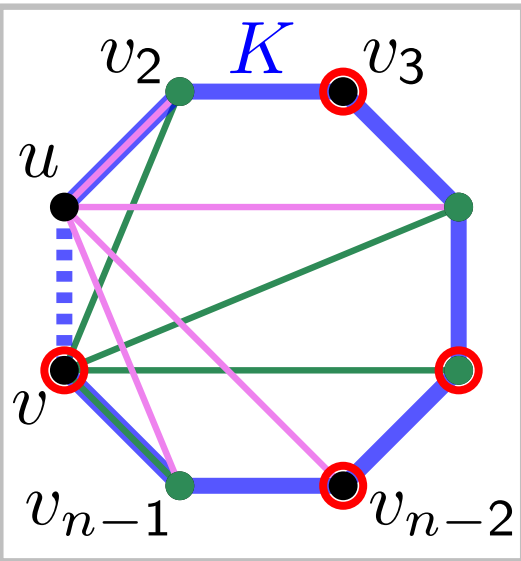
$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.
 Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.



Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .



Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.

$N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .

$F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.

Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .

$u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow$

Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

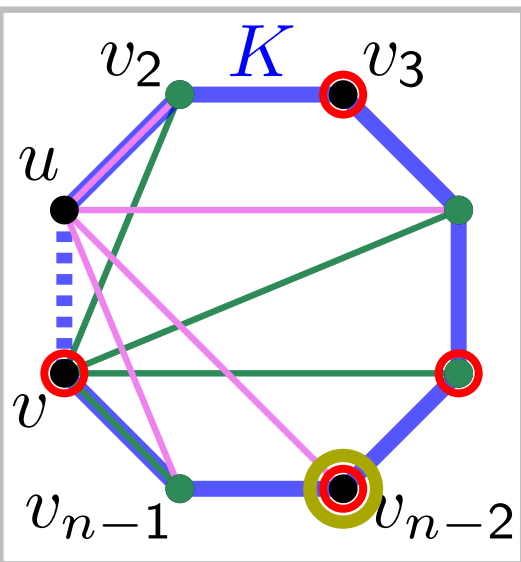
Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq$



Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv := (V, E \cup \{uv\})$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

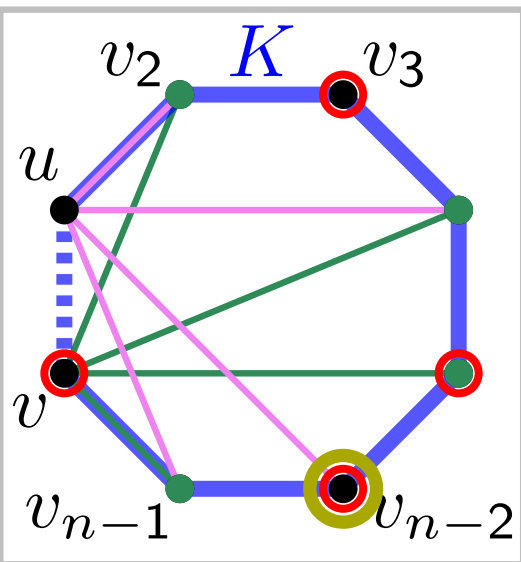
Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1$



Satz von Bondy und Chvátal [1976]

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt: $G + uv$ hamiltonsch $\Leftrightarrow G$ hamiltonsch.

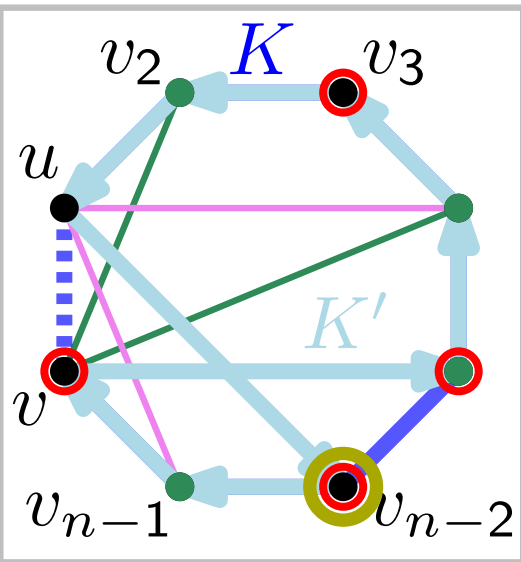
Beweis. „ \Rightarrow “ Jeder HK in G ist auch ein HK in $G + uv$.
 „ \Leftarrow “ Annahme: Jeder HK in $G + uv$ benutzt die Kante uv .

Sei $K = \langle u = v_1, v_2, \dots, v_n = v, u \rangle$ ein solcher HK.
 $N(v) := \{v_i \in V : vv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von v .
 $F(v) := \{v_i \in V : v_{i-1} \in N(v)\}$ sind deren Nachfolger.
 Es gilt $\deg(v) = |N(v)| = |F(v)|$.

$N(u) := \{v_i \in V : uv_i \in E\}$ sind die Nachbarn von u .
 $u \notin N(u) \cup F(v) \Rightarrow |N(u) \cup F(v)| \leq n - 1$.

Aber $|N(u)| + |F(v)| = \deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Es gilt immer $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow |N(u) \cap F(v)| \geq 1 \Rightarrow K'$



Satz von Dirac

Satz.

[Chvátal & Bondy]

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.

Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg u + \deg v \geq |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Satz von Dirac

Satz.

[Chvátal & Bondy]

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.

Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg u + \deg v \geq |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Kor.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.
Falls jeder Knoten von G Grad $\geq |V|/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Satz von Dirac

Satz.

[Chvátal & Bondy]

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.

Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg u + \deg v \geq |V|$. Dann gilt:

G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch.

Kor.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$.

Falls jeder Knoten von G Grad $\geq |V|/2$ hat, so ist G hamiltonsch.

Beweis. Probieren Sie's!