

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2019/20

25. Vorlesung

## Leichte Kreise in Graphen

# Kürzeste Kreise

- Gewichteter und ungewichteter Fall
- Gerichteter und ungerichteter Fall

Z.B. für einen ungewichteter und ungerichteter Graphen  $G$ :

Für einen Knoten  $v$  liefert  $\text{BFS}(G, v)$  – bis zur ersten Nicht-Baumkante – einen kürzesten Kreis  $C_v$  durch  $v$ .

Der kürzeste der Kreise in der Menge  $\{C_v \mid v \in V\}$  ist ein kürzester Kreis in  $G$ .

**Laufzeit:**  $O(V^2)$  – Warum??

# Minimales durchschnittliches Kantengewicht

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph mit beliebigen Kantengewichten  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $n = |V|$ .

Für einen gerichteten Kreis  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$  sei

$$\mu(C) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$$

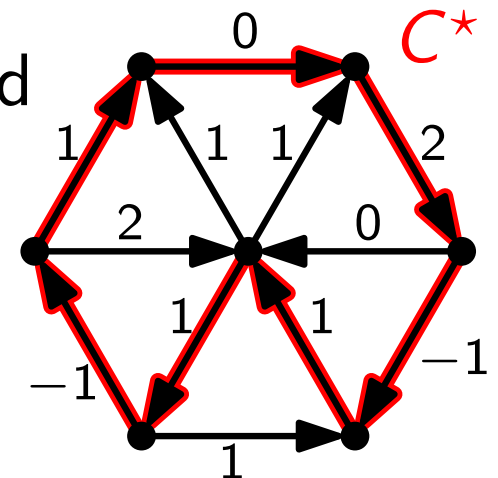
sein *durchschnittliches* Kantengewicht.

$$\mu^* = \mu(C^*) = \frac{3}{7}$$

Sei  $\mathcal{C}$  die Menge aller gerichteter Kreise in  $G$  und

$$\mu^* = \min_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$$

das minimale durchschnittliche Kantengewicht eines Kreises (*minimum mean cycle weight*).



# Rohe Gewalt

Wir suchen also einen Kreis  $C^*$  mit  $\mu(C^*) = \mu^*$ , d.h. einen Kreis mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.

```
MinMeanCycleBruteForce(DirectedWeightedGraph G, w)
```

```
   $\mu_{\min} = \infty$ 
```

```
  foreach  $C = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle \in \mathcal{C}$  do
```

```
     $\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w(e_i)$ 
```

```
    if  $\mu < \mu_{\min}$  then
```

```
       $\mu_{\min} = \mu$ 
```

```
       $C' = C$ 
```

```
  return  $C'$ 
```

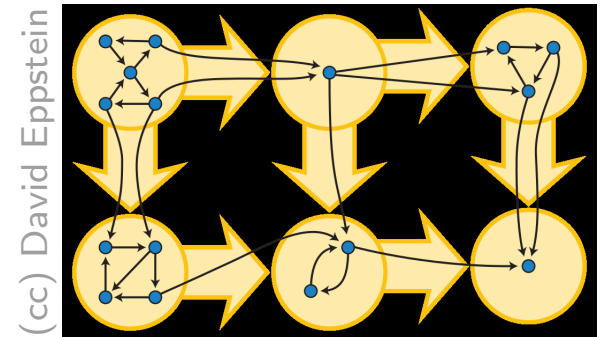
**Laufzeit?** *Mindestens exponentiell in  $|V|$  :-(  
höchstens exponentiell in  $|E|$*

# Vorbereitungen

Wir nehmen an, dass  $G$  *stark zusammenhängend* ist, d.h. es gibt für jedes Knotenpaar  $(u, v)$  einen gerichteten  $u$ - $v$ -Weg.

Ansonsten zerlegen wir  $G$  in seine starken Zusammenhangskomponenten ( wie?\*) und betrachten jede separat.

Sei  $s$  ein beliebiger Knoten von  $G$ .



Sei  $\delta(s, v)$  das Gewicht eines kürzesten (leichtesten)  $s$ - $v$ -Wegs.

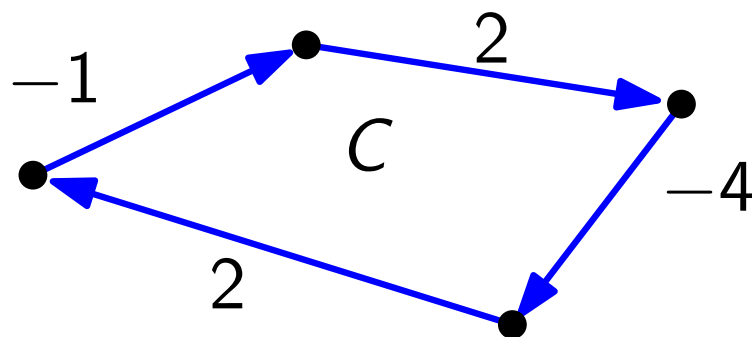
Für  $k = 0, \dots, n - 1$  sei  $\delta_k(s, v)$  das Gewicht eines kürzesten  $s$ - $v$ -Wegs, der aus *genau*  $k$  Kanten besteht (sonst  $\infty$ ).

\* ) Im Prinzip durch ein oder zwei Tiefensuchen (siehe [https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly\\_connected\\_component](https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component))

# Schritt I

**Zeige:** Falls  $\mu^* = 0$ , dann gilt:

1.  $G$  hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und ✓
2.  $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$  für jeden Knoten  $v$ . ✓



*Beweis.*

1. Angenommen es gäbe einen Kreis  $C$  mit  $w(C) < 0$ .

$$\Rightarrow \mu(C) < 0 \Rightarrow \mu^* < 0 \quad \text{⚡}$$

2. Betrachte  $s$ - $v$ -Weg  $\pi$  mit  $k > n - 1$  Kanten.

$$\Rightarrow \pi \text{ enthält Kreis } C. \text{ Aber } w(C) \geq 0. \Rightarrow w(\pi \setminus C) \leq w(\pi)$$

$\Rightarrow$  Es gibt einen kürzesten  $s$ - $v$ -Weg mit  $\leq n - 1$  Kanten.

# Schritt II

Falls  $\mu^* = 0$ , dann gilt:

- $G$  hat keinen Kreis mit negativem Gewicht und
- $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$  für jeden Knoten  $v$ . (\*)

**Zeige:** Falls  $\mu^* = 0$ , dann gilt für jeden Knoten  $v$

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

**Beweis:** Nach Def. von  $\delta$  gilt:  $\delta_n(s, v) \geq \delta(s, v)$

Wegen (\*) gilt:  $\delta(s, v) = \delta_k(s, v)$  für ein  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

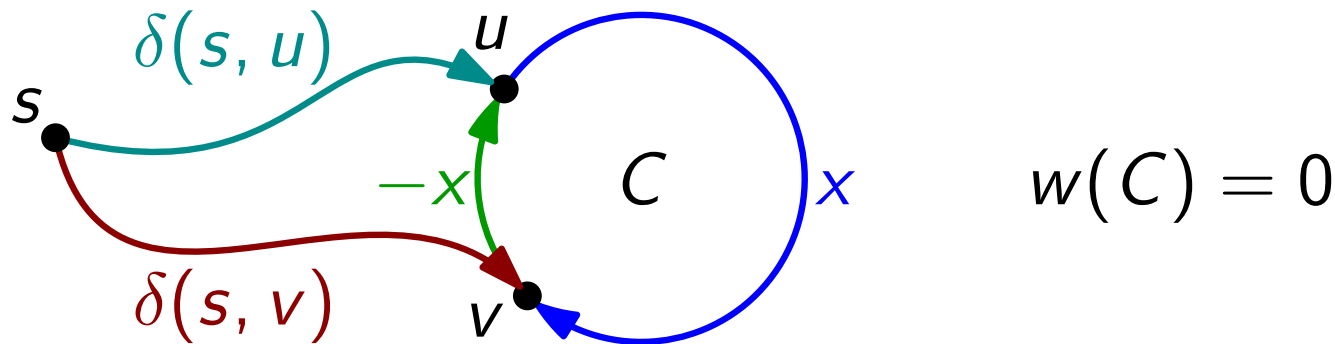
---

Also gilt  $\delta_n(s, v) \geq \delta_k(s, v)$  für ein  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \max_{0 \leq k \leq n-1} \delta_n(s, v) - \delta_k(s, v) \geq 0 \Rightarrow$  Beh.  $\square$   
 $n - k > 0$

# Schritt III

Sei  $C$  ein Kreis mit Gewicht 0. Seien  $u, v$  Knoten auf  $C$ .  
Sei  $x$  das Gewicht des Wegs von  $u$  nach  $v$  auf  $C$ .



Zeige:  $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$ .

Klar:  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + x$ .

Aber warum kann es keinen kürzeren Weg von  $s$  nach  $v$  geben?

Angenommen, es gälte  $\delta(s, v) < \delta(s, u) + x$ .

$\Rightarrow \delta(s, v) - x < \delta(s, u)$  ⚡ zur Def. von  $\delta$ .





# Schritt IV

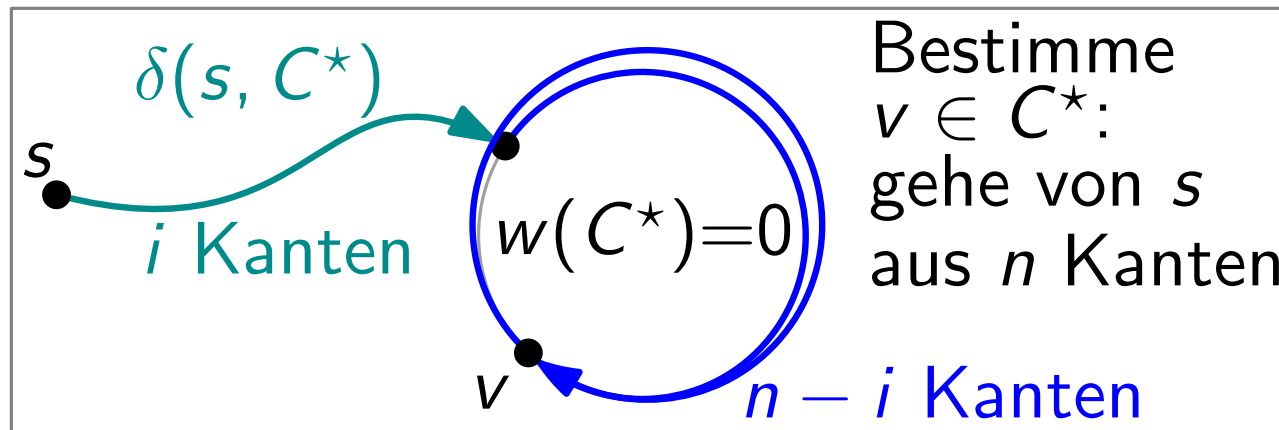
Falls  $\mu^* = 0$ , dann gilt für jeden Knoten  $v$

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Zeige:

Falls  $\mu^* = 0$ , dann gibt es einen Knoten  $v$  auf dem Kreis  $C^*$ , so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$



Schritt III für *dieses*  $v$ :

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) = \delta(s, v).$$

$$\Rightarrow \delta_n(s, v) \leq \delta_k(s, v) !!$$

Aber für welches  $k$  gilt

$$\delta_n(s, v) = \delta_k(s, v)?$$

z.B.  $k = n - |C^*|$ , denn

$$w(C^*) = 0 \text{ und } |C^*| \leq n.$$

# Schritt V

Falls  $\mu^* = 0$ , dann gilt für jeden Knoten  $v$

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} \geq 0.$$

Falls  $\mu^* = 0$ , dann gibt es einen Knoten  $v$  auf dem Kreis  $C^*$ ,  
so dass

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls  $\mu^* = 0$ , dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = \mathbf{0}.$$

Klar...

# Schritt VI

Falls  $\mu^* = 0$ , dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante  $t$  zum Gewicht jeder Kante von  $G$  addieren, dann steigt  $\mu^*$  um  $t$ .

# Schritt VI

Falls  $\mu^* = 0$ , dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante  $t$  zum Gewicht jeder Kante von  $G$  addieren, dann steigt  $\mu^*$  um  $t$ .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}.$$

Zeige: Steigt *auch* um  $t$ , wenn alle Gew. um  $t$  erhöht werden.

# Schritt VI

Falls  $\mu^* = 0$ , dann

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0.$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante  $t$  zum Gewicht jeder Kante von  $G$  addieren, dann steigt  $\mu^*$  um  $t$ .

Zeige damit, dass

$$\mu^* \stackrel{?}{=} \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt}} = \underbrace{\frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} + \frac{nt - kt}{n - k}}_{+t}.$$

Zeige: Steigt *auch* um  $t$ , wenn alle Gew. um  $t$  erhöht werden. ✓

# Schritt VI

Falls  $\mu^* = 0$ , dann

$$\left. \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k} = 0. \right\} (**)$$

Zeige:

Falls wir eine Konstante  $t$  zum Gewicht jeder Kante von  $G$  addieren, dann steigt  $\mu^*$  um  $t$ .

Zeige damit, dass

$$\alpha(t) := \boxed{\mu^*} \stackrel{?!}{=} \underbrace{\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}}_{\substack{+nt \quad +kt \\ +\frac{nt-kt}{n-k} = +t}} =: \beta(t)$$

Zeige: Steigt *auch* um  $t$ , wenn alle Gew. um  $t$  erhöht werden. ✓

Also:  $\alpha$  und  $\beta$  sind *lineare* Fkt. in  $t$  mit  $\alpha(-\mu^*) = \beta(-\mu^*)$  ✓  
 und Steigung 1  $\Rightarrow \alpha \equiv \beta$ . (\*\*) □

# Schritt VII

Es gilt

$$(\text{***}) \quad \mu^* = \min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}.$$



[Karp, 1978]

**Satz.** Ein Kreis  $C^*$  mit kleinstem durchschnittlichen Kantengewicht ( $\mu(C^*) = \mu^*$ ) lässt sich in  $O(VE)$  Zeit berechnen.

Gib einen Algorithmus an, der  $\mu^*$  in  $O(VE)$  Zeit berechnet:

- Setze  $\delta_0(s, s) = 0$  und, für  $v \in V \setminus \{s\}$ , setze  $\delta_0(s, v) = \infty$ .
- Für  $k = 1, \dots, n - 1$  und  $v \in V$ , berechne in  $O(\text{indeg } v)$  Zeit

$$\delta_k(s, v) = \min_{uv \in E} \delta_{k-1}(s, u) + w(u, v).$$

Das ist ein kleines dynamisches Programm!

Dies benötigt insg.  $O(VE)$  Zeit.

- Berechne  $\mu^*$  nach (\*\*\*) in  $O(V^2)$  Zeit. □