

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2019/20

22. Vorlesung

Dynamisches Programmieren

Entwurfstechniken

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert



Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert



- Dynamisches Programmieren

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert



- Dynamisches Programmieren

[meint hier das Arbeiten mit einer Tabelle,
nicht das Schreiben eines Computerprogramms.]

Vergleich

Teile und Herrsche

Dynamisches Programmieren

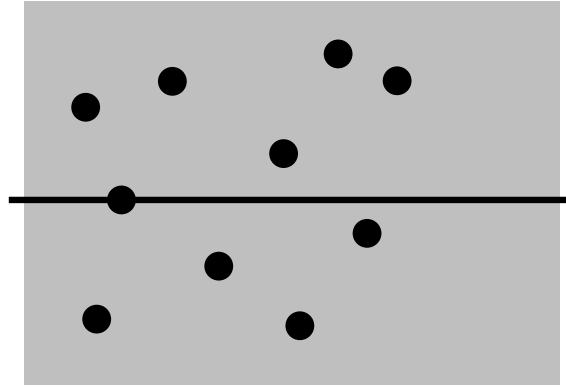
Vergleich

Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

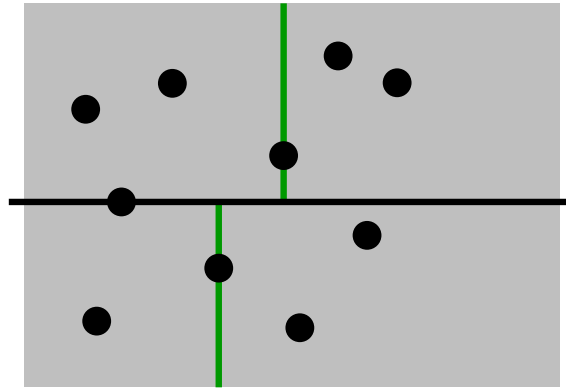


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

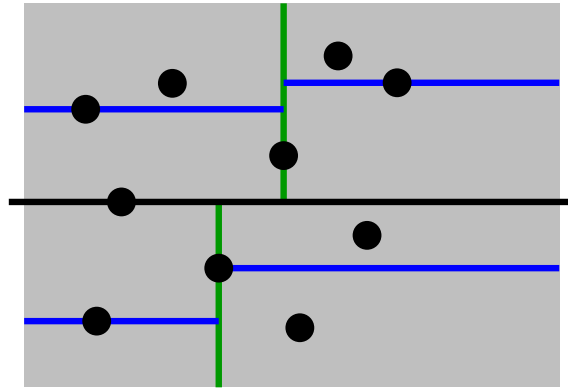


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

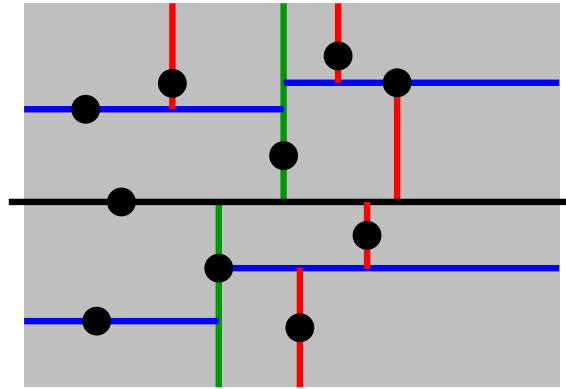


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

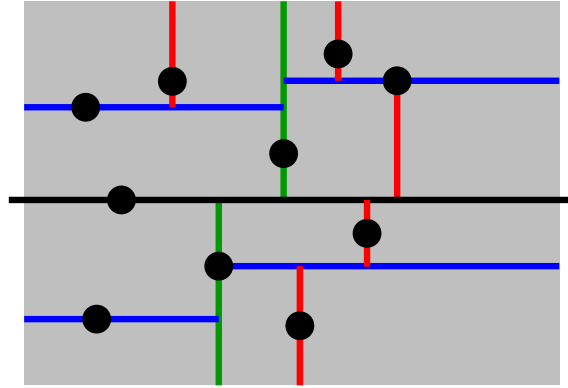


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich



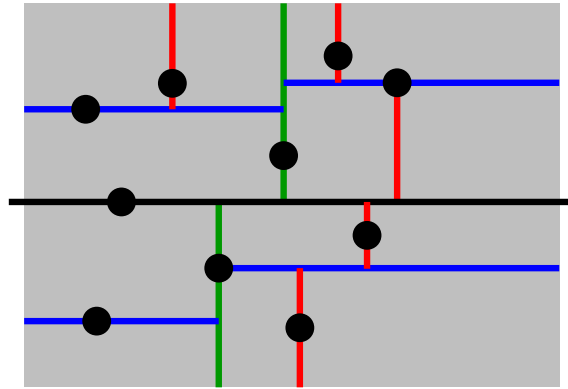
Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich



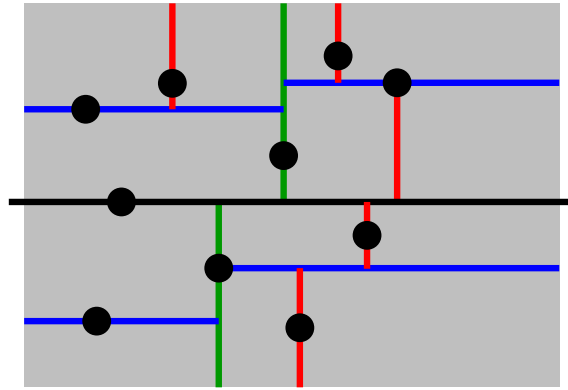
Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

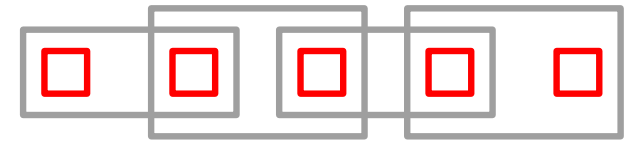
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich



Teile und Herrsche

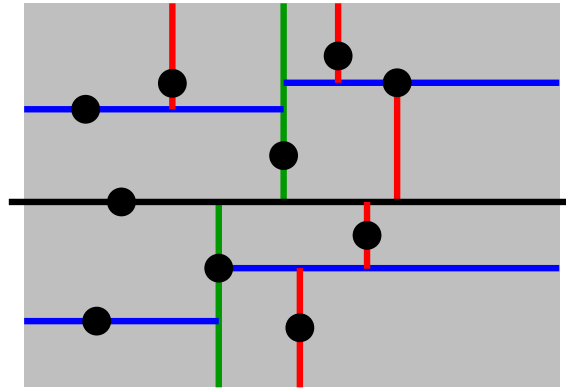
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen



Dynamisches Programmieren

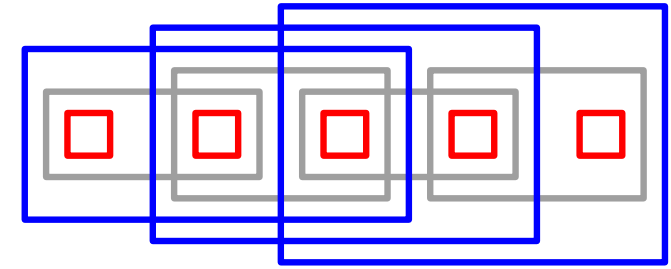
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich



Teile und Herrsche

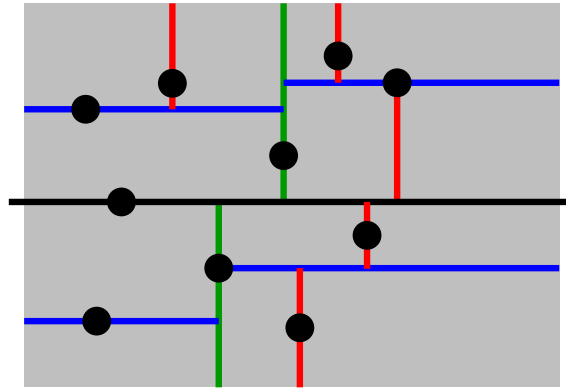
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen



Dynamisches Programmieren

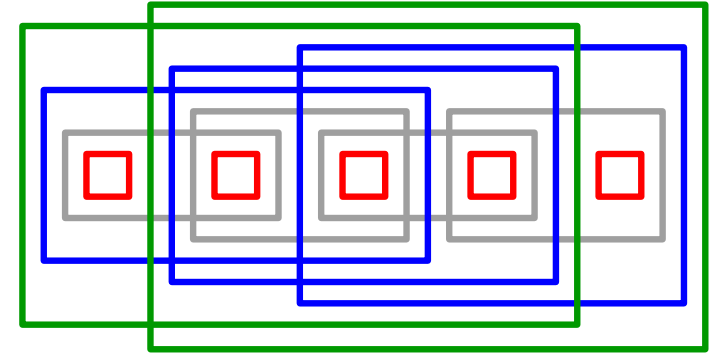
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich



Teile und Herrsche

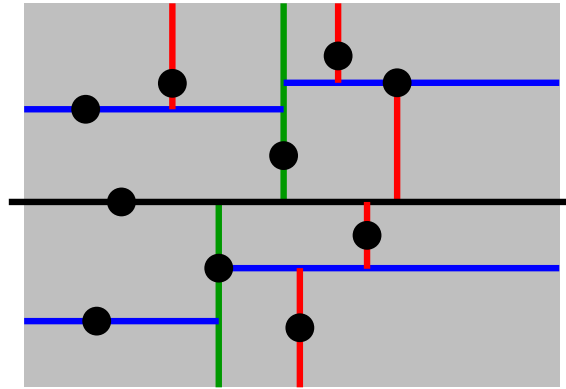
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen



Dynamisches Programmieren

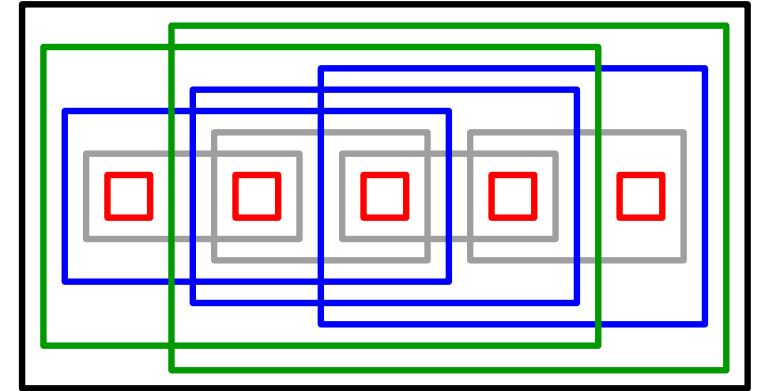
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich



Teile und Herrsche

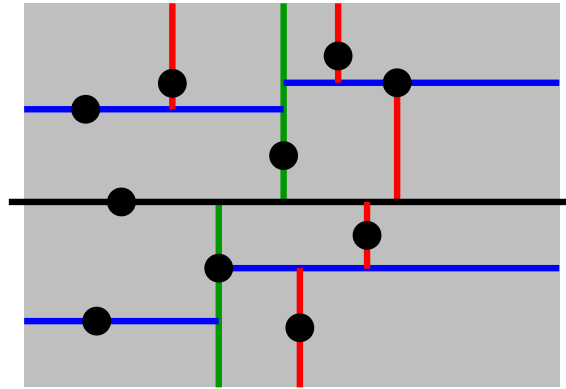
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen



Dynamisches Programmieren

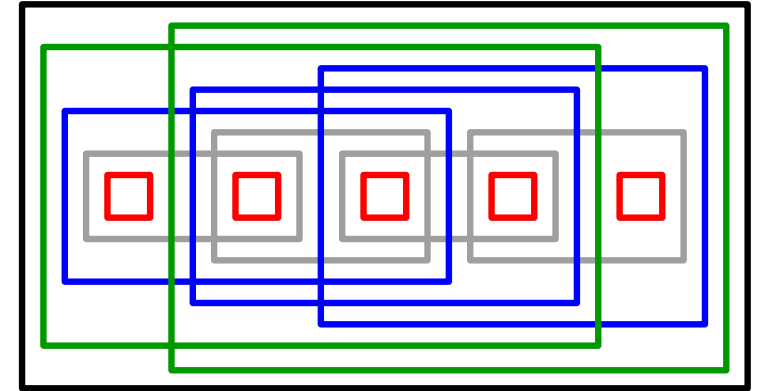
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich



Teile und Herrsche

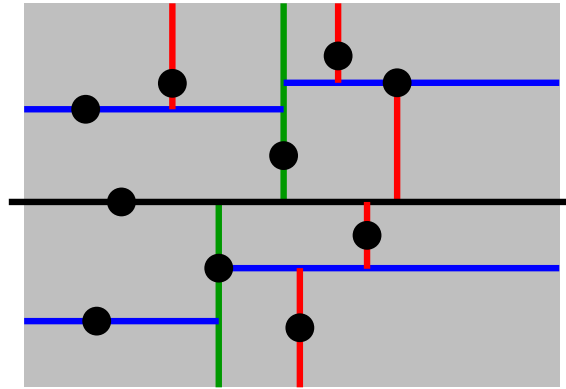
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen



Dynamisches Programmieren

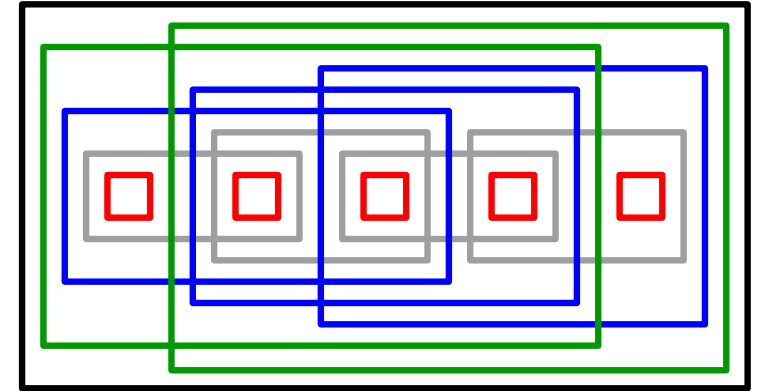
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen.

Vergleich



Teile und Herrsche

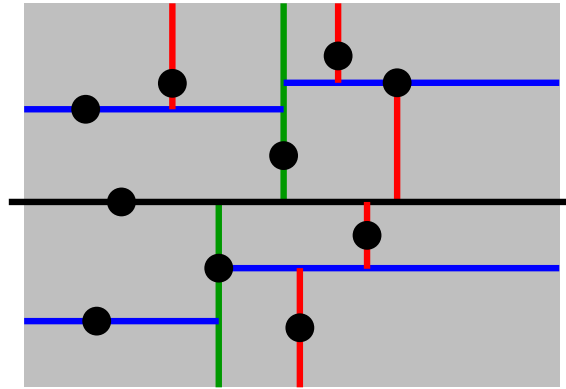
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen



Dynamisches Programmieren

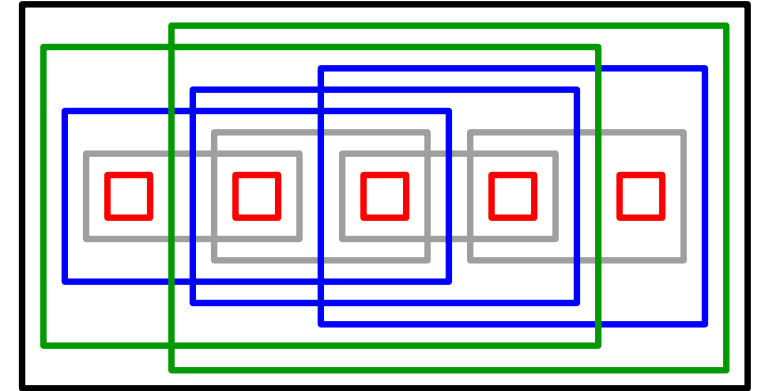
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.

Vergleich



Teile und Herrsche

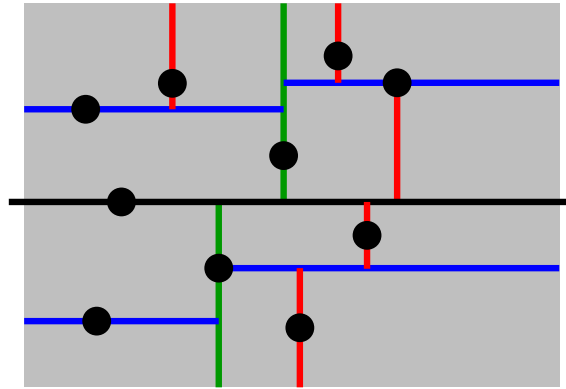
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down



Dynamisches Programmieren

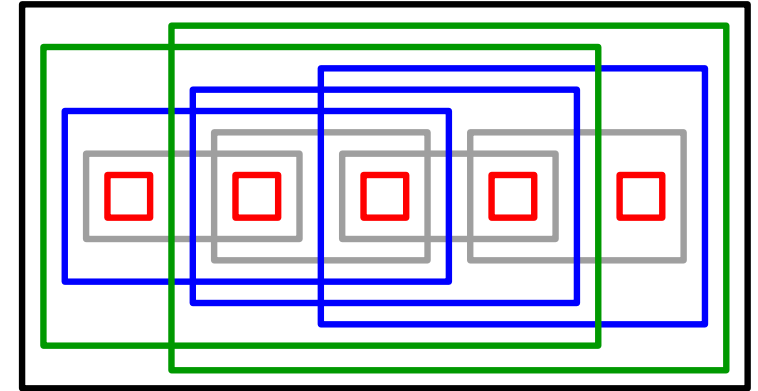
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.

Vergleich



Teile und Herrsche

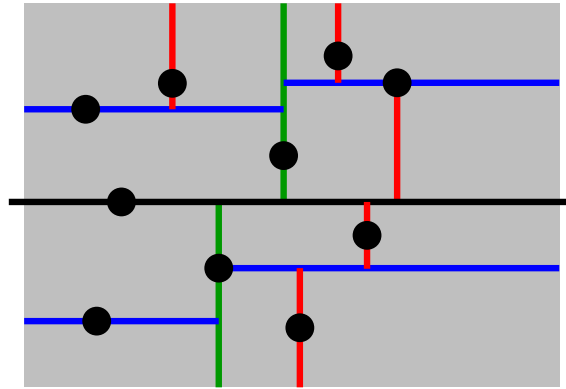
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down



Dynamisches Programmieren

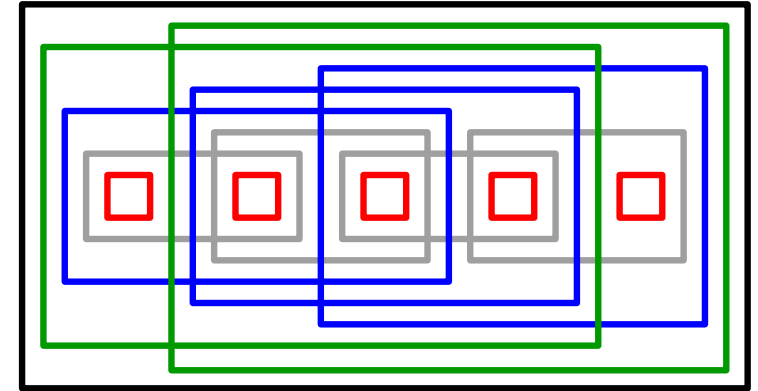
- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up

Vergleich



Teile und Herrsche

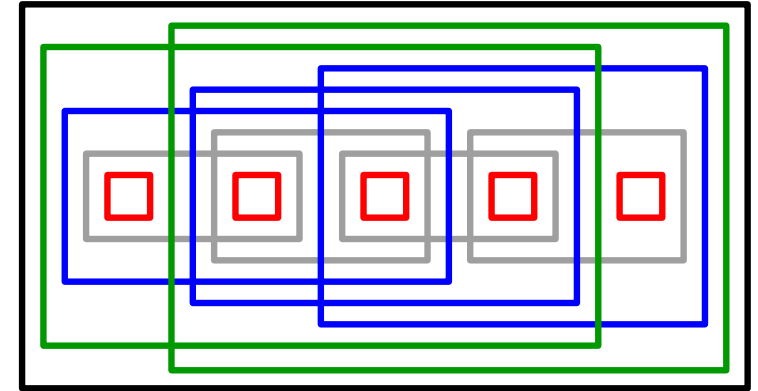
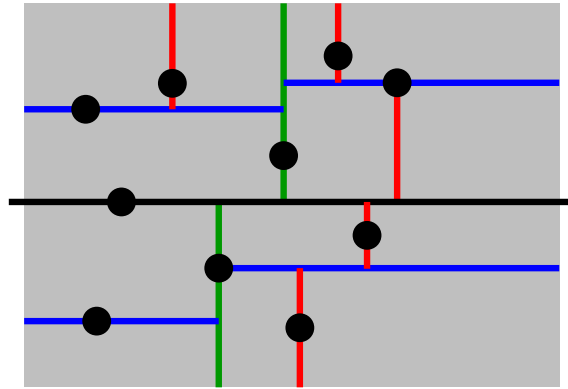
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down
- eher für Entscheidungs- oder Berechnungsprobleme



Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up

Vergleich



Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down
- eher für Entscheidungs- oder Berechnungsprobleme

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up
- meist für Optimierungsprobleme

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)
4. Optimale Lösung aus berechneter Information konstruieren

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)
- [4. Optimale Lösung aus berechneter Information konstruieren]

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren **Ertrag maximieren?**

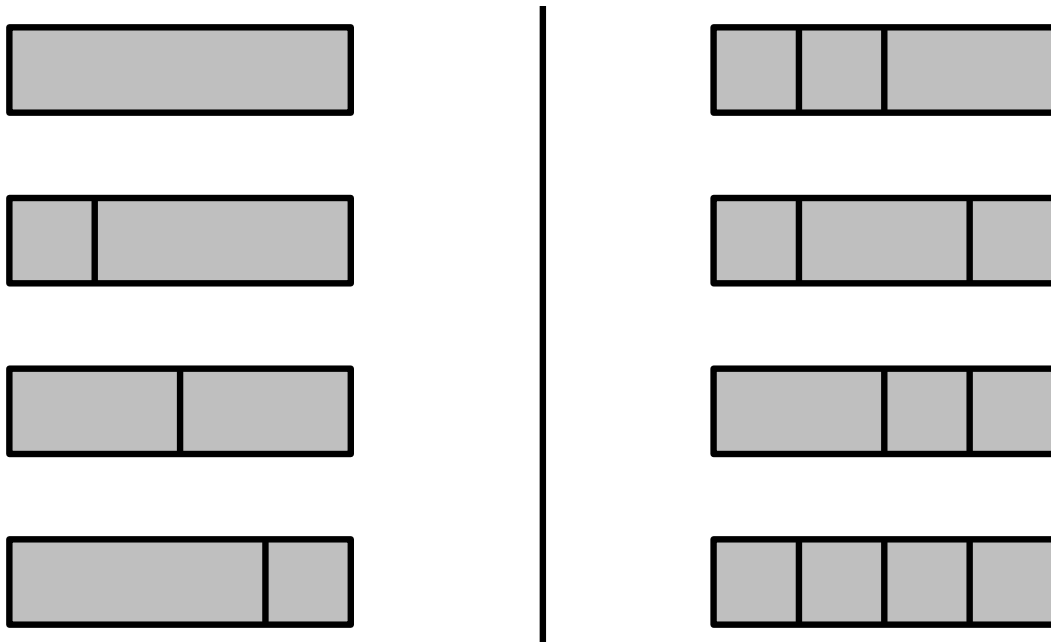


Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren **Ertrag maximieren?**

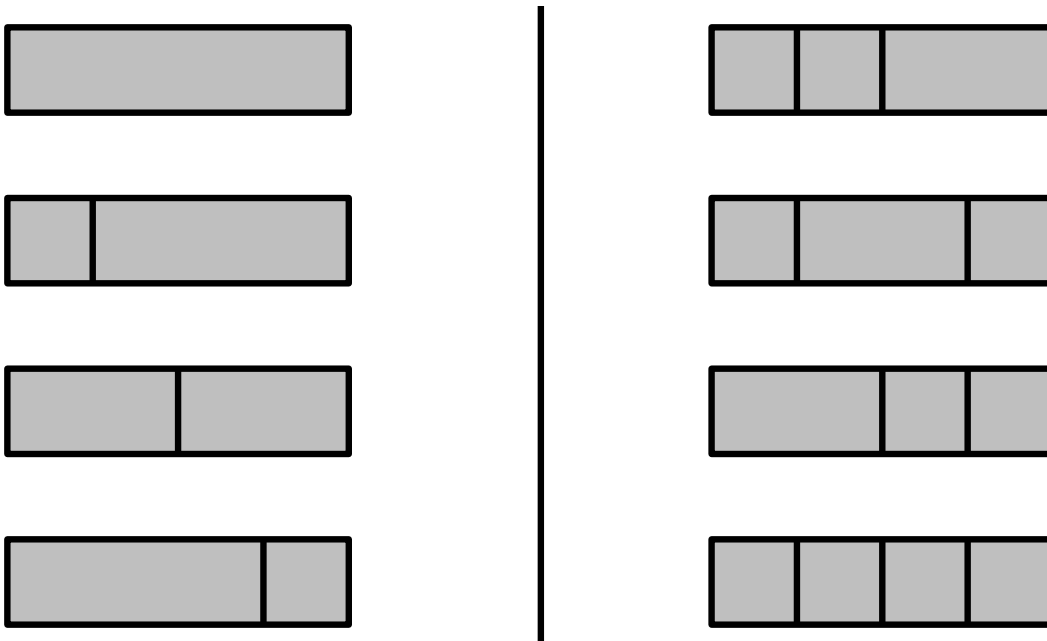


Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren **Ertrag maximieren**?



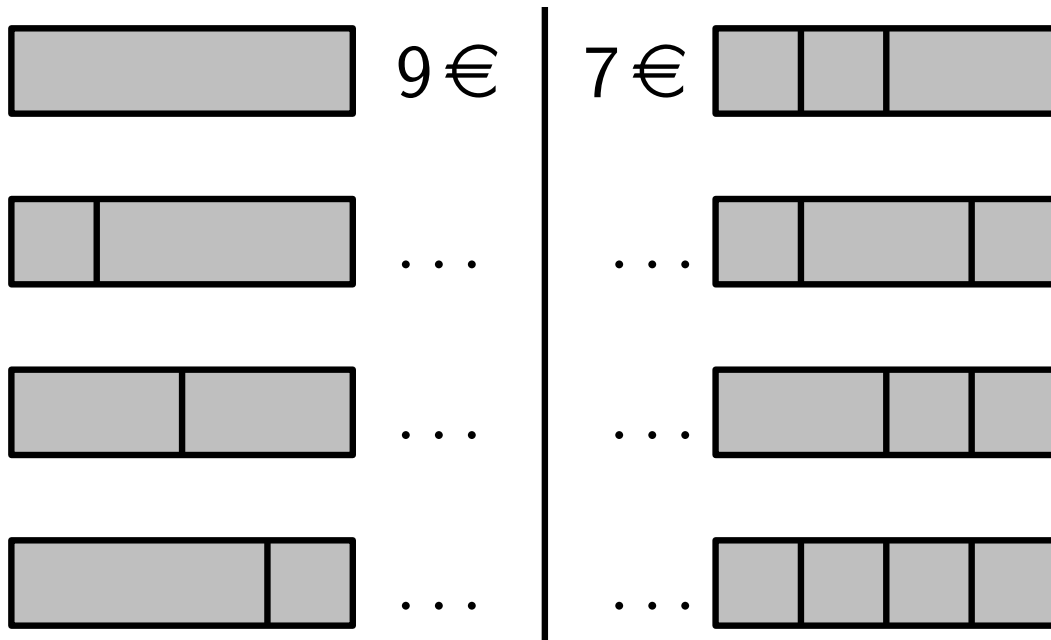
Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren **Ertrag maximieren?**



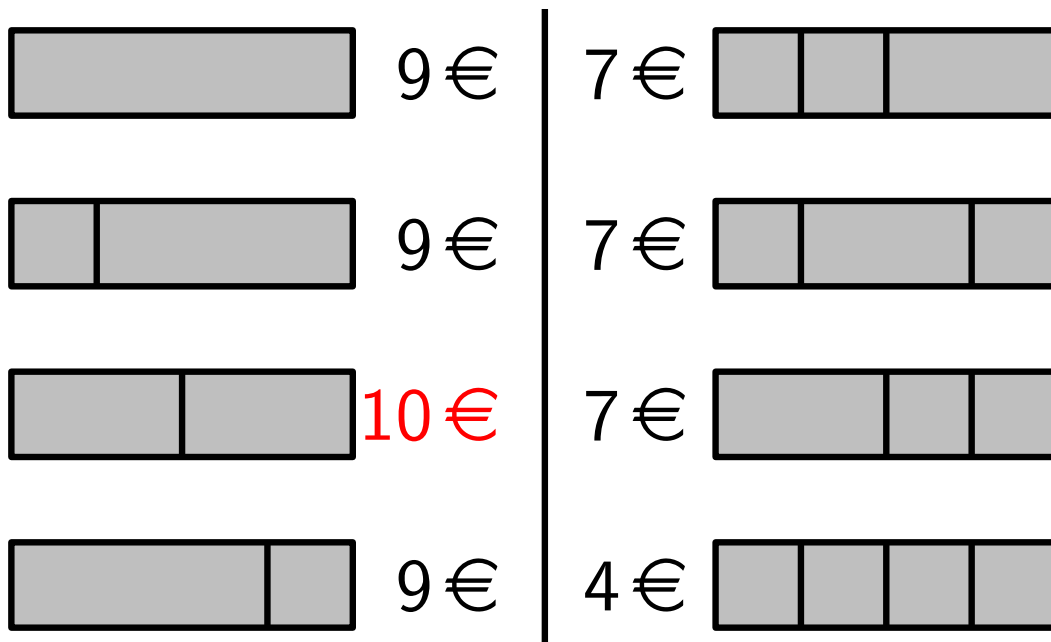
Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren **Ertrag maximieren?**



Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein ADSler schlägt vor:

- Berechne für $i = 1, \dots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i/i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise p_1, p_2, \dots, p_n für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

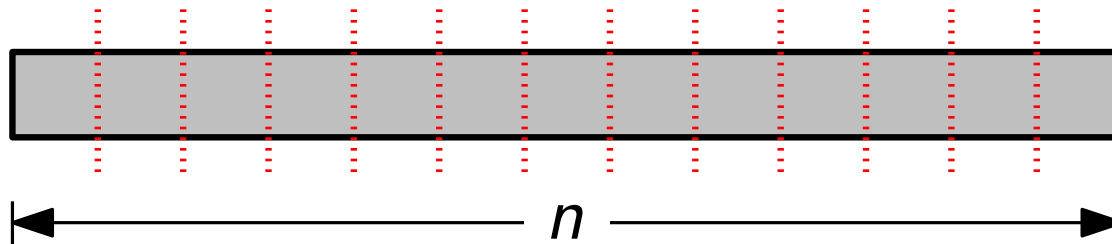
Ein ADSler schlägt vor:

- Berechne für $i = 1, \dots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i/i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

Funktioniert dieser Greedy-Algorithmus?  Ja? Beweisen!
Nein? Gegenbeispiel!

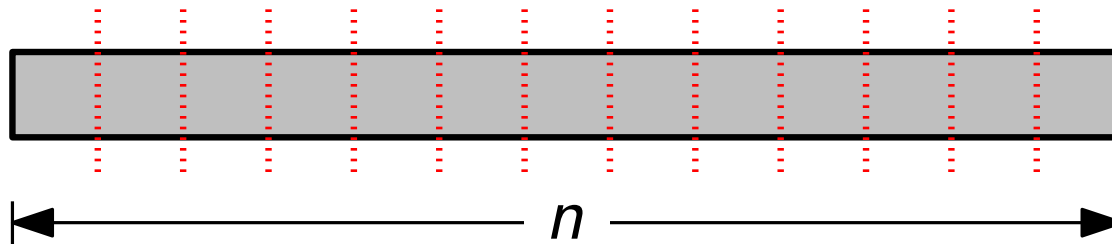
Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Rohe Gewalt

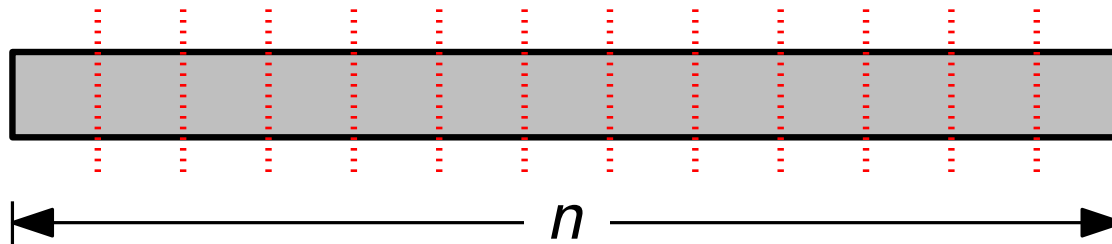
Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.

Rohe Gewalt

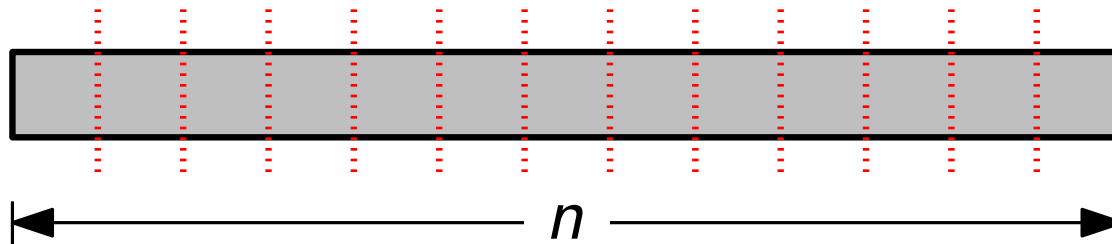
Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
 $\Rightarrow 2^{n-1}$ verschiedene Zerlegungen

Rohe Gewalt

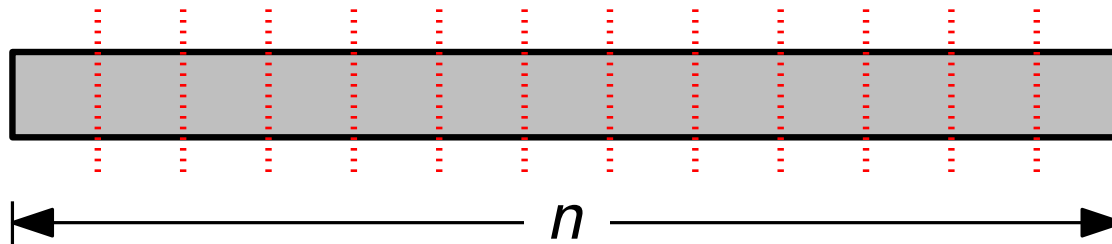
Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
 $\Rightarrow 2^{n-1}$ verschiedene Zerlegungen

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



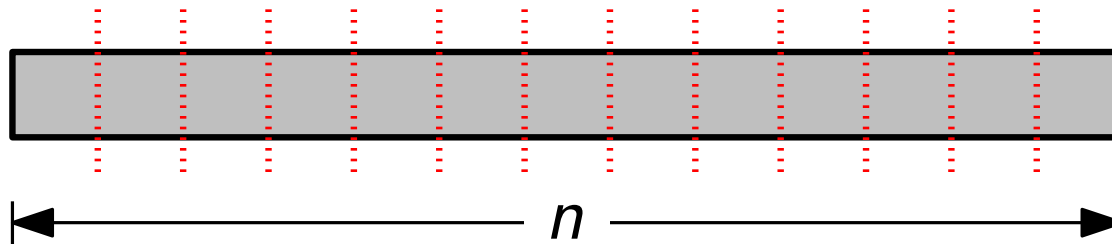
Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
⇒ 2^{n-1} verschiedene Zerlegungen

Oh, mein Gott!
Das ist ja **exponentiell!**



Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?

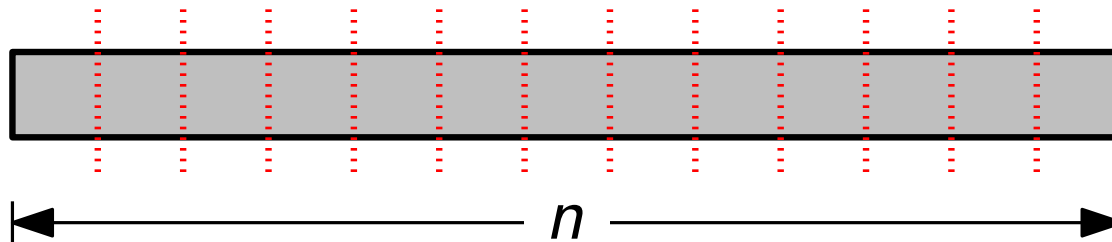


Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
 $\Rightarrow 2^{n-1}$ verschiedene Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



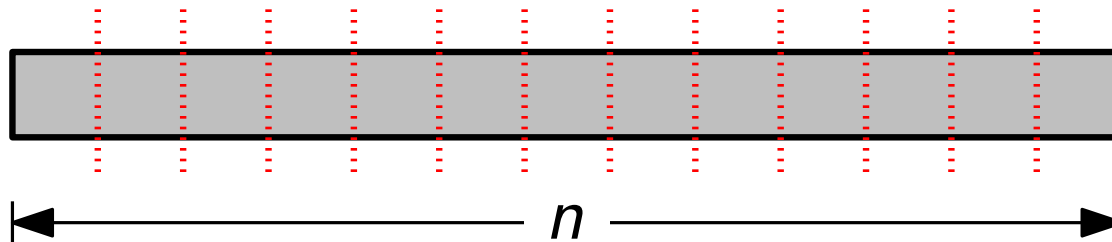
Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
 $\Rightarrow 2^{n-1}$ verschiedene* Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

*) Genauer: die gesuchte Anzahl ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* der Zahl n , die angibt, auf wie viele Arten man n als Summe von natürlichen Zahlen schreiben kann. Es gilt $p(n) \approx \frac{e^{\pi \sqrt{2n/3}}}{(4n\sqrt{3})}$

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
 $\Rightarrow 2^{n-1}$ verschiedene* Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

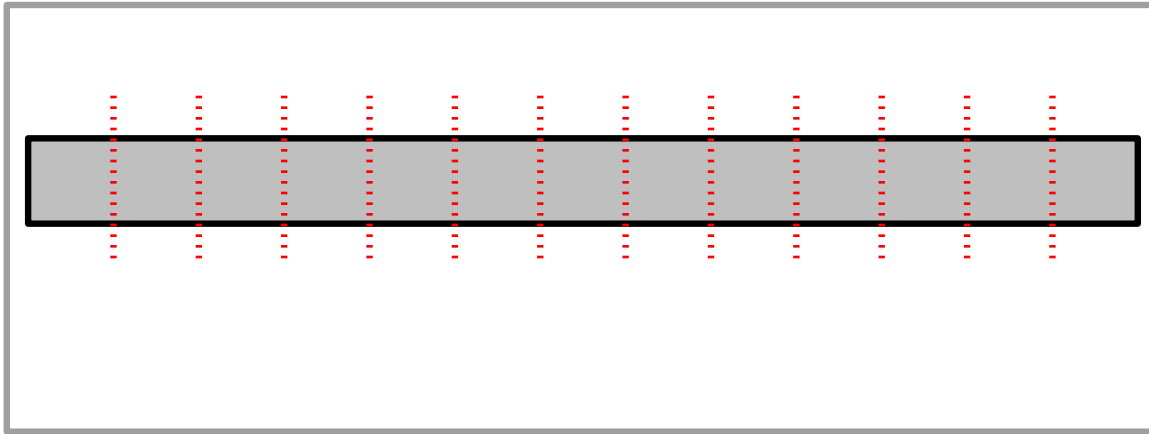
*) Genauer: die gesuchte Anzahl ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* der Zahl n , die angibt, auf wie viele Arten man n als Summe von natürlichen Zahlen schreiben kann. Es gilt $p(n) \approx e^{\pi \sqrt{2n/3}} / (4n\sqrt{3}) \in \Theta^*((13,00195\dots)\sqrt{n})$.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .

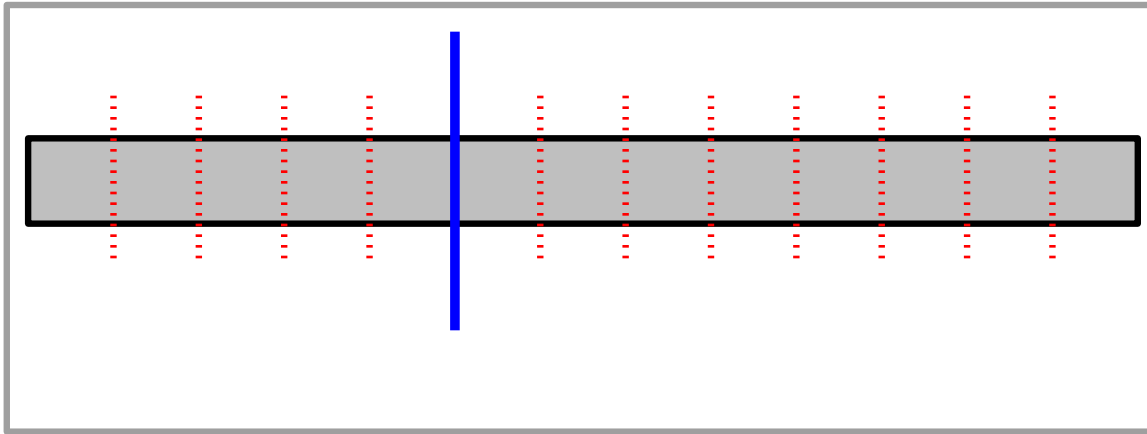
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



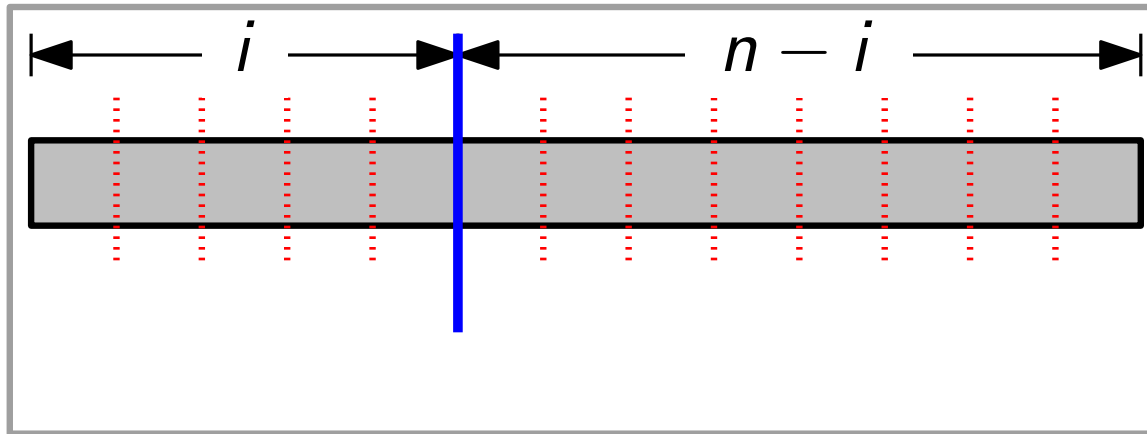
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



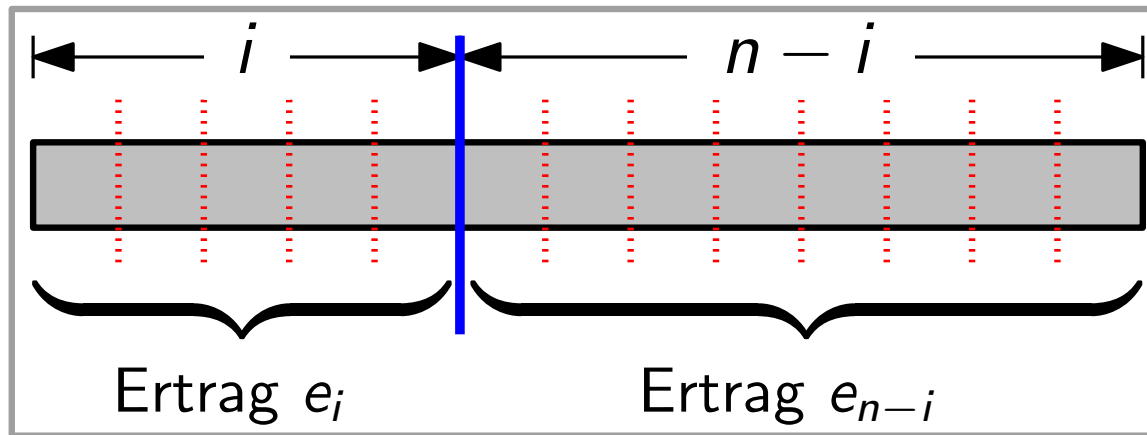
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



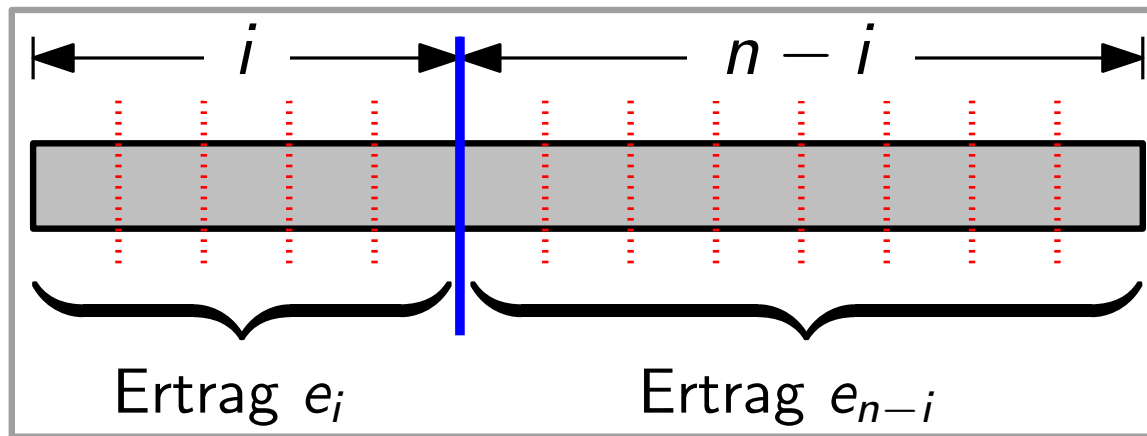
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

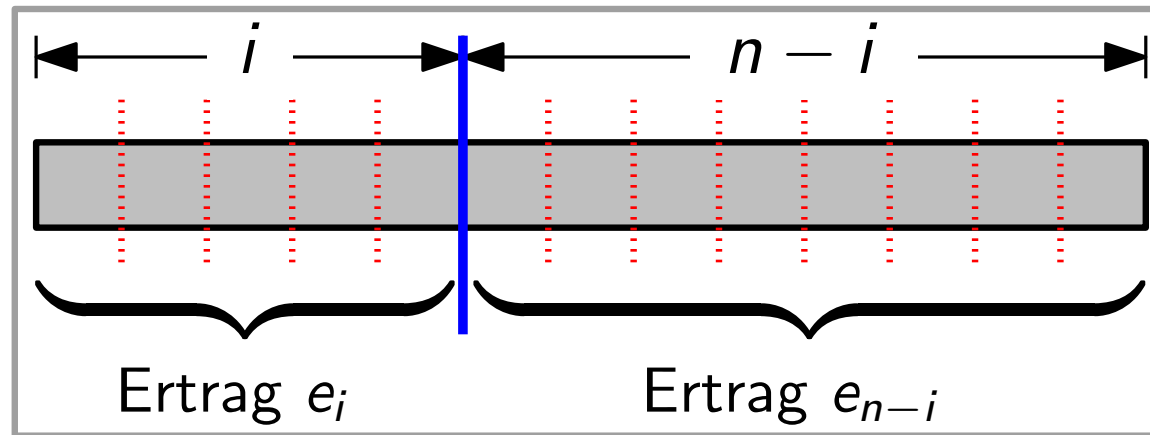
Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .

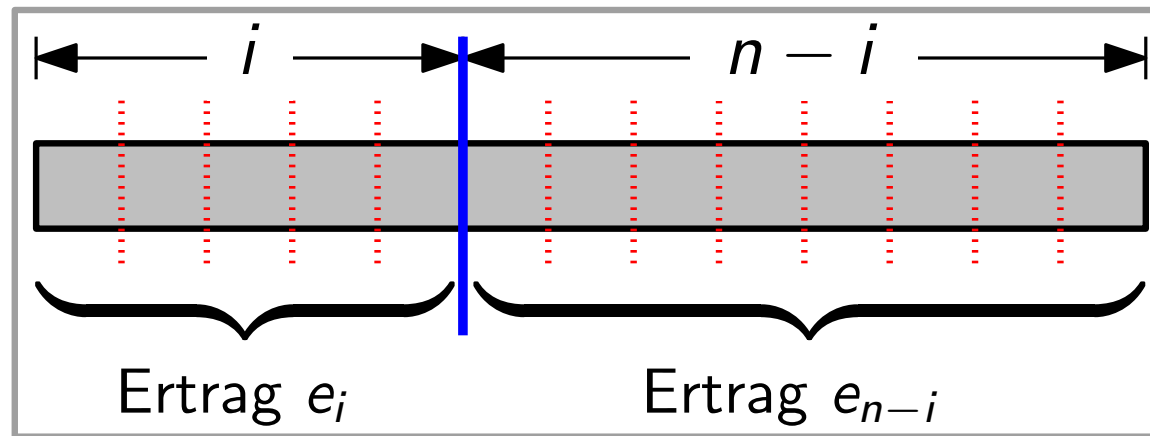


Phänomen
 der *optimalen*
Teilstruktur!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



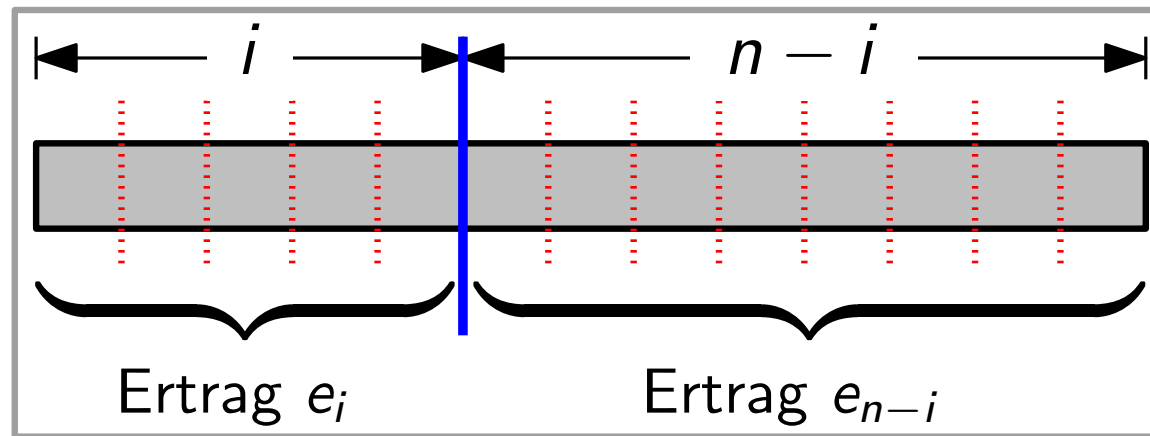
Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

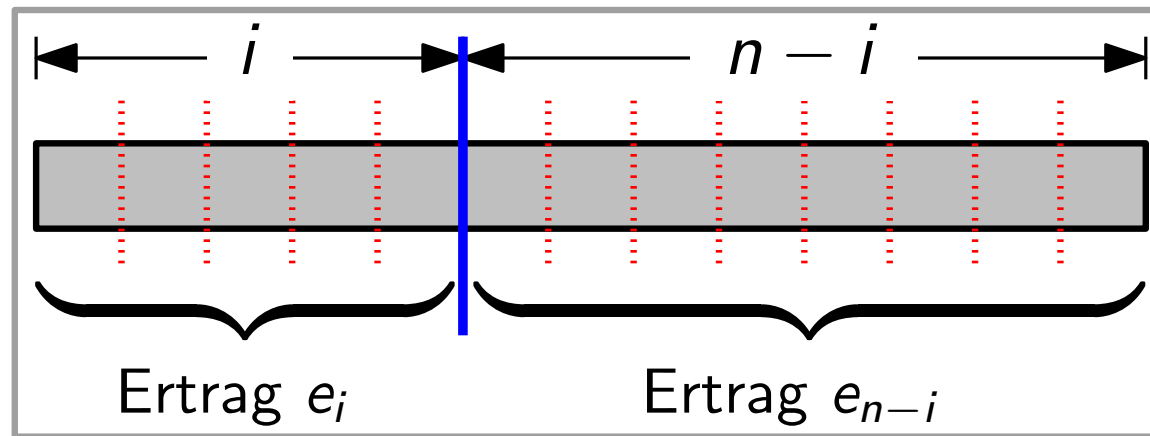
Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
der *optimalen*
Teilstruktur!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

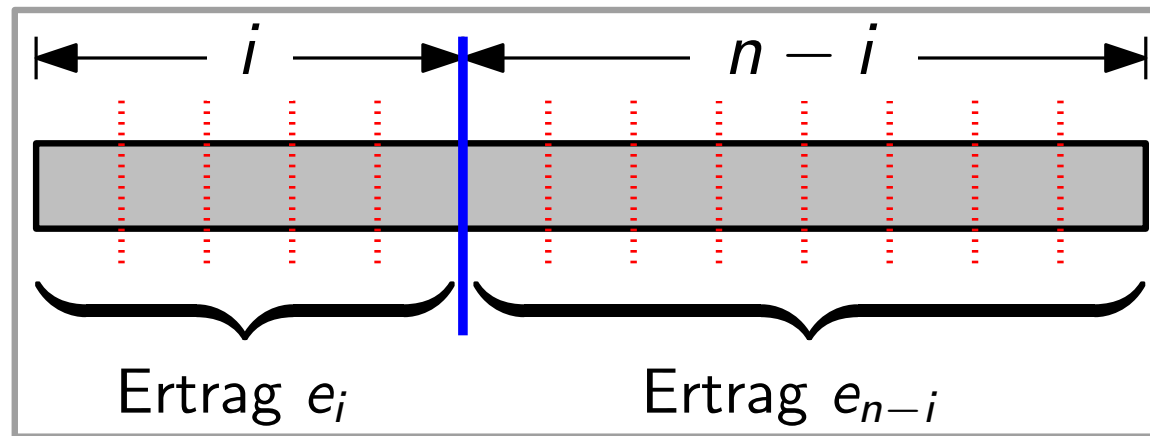
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

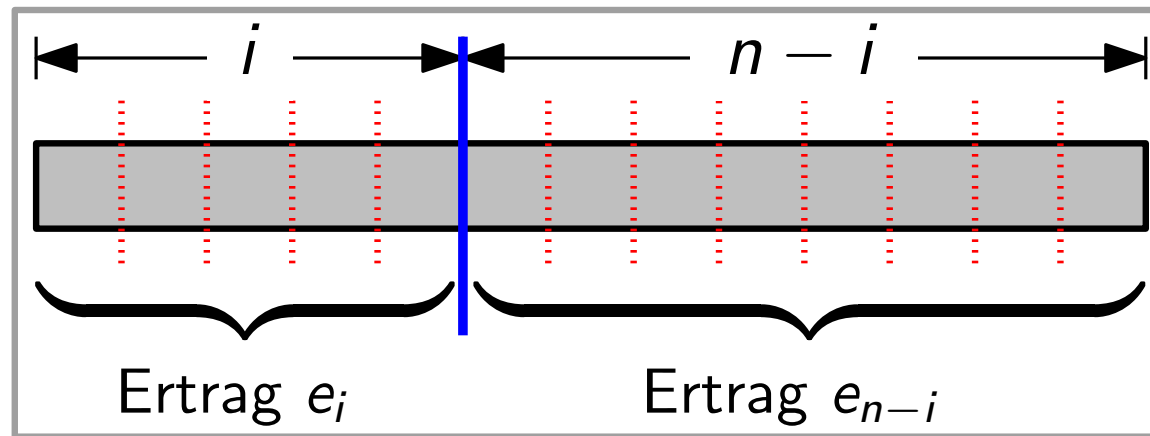
Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n =$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

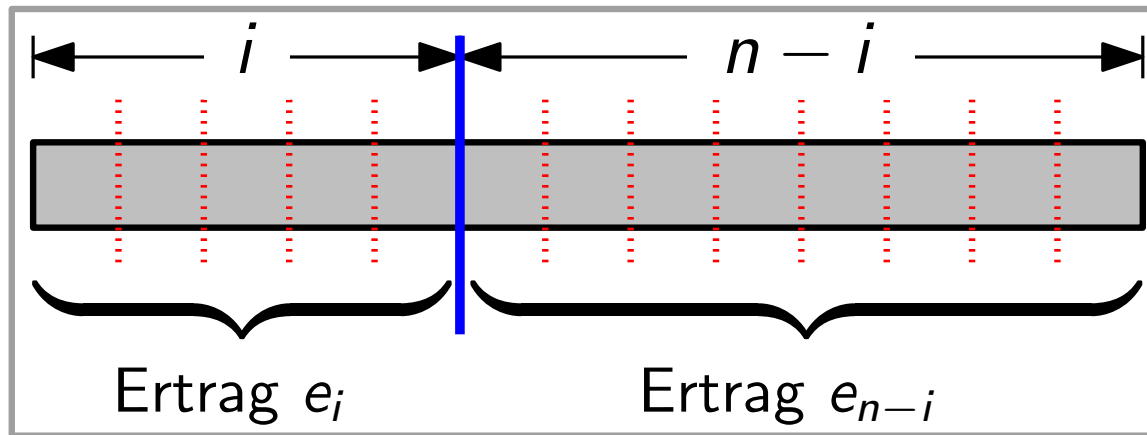
Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{ \quad \quad \quad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

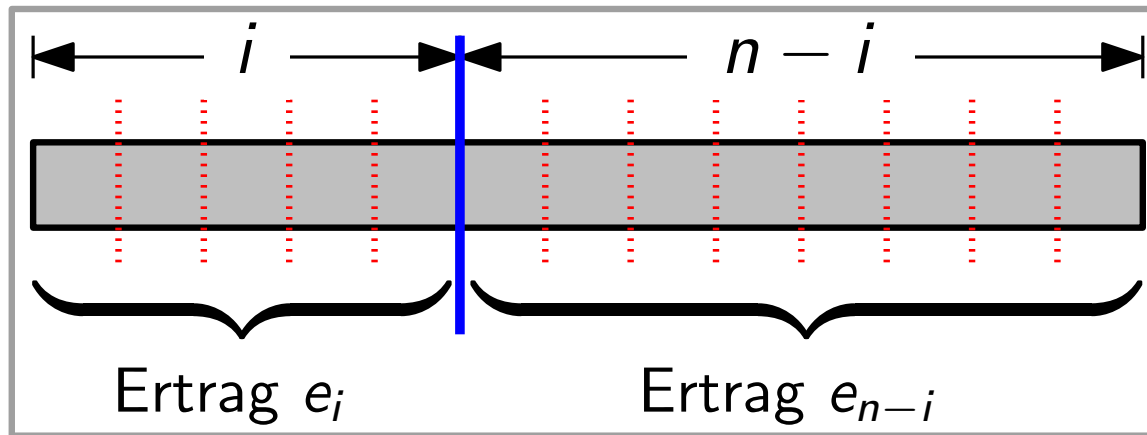
Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max \{ p_n, \quad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

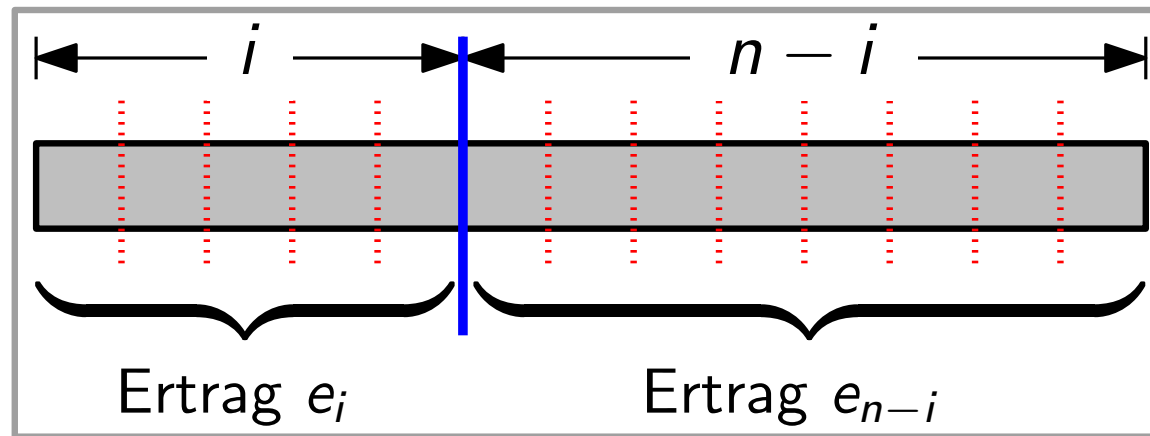
Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max \left\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, \right. \quad \left. \right\}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

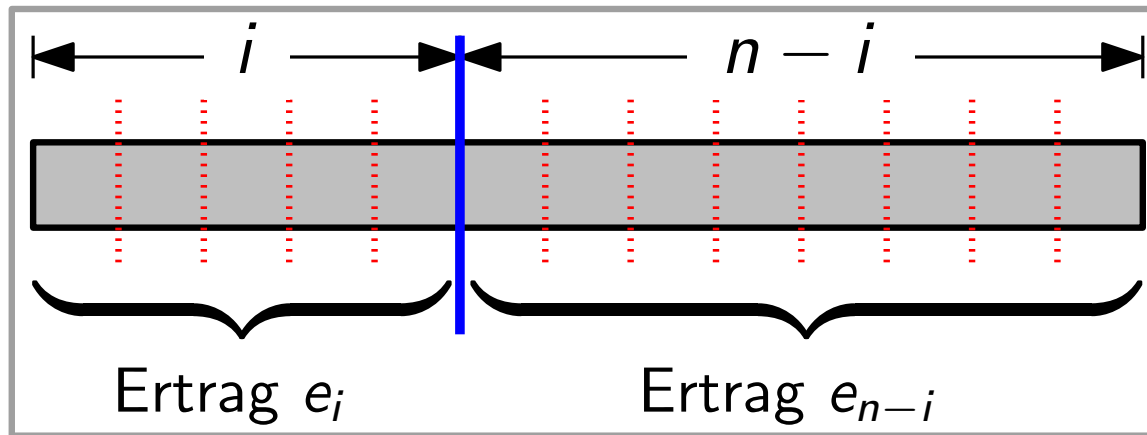
Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max \left\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots \right\}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

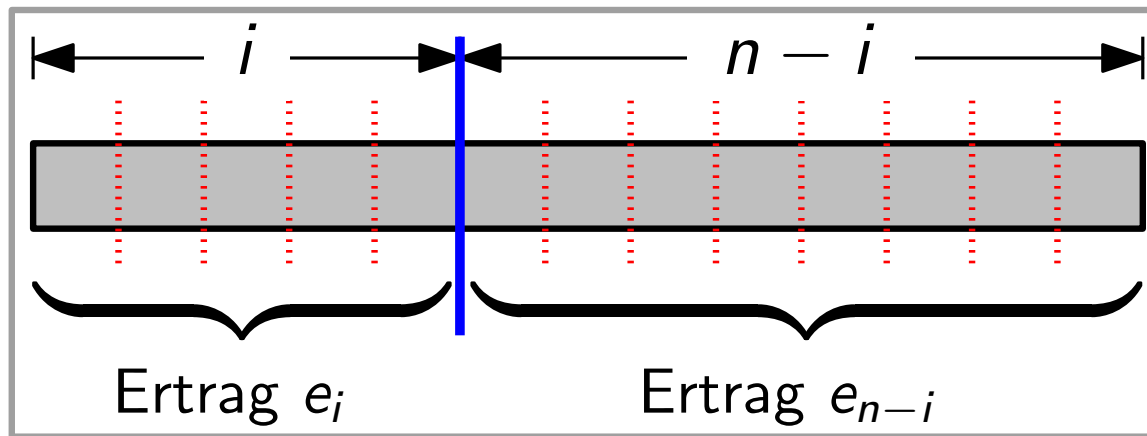
Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max \left\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, \right\}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
 sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i .



Phänomen
 der *optimalen
 Teilstruktur!*

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, welcher Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

Also probieren wir einfach alle möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max \{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

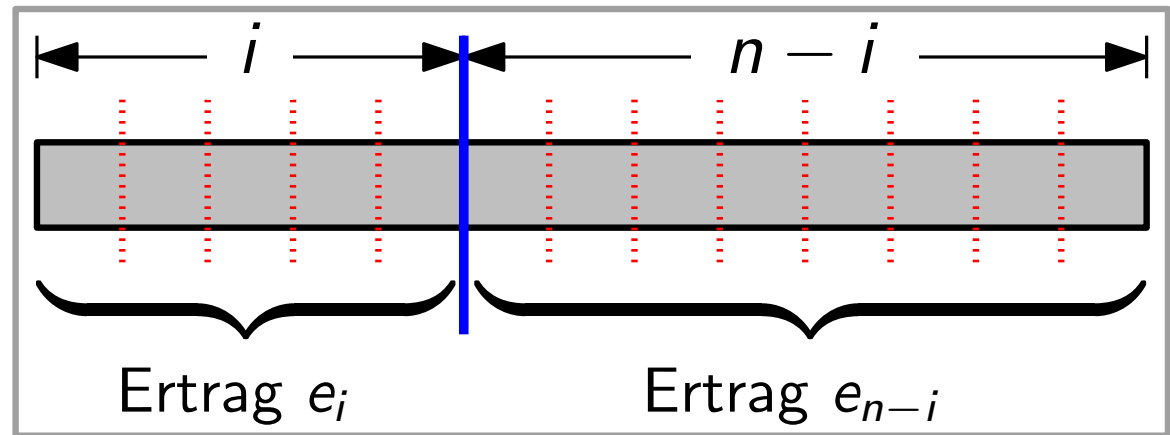
$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

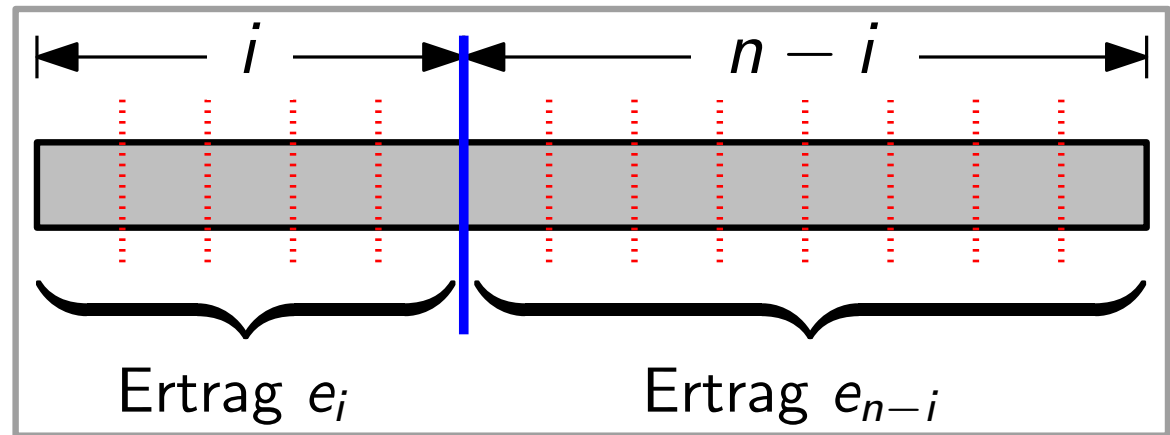


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!

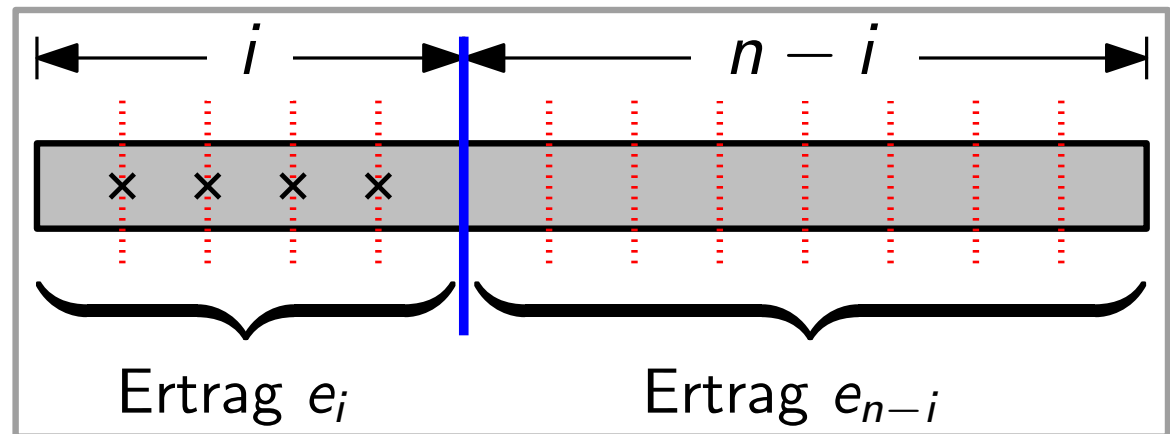


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!

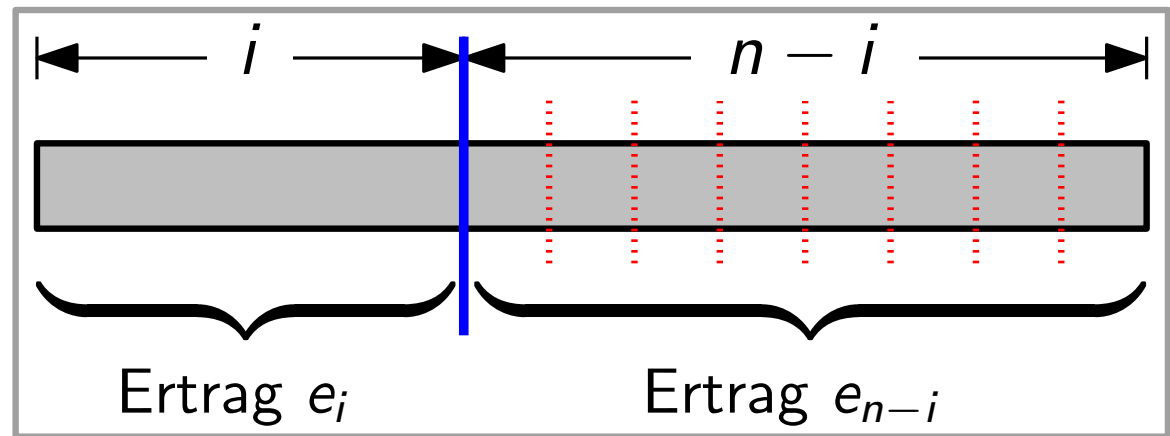


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!

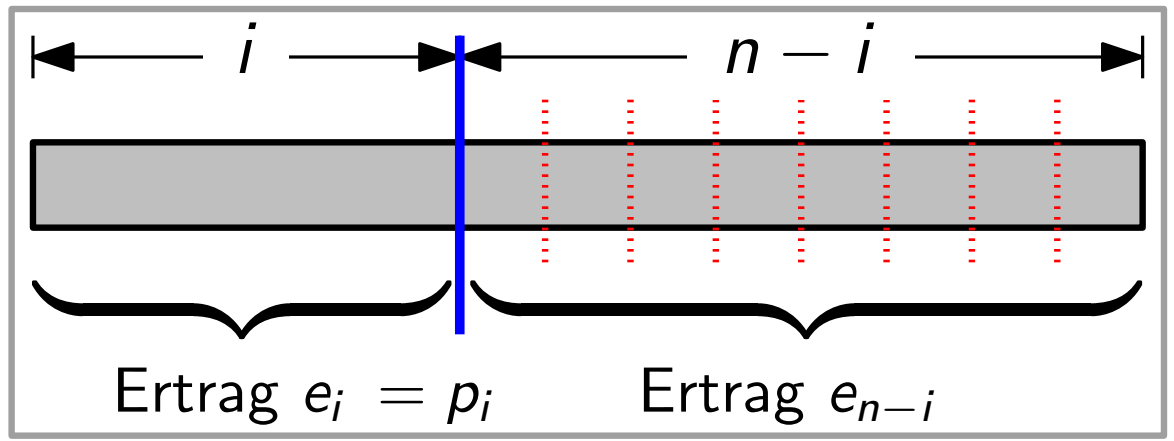


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte im linken Teilstück!

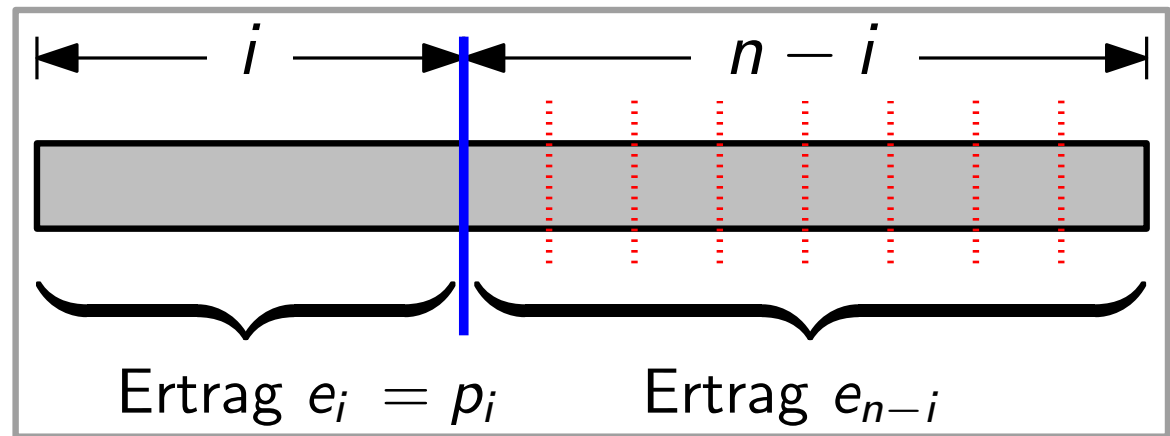


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!



Also gilt:

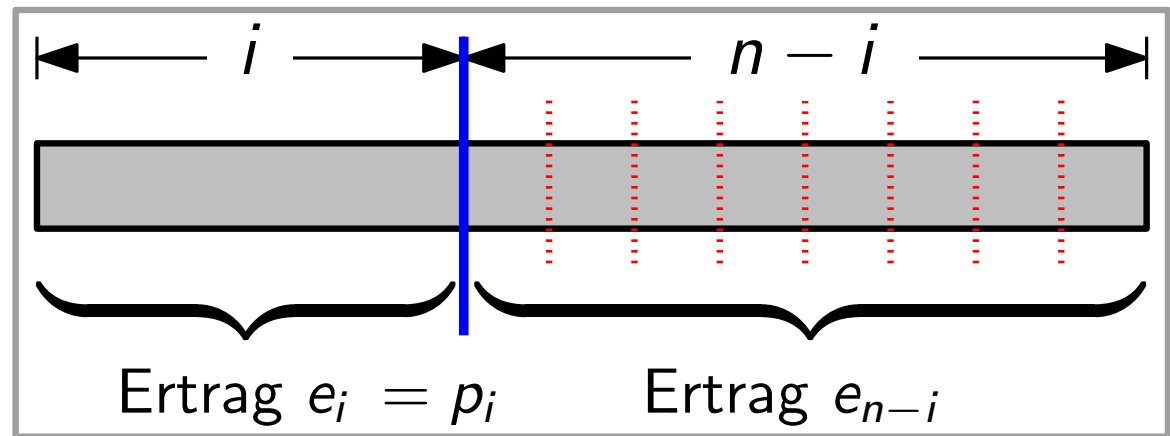
$$e_n =$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!



Also gilt:

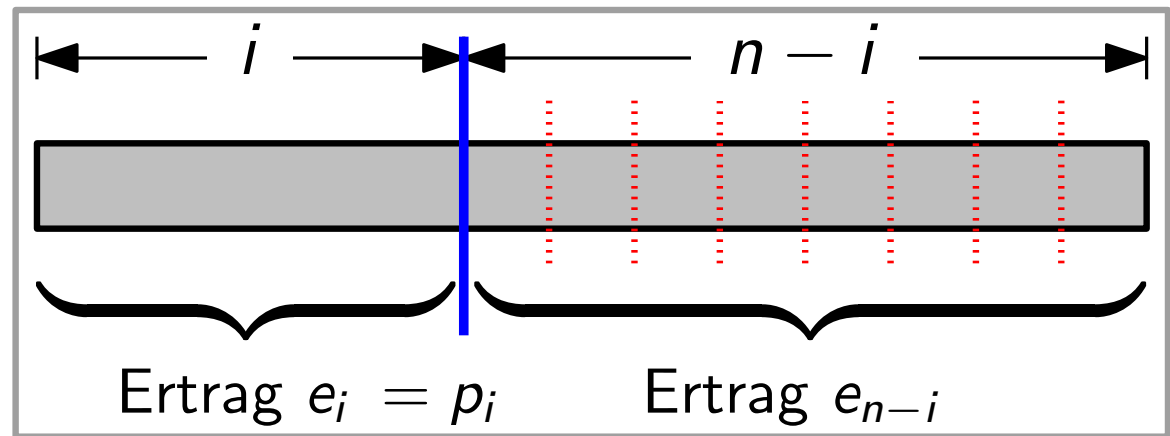
$$e_n = \max\{ p_n, \dots \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

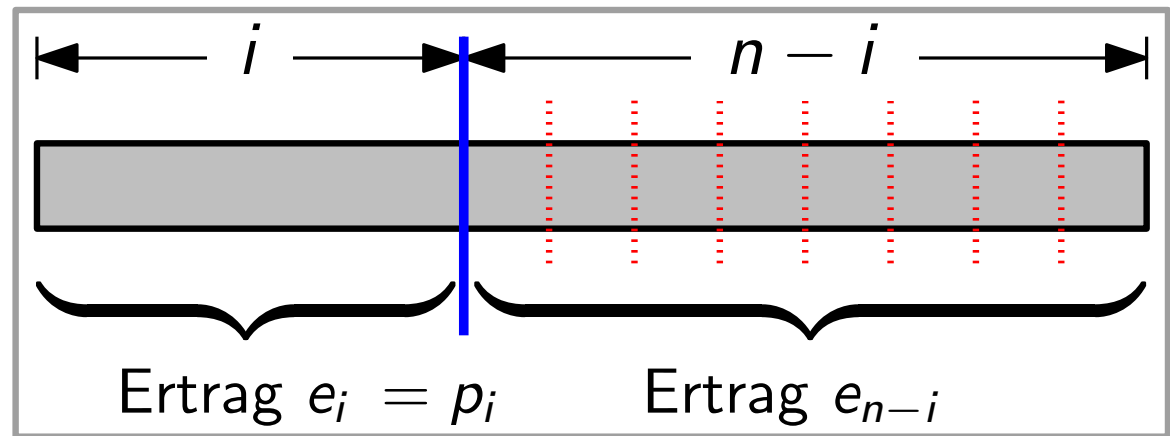
$$e_n = \max\{ p_n, p_1 + e_{n-1}, \dots \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

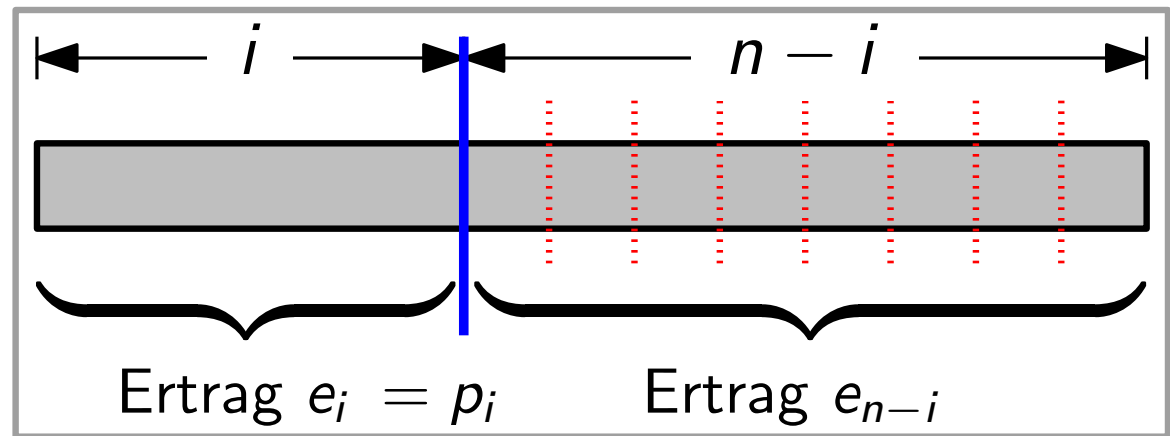
$$e_n = \max\{ p_n, p_1 + e_{n-1}, p_2 + e_{n-2}, \dots, \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!



Also gilt:

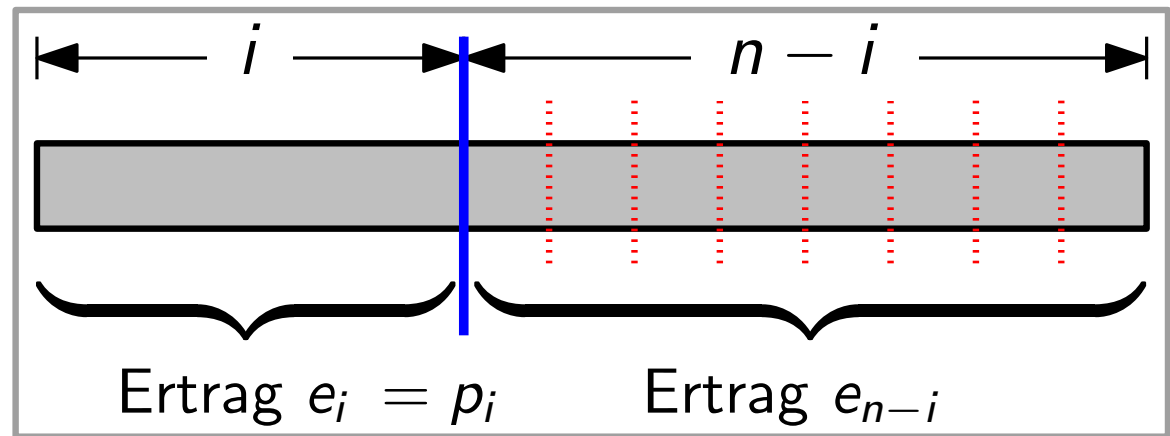
$$e_n = \max\{ p_n, p_1 + e_{n-1}, p_2 + e_{n-2}, \dots, p_{n-1} + e_1 \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiere weitere Schnitte
im linken Teilstück!



Also gilt:

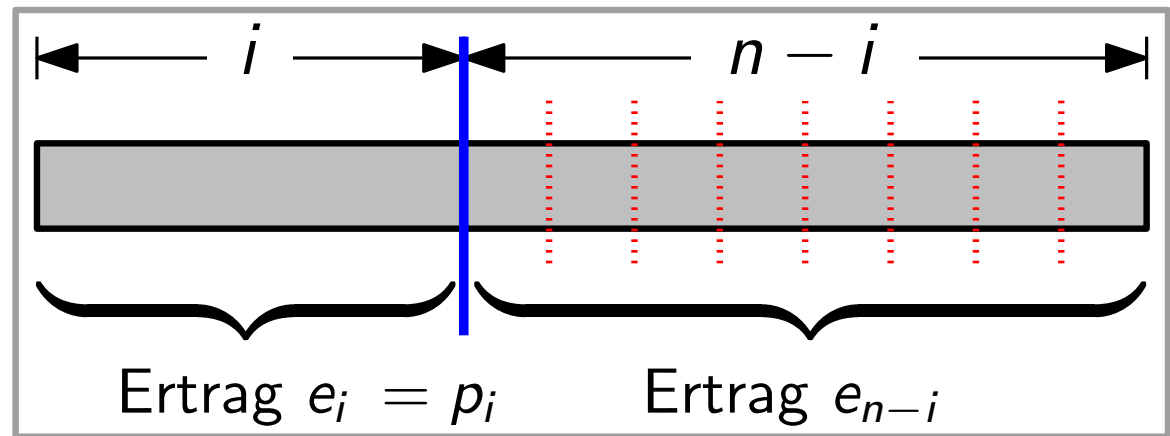
$$\begin{aligned} e_n &= \max\{ p_n, p_1 + e_{n-1}, p_2 + e_{n-2}, \dots, p_{n-1} + e_1 \} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{ p_i + e_{n-i} \} \end{aligned}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiете weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$e_n = \max\{ p_n, p_1 + e_{n-1}, p_2 + e_{n-2}, \dots, p_{n-1} + e_1 \}$$

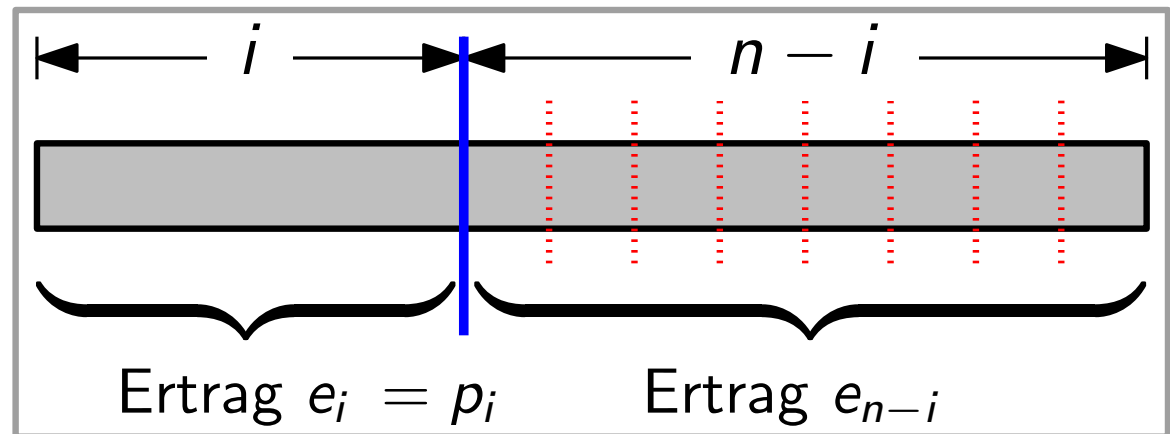
$$= \max_{1 \leq i \leq n} \{ p_i + e_{n-i} \}, \quad \text{wobei } e_0 := 0.$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{ p_n, e_1 + e_{n-1}, e_2 + e_{n-2}, \dots, e_{n-1} + e_1 \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiете weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$\begin{aligned} e_n &= \max\{ p_n, p_1 + e_{n-1}, p_2 + e_{n-2}, \dots, p_{n-1} + e_1 \} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{ p_i + e_{n-i} \}, \quad \text{wobei } e_0 := 0. \end{aligned}$$

Vorteil: Wert einer opt. Lösung ist Summe aus einer Zahl der Eingabe und *einem* Wert einer opt. Teillösung.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0

  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q
```

Laufzeit:

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$\Rightarrow A(0) =$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$\Rightarrow A(0) = 1$
und $A(n) =$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^n A(n-i)$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^n A(n-i)$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^n A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j)$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^n A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) = 2^n$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q

```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^n A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) = 2^n$$



3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```

StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = -∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n - i)}
  return q
  
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von $\text{StangenZerlegung}(p, \cdot)$ beim Ausführen von $\text{StangenZerlegung}(p, n)$

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^n A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) \stackrel{?}{=} 2^n$$

Beweis?!



3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*
Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: mit Tabelle

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

MemoStangenZerlegung(int[] p , int $n = p.length$)

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[]  $p$ , int  $n = p.length$ )
```

```
   $e = \text{new int}[0..n]$ 
```

```
   $e[0] = 0$ 
```

```
  for  $i = 1$  to  $n$  do
```

```
     $e[i] = -\infty$ 
```

```
  return HauptStangenZerlegung( $p, n, e$ )
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
```

```
  e = new int[0..n]
```

```
  e[0] = 0
```

```
  for i = 1 to n do
```

```
    e[i] =  $-\infty$ 
```

```
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)
```

```
HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
```

```
  e = new int[0..n]
```

```
  e[0] = 0
```

```
  for i = 1 to n do
```

```
    e[i] =  $-\infty$ 
```

```
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)
```

```
HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
```

```
  if  $e[n] > -\infty$  then return e[n]
```

```
  q =  $-\infty$ 
```

```
  for i = 1 to n do
```

```
    q = max{q, p[i] + HauptStangenZerlegung(p, n - i, e)}
```

```
  e[n] = q; return q
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
```

```
  e = new int[0..n]
```

```
  e[0] = 0
```

```
  for i = 1 to n do
```

```
    e[i] =  $-\infty$ 
```

```
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)
```

```
HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
```

```
  if  $e[n] > -\infty$  then return e[n]
```

```
  q =  $-\infty$ 
```

```
  for i = 1 to n do
```

```
    q = max{q, p[i] + HauptStangenZerlegung(p, n - i, e)}
```

```
  e[n] = q; return q
```

Laufzeit? – Wie letzte Folie? – Asymptotisch schneller?

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

```
BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

```
BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)
```

```
    e = new int[0..n]
```

```
    e[0] = 0
```

```
    for j = 1 to n do
```

```
        q =  $-\infty$ 
```

```
        for i = 1 to j do
```

```
            q = max{ q, p[i] + e[j - i] }
```

```
        e[j] = q
```

```
    return q
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p , int n)

$e = \text{new int}[0..n]$

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$q = -\infty$

for $i = 1$ **to** j **do**

$q = \max\{q, p[i] + e[j - i]\}$

$e[j] = q$

return q

Neu: *kein*
rekursiver
Aufruf!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p , int n)

$e = \text{new int}[0..n]$

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$q = -\infty$

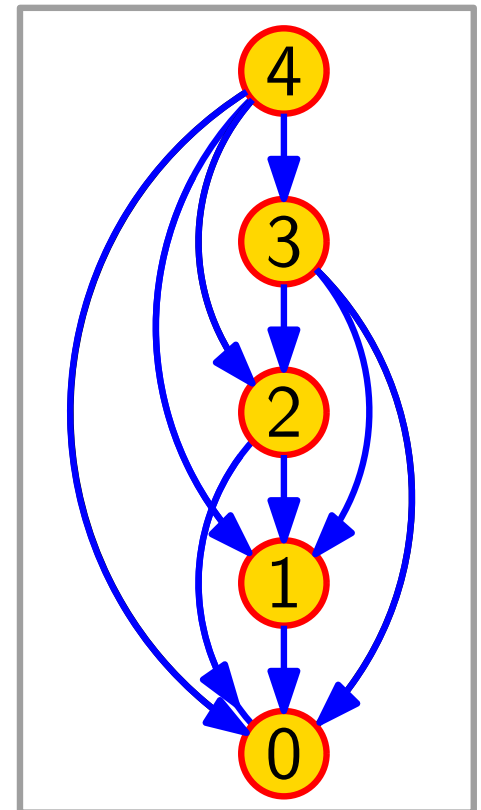
for $i = 1$ **to** j **do**

$q = \max\{q, p[i] + e[j - i]\}$

$e[j] = q$

return q

Neu: *kein*
rekursiver
Aufruf!



Graph der
Teilinstanzen

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p , int n)

$e = \text{new int}[0..n]$

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$q = -\infty$

for $i = 1$ **to** j **do**

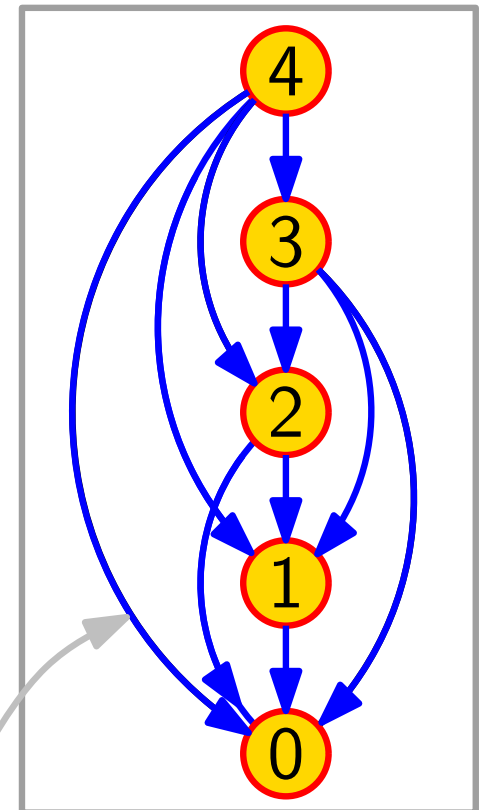
$q = \max\{q, p[i] + e[j - i]\}$

$e[j] = q$

return q

Neu: *kein*
rekursiver
Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer
opt. Lösung von Teilinstanz i .



Graph der
Teilinstanzen

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p , int n)

$e = \text{new int}[0..n]$

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$q = -\infty$

for $i = 1$ **to** j **do**

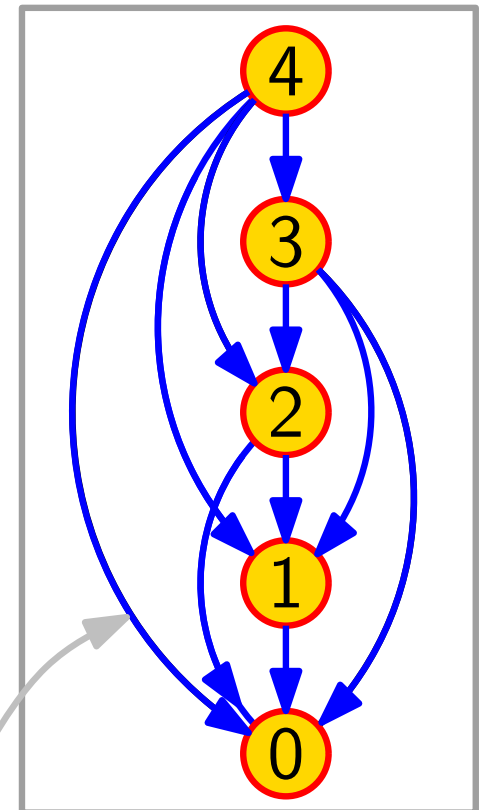
$q = \max\{q, p[i] + e[j - i]\}$

$e[j] = q$

return q

Neu: *kein*
rekursiver
Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer
opt. Lösung von Teilinstanz i .



Graph der
Teilinstanzen

Beob. Größe des Graphen (d.h. in erster Linie Anz. Kanten) ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p , int n)

$e = \text{new int}[0..n]$

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$q = -\infty$

for $i = 1$ **to** j **do**

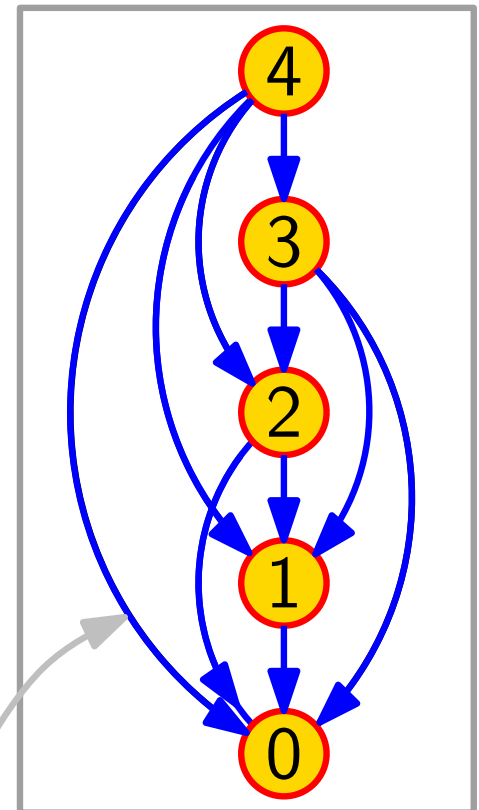
$q = \max\{q, p[i] + e[j - i]\}$

$e[j] = q$

return q

Neu: kein
rekursiver
Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer
opt. Lösung von Teilinstanz i .



Graph der
Teilinstanzen

Beob. Größe des Graphen (d.h. in erster Linie Anz. Kanten) ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

Satz. BottUpSZerl() und MemoSZerl() laufen in $O(\quad)$ Zeit.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p , int n)

$e = \text{new int}[0..n]$

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$q = -\infty$

for $i = 1$ **to** j **do**

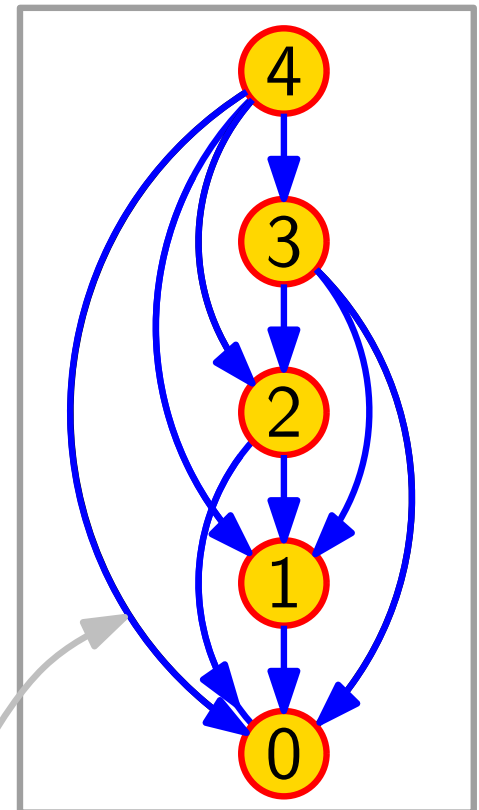
$q = \max\{q, p[i] + e[j - i]\}$

$e[j] = q$

return q

Neu: kein
rekursiver
Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer
opt. Lösung von Teilinstanz i .



Graph der
Teilinstanzen

Beob. Größe des Graphen (d.h. in erster Linie Anz. Kanten) ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

Satz. BottUpSZerl() und MemoSZerl() laufen in $O(n^2)$ Zeit.

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
   $\ell = \text{new int}[0..n]$ ;  $e = \text{new int}[0..n]$ 
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e,  $\ell$ , n)
  while  $n > 0$  do
     $\perp$  print  $\ell[n]$ ;  $n = n - \ell[n]$ 
```

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
```

```
   $\ell = \text{new int}[0..n]$ ; e = new int[0..n]
```

```
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e,  $\ell$ , n)
```

```
  while n > 0 do // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus  
    | print  $\ell[n]$ ; n = n -  $\ell[n]$ 
```

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
  ℓ = new int[0..n]; e = new int[0..n]
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
  while n > 0 do          // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
    _ print ℓ[n]; n = n - ℓ[n]
```

```
ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)
```

```
  e[0] = 0
```

```
  for j = 1 to n do
```

```
    q = -∞
```

```
    for i = 1 to j do
```

```
      if q < p[i] + e[j - i] then
```

```
        q = p[i] + e[j - i]
```

```
        ℓ[j] = i
```

```
    e[j] = q
```

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
  ℓ = new int[0..n]; e = new int[0..n]
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
  while n > 0 do           // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
    _ print ℓ[n]; n = n - ℓ[n]
```

```
ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
    q = -∞
    for i = 1 to j do
      if q < p[i] + e[j - i] then
        q = p[i] + e[j - i]
        ℓ[j] = i           // merke Länge des 1. Teilstücks
    e[j] = q
```

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,
d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit
 $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,
d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit
 $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

Fahrplan

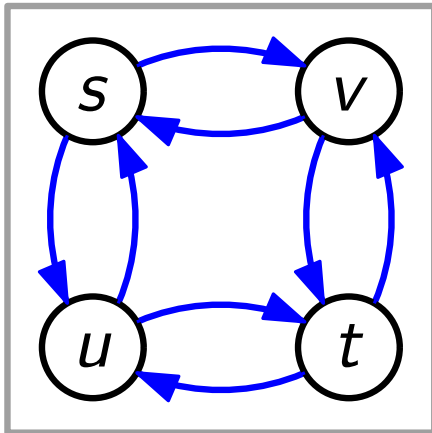
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



Fahrplan

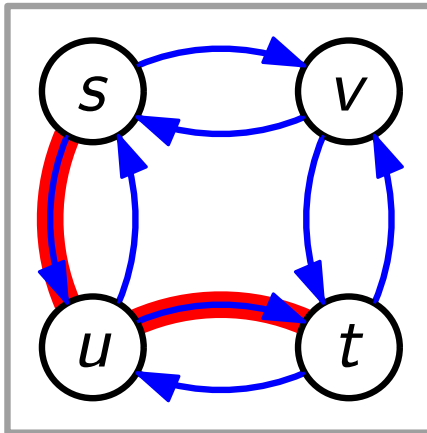
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s - t -Weg.

Fahrplan

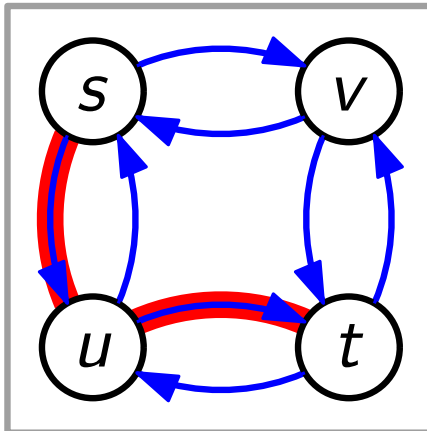
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s - t -Weg.

Aber:

Fahrplan

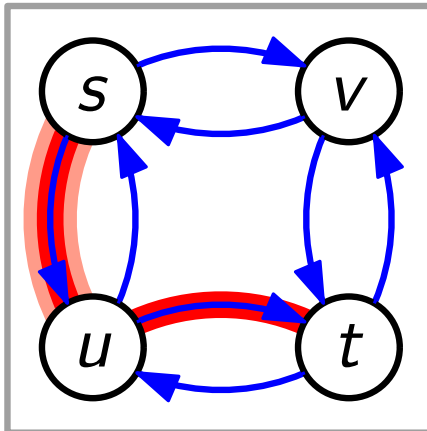
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s - t -Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s - u -Weg;

Fahrplan

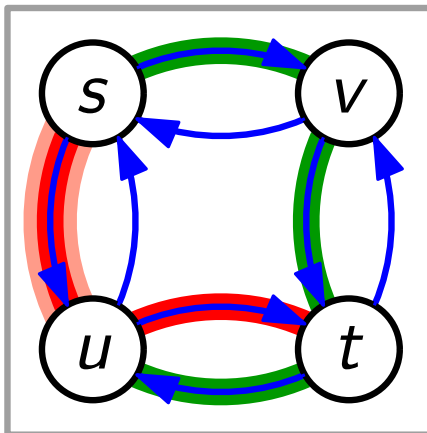
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s - t -Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s - u -Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s - u -Weg!

Fahrplan

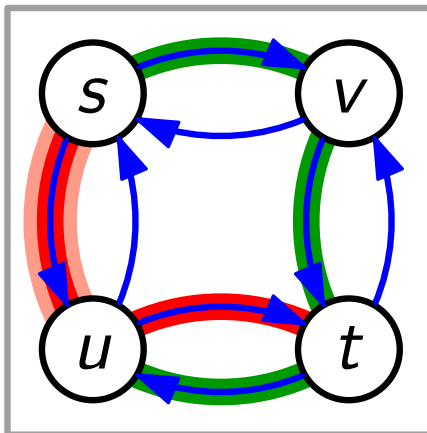
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.




$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s - t -Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s - u -Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s - u -Weg!

Fahrplan

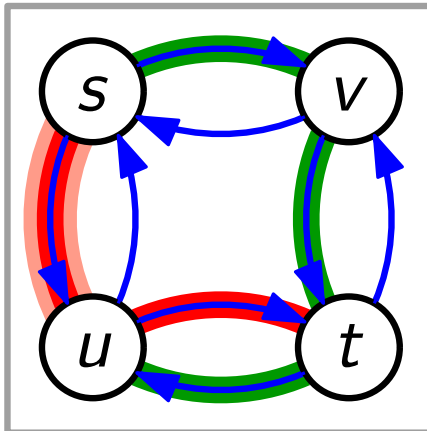
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren 
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s - t -Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.




$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s - t -Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s - u -Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s - u -Weg!

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren 
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

^{*}) Es ist NP-schwer für (G, s, t, k) zu entscheiden, ob G einen einfachen s - t -Weg der Länge k enthält. (Vgl. Hamilton-Weg!)

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$
mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$
mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$
mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Beob₁ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Beob₁ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob₂ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Beob₁ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob₂ Dieses Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s - t -Weg π gehe durch u , d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Beob₁ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob₂ Dieses Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s - t -Weg π gehe durch u , d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:

π_{su} ist längster s - u -Weg; π_{ut} ist längster u - t -Weg –

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Beob₁ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob₂ Dieses Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s - t -Weg π gehe durch u , d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:

π_{su} ist längster s - u -Weg; π_{ut} ist längster u - t -Weg –
sonst wäre π kein längster s - t -Weg.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s - t -Weg.

Beob₁ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob₂ Dieses Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s - t -Weg π gehe durch u , d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:

π_{su} ist längster s - u -Weg; π_{ut} ist längster u - t -Weg –
sonst wäre π kein längster s - t -Weg.

Außerdem gilt $V(\pi_{su}) \cap V(\pi_{ut}) = \{u\}$;
sonst gäbe es einen Kreis!

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren



Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren



Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$d_v =$ // Länge eines längsten s - v -Wegs

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

– G topologisch sortieren

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

– G topologisch sortieren

– d -Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

– G topologisch sortieren

– d -Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

– for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d -Werte berechnen

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

– G topologisch sortieren

– d -Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

– for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d -Werte berechnen

so!

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

– G topologisch sortieren

– d -Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

– for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d -Werte berechnen

so!

Übrigens: *kürzeste* Wege in kreisfreien Graphen gehen analog (mit min statt max und $+\infty$ statt $-\infty$)

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

- Ketten von Matrixmultiplikationen
- Längste gemeinsame Teilfolge (in Zeichenketten)
- Optimale binäre Suchbäume

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

- Ketten von Matrixmultiplikationen
- Längste gemeinsame Teilfolge (in Zeichenketten)
- Optimale binäre Suchbäume

Lesen Sie Kapitel 15.2–5 !!!