

# Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2019/20

21. Vorlesung

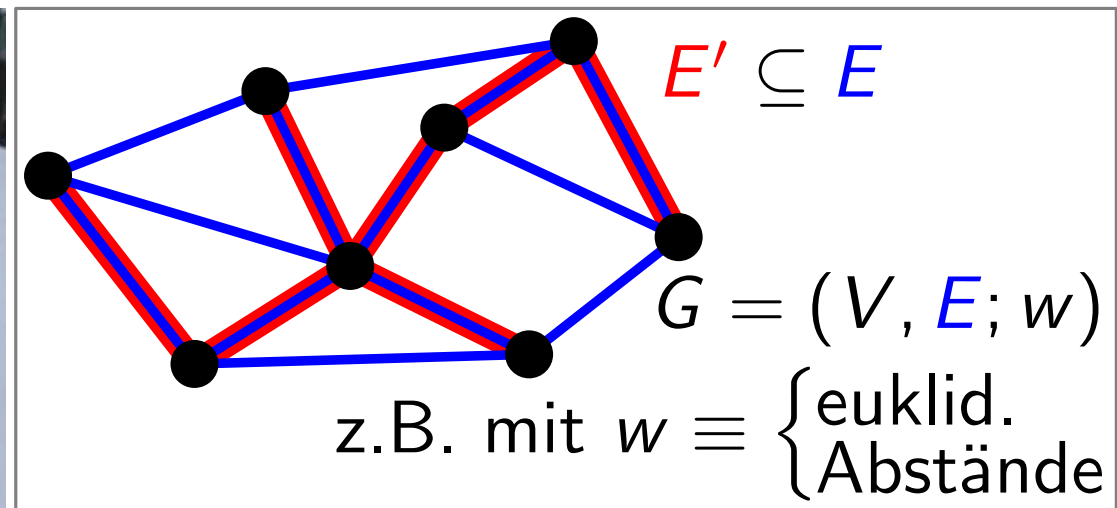
## Minimale Spann bäume

# Motivation

**Gegeben:** **zusammenhängendes** Straßennetz  $G = (V, E)$  mit Kantengewichten  $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , das eine Menge  $V$  von  $n$  Städten verbindet.

**Gesucht:** Teilnetz  $G' = (V, E')$  mit  $E' \subseteq E$ , so dass

- (1) man von jeder Stadt in  $G'$  zu jeder anderen kommen kann („ $G'$  spannt  $G$  auf“) und
- (2) die „Schneeräumkosten“  $w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$  minimal sind unter allen Teilnetzen, die (1) erfüllen.



# Beobachtung

Wegen der Minimalität von  $w(E')$  gilt:

$G'$  hat keine Kreise  $\Rightarrow G'$  ist ein Wald.

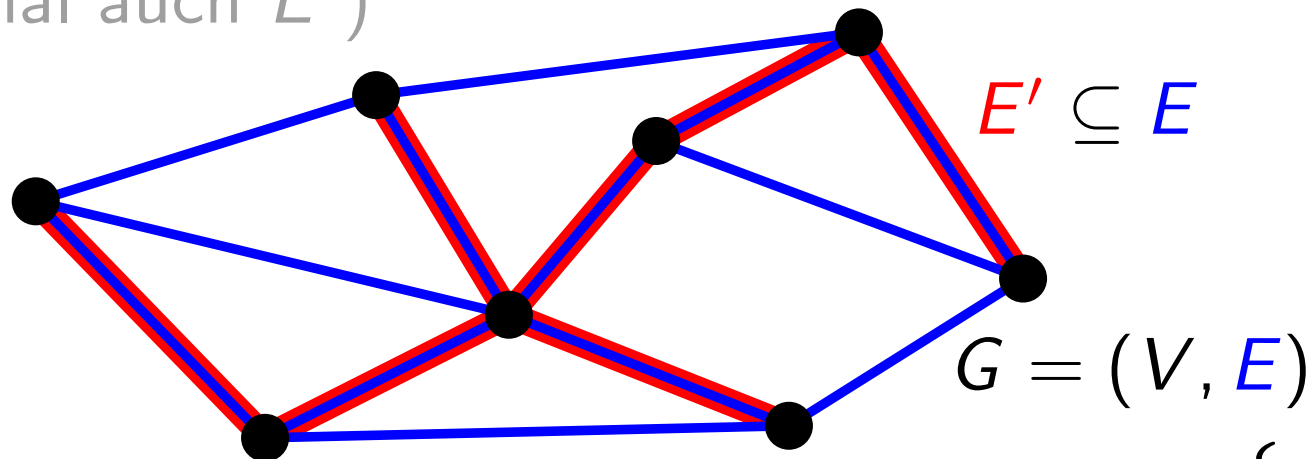
$G'$  „erbt“ Zusammenhang von  $G \Rightarrow G'$  Baum.

$G'$  spannt  $G$  auf  $\Rightarrow G'$  ist Spannbaum von  $G$ .

$G'$  hat minimales Gewicht unter *allen* Spannbäumen von  $G$ .

Wir nennen  $G'$  kurz *minimalen Spannbaum* von  $G$ .

(manchmal auch  $E'$ )



**Beob.**  $|E'| = |V| - 1$

z.B. mit  $w \equiv \begin{cases} \text{euklid.} \\ \text{Abstände} \end{cases}$

# Generischer Min.-Spannbaum-Algorithmus

GenericMST(UndirectedConnectedGraph  $G$ , EdgeWeights  $w$ )

$A = \emptyset$

**while**  $|A| < |V| - 1$  **do**

// *Invariante*:  $A$  ist Teilmenge eines min. Spannbaums von  $G$

finde Kante  $uv$ , die **sicher** für  $A$  ist

$A = A \cup \{uv\}$

**return**  $A$

Wir sagen  $uv$  ist *sicher* für  $A$ , falls Invariante für  $A \cup \{uv\}$  gilt.

**Beob.** Dies ist ein sogenannter *Greedy-Algorithmus*!

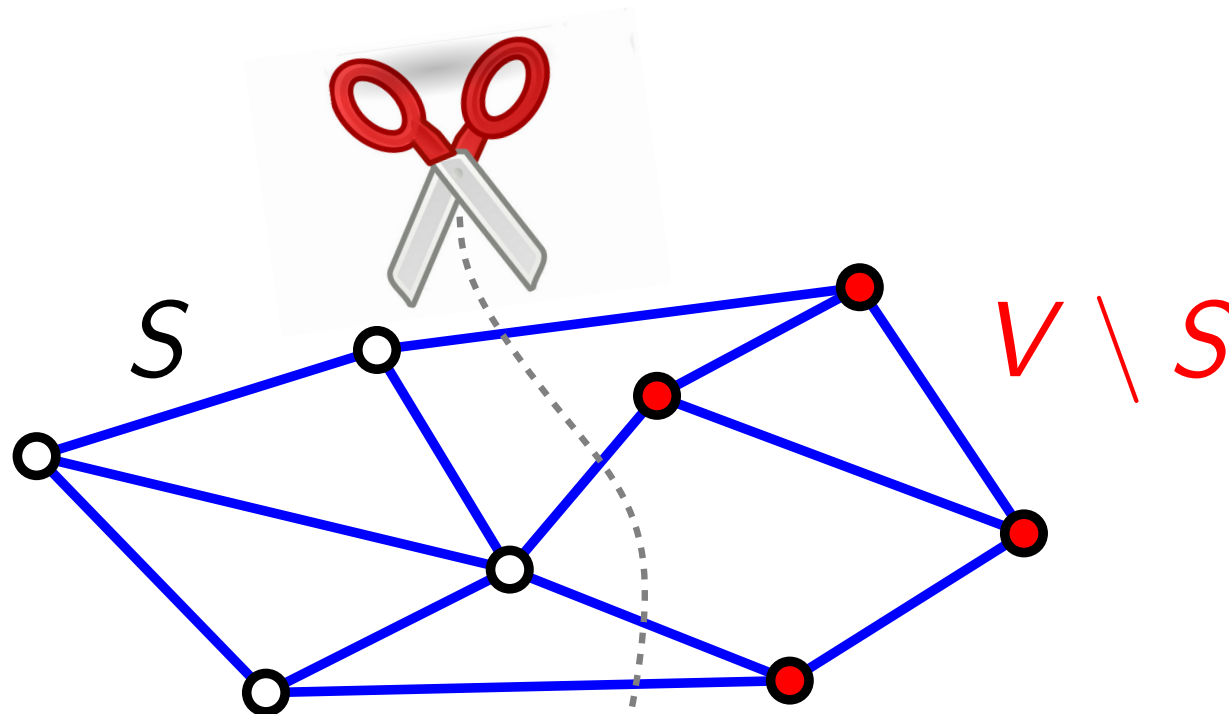
**Frage:** Gibt's überhaupt immer eine sichere Kante?

**Antwort:** Ja! – *Per Induktion!*

**Frage:** Aber wie findet man eine –  
ohne schon einen minimalen Spannbaum zu kennen?

# Schnitte und leichte Kanten

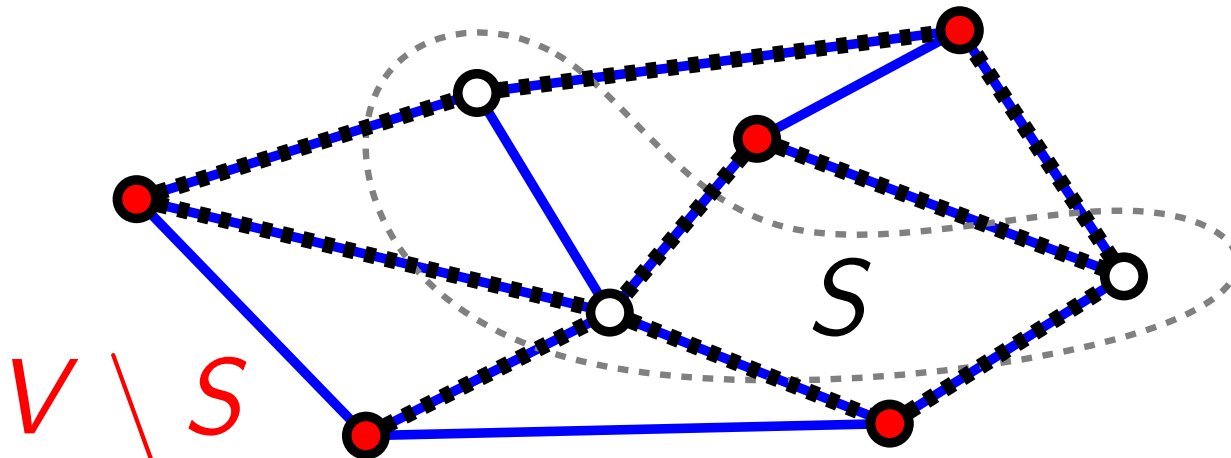
**Def.** Ein *Schnitt*  $(S, V \setminus S)$  eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung\*) von  $V$ .



\*) benachbarte Knoten dürfen hier die gleiche Farbe haben.

# Schnitte und leichte Kanten

**Def.** Ein *Schnitt*  $(S, V \setminus S)$  eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung\*) von  $V$ .  
Eine Kante  $e$  *kreuzt*  $(S, V \setminus S)$ , wenn ein Endpunkt von  $e$  in  $S$  und der andere in  $V \setminus S$  liegt.

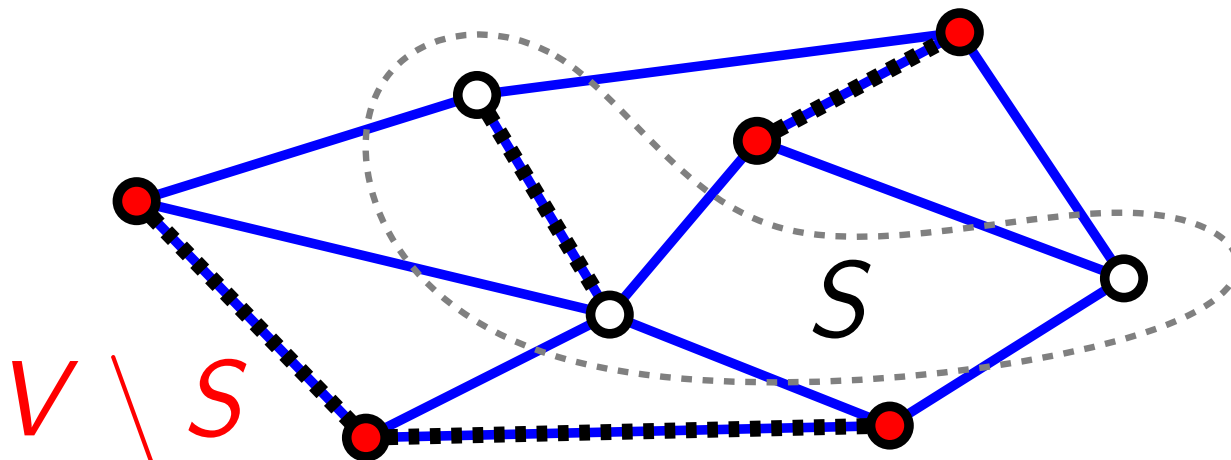


# Schnitte und leichte Kanten

**Def.** Ein *Schnitt*  $(S, V \setminus S)$  eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung\*) von  $V$ .

Eine Kante  $e$  *kreuzt*  $(S, V \setminus S)$ , wenn ein Endpunkt von  $e$  in  $S$  und der andere in  $V \setminus S$  liegt.

Ein Schnitt *respektiert* eine Kantenmenge  $A$ , wenn keine Kante in  $A$  den Schnitt kreuzt.



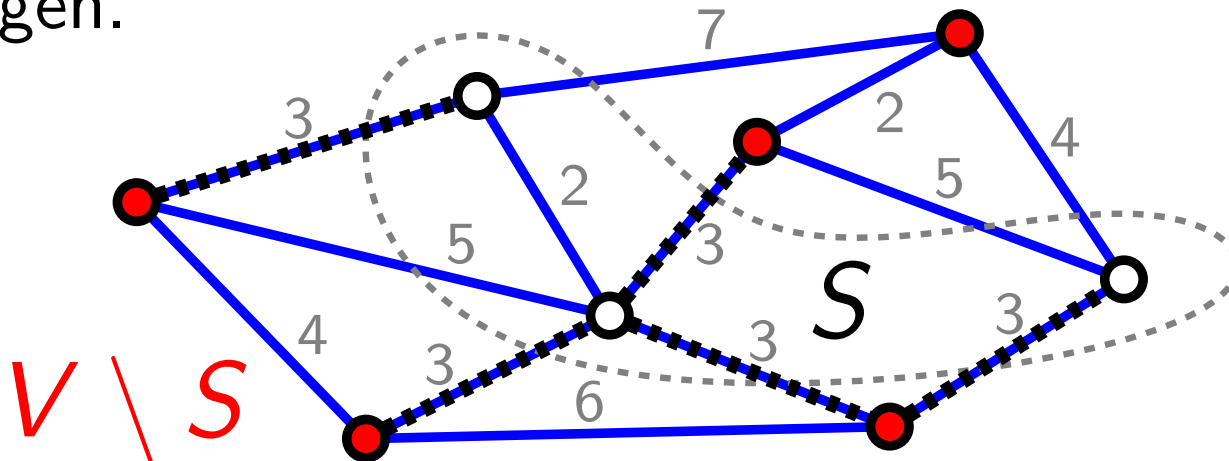
# Schnitte und leichte Kanten

**Def.** Ein **Schnitt**  $(S, V \setminus S)$  eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Zerlegung (od. Zweifärbung\*) von  $V$ .

Eine Kante  $e$  **kreuzt**  $(S, V \setminus S)$ , wenn ein Endpunkt von  $e$  in  $S$  und der andere in  $V \setminus S$  liegt.

Ein Schnitt **respektiert** eine Kantenmenge  $A$ , wenn keine Kante in  $A$  den Schnitt kreuzt.

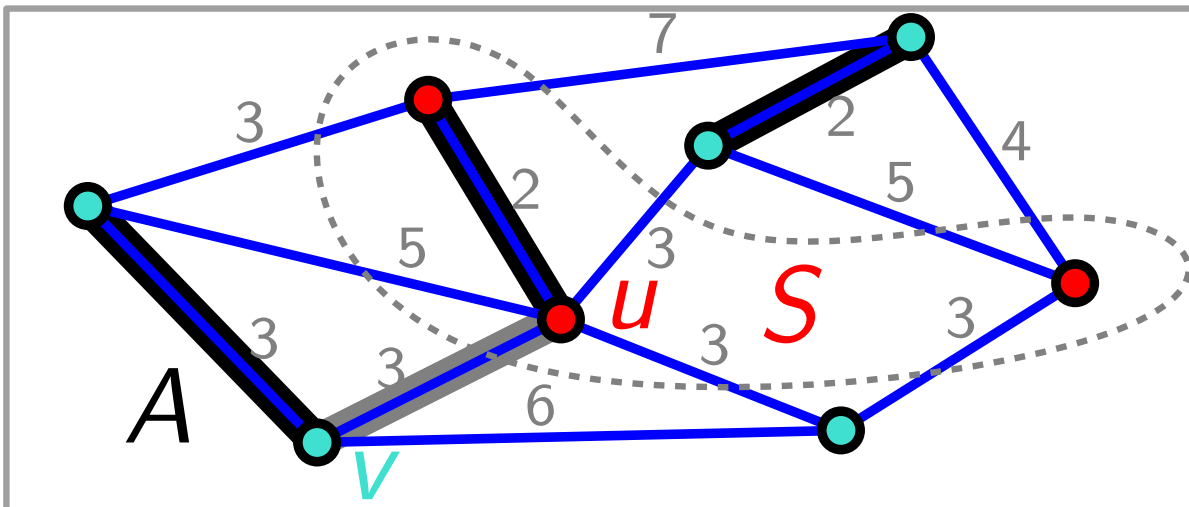
Eine Kante  $e$ , die einen Schnitt kreuzt, ist **leicht**, wenn alle Kanten, die den Schnitt kreuzen, mindestens  $w(e)$  wiegen.





# Erweiterungssatz

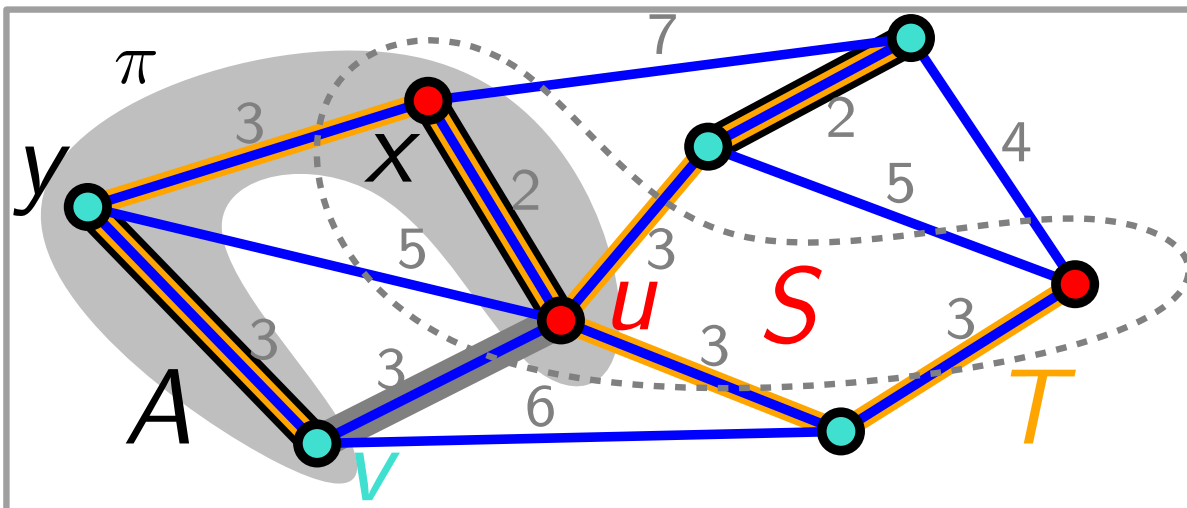
**Satz.** Sei  $G = (V, E; w)$  ein zshg., gewichteter, unger. Graph.  
 Sei  $T$  Kantenmenge eines min. Spannbaums von  $G$ .  
 Sei  $A$  Teilmenge von  $T$ .  
 Sei  $(S, V \setminus S)$  ein Schnitt, der  $A$  respektiert.  
 Sei  $uv \in E$  leicht bzgl.  $(S, V \setminus S)$ .  
 Dann ist  $uv$  sicher für  $A$ ,  
 d.h.  $G$  hat einen min. Spannbaum, der  $A \cup \{uv\}$  enthält.



# Beweis

**Satz.** ... Dann ist  $uv$  sicher für  $A$ .

**Beweis.** Zeige:  $G$  hat min. Spannbaum, der  $A \cup \{uv\}$  enthält.  
 Falls  $uv \in T$ , fertig. Also  $uv \notin T$ . Sei  $\pi$   $u$ - $v$ -Pfad in  $T$ .  
 $\Rightarrow \pi + uv$  ist Kreis (wobei  $uv$   $(S, V \setminus S)$  kreuzt)  
 $\Rightarrow$  Kreis enthält zweite Kante  $xy$ , die  $(S, V \setminus S)$  kreuzt.  
 $\Rightarrow T' = (T \cup \{uv\}) \setminus \{xy\}$  ist auch Spannbaum von  $G$ .  
 $w(T') = w(T) + \underbrace{w(uv) - w(xy)}_{\leq 0, \text{ da } uv \text{ leicht bzgl. } (S, V \setminus S)} \leq w(T)$



$\Rightarrow T'$  ist *minimaler* Spannbaum von  $G$ .  
 Und:  $A \cup \{uv\} \subseteq T'$ .  
 $\Rightarrow uv$  ist sicher für  $A$ .

□

# Zurück zum Algorithmus

**Satz.** Sei  $G = (V, E; w)$  ein zshg., gewichteter, unger. Graph.  
 Sei  $T$  Kantenmenge eines min. Spannbaums von  $G$ .  
 Sei  $A$  Teilmenge von  $T$ .  
 Sei  $(S, V \setminus S)$  ein Schnitt, der  $A$  respektiert.  
 Sei  $uv \in E$  leicht bzgl.  $(S, V \setminus S)$ .  
 Dann ist  $uv$  sicher für  $A$ .

GenericMST(UndirectedConnectedGraph  $G$ , EdgeWeights  $w$ )

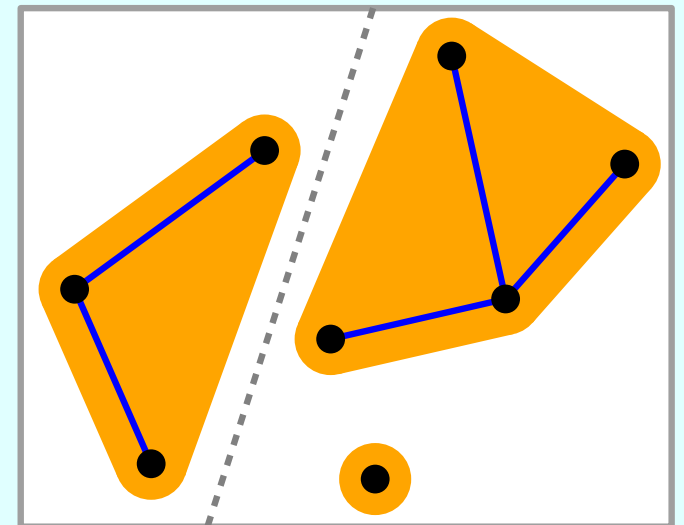
$A = \emptyset$

**while**  $|A| < |V| - 1$  **do**

// INV:  $A \subseteq$  min. Spannbaum von  $G$   
 finde Kante  $uv$ , die *sicher* für  $A$  ist

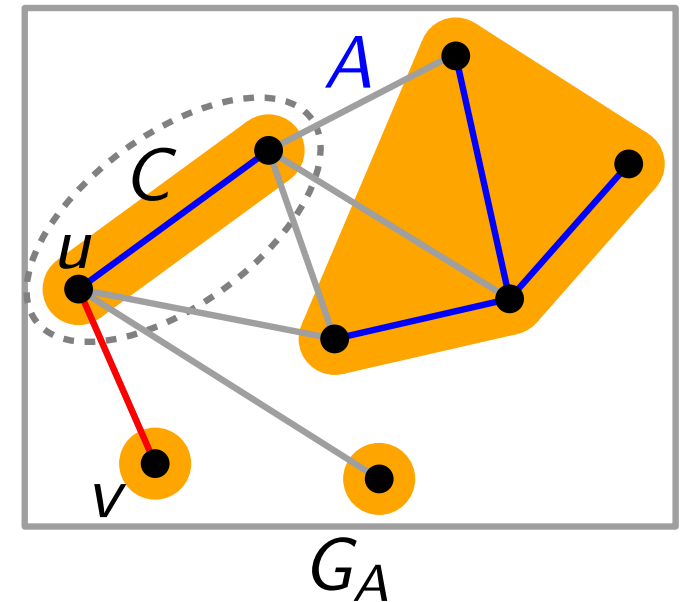
$A = A \cup \{uv\}$

**return**  $A$



# Zusammenhangskomponenten

**Def.** Eine *Zusammenhangskomponente* eines Graphen ist ein Teilgraph, der von einer nicht vergrößerbaren („*inklusionsmaximalen*“) zusammenhängenden Menge von Knoten *induziert* wird.



**Korollar.**  $G = (V, E)$  wie gehabt.  
 $A \subseteq E$  in einem min. Spannbaum von  $G$  enthalten.  
 $C = (V_C, E_C)$  Zshgskomp. des Waldes  $G_A = (V, A)$ .  
 $uv$  leicht bzgl.  $(V_C, V \setminus V_C)$   
*Dann gilt:*  $uv$  ist sicher für  $A$ .

# Der Algorithmus von Jarník-Prim (1930/1957)

JarníkPrimMST ↪ Undirected

~~Dijkstra~~(WeightedGraph  $G = (V, E; w)$ , Vertex  $s$ )

Initialize( $G, s$ )

$Q = \text{new PriorityQueue}(V, d)$  // Gewichtung

**while not**  $Q.\text{Empty}()$  **do**

$u = Q.\text{ExtractMin}()$

**foreach**  $v \in \text{Adj}[u]$  **do**

$\lfloor \text{Relax}'(u, v; w)$

v ∈ Q and ...

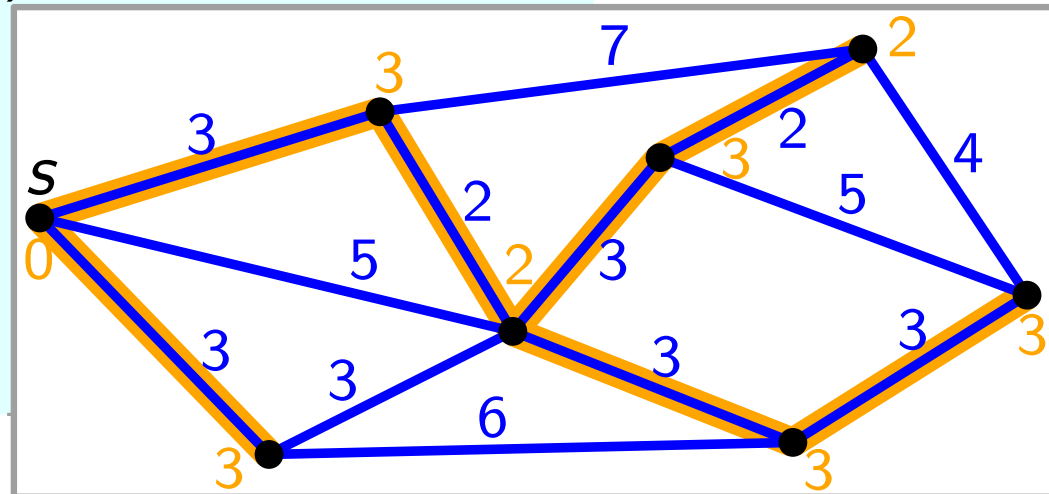
$\text{Relax}'(u, v; w)$

**if**  $v.d > \cancel{u.d} + w(u, v)$  **then**

$v.d = \cancel{u.d} + w(u, v)$

$v.\pi = u$

$Q.\text{DecreaseKey}(v, v.d)$



**Korrektheit?** ✓

Folgt aus Korollar:

$A = \{ \{u, u.\pi\} : u \notin Q \}$ ,  
Kante  $\{u, u.\pi\}$  immer  
sicher bzgl.  $(Q^*, V \setminus Q^*)$ ,  
wobei  $Q^* = Q \cup \{u\}$ .

**Laufzeit?**

$O(|E| \cdot \text{DecreaseKey} + |V| \cdot \text{ExtractMin})$

$\Rightarrow O((E + V) \log V)$  [Heap/RS-Baum]

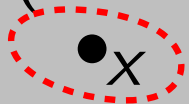
$\Rightarrow O(E + V \log V)$  [Fibonacci-Heap]

# Einschub: halbdynamische Mengen (wachsen nur, schrumpfen nicht)

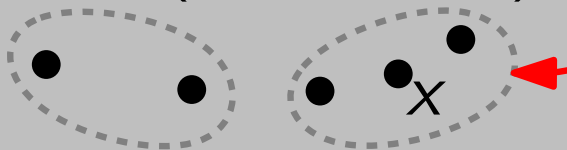
Die halbdyn. Mengen zerlegen immer eine Grundmenge  $X$ .

*Drei Operationen:*

MakeSet(Element  $x$ ) legt die Menge  $\{x\}$  an.

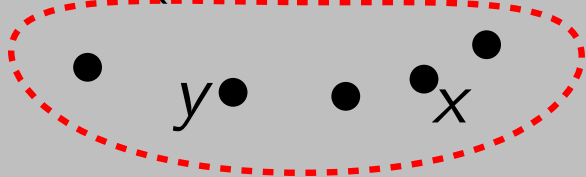


FindSet(Element  $x$ )



liefert (Zeiger auf) die Menge zurück, die momentan  $x$  enthält.

Union(Elem.  $x$ , Elem.  $y$ )



vereinigt die Mengen, die momentan  $x$  und  $y$  enthalten.

**Satz.** Eine Folge von  $m$  MakeSet-, Union- und FindSet-Oper., von denen  $n$  MakeSet-Oper. sind, benötigt  $O(m \cdot \alpha(n))$  Zeit, wobei  $\alpha(n) \leq 4$  für alle  $n \leq 10^{80}$ . Insbesondere  $\alpha(n) \ll \log_{10} n$  für  $n > 1$ .

funktionales Inverses der extrem schnellwachsenden Ackermann-Funktion  $A(n, n)$

# Der Algorithmus von Kruskal

KruskalMST(WeightedUndirectedGraph  $G = (V, E), w$ )

$A = \emptyset$

**foreach**  $v \in V$  **do**

└─ MakeSet( $v$ )

Sortiere  $E$  nicht-absteigend nach Gewicht  $w$

**foreach**  $uv \in E$  **do**

┌─ **if** FindSet( $u$ )  $\neq$  FindSet( $v$ ) **then**

└─  $A = A \cup \{uv\}$

└─ Union( $u, v$ )

**return**  $A$

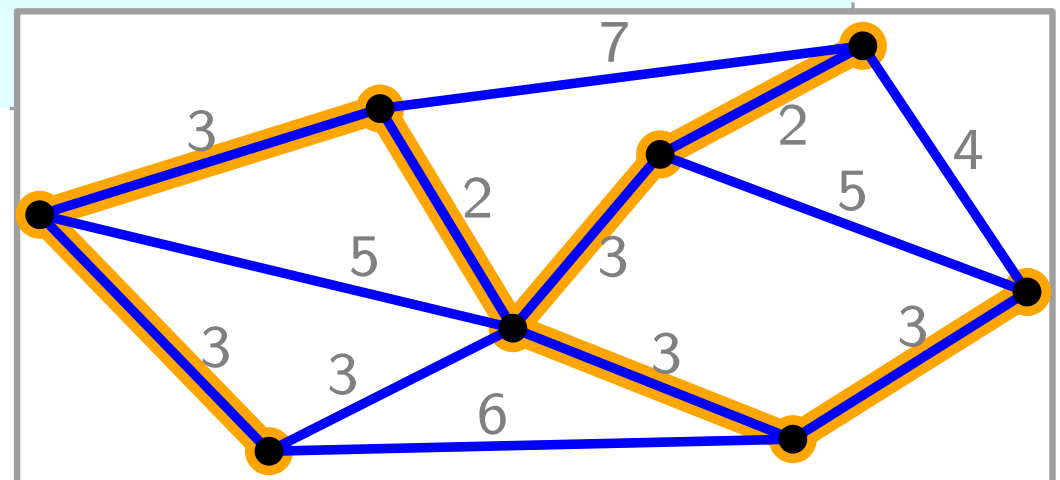
## Laufzeit?

$|V| \cdot \text{MakeSet} + (|V| - 1) \cdot \text{Union}$

$+ 2|E| \cdot \text{FindSet} + \text{Sort}(E)$

$\in O(E \log V + E \log E)$

$= O(E \log V)$  ! Warum??



Weil  $O(\log E) \subseteq O(\log V^2) = O(\log V)$ . Ah...

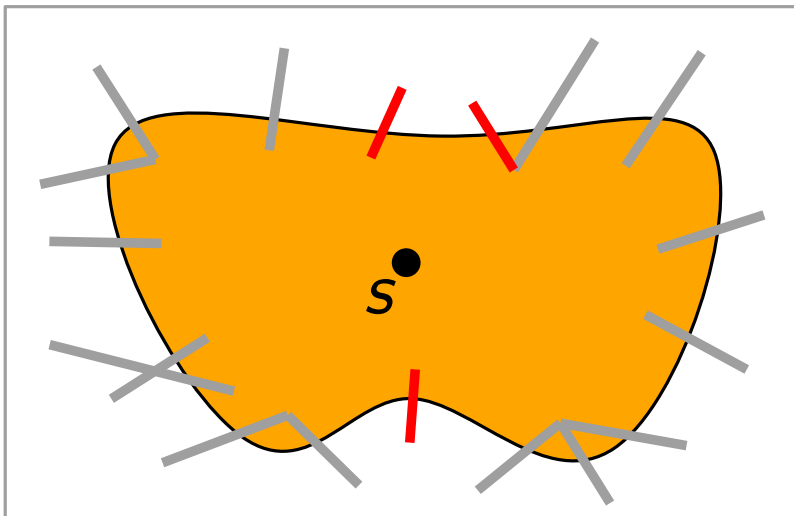
# Übersicht: Algo. für min. Spann bäume

Greedy!



## Jarník-Prim

- geht (wie Dijkstra / BFS) wellenförmig von einem Startknoten aus
- aktuelle Kantenmenge zusammenhängend
- Laufzeit  $O(E + V \log V)$



## Kruskal

- bearbeitet Kanten nach aufsteigendem (genauer: nicht-absteig.) Gewicht
- nach Einfügen der  $i$ . Kante gibt es  $n - i$  Zshgskomp.
- Laufzeit  $O(E \log V)$

