

# Algorithmen und Datenstrukturen

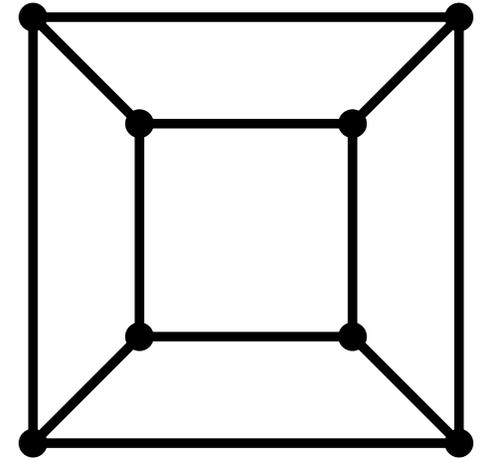
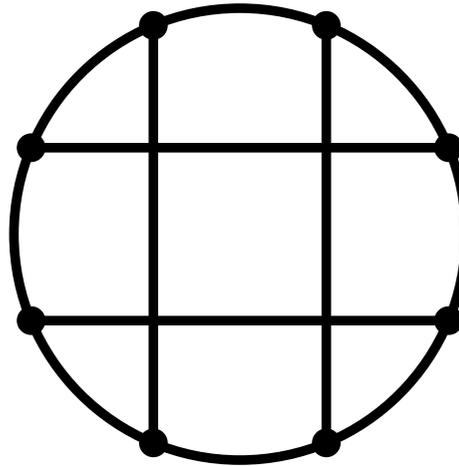
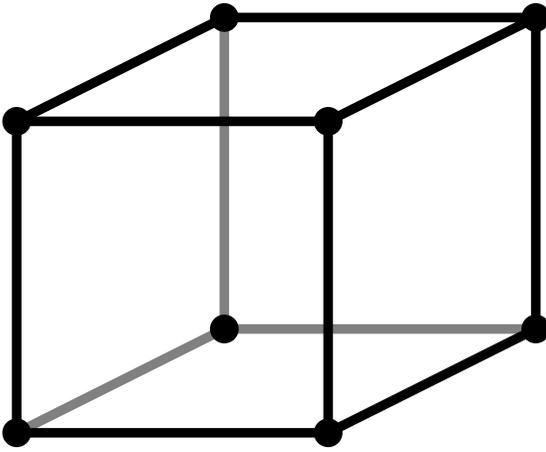
Wintersemester 2019/20

18. Vorlesung

Graphen:

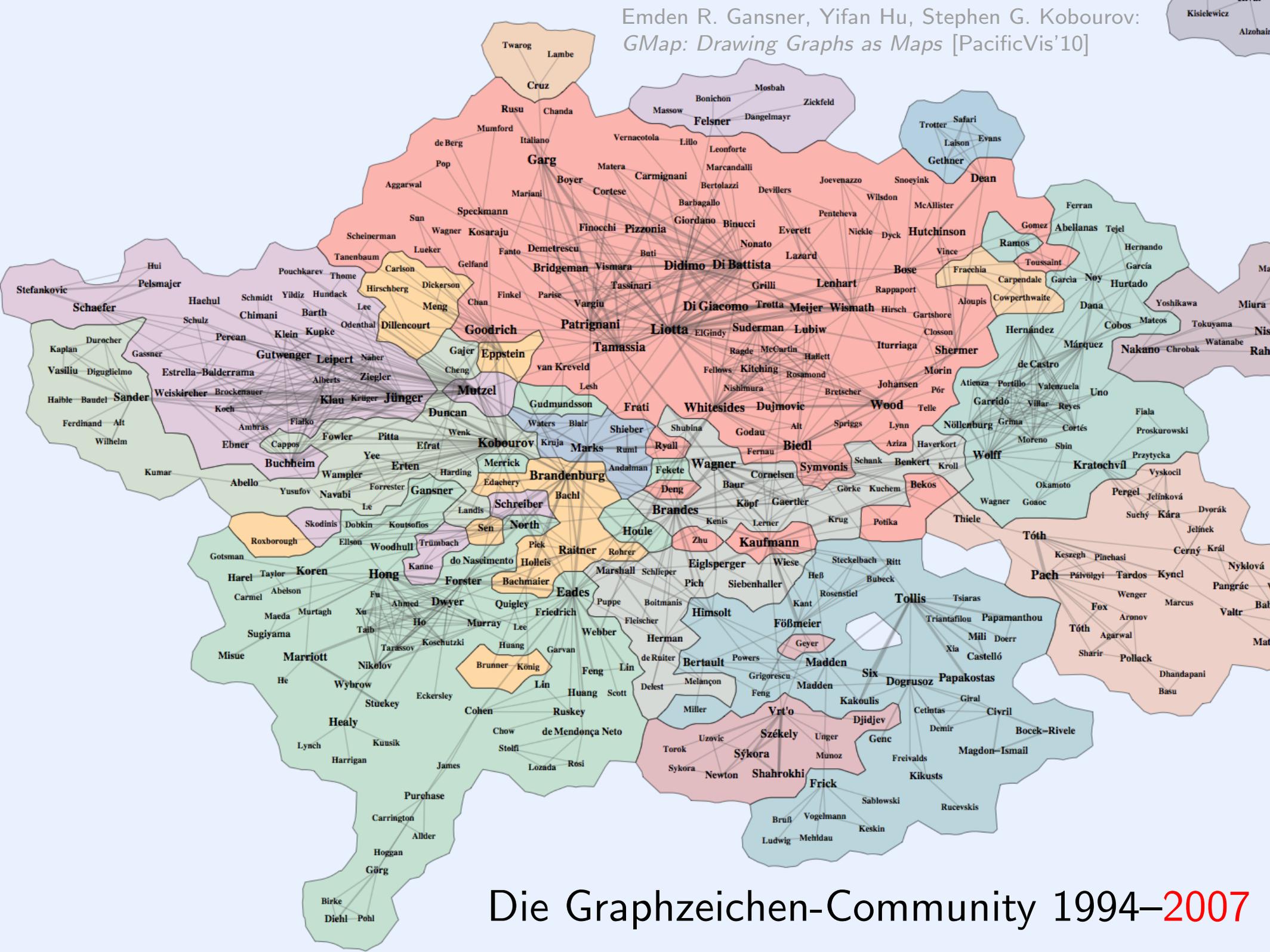
Repräsentation und Durchlaufstrategien

# Was ist das?



Ein (und derselbe) *Graph*; der dreidimensionale Hyperwürfel.





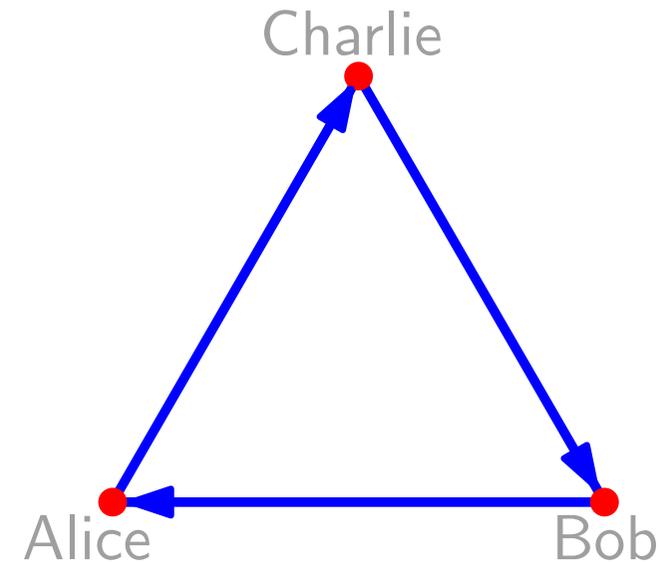
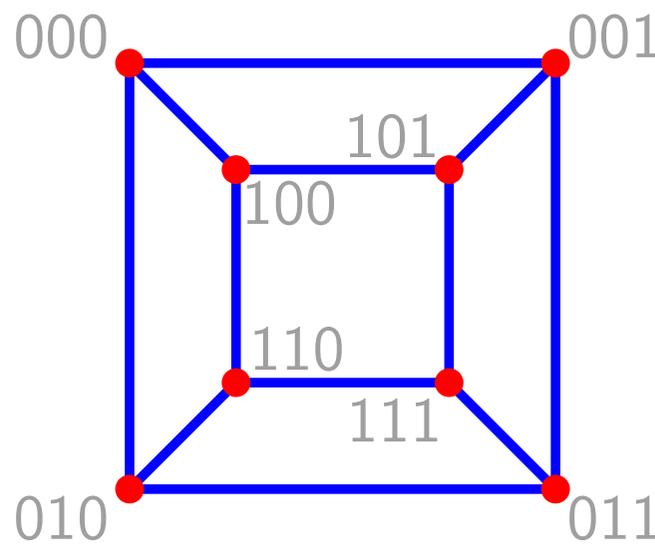
# Die Graphzeichen-Community 1994–2007

# F: Was ist ein Graph?

- A<sub>1</sub>: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei
- $V$  *Knotenmenge* und
  - $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$  *Kantenmenge*.

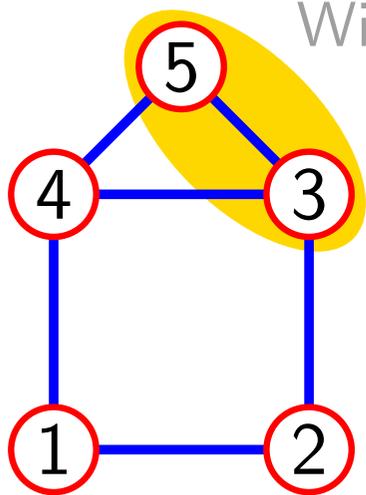
$$V = \{000, 001, \dots, 111\}$$

$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow ?$$



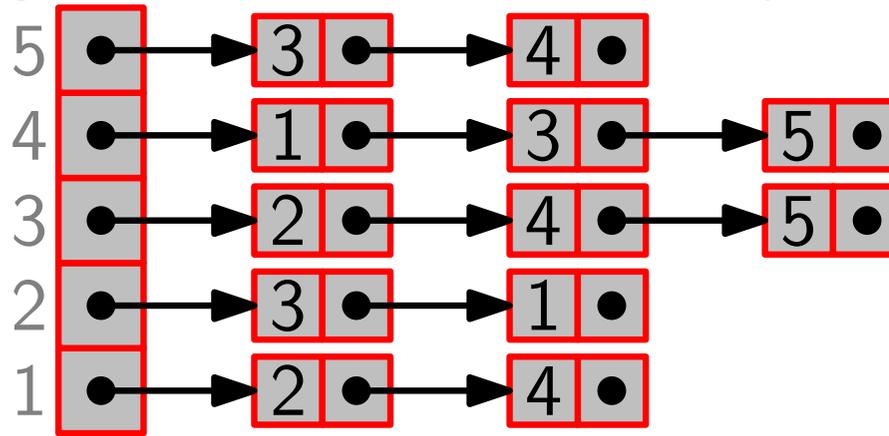
- A<sub>2</sub>: Ein *gerichteter* Graph ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei
- $V$  *Knotenmenge* und
  - $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$  *Kantenmenge*.

# F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter  
Graph

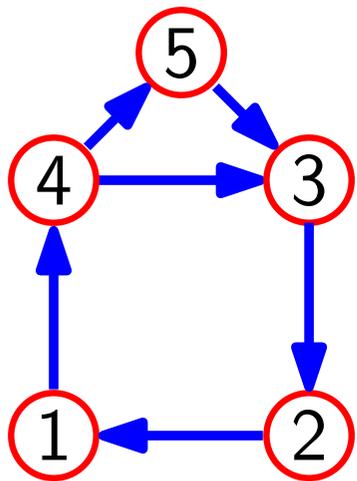
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjacent*.



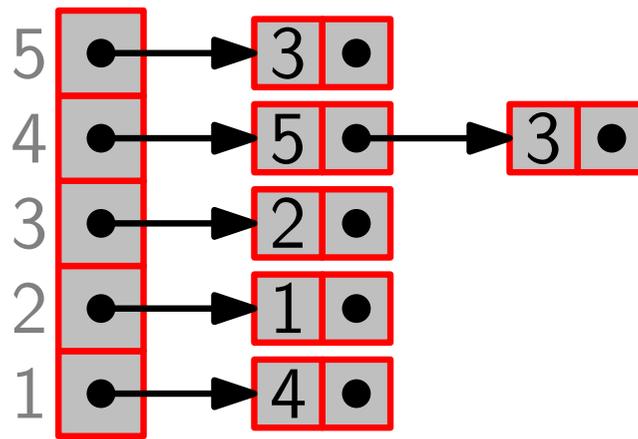
*Adjazenzlisten*

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

*Adjazenzmatrix*



gerichteter  
Graph



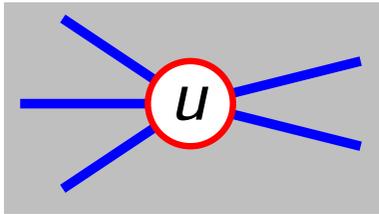
$$\text{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i, j) \in E\}$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0

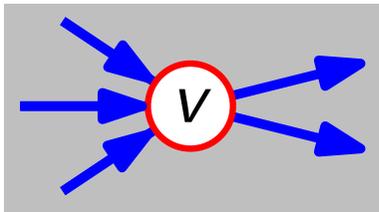
$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E$$

# Grad eines Knotens

**Def.**



$$\deg(u) = |\text{Adj}[u]|$$



$$\text{outdeg}(v) = |\text{Adj}[v]|$$

$$\text{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

**Beob.**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Dann ist die Summe aller Knotengrade  $= 2 \cdot |E|$ .

**Beweis.**

Technik des *zweifachen Abzählens*:

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

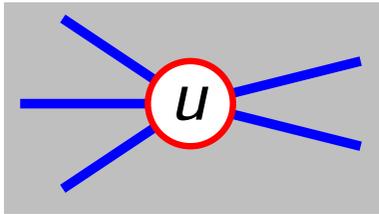
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten:  $\sum_{v \in V} \deg v$

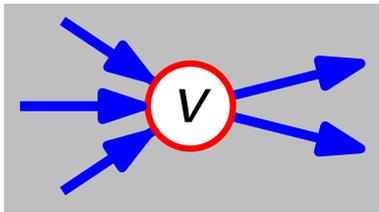
Aus Sicht der Kanten:  $2 \cdot |E|$  also gleich!

# Grad eines Knotens

**Def.**



$$\deg(u) = |\text{Adj}[u]|$$



$$\text{outdeg}(v) = |\text{Adj}[v]|$$

$$\text{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

**Beob.**

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Dann ist die Summe aller Knotengrade  $= 2 \cdot |E|$ .

**Sätze.**

Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

**Beweis.**

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v$$

*gerade!*
*gerade!*
*gerade!*
 $\Rightarrow$  *gerade!*

$$\sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v \text{ gerade} \Rightarrow |V_{\text{ung}}| \text{ ist gerade!} \quad \square$$

# Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis, so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

*Charakterisierung:* Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

*Konstruktion:* Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

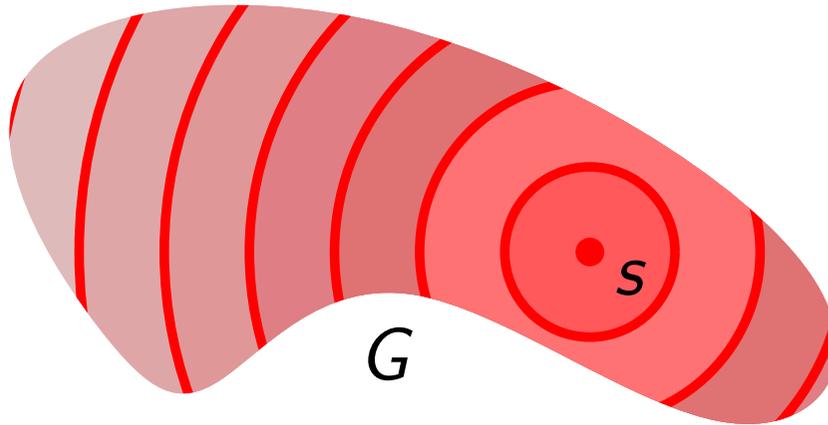
2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis, so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

*Charakterisierung:* Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

*Konstruktion:* Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

# F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

## Ideen?



1. wellenförmige Ausbreitung ab einem gegebenen Startknoten  $s$   
*Breitensuche (breadth-first search, BFS)*
2. vom Startknoten  $s$  möglichst schnell weit weg  
*Tiefensuche (depth-first search, DFS)*

# Breitensuche

BFS(Graph  $G$ , Vertex  $s$ )

Initialize( $G$ ,  $s$ )

$Q = \text{new Queue}()$

$Q.\text{Enqueue}(s)$

**while not**  $Q.\text{Empty}()$  **do**

$u = Q.\text{Dequeue}()$

**foreach**  $v \in \text{Adj}[u]$  **do**

**if**  $v.\text{color} == \text{white}$  **then**

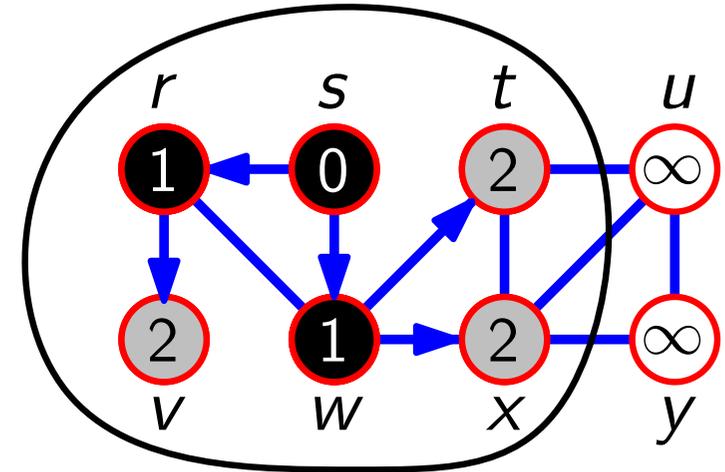
$v.\text{color} = \text{gray}$

$v.d = u.d + 1$

$v.\pi = u$

$Q.\text{Enqueue}(v)$

$u.\text{color} = \text{black}$



Initialize(Graph  $G$ , Vertex  $s$ )

**foreach**  $u \in V$  **do**

$u.\text{color} = \text{white}$

$u.d = \infty$

$u.\pi = \text{nil}$

$s.\text{color} = \text{gray}$

$s.d = 0$

**Laufzeit?**

$$O(|V|) + O(|V|) + O(|E|) = O(|V| + |E|)$$

[Beob. über Knotengrade!]

# Korrektheit von BFS – Vorbereitung

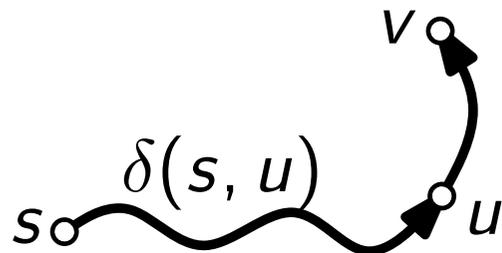
**Definition.** Sei  $G = (V, E)$  (un)gerichteter Graph,  $u, v \in V$ .  
 $\delta(u, v) :=$  Länge eines kürzesten  $u$ - $v$ -Wegs,  
 (falls  $v$  von  $u$  erreichbar; sonst  $\delta(u, v) := \infty$ ).

**Ziel:** Zeige, dass nach  $\text{BFS}(G, s)$  für alle  $v \in V$  gilt:  
 $\overset{\text{berechneter}}{\text{Abstand von } s} v.d = \delta(s, v) \overset{\text{tatsächlicher}}{\text{Abstand von } s}$

**Lemma 1.** (Eigenschaft kürzester Wege)  
 Sei  $G = (V, E)$  ein (un)gerichteter Graph,  $s \in V$ .  
 Dann gilt für jede Kante  $(u, v) \in E$ :  

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

**Beweis.** 1. Fall:  $u$  ist von  $s$  erreichbar (d.h.  $\exists$   $s$ - $u$ -Weg)



Dieser  $s$ - $v$ -Weg hat Länge  $\delta(s, u) + 1$ .



Kürzester  $s$ - $v$ -Weg hat Länge  $\leq \delta(s, u) + 1$ .

# Korrektheit von BFS – Fortsetzung

**Lemma 1.** Sei  $s \in V$ . Dann gilt für jede Kante  $(u, v) \in E$ :

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1. \quad \checkmark$$

**Lemma 2.** Sei  $G = (V, E)$  ein (un)gerichteter Graph,  $s \in V$ . Nach  $\text{BFS}(G, s)$  gilt für alle  $v \in V$ :  $v.d \geq \delta(s, v)$ .

*Beweis.* Induktion über die Anz.  $k$  von Enqueue-Oper.

```

BFS(Graph G, Vertex s)
Initialize(G, s)
Q = new Queue()
Q.Enqueue(s)
while not Q.Empty() do
  u = Q.Dequeue()
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.color = gray
      v.d = u.d + 1
      v.π = u
      Q.Enqueue(v)
  u.color = black
  
```

$k = 1$ : Situation nach  $Q.Enqueue(s)$ : ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle  $v \in V \setminus \{s\}$  gilt  $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$ : Situation nach  $Q.Enqueue(v)$ : ✓

$v$  war gerade noch weiß und ist benachbart zu  $u$ .

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für  $u$       Lemma 1  
( $u.d$  wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper.  $< k$ )

Jetzt ist  $v$  grau.  $\Rightarrow v.d$  ändert sich nicht mehr. □

# Korrektheit von BFS – Fortsetzung

**Lemma 2.** Sei  $G = (V, E)$  ein (un)gerichteter Graph,  $s \in V$ .  
Nach  $\text{BFS}(G, s)$  gilt für alle  $v \in V$ :  $v.d \geq \delta(s, v)$ . ✓

**Lemma 3.** Sei  $Q = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$  während BFS. Dann gilt:

(A)  $v_r.d \leq v_1.d + 1$  und  
 (B)  $v_i.d \leq v_{i+1}.d$  für  $i = 1, \dots, r - 1$ .

Also  $d$ -Werte der Knoten in  $Q$  z.B.  $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$ .

**Korollar.** Angenommen  $u$  wird früher als  $v$  in  $Q$  eingefügt,  
dann gilt  $u.d \leq v.d$ , wenn  $v$  in  $Q$  eingefügt wird.

**Beweis.** Folgt aus Lemma 3 und der Tatsache, dass jeder  
Knoten  $\leq 1 \times$  einen endlichen  $d$ -Wert bekommt.

# Korrektheit von BFS – Hauptsatz

**Satz.** Sei  $G$  ein (un)gerichteter Graph,  $s$  ein Knoten von  $G$ .  
Nach  $\text{BFS}(G, s)$  gilt:

(i) Für alle Knoten  $v \in V$  gilt  $v.d = \delta(s, v)$ .

(ii) Jeder von  $s$  erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von  $s$  erreichbaren Knoten  $v \neq s$  gilt:  
es gibt einen kürzesten  $s$ - $v$ -Weg, der aus einem  
kürzesten  $s$ - $v.\pi$ -Weg und der Kante  $(v.\pi, v)$  besteht.

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Lemma 2  $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$ . Noch z.z.:  $v.d \leq \delta(s, v)$ .

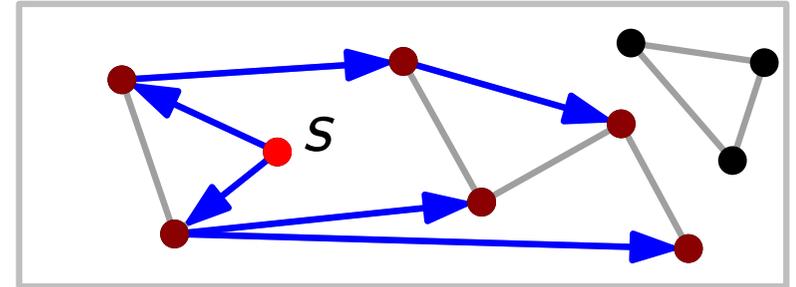
Widerspruchsbeweis mit Wahl des „kleinsten Schurken“.

Siehe Kapitel 22.2 [CLRS].

# BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen*  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$  von  $G$ :

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



**Klar:**  $G_\pi$  ist ein Baum (da zshg. und  $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$ ).

**Beh.:**  $G_\pi$  ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v \text{ erreichbar von } s\}$
- für alle  $v \in V_\pi$  enthält  $G_\pi$  einen eindeutigen Weg von  $s$  nach  $v$ , der ein kürzester  $s$ - $v$ -Weg ist.

**Bew.:** Folgt aus (ii) und (iii) im Hauptsatz. □