Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

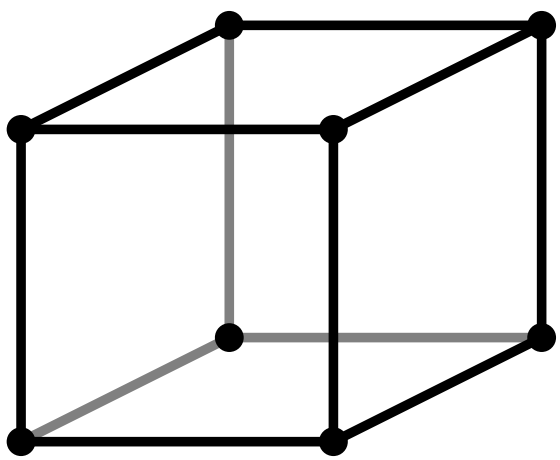
Wintersemester 2019/20

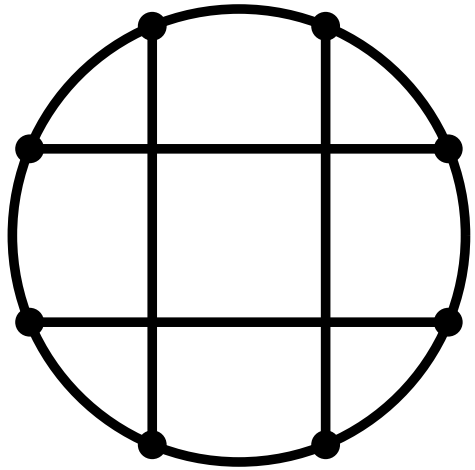
18. Vorlesung

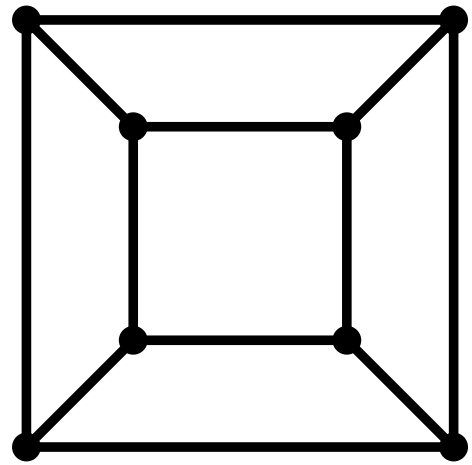
Graphen:
Repräsentation und Durchlaufstrategien

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

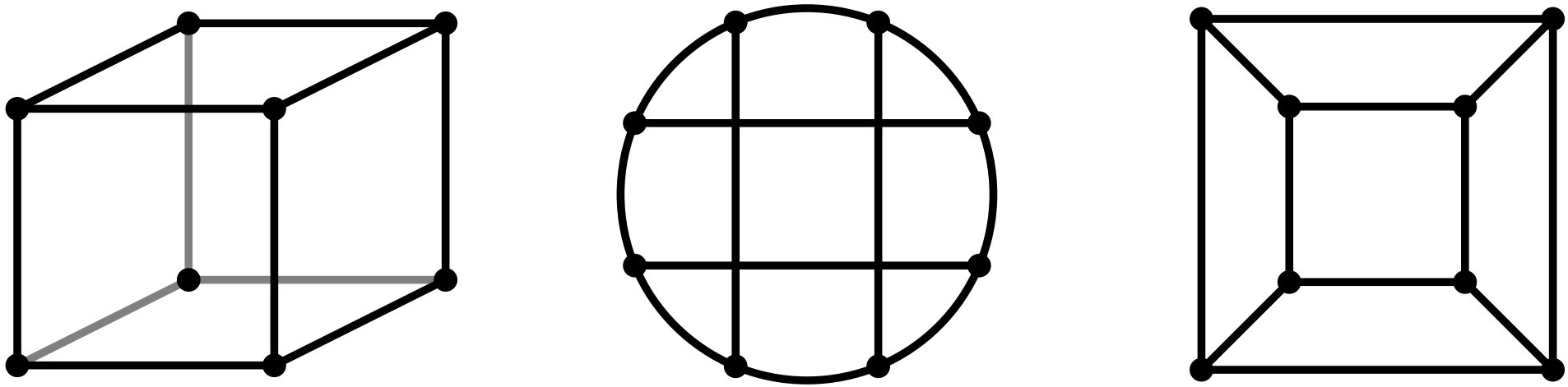
Was ist das?





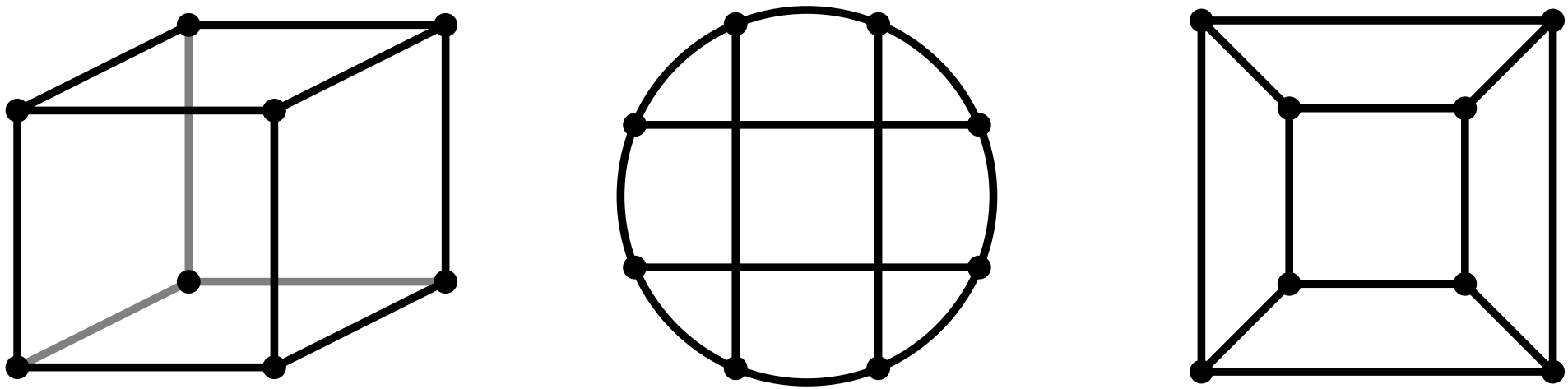


Was ist das?



Ein (und derselbe) *Graph*.

Was ist das?



Ein (und derselbe) *Graph*; der dreidimensionale Hyperwürfel.

StudiVZ am 9. Dezember 2006

Insgesamt 1.074.574 Profile (davon 1.035.890 öffentlich)

Davon 430.000 *aktiv*; ein Profil ist aktiv, wenn

- das Profil öffentlich ist,
- die Person mindestens zwei Freunde hat,
- in mindestens einer Gruppe ist und
- das Profil innerhalb des letzten Monats aktualisiert wurde.

StudiVZ am 9. Dezember 2006

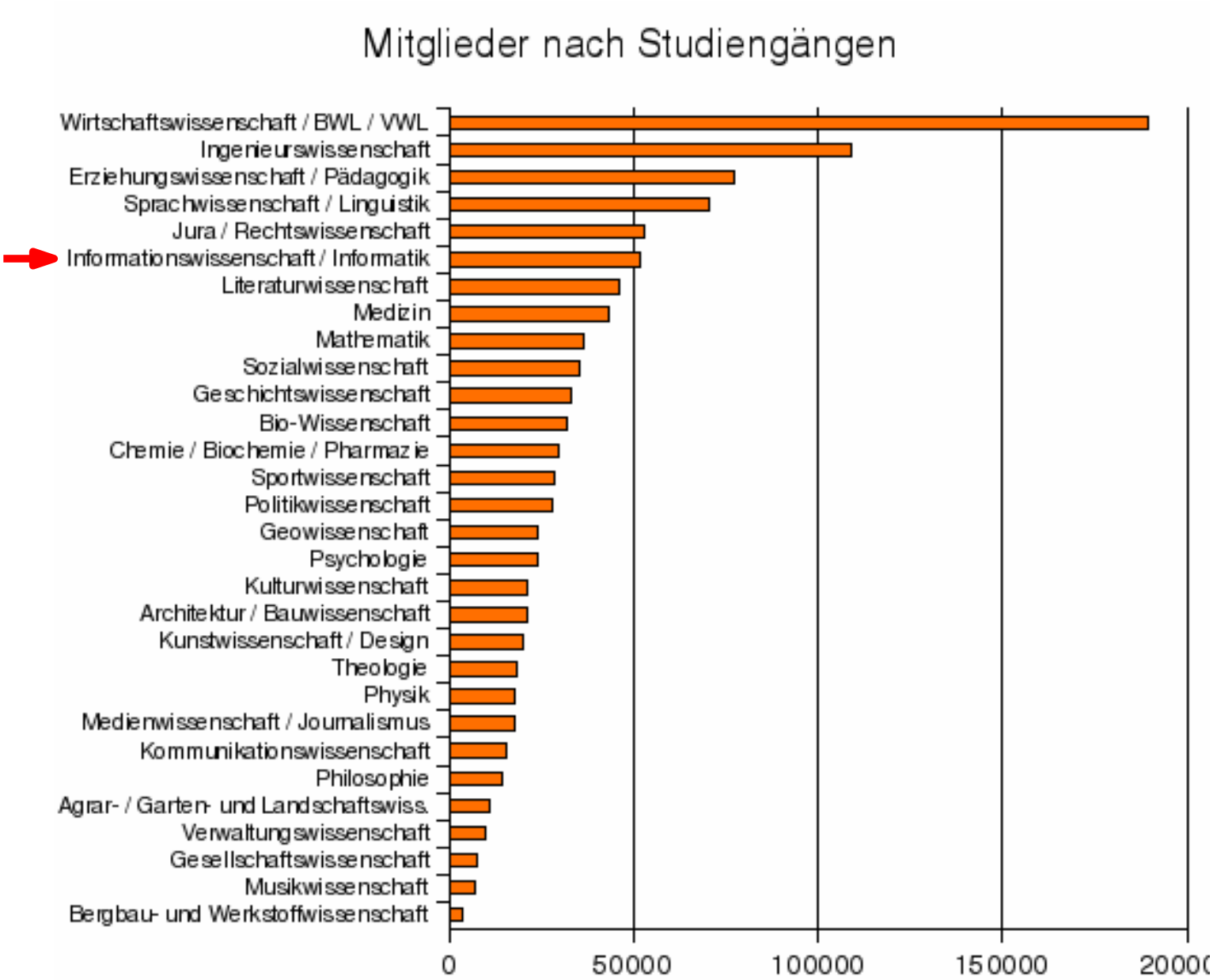
Insgesamt 1.074.574 Profile (davon 1.035.890 öffentlich)

Davon 430.000 *aktiv*; ein Profil ist aktiv, wenn

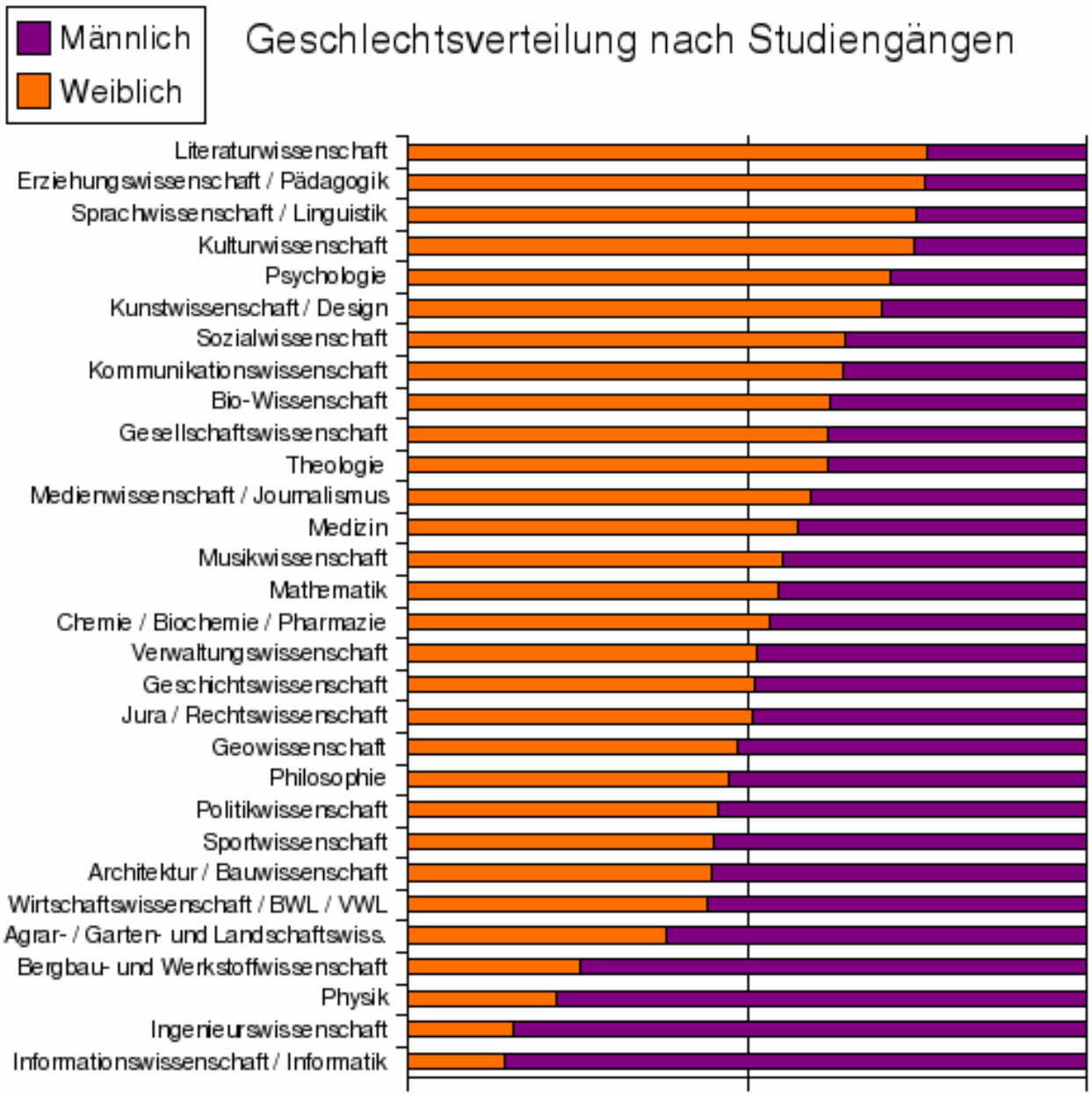
- das Profil öffentlich ist,
- die Person mindestens zwei Freunde hat,
- in mindestens einer Gruppe ist und
- das Profil innerhalb des letzten Monats aktualisiert wurde.

Ein wenig Statistik über die Mitglieder, sortiert nach Studienfach...

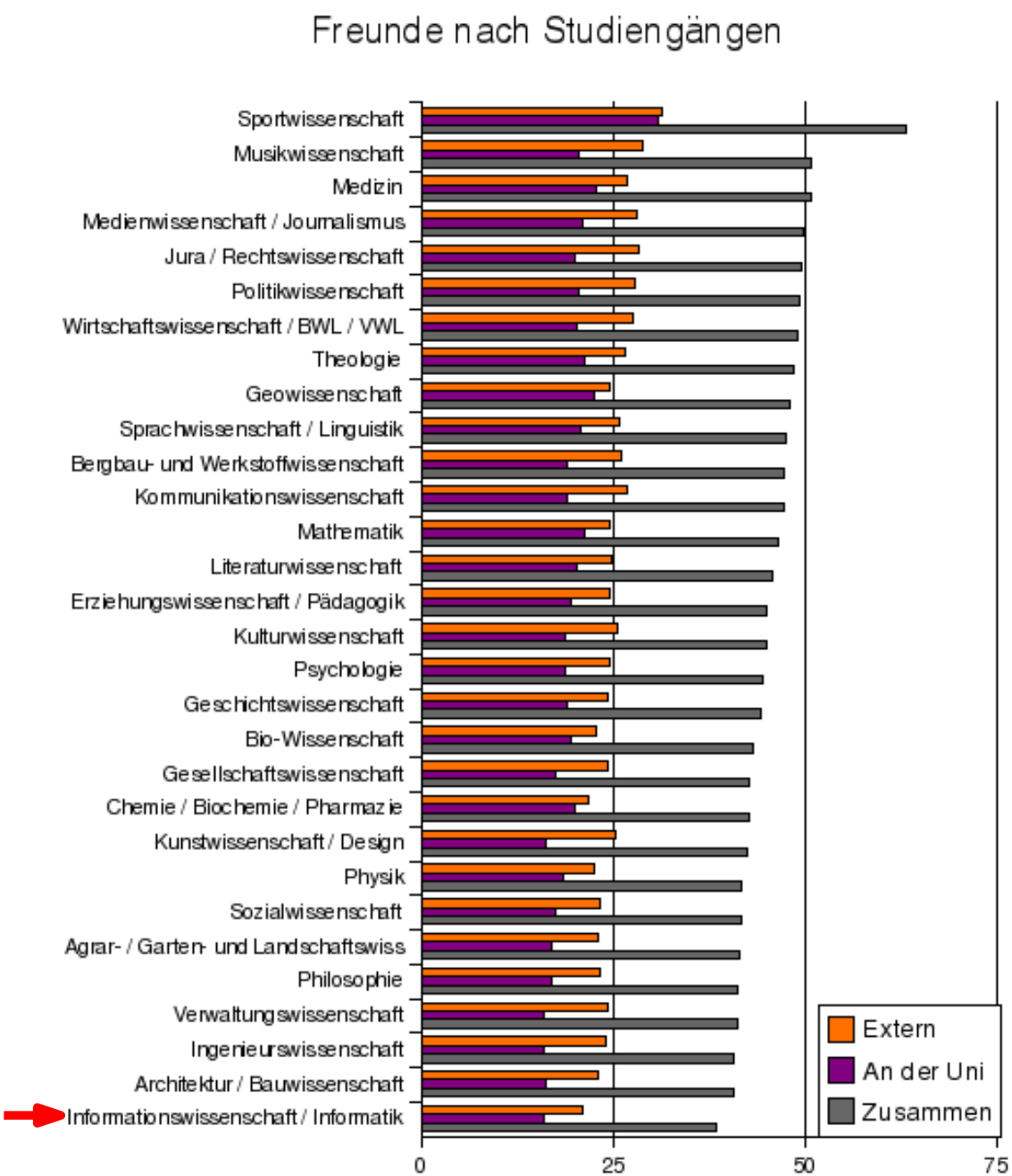
StudiVZ-Statistiken



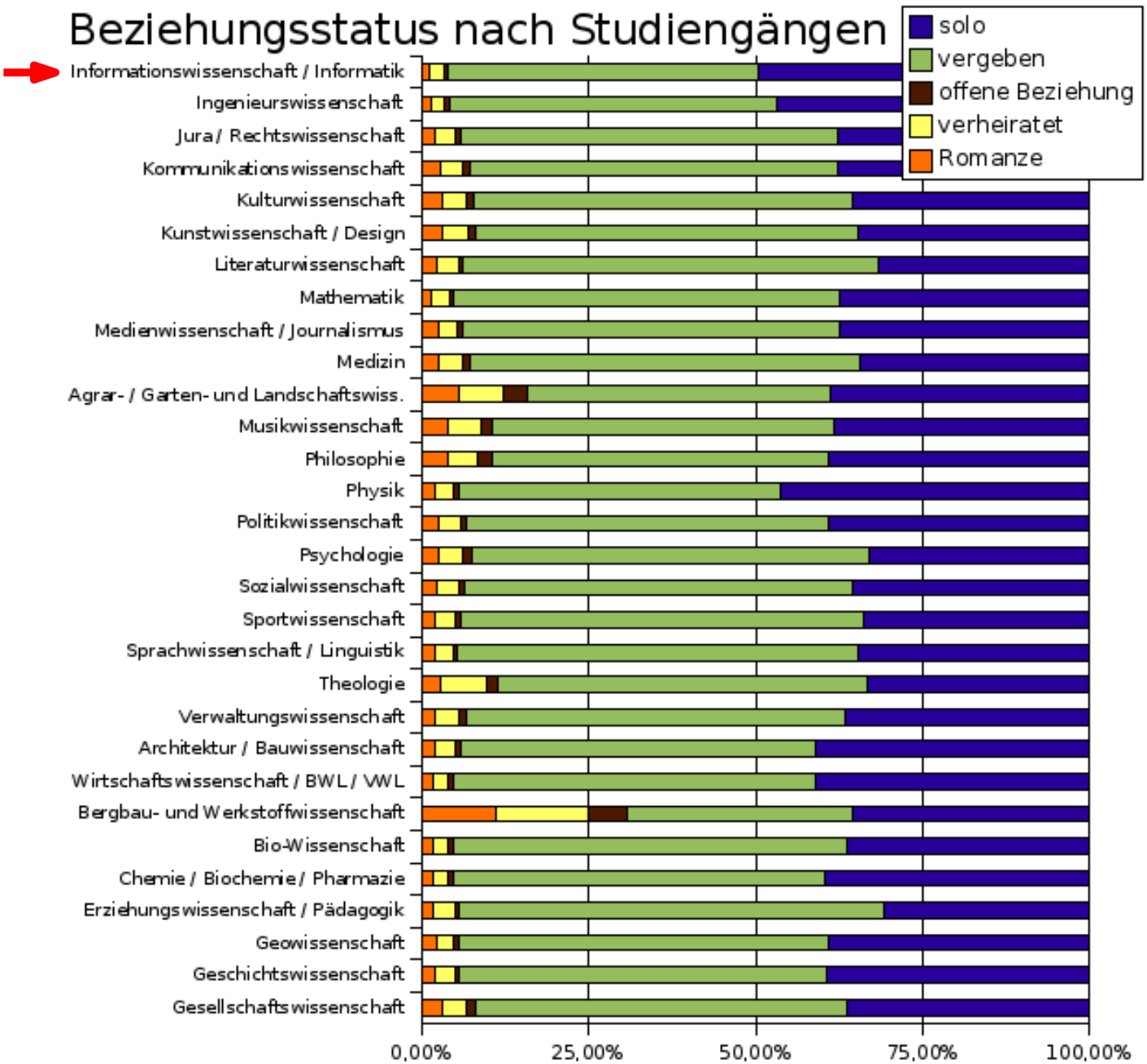
StudiVZ-Statistiken



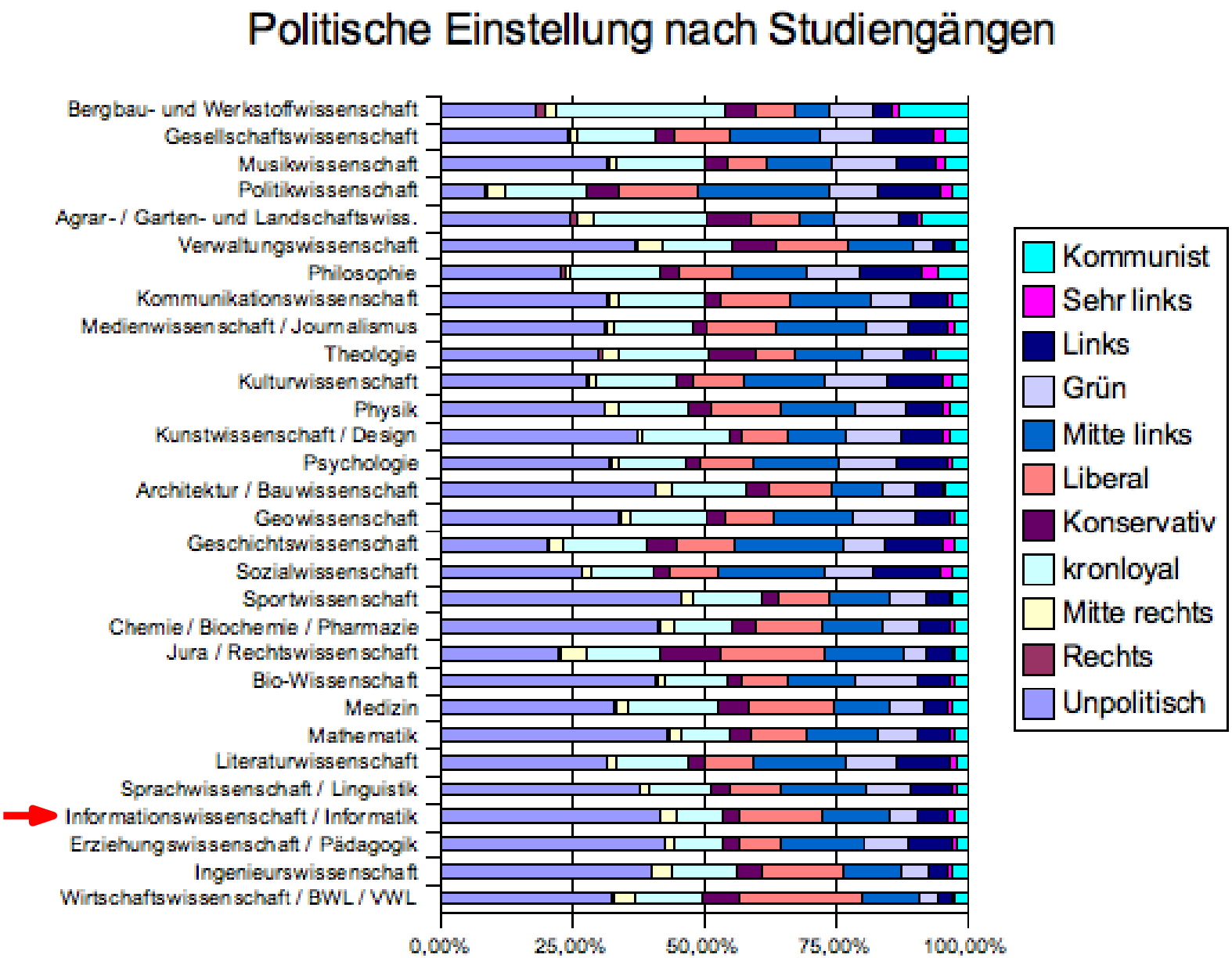
StudiVZ-Statistiken



StudiVZ-Statistiken



StudiVZ-Statistiken



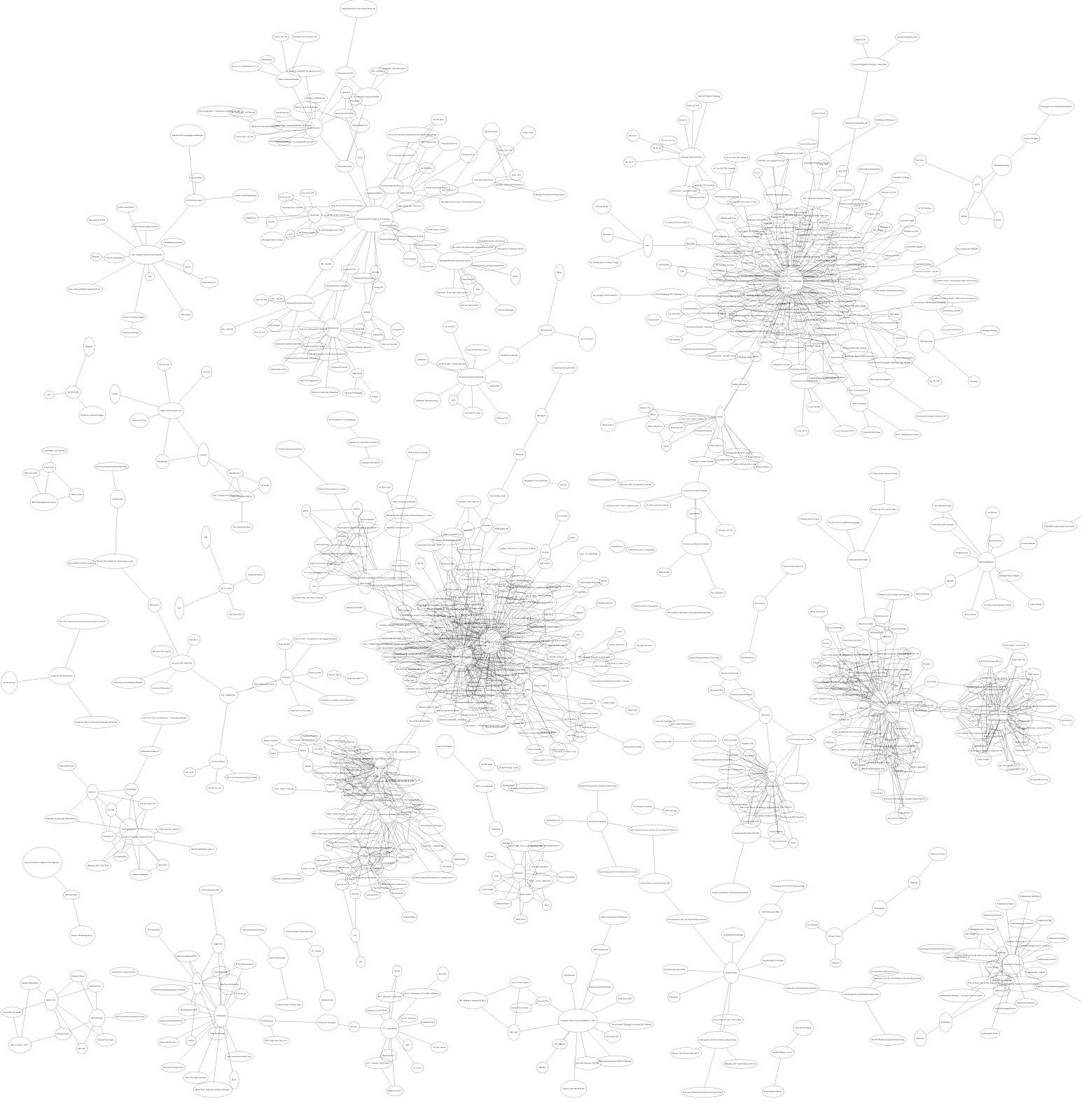
Der „StudiVZ-Graph“

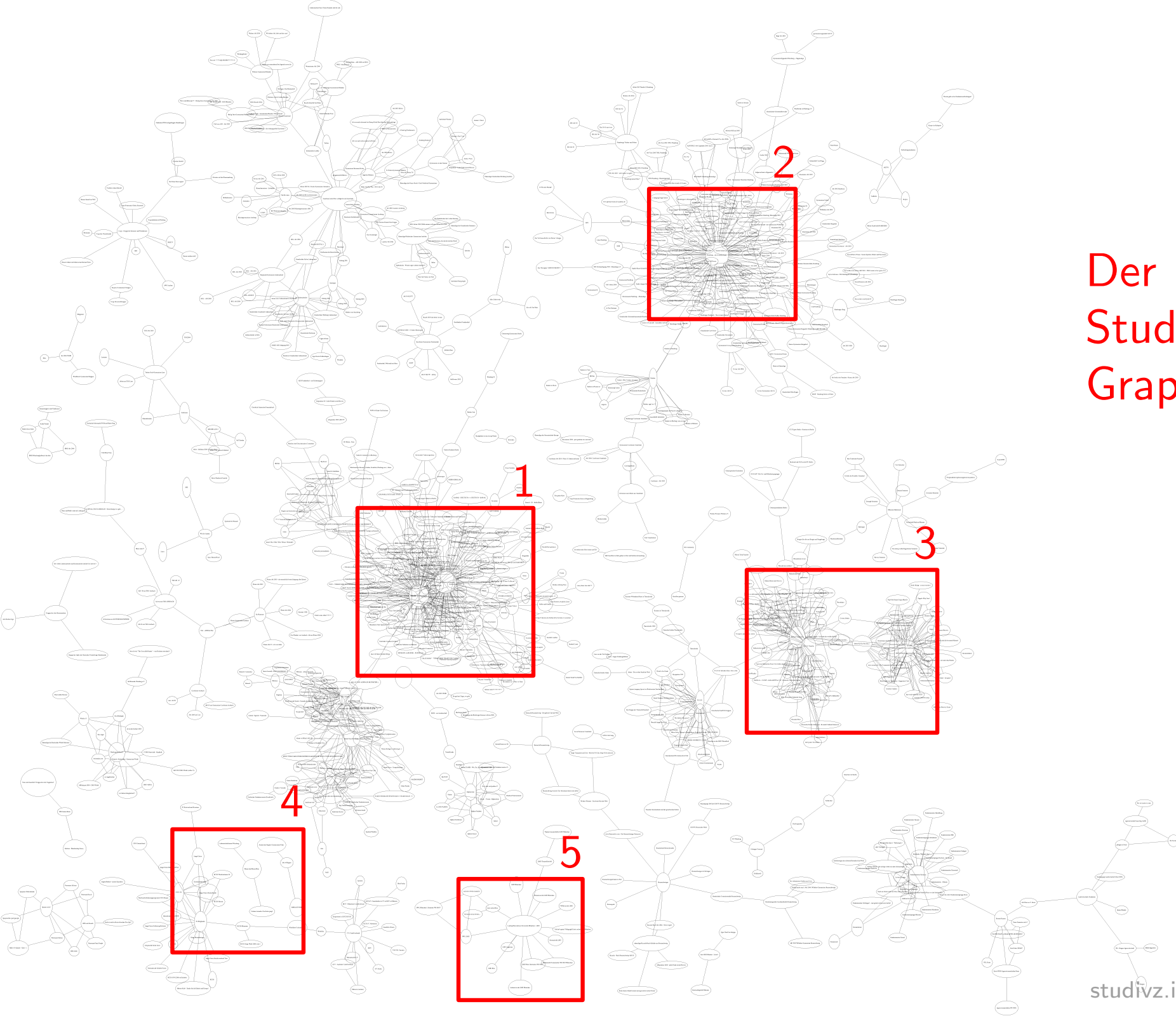
Der „StudiVZ-Graph“ enthält nur Gruppen, die

- mindestens 10 Mitglieder haben und
- zu einem Cluster (= stark verbundener Teilgraph) gehören.

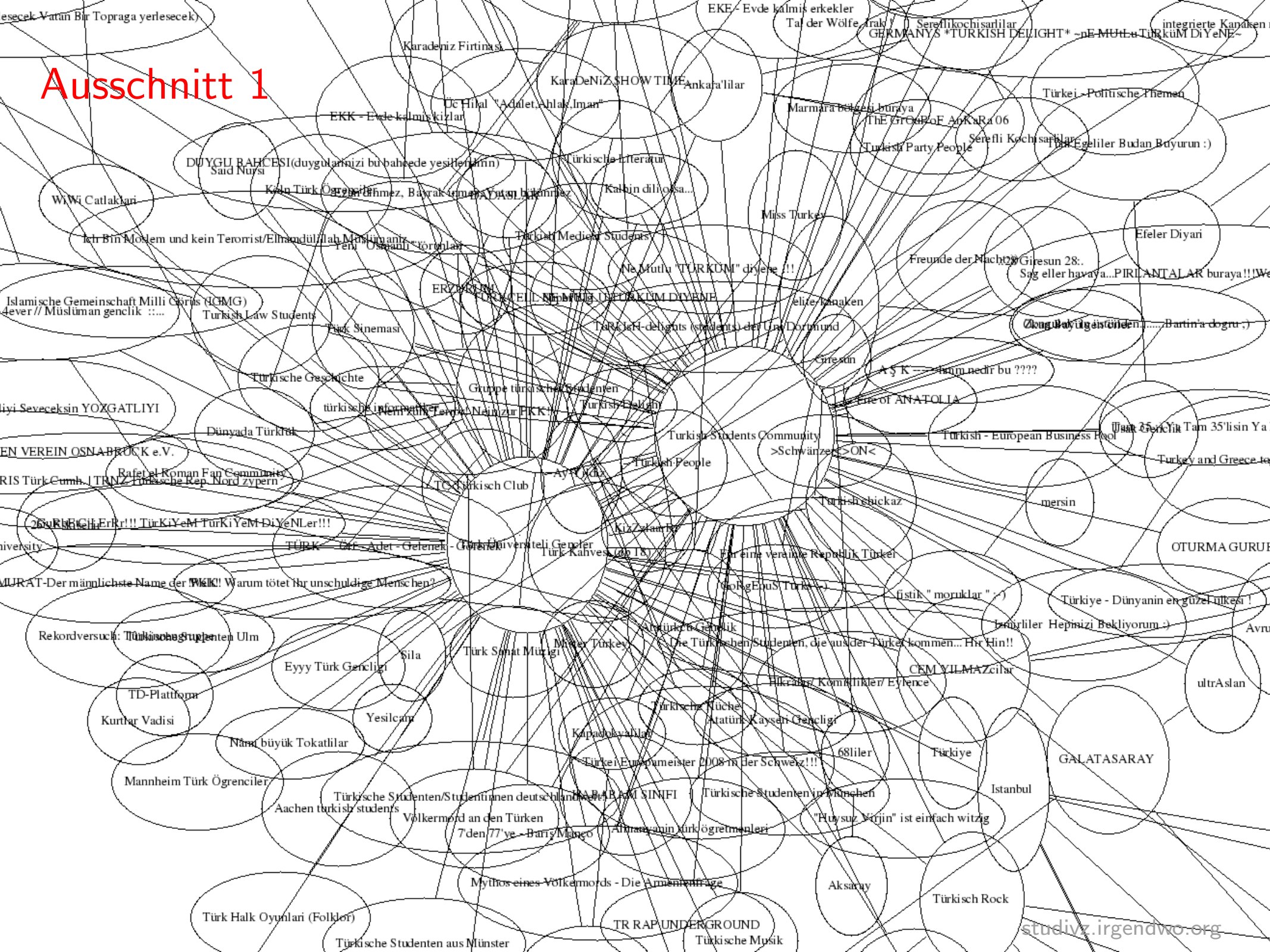
Zwei Gruppen sind durch eine Kante verbunden, wenn $\geq 45\%$ der Mitglieder einer Gruppe auch Mitglieder der anderen sind.

Der StudiVZ-Graph





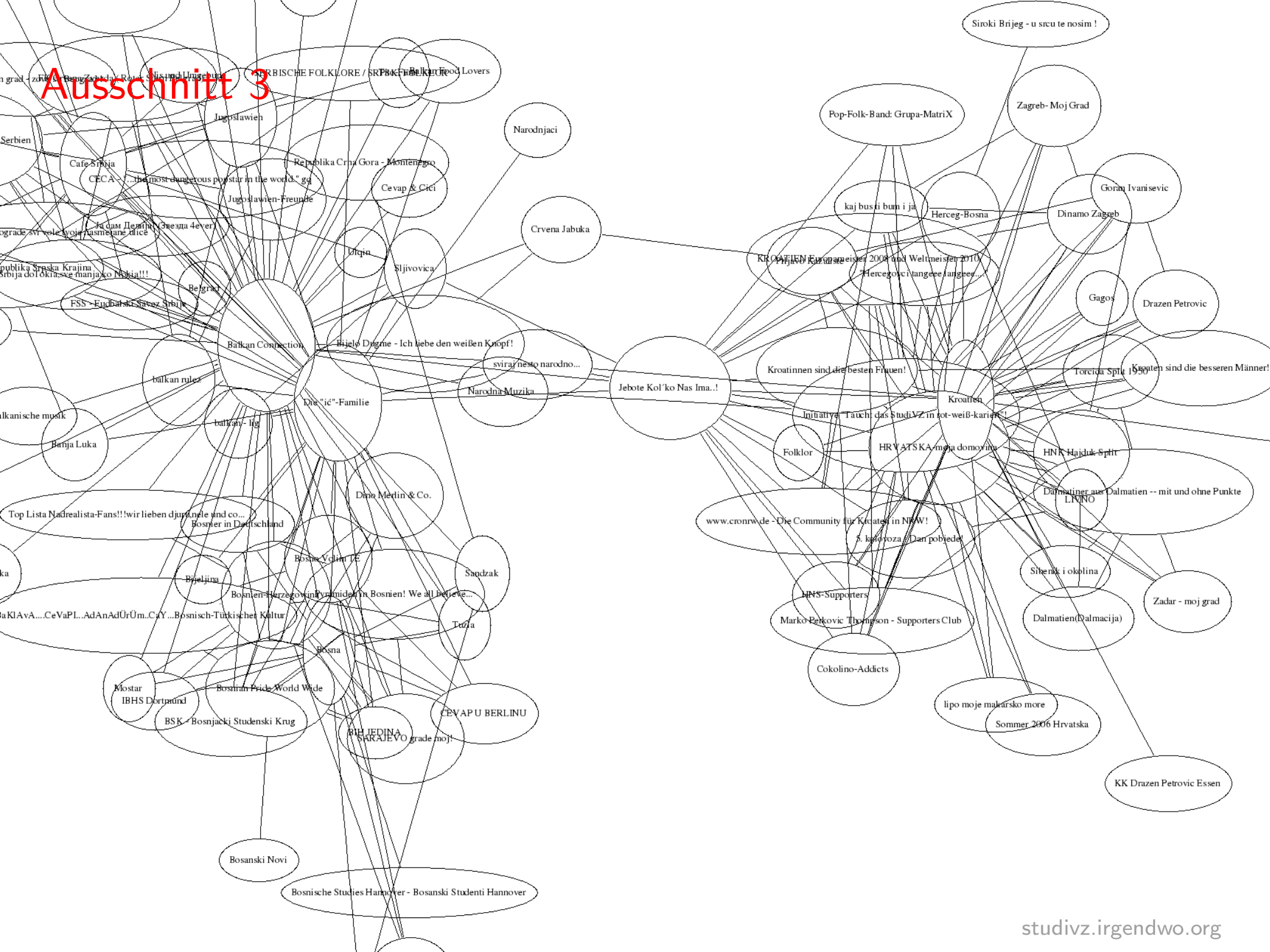
Der StudiVZ-Graph


Ausschnitt 1
Karadeniz Firtinasi
KaraDeNiZ SHOW TIME
Ankara'lilar
Üç Hilal "Adalet,Ahlak,Iman"
EKK - Evde kalmis kizlar
Marmara bölgesi buraya
ThE GrOuPoF AnKaRa 06
Türkei - Politische Themen
Serefli Kochisarliler
Türk Egeliler Budan Buyurun :)
Turkish Party People
DUYGU BAHCESI(duygularinizi bu bahcede yesillendirin)
Said Nursi
Türkische Literatur
Kalbin dili olsa...
Miss Turkey
Efeler Diyari
Freunde der Nacht
Sag eller havaya...PIRLANTALAR buraya!!!
Islamische Gemeinschaft Milli Görüs (ICMG)
Turkish Law Students
Türk Sinemasi
elite/kanaken
Türkische Geschichte
Gruppe türkischer Studenten
Turkish Delight
Dünyada Türklük
Turkish Students Community
Turkish - European Business Pool
Turkey and Greece
Rafet el Roman Fan Community
Türkisch People
TC Türkisch Club
Turkish chickaz
mersin
OTURMA GURUP
Türkiye - Dünyanin en güzel ülkesi !
Rekordversuch: Türkische Studenten Ulm
Sila
Türk Sanat Müzigi
Eyyy Türk Gencligi
CEM YILMAZcilar
ultrAslan
TD-Plattform
Kurtlar Vadisi
Yesilcam
Türkische Küche
Atatürk Kayseri Gencligi
Kapadokyalilar
Nami büyük Tokatlilar
68liler
Türkiye
GALATASARAY
Mannheim Türk Ögrenciler
Türkische Studenten/Studentinnen deutschlandweit
Türkische Studenten in München
Istanbul
Aachen turkish students
Völkermord an den Türken
"Huysuz Virjin" ist einfach witzig
Mythos eines Völkermords - Die Armenierfrage
Aksaray
Türkisch Rock
Türk Halk Oyunlari (Folklor)
TR RAP UNDERGROUND
Türkische Musik
Türkische Studenten aus Münster
studivz.irgendwo.org

Ausschnitt 2

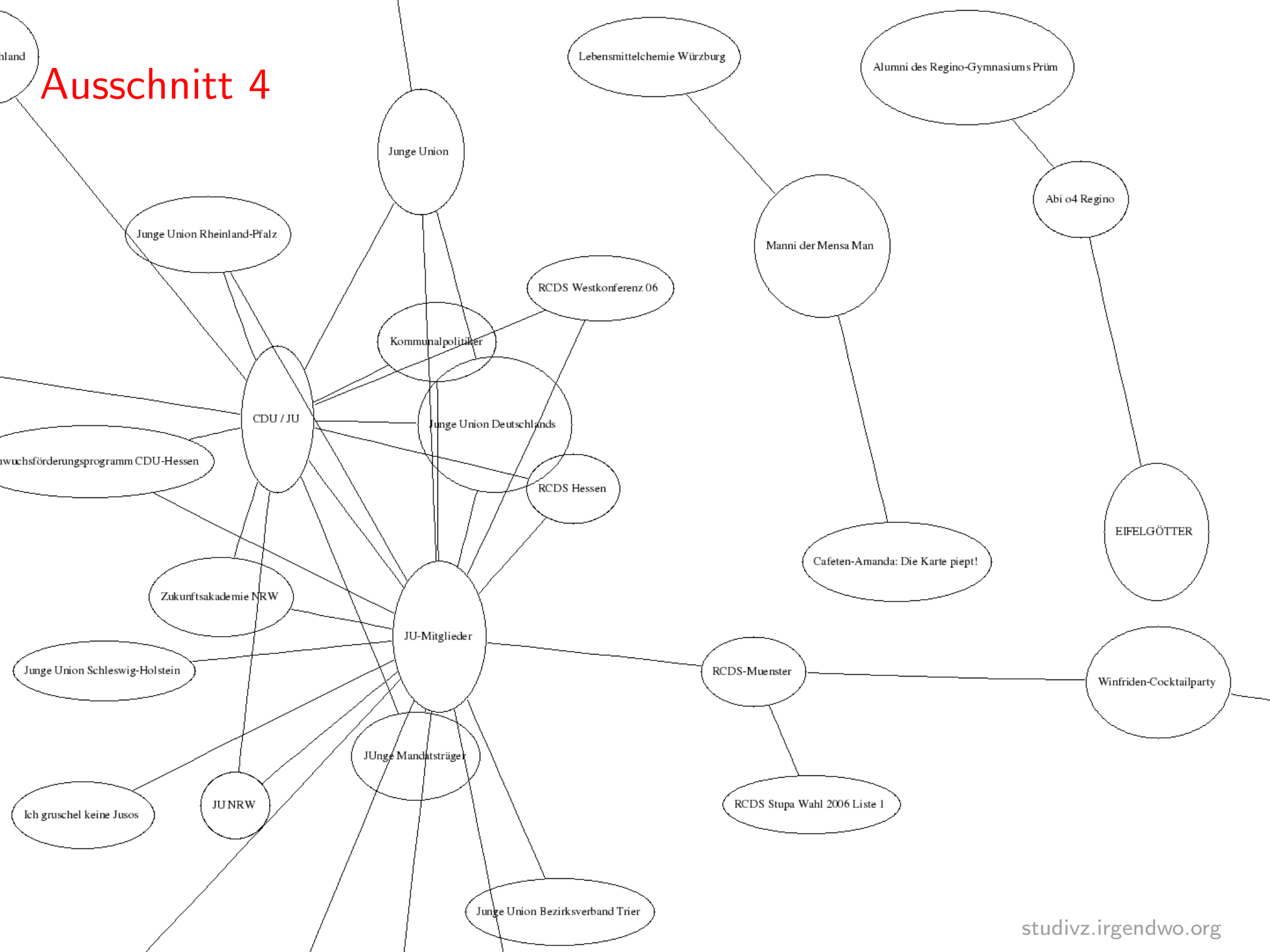
studivz.irgendwo.org

Ausschnitt 3



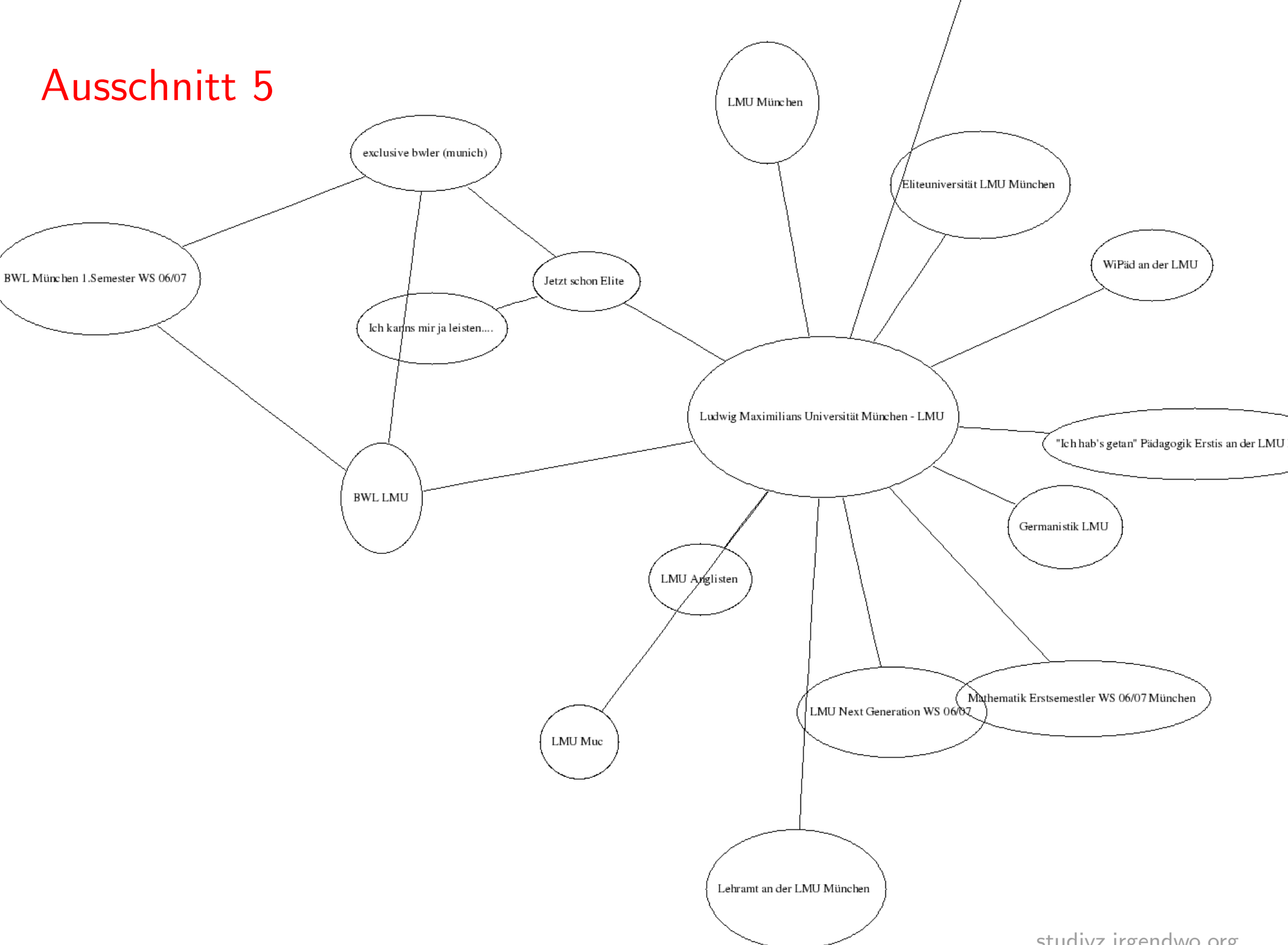
studivz.irgendwo.org

Ausschnitt 4



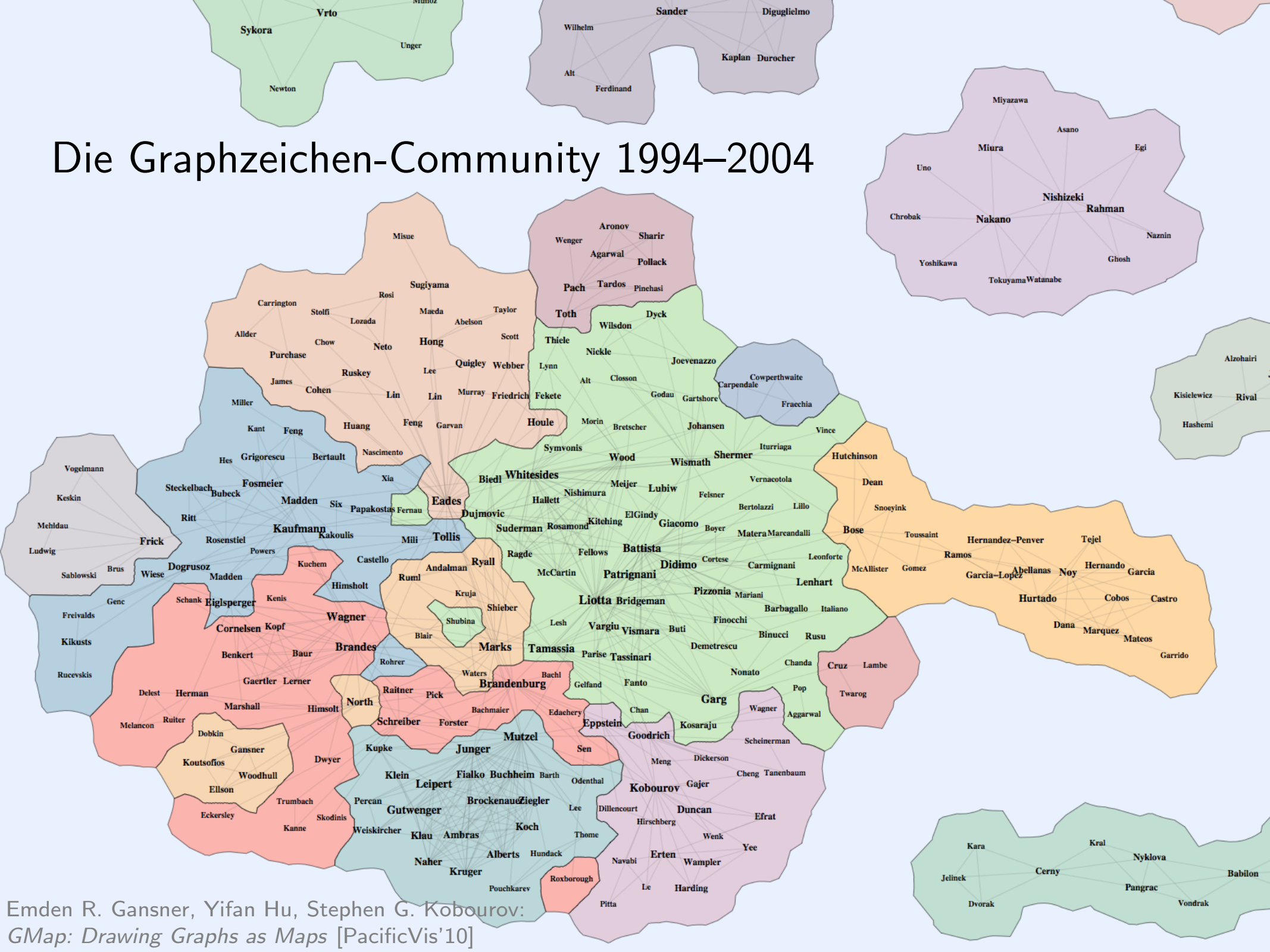
studivz.irgendwo.org

Ausschnitt 5



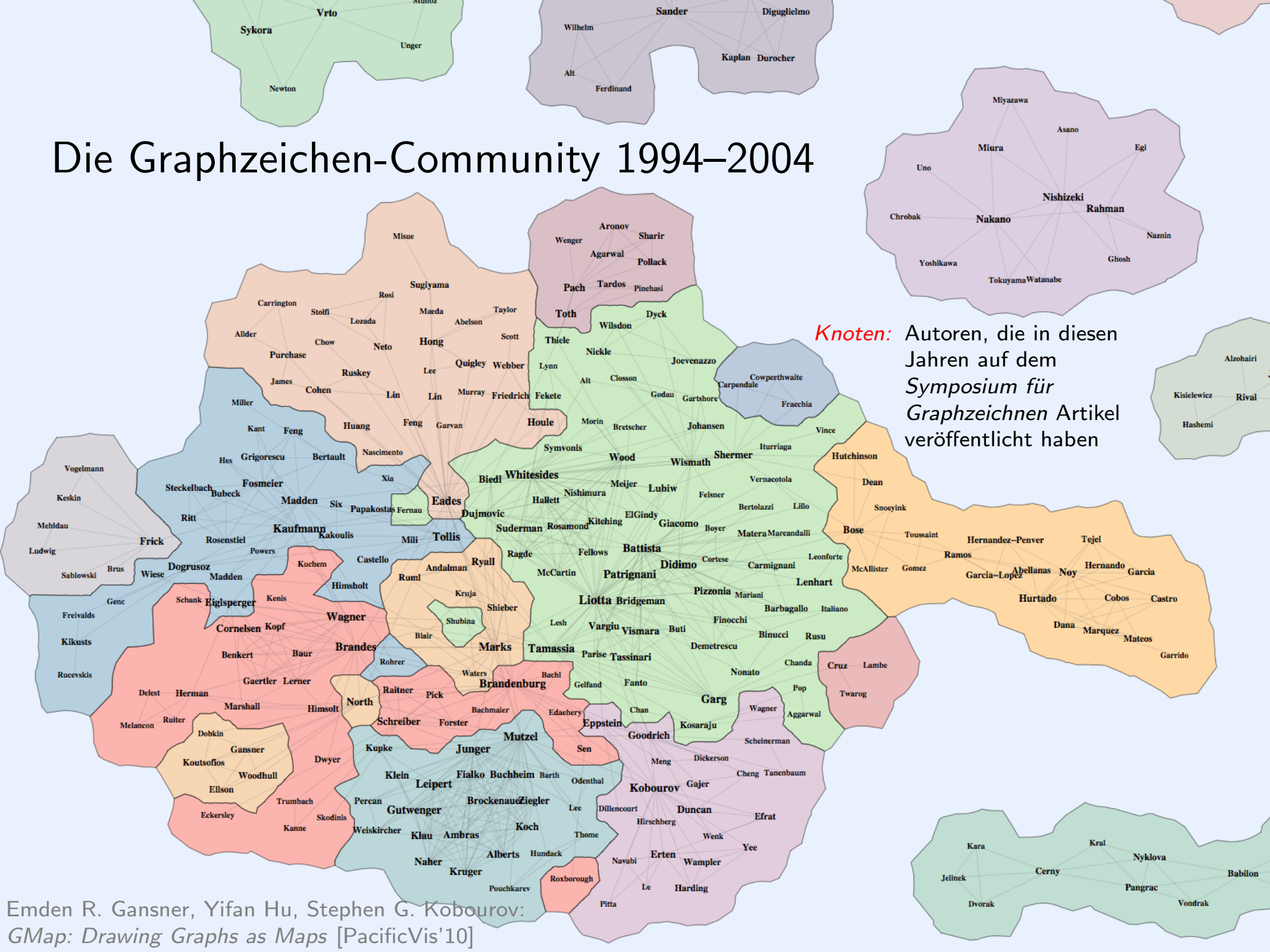
studivz.irgendwo.org

Die Graphzeichen-Community 1994–2004



Emden R. Gansner, Yifan Hu, Stephen G. Kobourov:
GMap: Drawing Graphs as Maps [PacificVis'10]

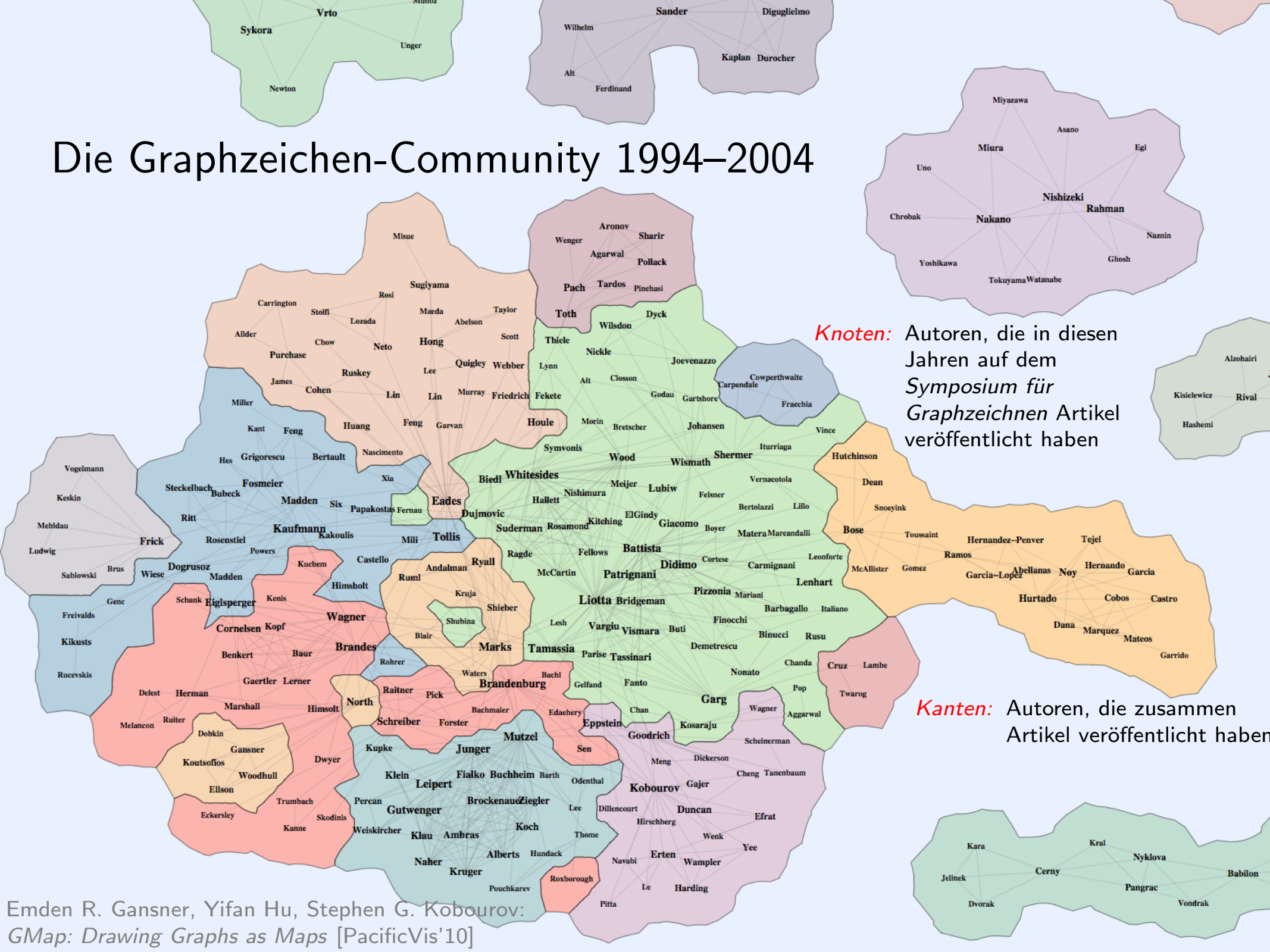
Die Graphzeichen-Community 1994–2004



Knoten: Autoren, die in diesen Jahren auf dem *Symposium für Graphzeichnen* Artikel veröffentlicht haben

Emden R. Gansner, Yifan Hu, Stephen G. Kobourov:
GMap: Drawing Graphs as Maps [PacificVis'10]

Die Graphzeichen-Community 1994–2004

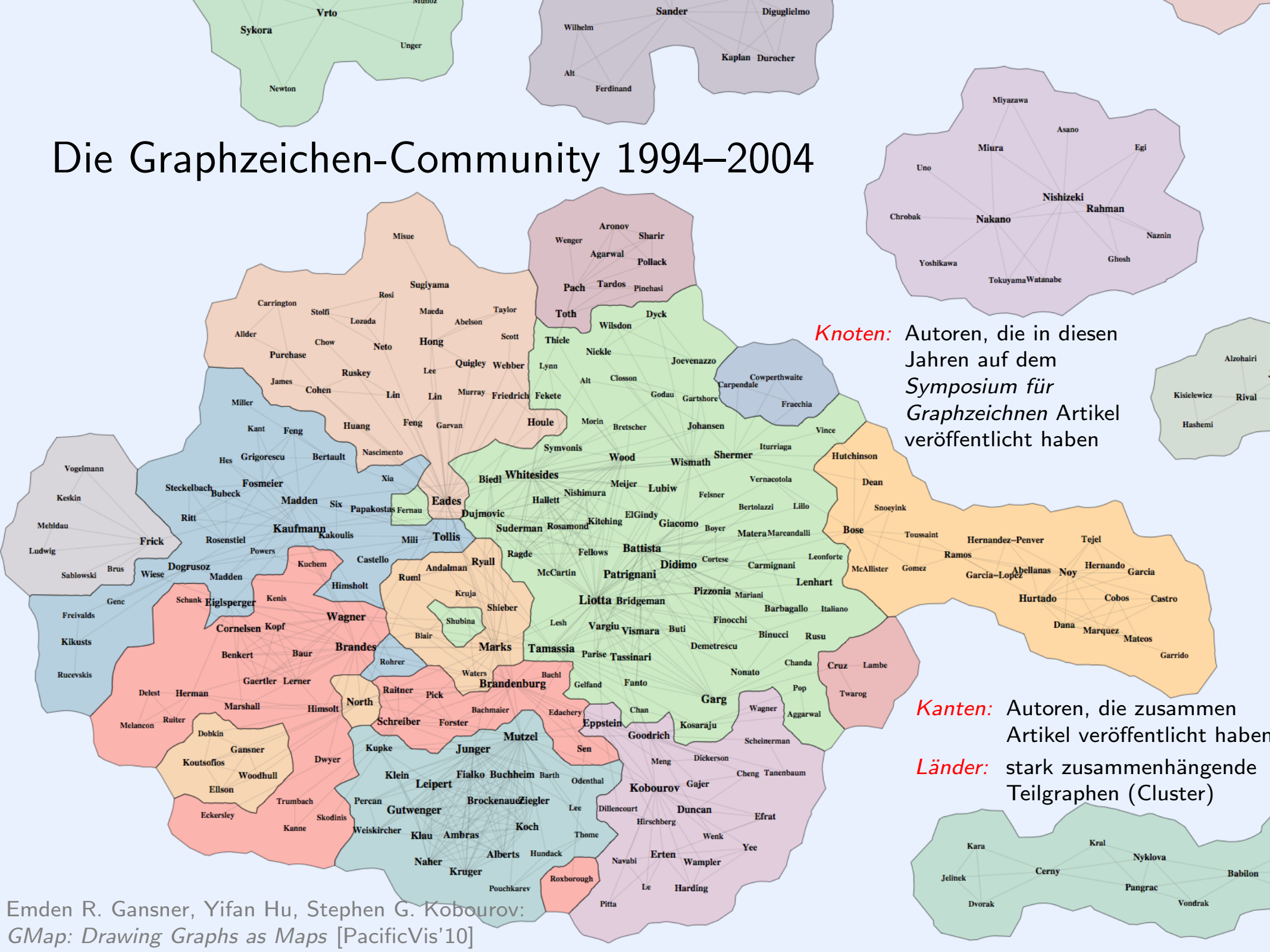


Knoten: Autoren, die in diesen Jahren auf dem *Symposium für Graphzeichnen* Artikel veröffentlicht haben

Kanten: Autoren, die zusammen Artikel veröffentlicht haben

Emden R. Gansner, Yifan Hu, Stephen G. Kobourov:
GMap: Drawing Graphs as Maps [PacificVis'10]

Die Graphzeichen-Community 1994–2004



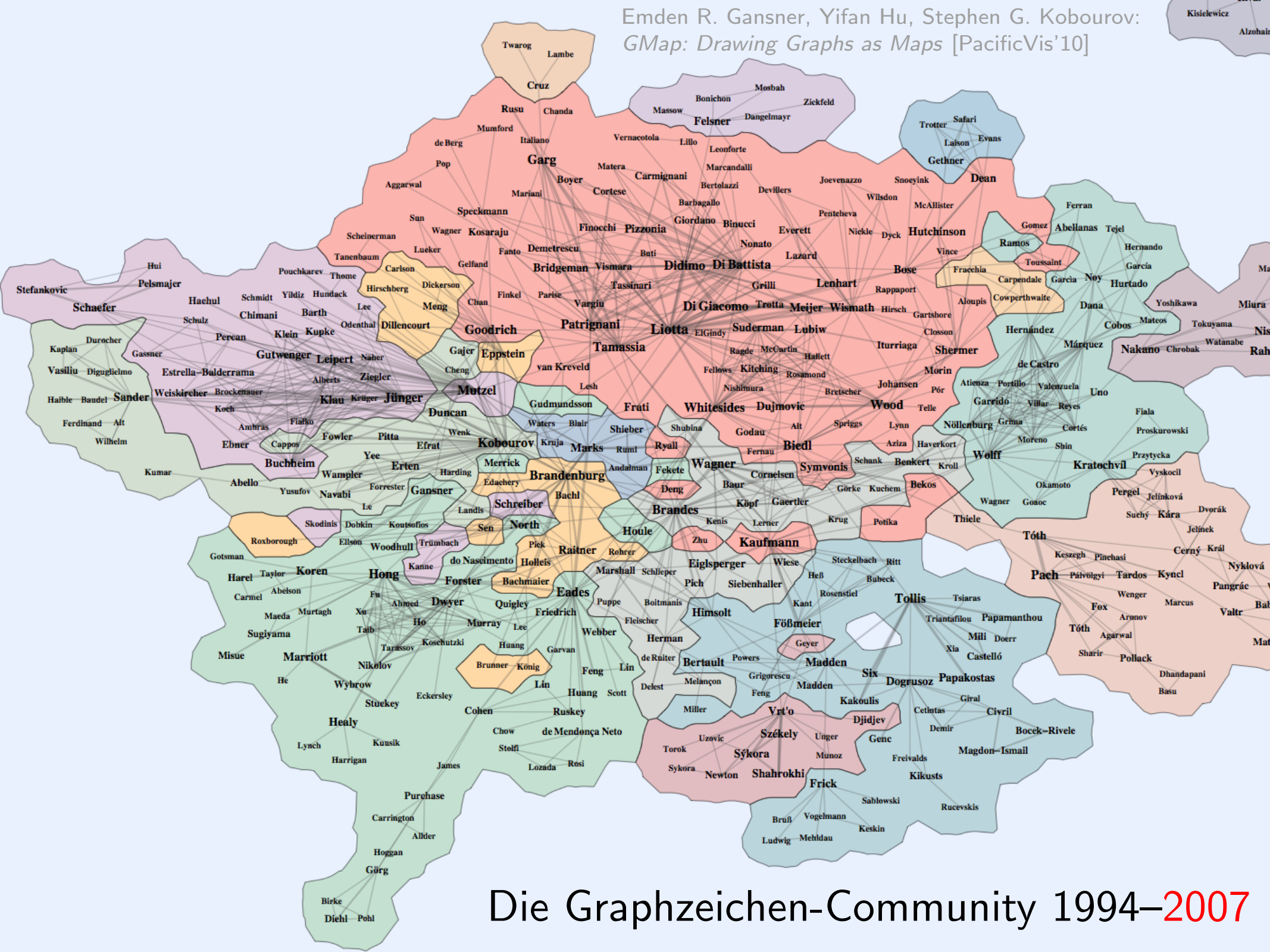
Knoten: Autoren, die in diesen Jahren auf dem *Symposium für Graphzeichnen* Artikel veröffentlicht haben

Kanten: Autoren, die zusammen Artikel veröffentlicht haben

Länder: stark zusammenhängende Teilgraphen (Cluster)

Emden R. Gansner, Yifan Hu, Stephen G. Kobourov:
GMap: Drawing Graphs as Maps [PacificVis'10]

Emden R. Gansner, Yifan Hu, Stephen G. Kobourov:
GMap: Drawing Graphs as Maps [PacificVis'10]


Twarog
Lambe
Cruz
Rusu
Chanda
Garg
Mumford
de Berg
Italiano
Pop
Aggarwal
Mariani
Boyer
Cortese
Vernacotola
Lillo
Leonforte
Matera
Carmignani
Marcandalli
Bertolazzi
Barbagallo
Speckmann
Sun
Scheinerman
Wagner
Kosaraju
Lueker
Fanto
Demetrescu
Buti
Finocchi
Pizzonia
Giordano
Binucci
Nonato
Bridgeman
Vismara
Didimo
Di Battista
Lazard
Tassinari
Grilli
Lenhart
Vargiu
Di Giacomo
Trotta
Meijer
Wismath
Hirsch
Patrignani
Liotta
ElGindy
Suderman
Lubiw
Tamassia
Goodrich
Gajer
Eppstein
van Kreveld
Lesh
Mutzel
Duncan
Gudmundsson
Frati
Whitesides
Dujmovic
Wood
Telle
Iturriaga
Shermer
Hutchinson
Bose
Dean
Gethner
Trotter
Safari
Laison
Evans
Felsner
Bonichon
Massow
Mosbah
Zickfeld
Dangelmayr
Devillers
Joevenazzo
Snoeyink
Penteheva
Wilsdon
McAllister
Nickle
Dyck
Vince
Fracchia
Ramos
Gomez
Toussaint
Carpendale
Cowperthwaite
Aloupis
Rappaport
Gartshore
Closson
Lubiw
Ferran
Abellanas
Tejel
Hernando
García
Noy
Hurtado
Dana
Yoshikawa
Cobos
Mateos
Tokuyama
Watanabe
Nakano
Chrobak
Hernández
Márquez
de Castro
Atienza
Portillo
Valenzuela
Uno
Garrido
Villar
Reyes
Fiala
Proskurowski
Cortés
Grima
Nöllenburg
Moreno
Shin
Wolff
Przytycka
Kratochvíl
Vyskocil
Pergel
Jelínková
Kára
Dvorák
Suchý
Jelínek
Cerný
Král
Nyklová
Pangrác
Valtr
Tóth
Keszegh
Pinchasi
Pach
Pálvölgyi
Tardos
Kyncl
Fox
Aronov
Marcus
Wenger
Agarwal
Sharir
Pollack
Dhandapani
Basu
Thiele
Potika
Bekos
Görke
Kuchem
Okamoto
Wagner
Goaoc
Biedl
Godau
Alt
Spriggs
Lynn
Haverkort
Aziza
Fernau
Schank
Benkert
Kroll
Symvonis
Wagner
Fekete
Andalman
Cornelsen
Baur
Deng
Köpf
Gaertler
Brandes
Kenis
Lerner
Krug
Kaufmann
Zhu
Houle
Eiglsperger
Wiese
Steckelbach
Ritt
Heß
Bubeck
Rosenstiel
Tollis
Tsiaras
Triantafilou
Papamanthou
Mili
Doerr
Xia
Castelló
Madden
Six
Dogrusoz
Papakostas
Giral
Civril
Demir
Bocek-Rivele
Magdon-Ismail
Freivalds
Kikusts
Rucevskis
Sablowski
Keskin
Vogelmann
Bruß
Ludwig
Mehldau
Frick
Shahrokhi
Newton
Sykora
Uzovic
Torok
Székely
Unger
Munoz
Genc
Djidjev
Vrt'o
Cetintas
Kakoulis
Miller
Fößmeier
Geyer
Himsolt
Bertault
de Ruiter
Delest
Melançon
Grigorescu
Feng
Madden
Herman
Webber
Feng
Lin
Huang
Scott
Garvan
Brunner
Konig
Lin
Huang
Eades
Puppe
Boitmanis
Fleischer
Pich
Siebenhaller
Kant
Rosenstiel
Marshall
Schlieper
Raitner
Rohrer
Pick
Holleis
Bachmaier
Forster
Quigley
Friedrich
Murray
Lee
Ho
Dwyer
Ahmed
Fu
Xu
Taib
Tarassov
Koschutzki
Huang
Nikolov
Wybrow
He
Eckersley
Stuckey
Cohen
Ruskey
Chow
de Mendonça Neto
Stolfi
Lozada
Rosi
James
Purchase
Carrington
Allder
Hoggan
Görg
Birke
Diehl
Pohl
Healy
Lynch
Kusik
Harrigan
Marriott
Misue
Sugiyama
Maeda
Murtagh
Carmel
Abelson
Harel
Taylor
Koren
Hong
Gotsman
Roxborough
Ellson
Woodhull
Trümbach
Kanne
do Nascimento
Skodinis
Dobkin
Koutsofios
Sen
North
Schreiber
Landis
Bachl
Le
Gansner
Navabi
Yusufov
Abello
Kumar
Buchheim
Wampler
Harding
Merrick
Edachery
Brandenburg
Erten
Yee
Efrat
Wenk
Kruja
Marks
Ruml
Ryall
Shieber
Waters
Blair
Kobourov
Fowler
Pitta
Cappos
Ebner
Ambras
Fialko
Ferdinand
Alt
Wilhelm
Haible
Baudel
Sander
Weiskircher
Brockenauer
Koch
Klau
Kruger
Jünger
Estrella-Balderrama
Alberts
Ziegler
Vasiliu
Diguglielmo
Durocher
Kaplan
Gassner
Gutwenger
Leipert
Naher
Percan
Klein
Kupke
Schaefer
Hachul
Schmidt
Yildiz
Hundack
Barth
Chimani
Schulz
Odenthal
Dillencourt
Meng
Hirschberg
Dickerson
Carlson
Tanenbaum
Thome
Pouchkarev
Hui
Pelsmajer
Stefankovic
Lee
Chan
Finkel
Parise
Gelfand
Cheng
Fellows
Kitching
Rosamond
Nishimura
Bretscher
Johansen
Pór
Morin
Hallett
McCartin
Ragde

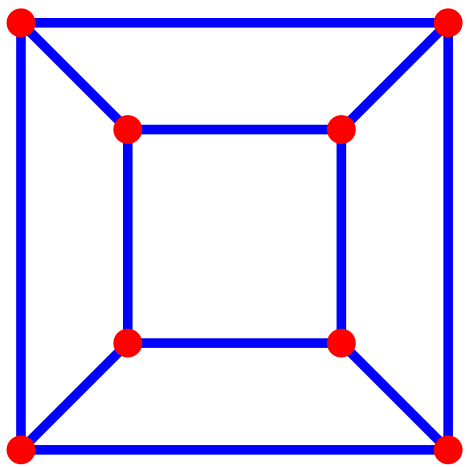
F: Was ist ein Graph?

F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E)

F: Was ist ein Graph?

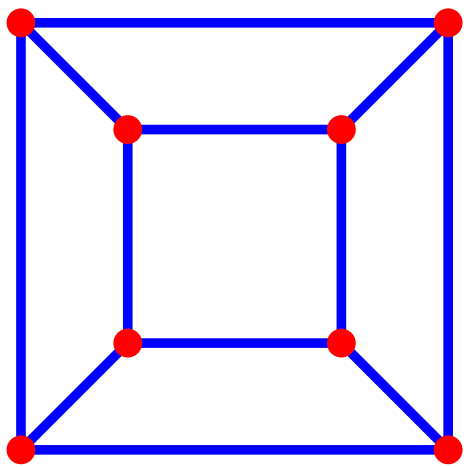
A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E)



F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei

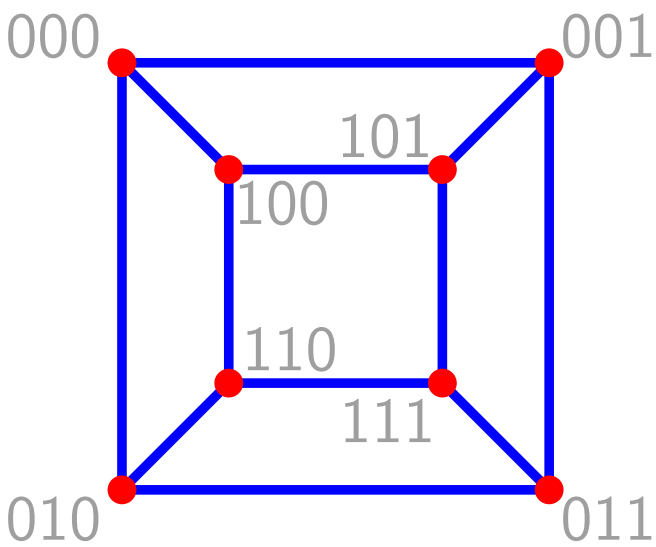
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.



F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

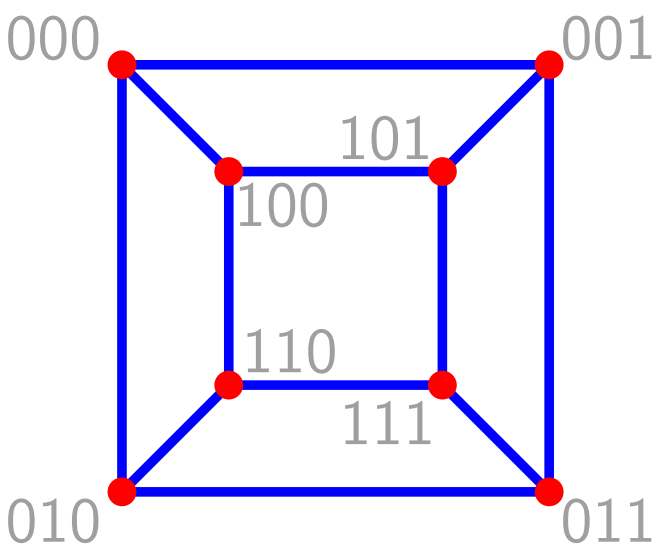
$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$

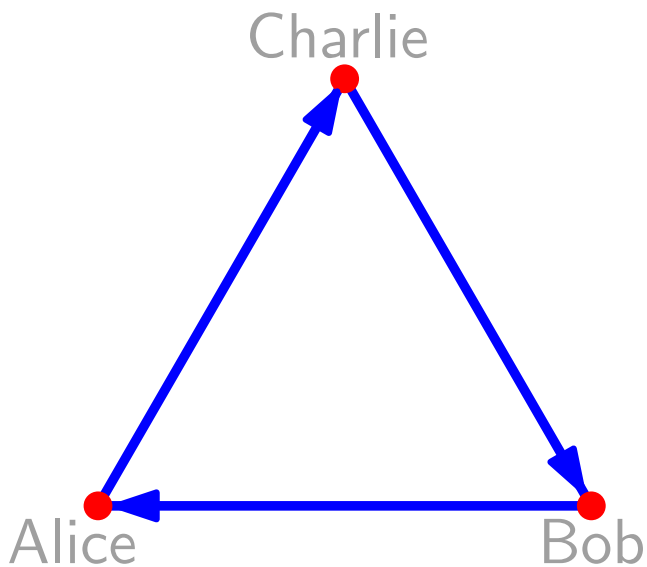


F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$

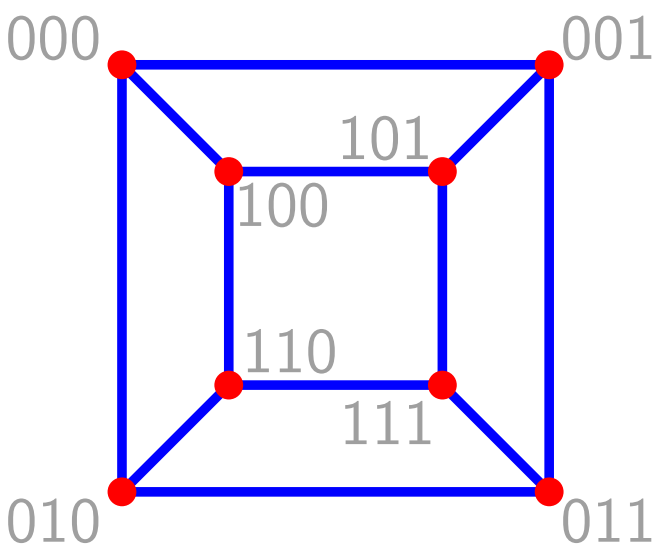


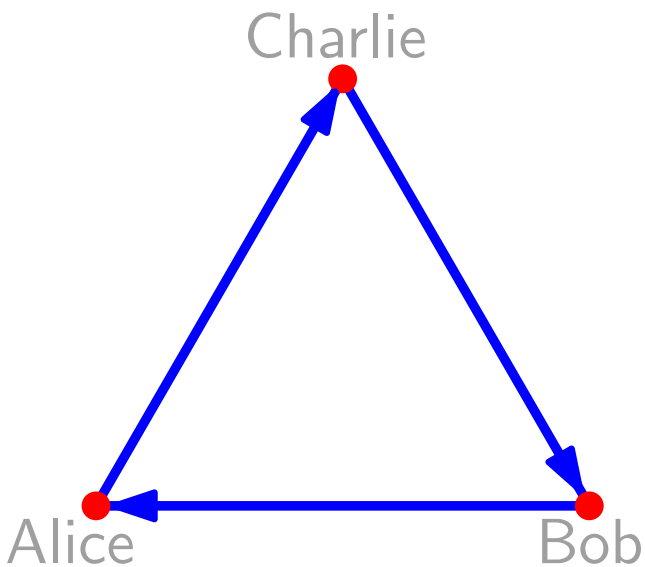


F: Was ist ein Graph?

A_1: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar (V, E), wobei
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ *Kantenmenge*.

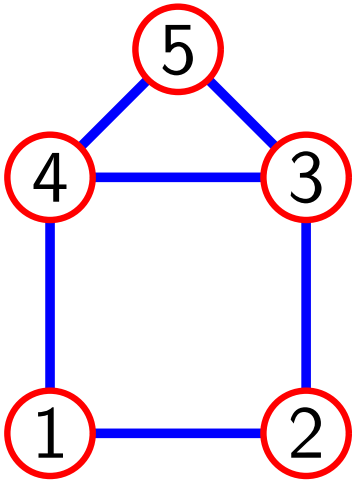
$V = \{000, 001, \ldots, 111\}$
$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad ?$





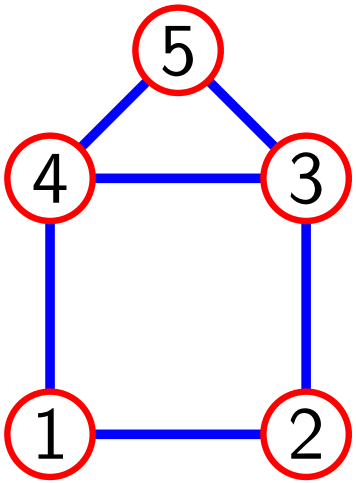
A_2: Ein *gerichteter* Graph ist ein Paar (V, E), wobei
- V *Knotenmenge* und
- $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ *Kantenmenge*.

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

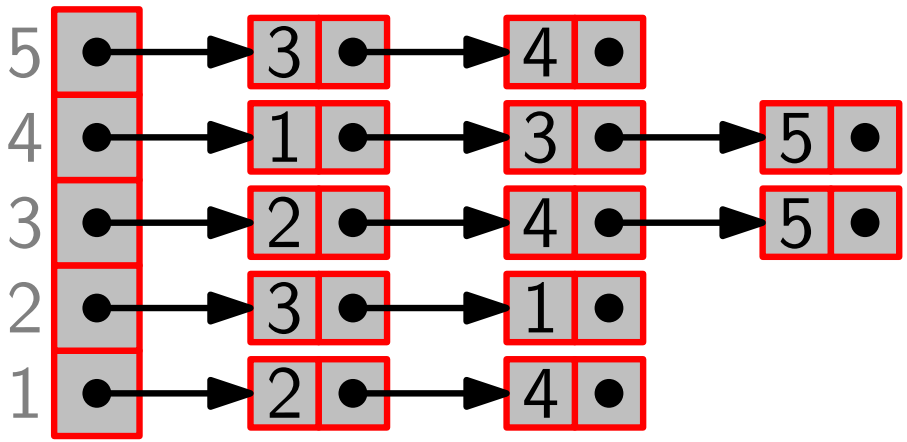


ungerichteter Graph

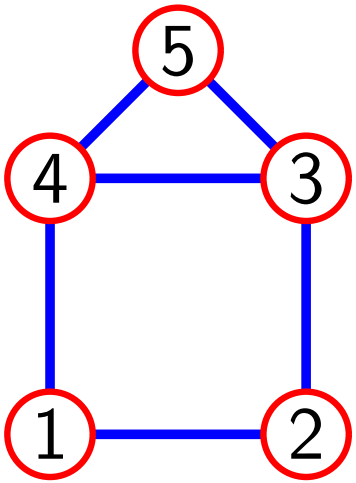
F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



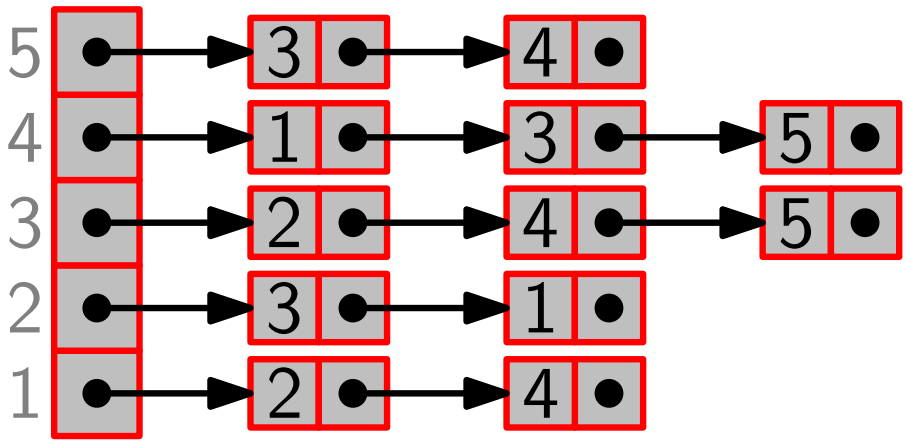
ungerichteter Graph



F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



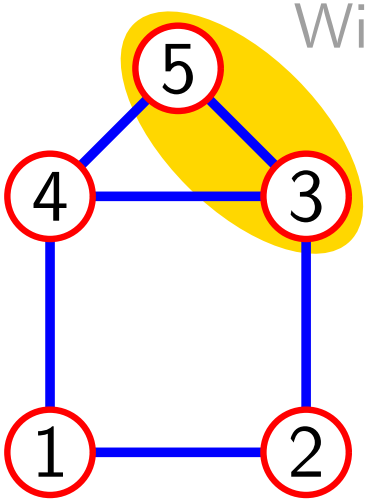
ungerichteter Graph



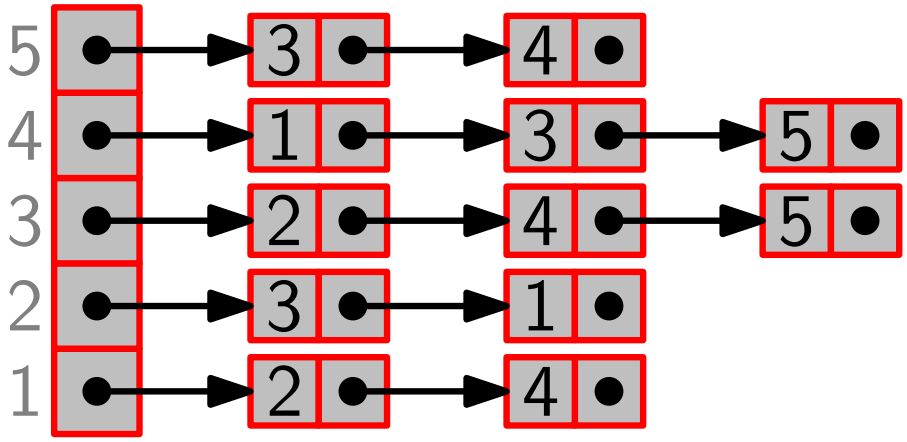
Adjazenzlisten

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.

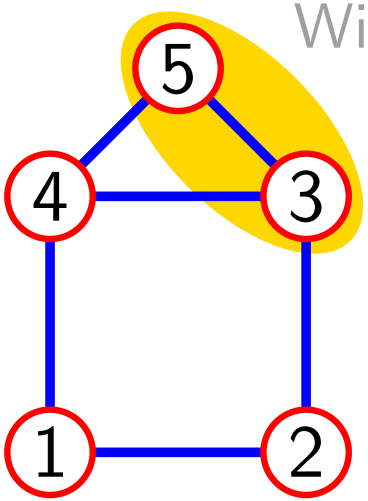


ungerichteter Graph



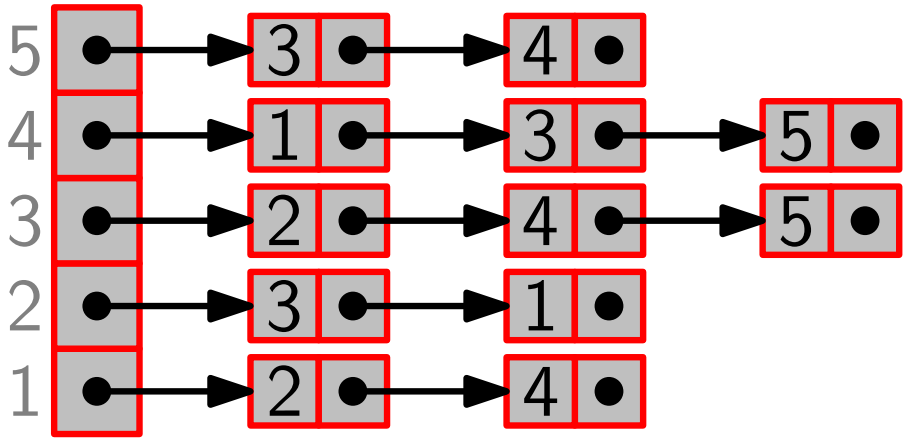
Adjazenzlisten

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

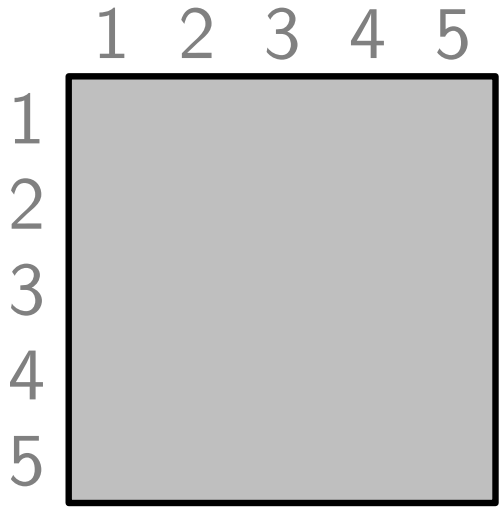


ungerichteter Graph

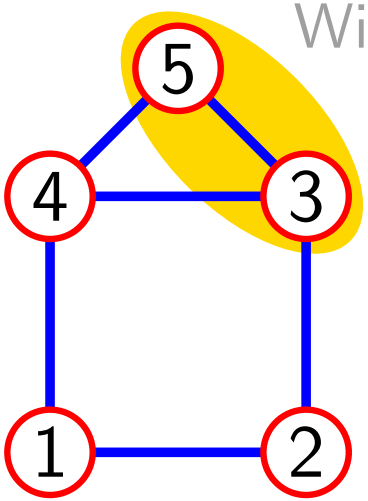
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



Adjazenzlisten

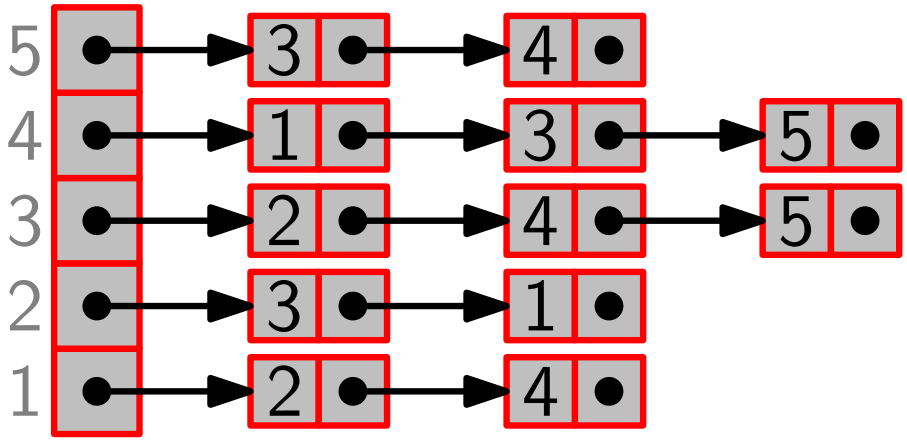


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

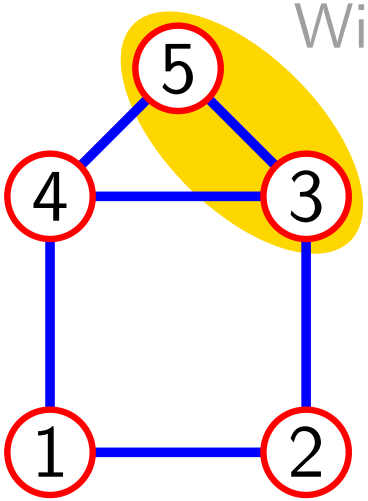
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



Adjazenzlisten

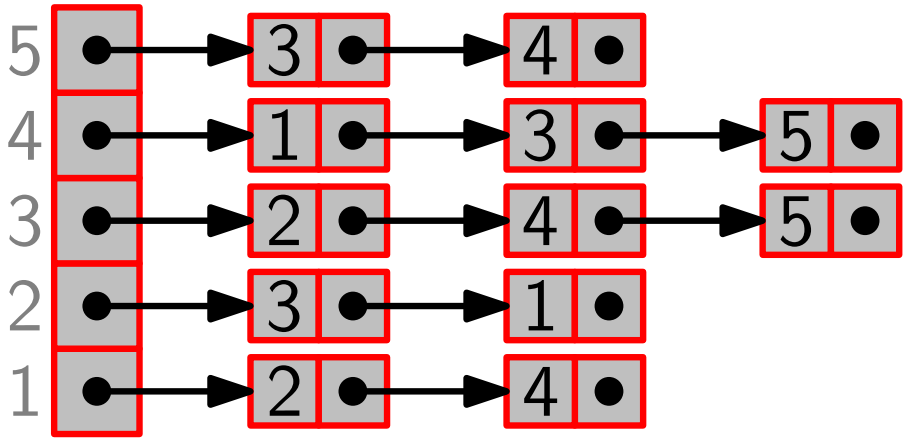
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.

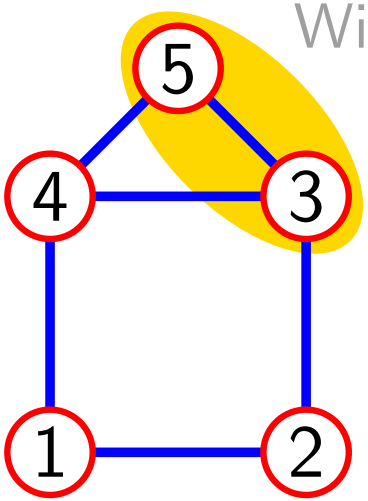


Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

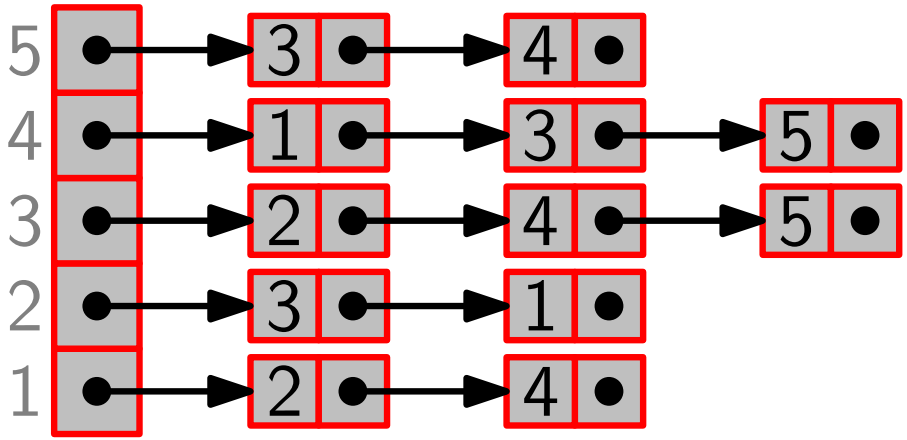
Adjazenzmatrix

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

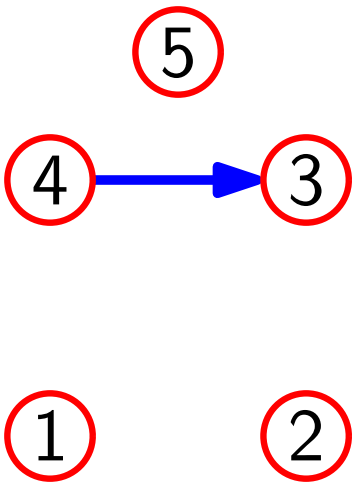
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



Adjazenzlisten

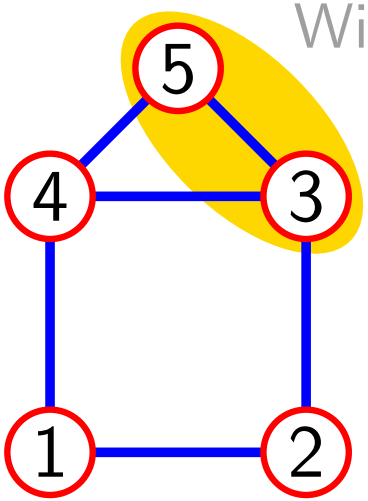
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

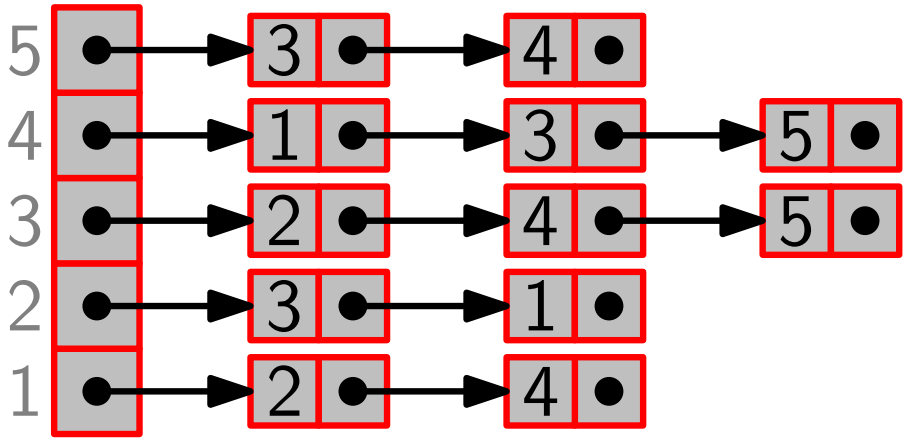


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



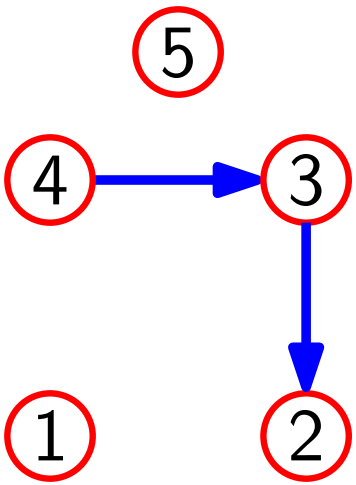
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

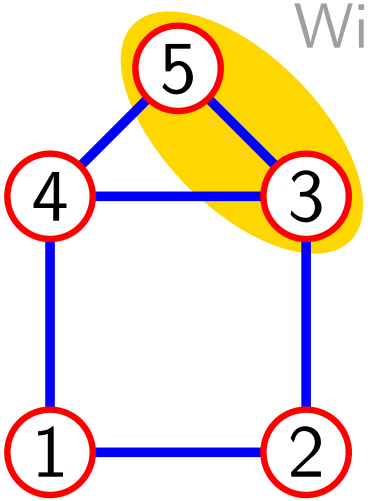
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

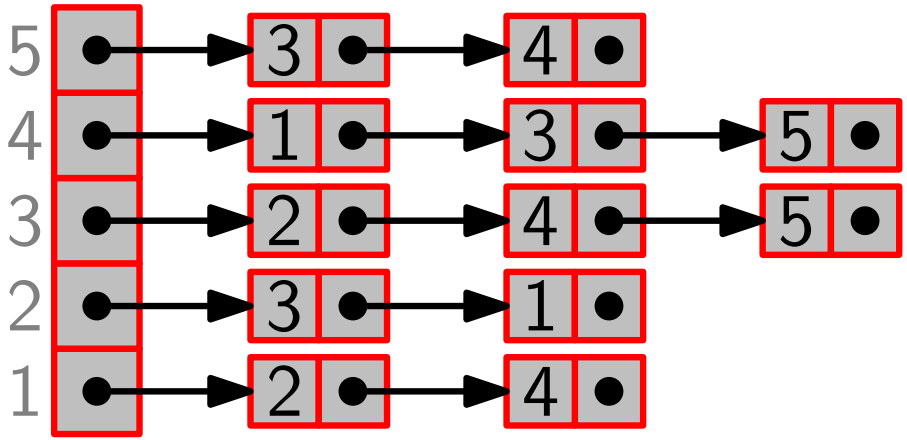


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



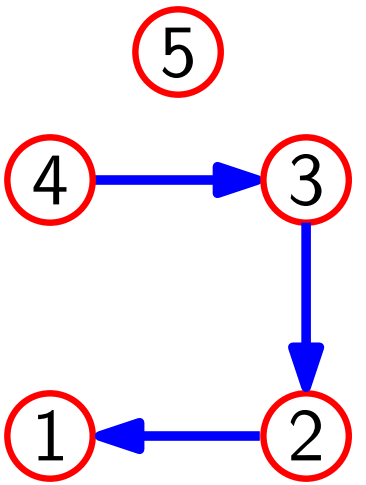
ungerichteter Graph



Adjazenzlisten

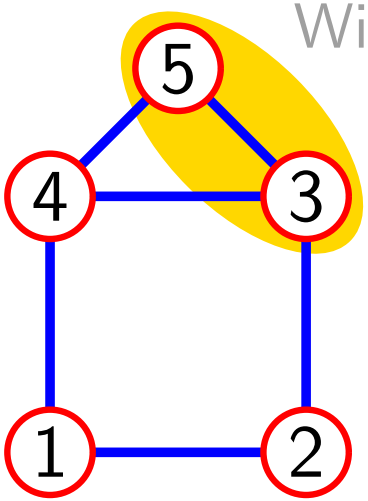
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

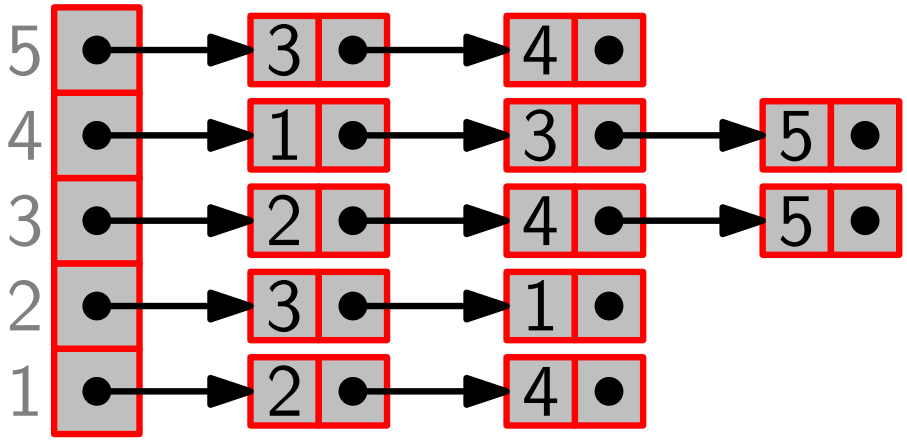


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



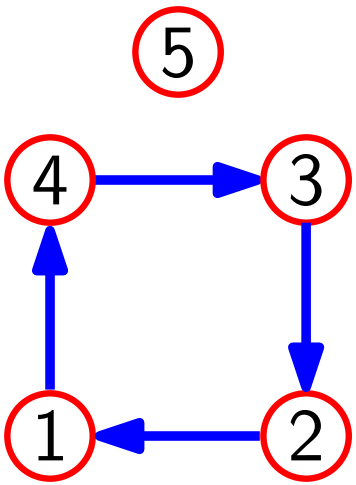
ungerichteter Graph



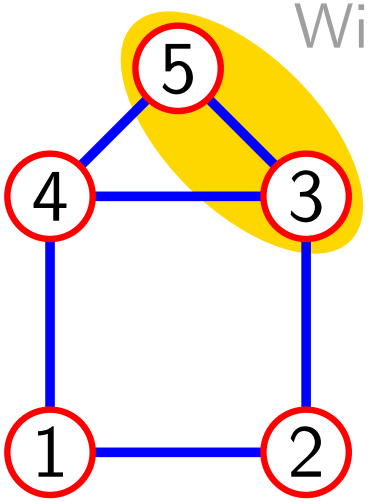
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

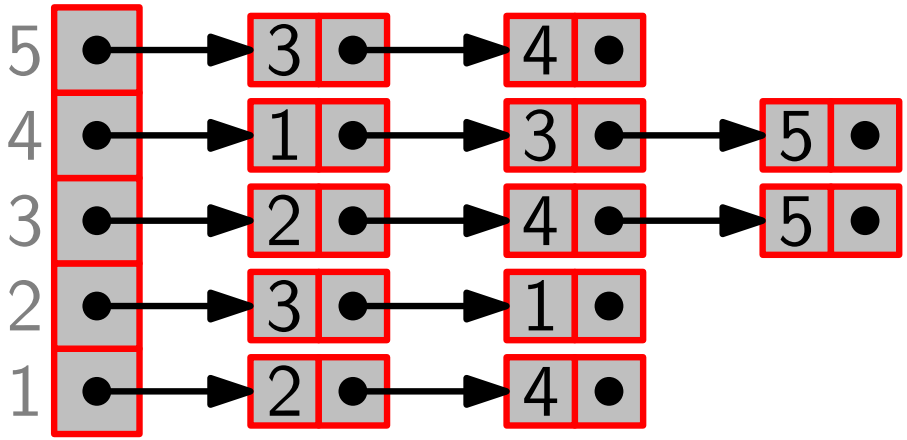


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

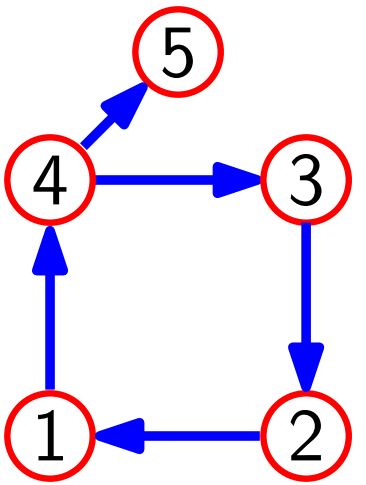
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



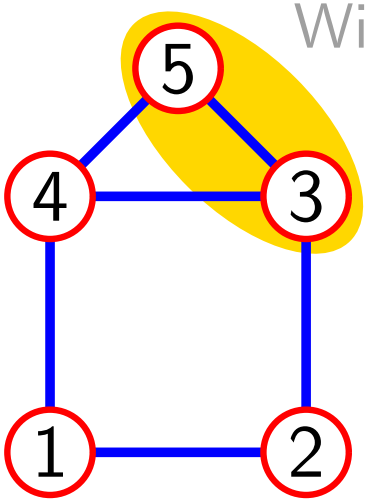
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

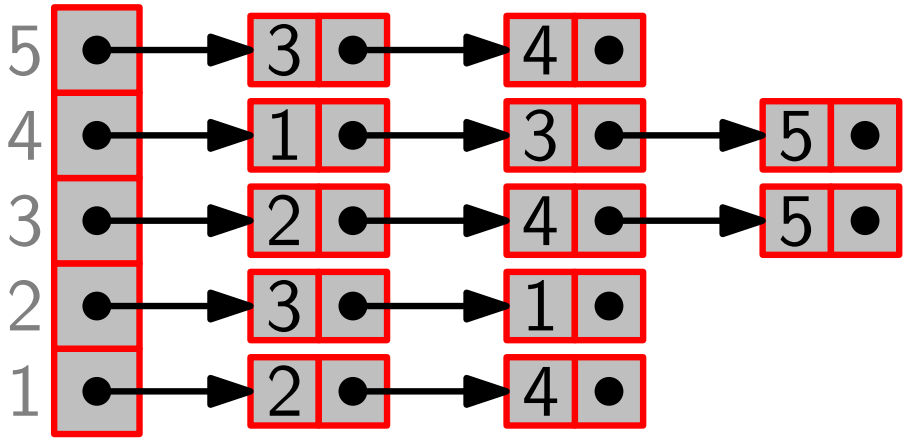


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

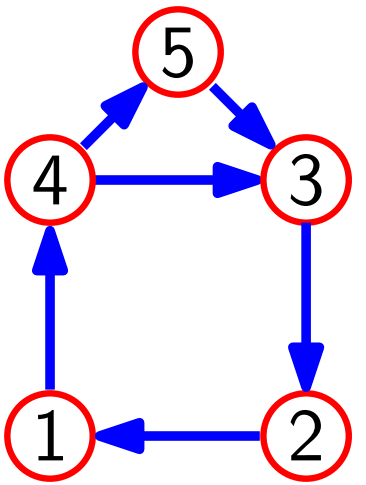
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



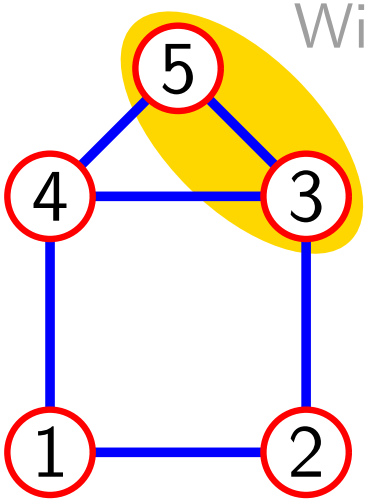
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix

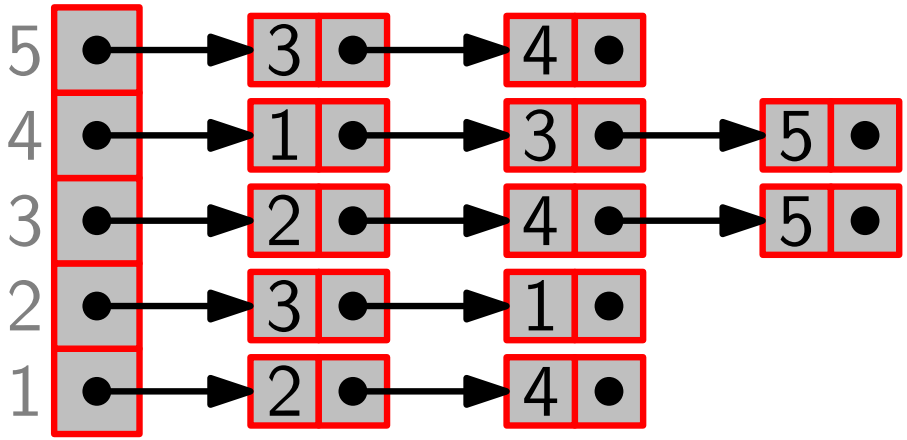


F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?



ungerichteter Graph

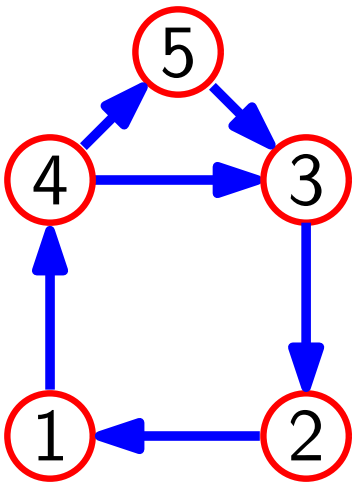
Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

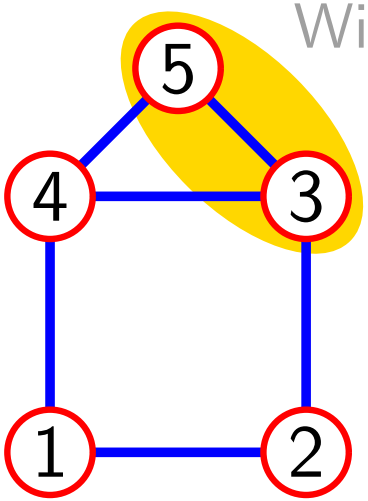
Adjazenzmatrix



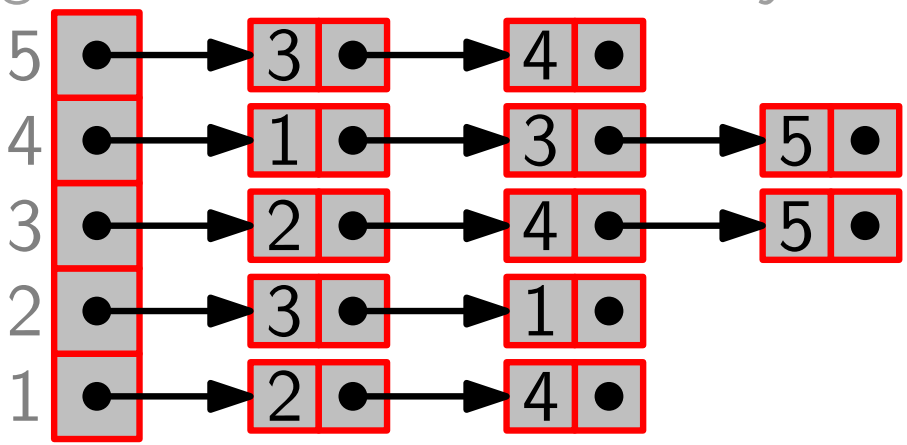
gerichteter Graph

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



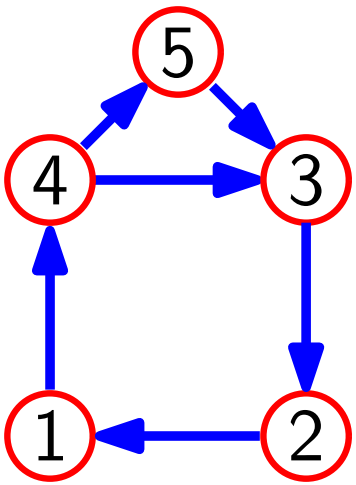
ungerichteter Graph



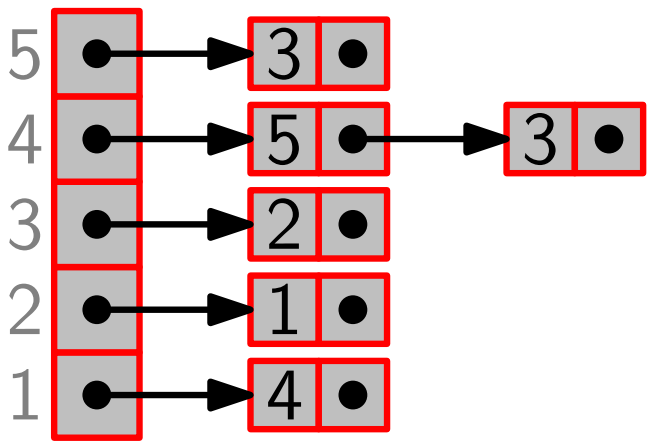
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



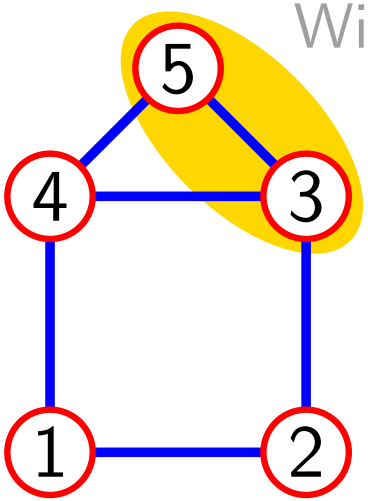
gerichteter Graph



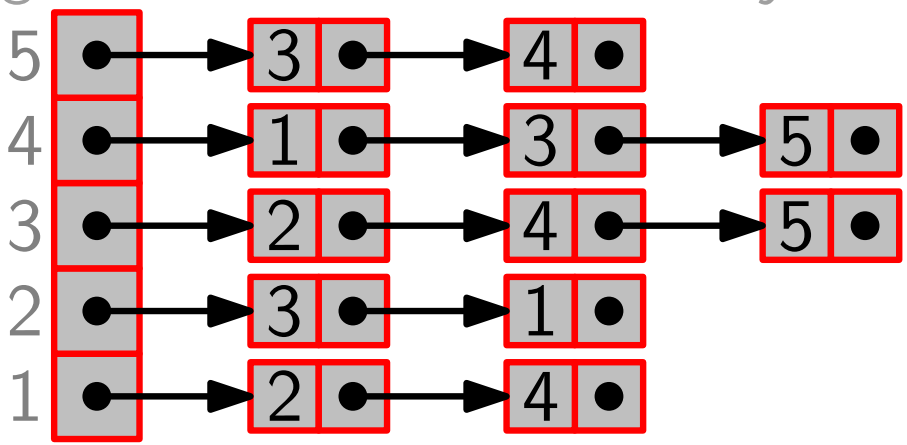
$\text{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

F: Wie repräsentiere ich einen Graphen?

Wir sagen: Knoten 3 und 5 sind *adjazent*.



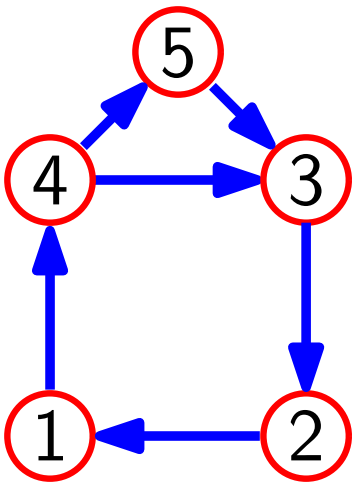
ungerichteter Graph



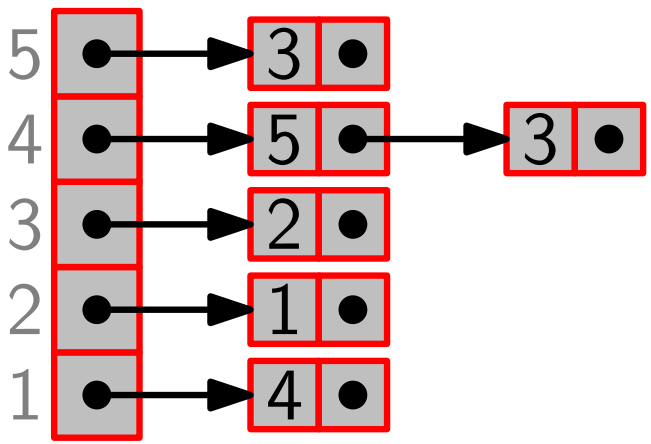
Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	0	0	1	1	0

Adjazenzmatrix



gerichteter Graph



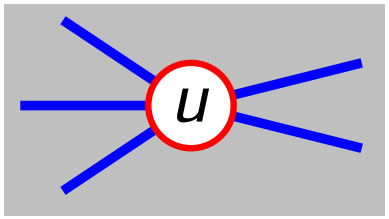
$\mathrm{Adj}[i] = \{j \in V \mid (i,j) \in E\}$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0

$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in E$

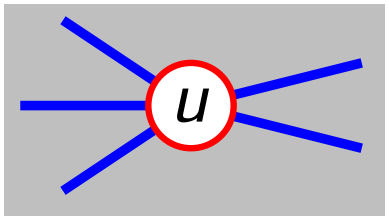
Grad eines Knotens

Def.



Grad eines Knotens

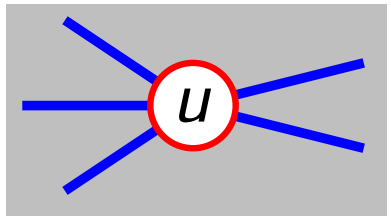
Def.

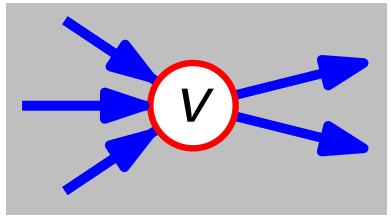


$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

Grad eines Knotens

Def.

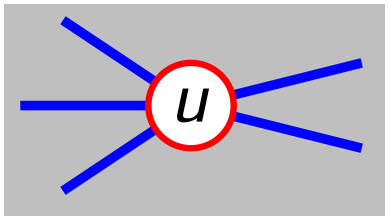




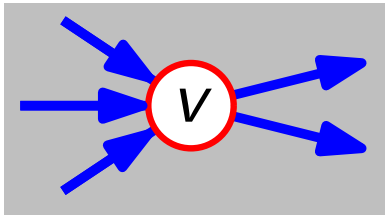
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

Grad eines Knotens

Def.



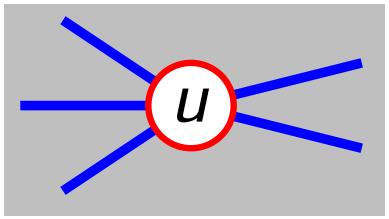
$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



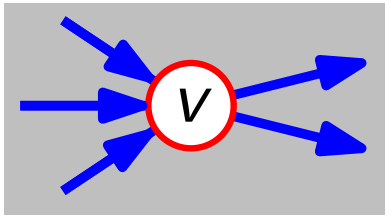
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

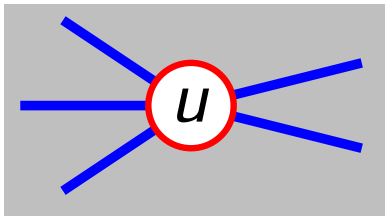


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$

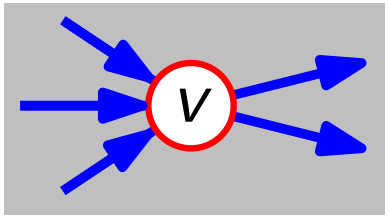
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

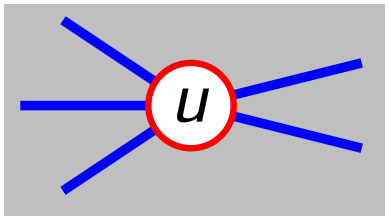


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

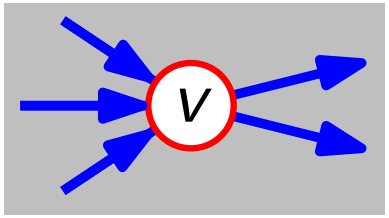
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $=$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

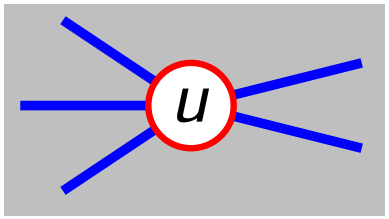


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

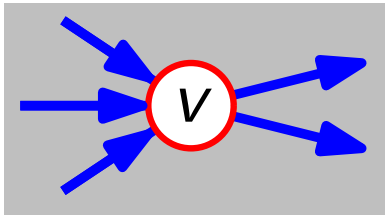
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



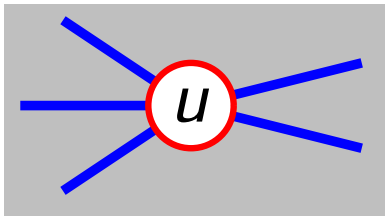
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

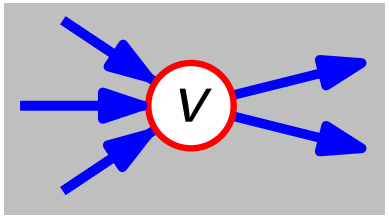
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

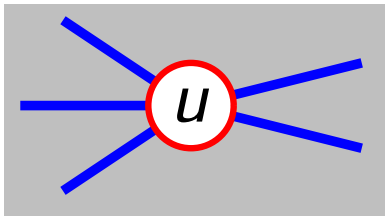
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

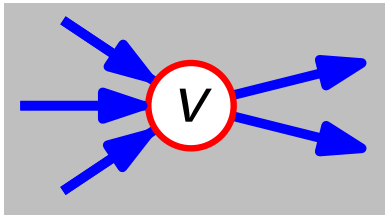
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

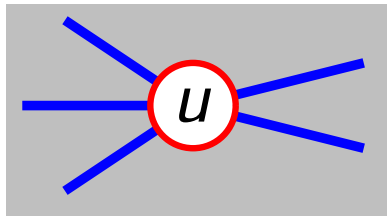
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

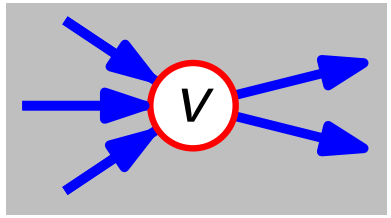
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

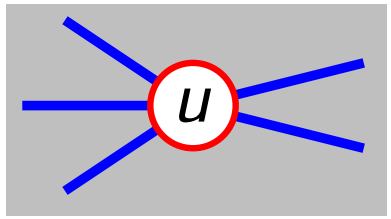
Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

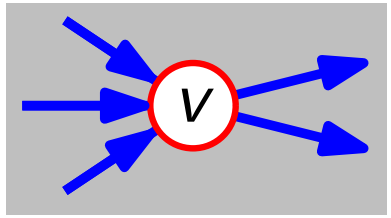
Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

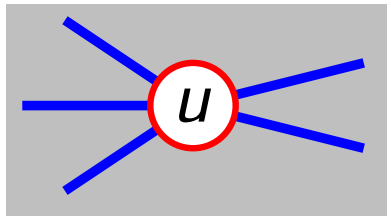
Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

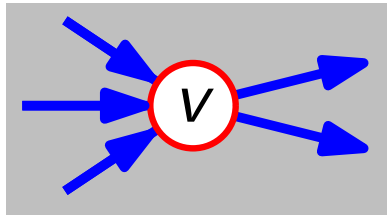
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

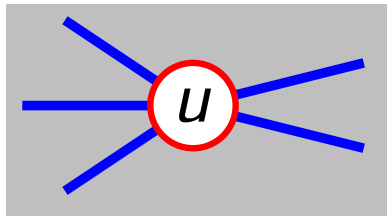
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten:

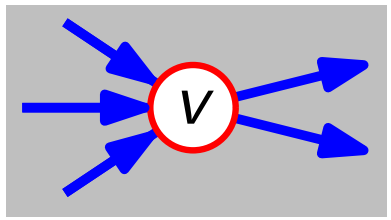
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

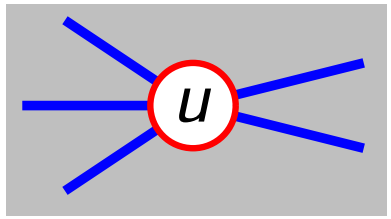
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

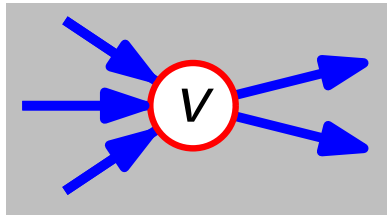
Aus Sicht der Kanten:

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

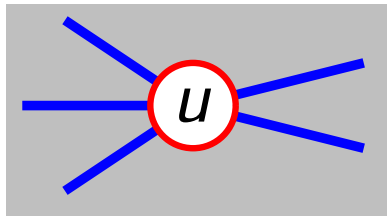
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

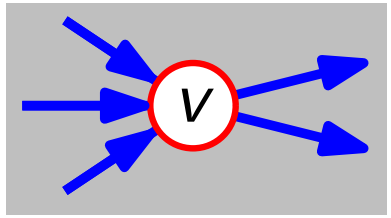
Aus Sicht der Kanten: $2 \cdot |E|$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Beweis. Technik des *zweifachen Abzählens:*

Zähle alle Knoten-Kanten-Inzidenzen.

Eine Kante ist *inzident* zu ihren Endknoten.

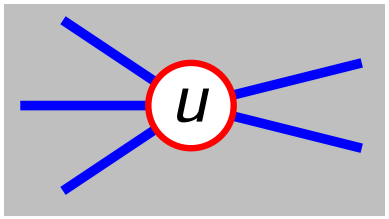
Ein Knoten ist *inzident* zu allen Kanten, deren Endknoten er ist.

Aus Sicht der Knoten: $\sum_{v \in V} \deg v$

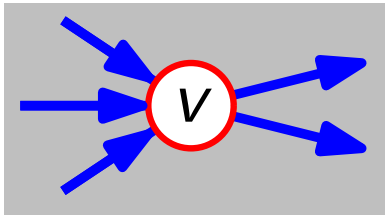
Aus Sicht der Kanten: $2 \cdot |E|$ also gleich!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$

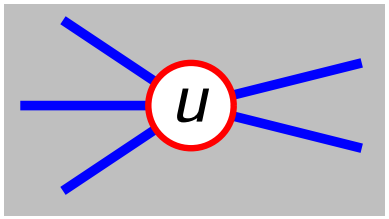


$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

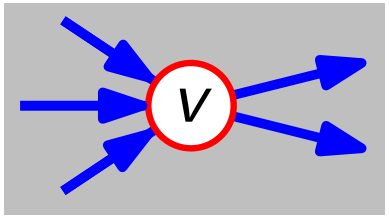
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



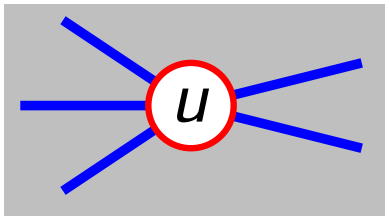
$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

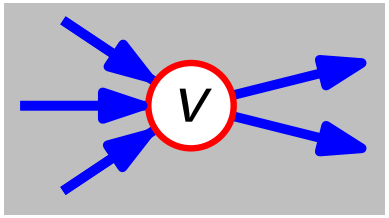
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

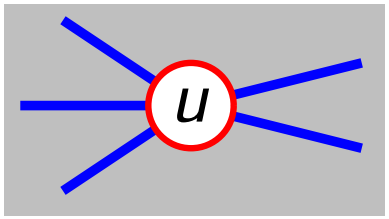
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

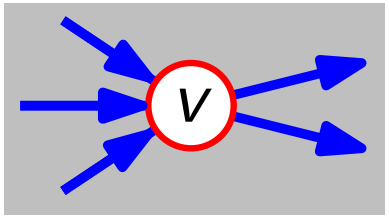
Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

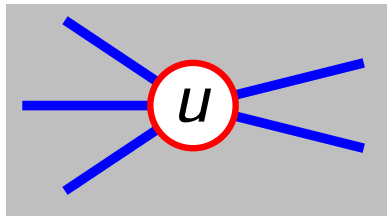
Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

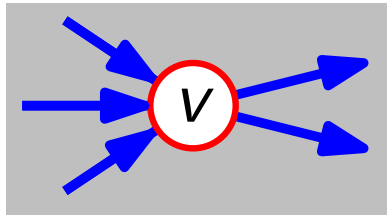
Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

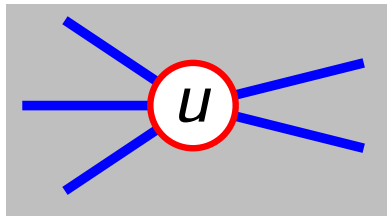
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$

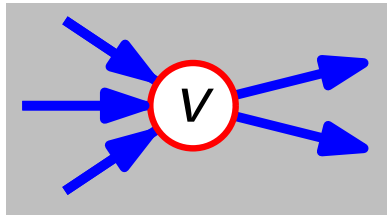
gerade!

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

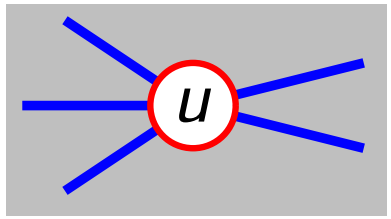
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis. $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_{\text{ger}}} \deg v + \sum_{v \in V_{\text{ung}}} \deg v$

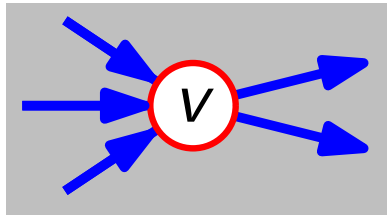
gerade! *gerade!*

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

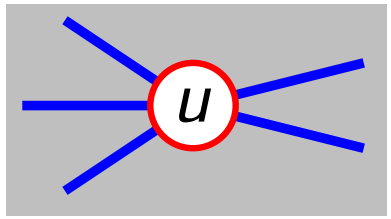
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

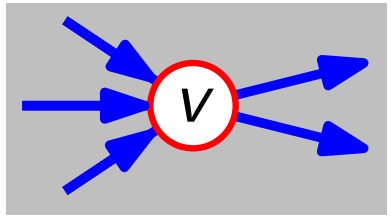
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

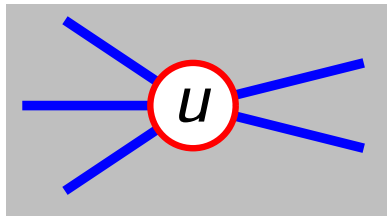
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

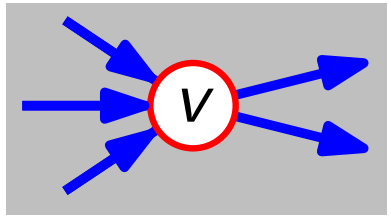
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

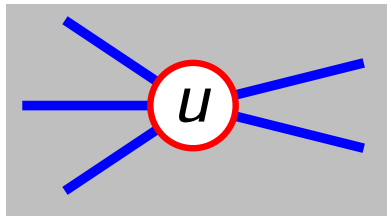
Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

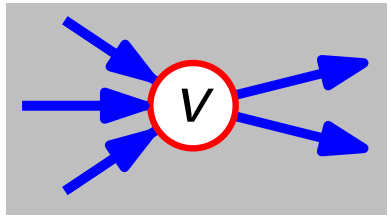
$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow \ \textit{gerade!}}$$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

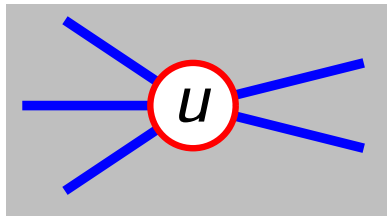
Beweis.

$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow\ \textit{gerade!}}$$

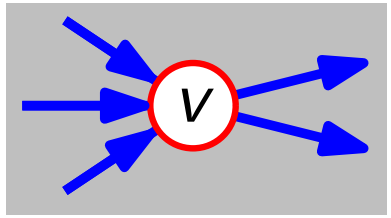
$\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$ *gerade* $\Rightarrow$

Grad eines Knotens

Def.



$$\deg(u) = |\mathrm{Adj}[u]|$$



$$\mathrm{outdeg}(v) = |\mathrm{Adj}[v]|$$
$$\mathrm{indeg}(v) = |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$$

Beob. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Dann ist die Summe aller Knotengrade $= 2 \cdot |E|$.

Sätzle. Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Beweis.

$$\underbrace{2 \cdot |E|}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V} \deg v}_{\textit{gerade!}} = \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ger}}} \deg v}_{\textit{gerade!}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v}_{\Rightarrow \textit{ gerade!}}$$

$\sum_{v \in V_{\mathrm{ung}}} \deg v$ *gerade* $\Rightarrow$ $|V_{\mathrm{ung}}|$ ist *gerade!* $\square$

Vorlesungsumfrage

Subject: Aktuelle Rücklaufquote der Umfrage “Algorithmen & Datenstrukt.”
Date: 16 Dec 2019 00:00:07 +0100
From: Institut für Informatik
To: Alexander Wolff

Sehr geehrter Herr Prof. Dr. Wolff,

die Rücklaufquote der Umfrage “Algorithmen und Datenstrukturen” liegt aktuell bei 12% (Teilnehmerzahl insgesamt: 364).

Dieser Wert liegt unter einer definierten Schwelle von 50%. Wir möchten Sie daher bitten, Ihre Teilnehmer nochmals zu ermuntern, sich an der Umfrage zu beteiligen.

Bitte beachten Sie, dass die Umfrage am 22.12.2019 23:59:00 geschlossen wird.

Ihr EvaSys Administrator

Hinweis: Diese E-Mail wurde automatisch generiert.

Vorlesungsumfrage

Subject: Aktuelle Rücklaufquote der Umfrage “Algorithmen & Datenstrukt.”
Date: 16 Dec 2019 00:00:07 +0100
From: Institut für Informatik
To: Alexander Wolff

Bitte nehmen Sie **jetzt** teil!

Sehr geehrter Herr Prof. Dr. Wolff,

die Rücklaufquote der Umfrage “Algorithmen und Datenstrukturen” liegt aktuell bei 12% (Teilnehmerzahl insgesamt: 364).

Dieser Wert liegt unter einer definierten Schwelle von 50%. Wir möchten Sie daher bitten, Ihre Teilnehmer nochmals zu ermuntern, sich an der Umfrage zu beteiligen.

Bitte beachten Sie, dass die Umfrage am 22.12.2019 23:59:00 geschlossen wird.

Ihr EvaSys Administrator

Hinweis: Diese E-Mail wurde automatisch generiert.

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich
   einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

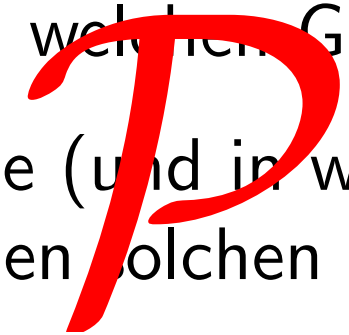
   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich
   einen solchen Rundlauf, falls er existiert?



2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich
   einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{P}$

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{NP}$-schwer

Rundlaufstrategien für ungerichtete Graphen

1. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{P}$

2. Durchlaufe einen Graphen auf einem Kreis,
   so dass jeder **Knoten** genau einmal durchlaufen wird.

   Charakterisierung: Bei welchen Graphen geht das (nicht)?

   Konstruktion: Wie (und in welcher Zeit) finde ich einen solchen Rundlauf, falls er existiert?

   $\mathcal{NP}$-schwer

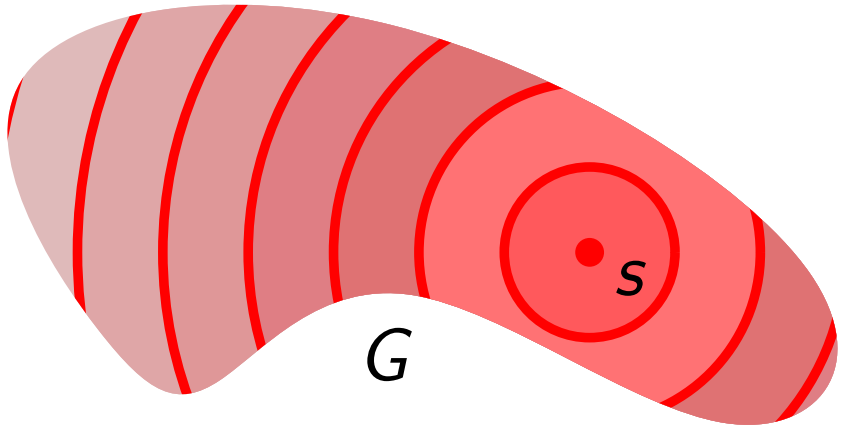
→ Vorlesung *Algorithmische Graphentheorie* (nächstes Semester!)

F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Ideen?

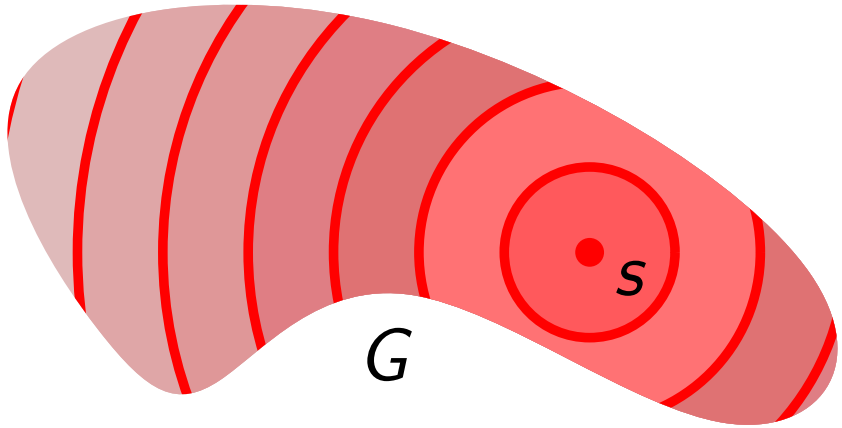
F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Ideen?



F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

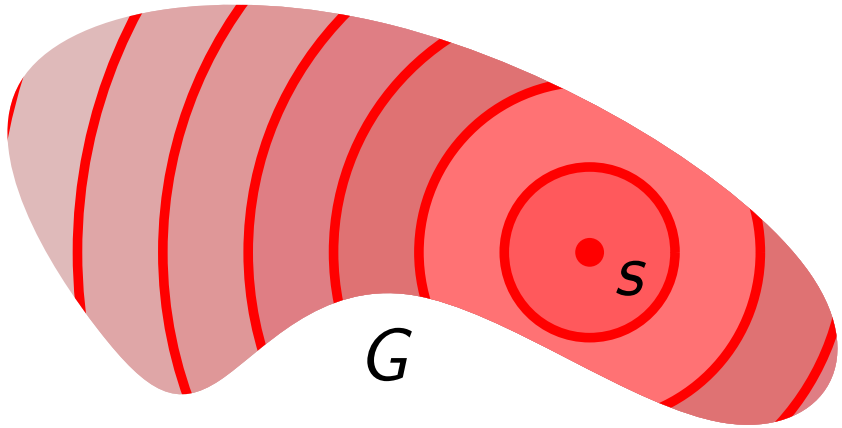
Ideen?



1. wellenförmige Ausbreitung ab einem gegebenen Startknoten s

F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Ideen?

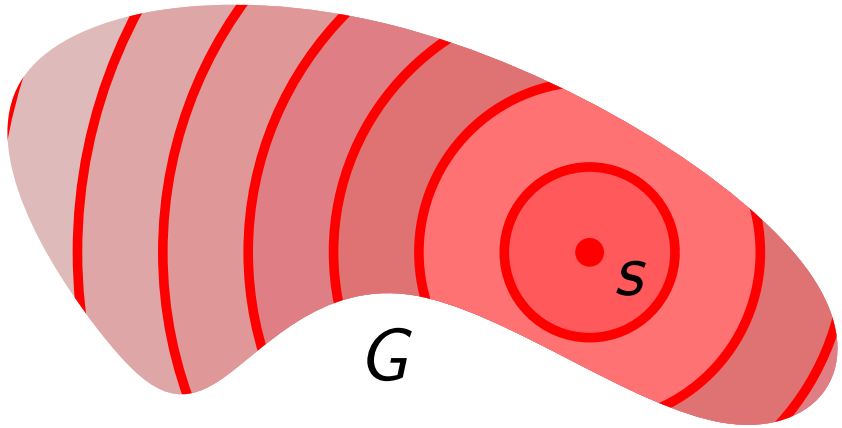


1. wellenförmige Ausbreitung ab einem gegebenen Startknoten s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Ideen?



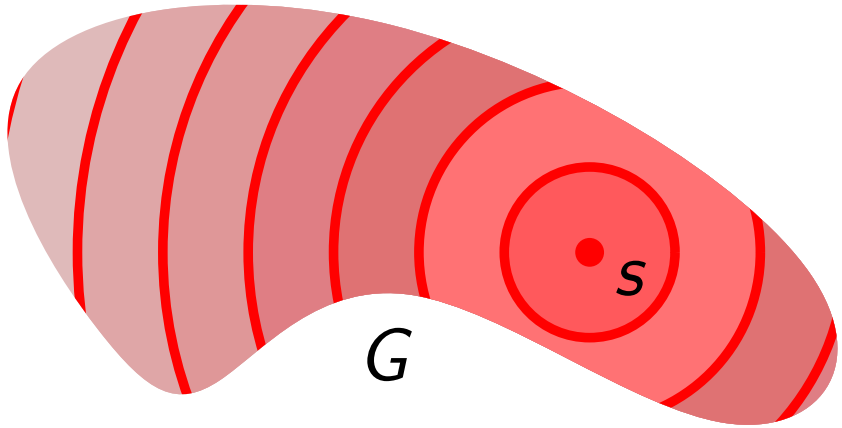
1. wellenförmige Ausbreitung ab einem gegebenen Startknoten s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

2. vom Startknoten s möglichst schnell weit weg

F: Wie durchlaufe ich einen Graphen?

Ideen?



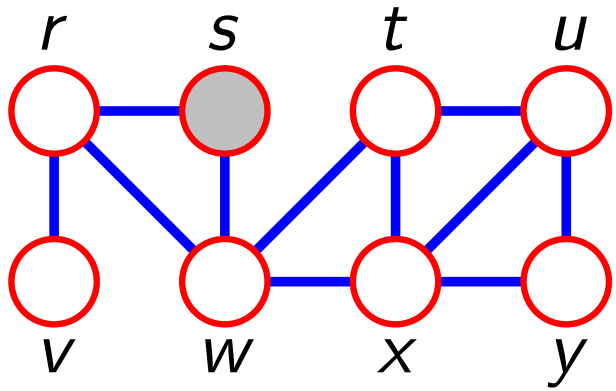
1. wellenförmige Ausbreitung ab einem gegebenen Startknoten s

   Breitensuche (breadth-first search, BFS)

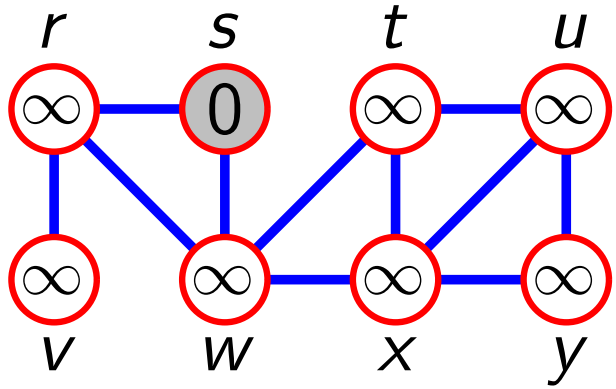
2. vom Startknoten s möglichst schnell weit weg

   Tiefensuche (depth-first search, DFS)

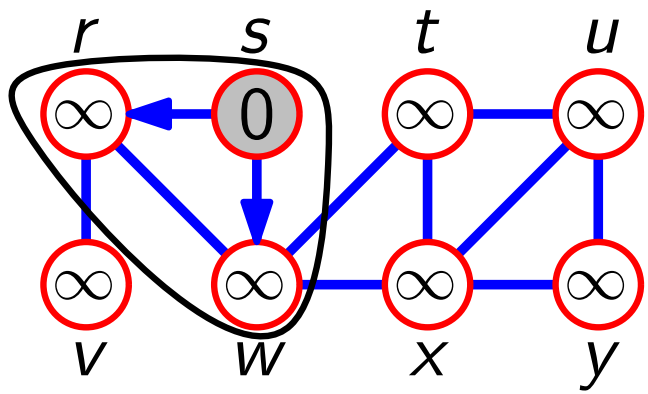
Breitensuche



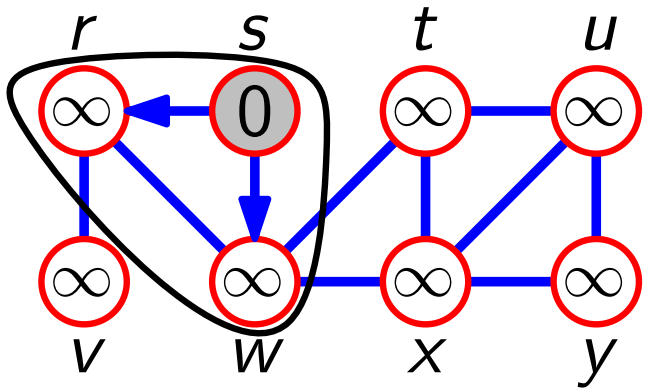
Breitensuche

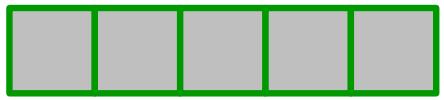


Breitensuche

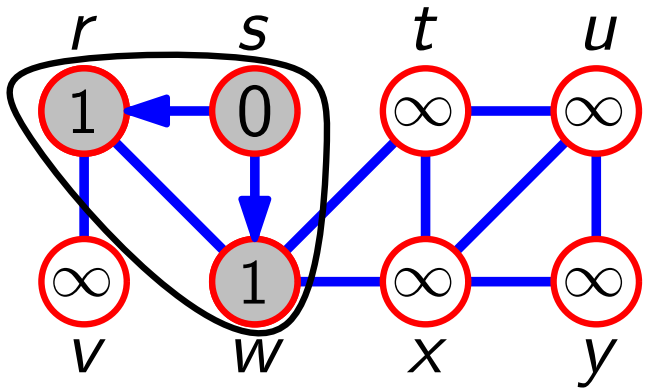


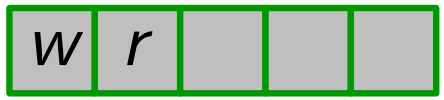
Breitensuche



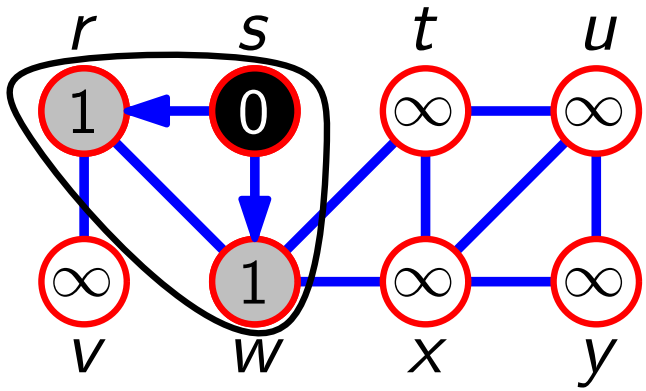


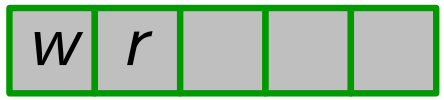
Breitensuche



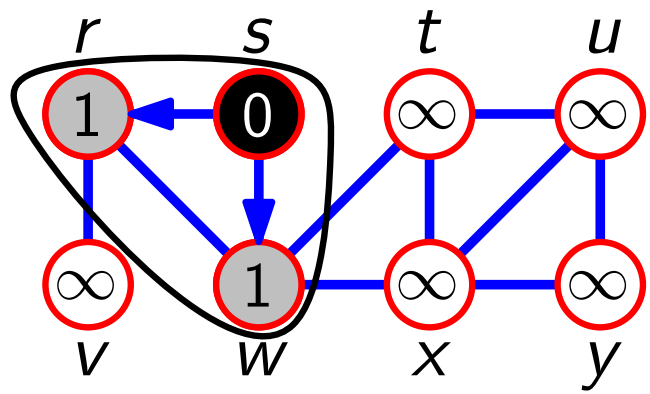


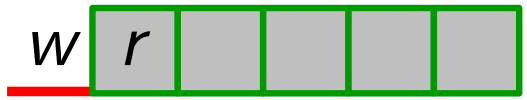
Breitensuche



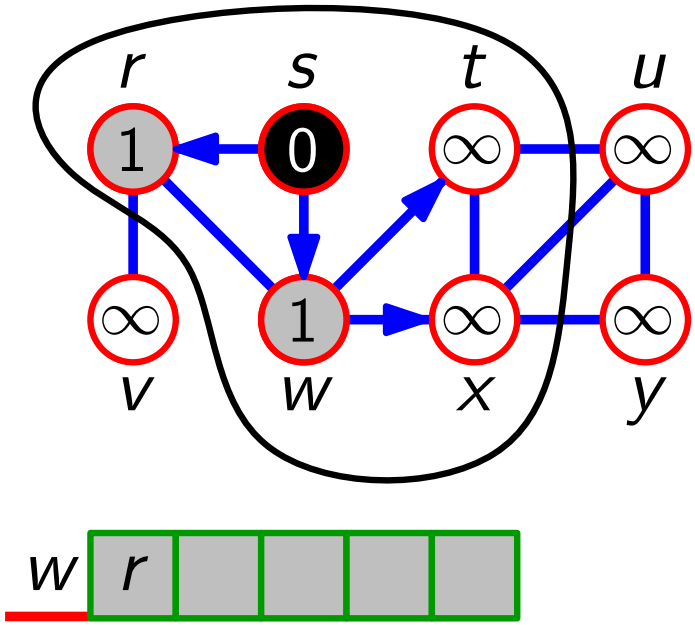


Breitensuche

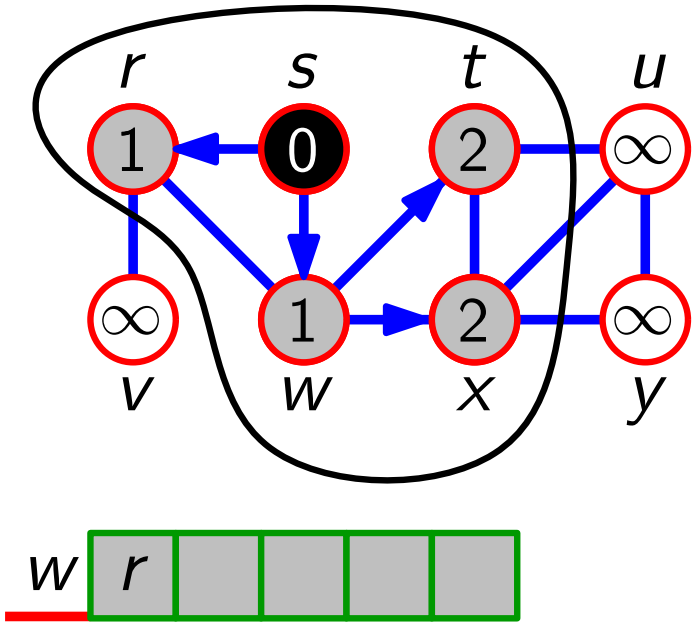




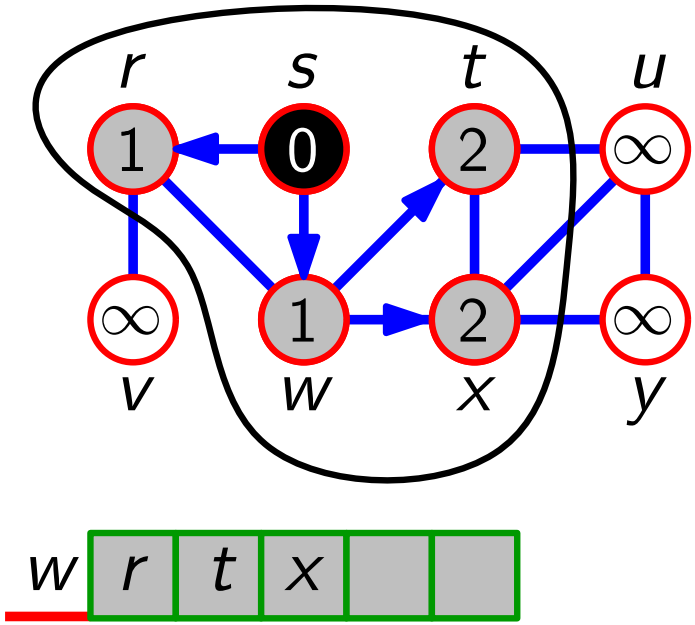
Breitensuche



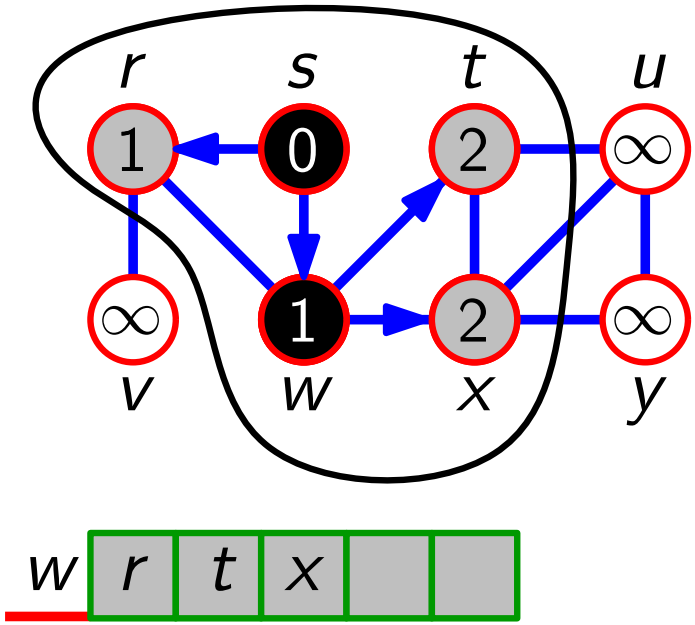
Breitensuche



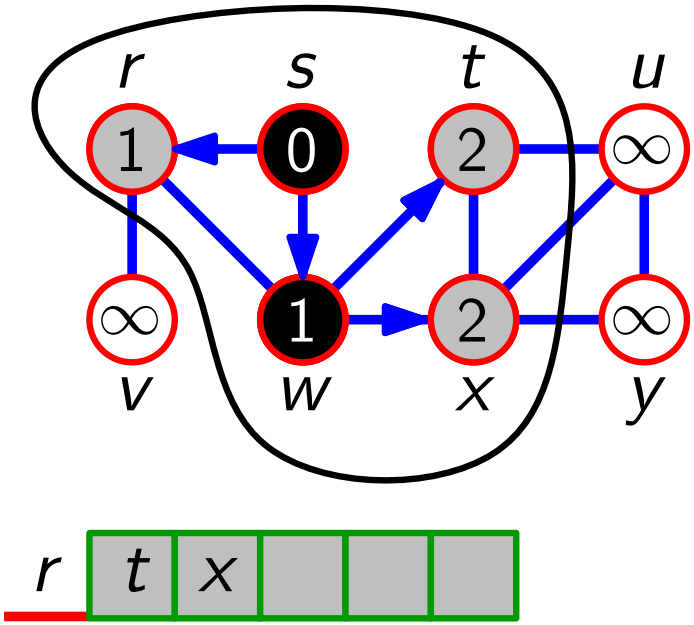
Breitensuche

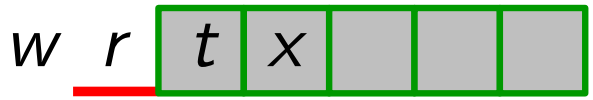


Breitensuche

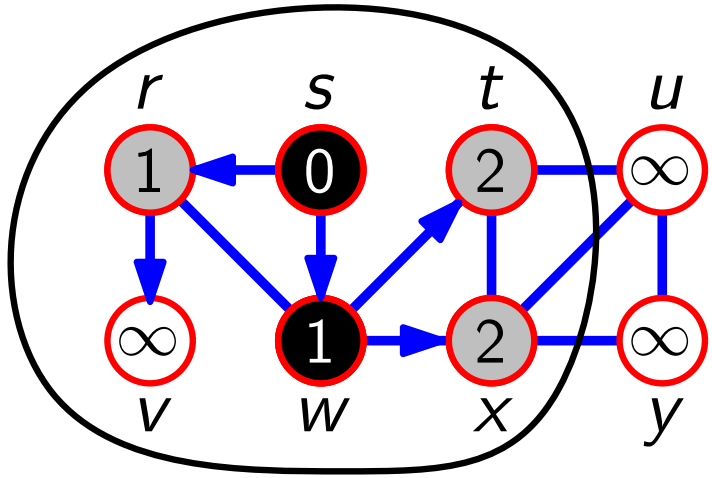


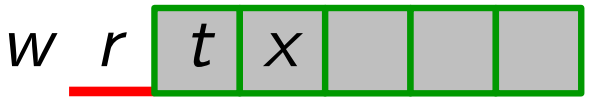
Breitensuche



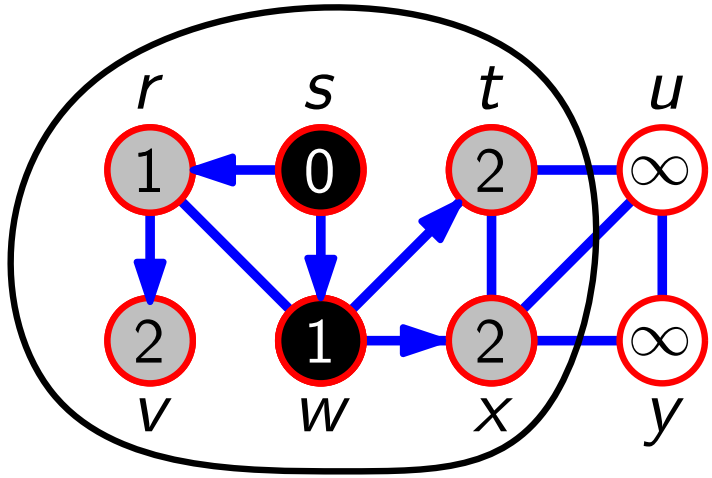


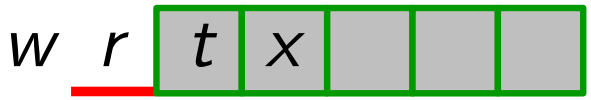
Breitensuche



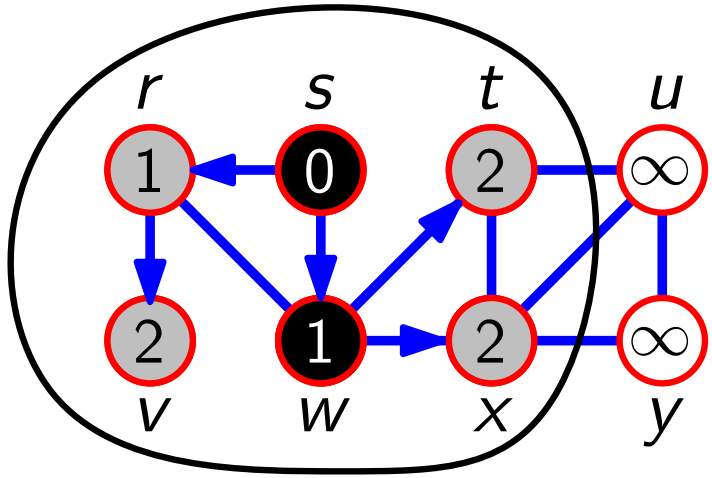


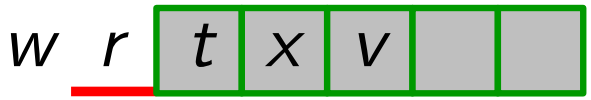
Breitensuche



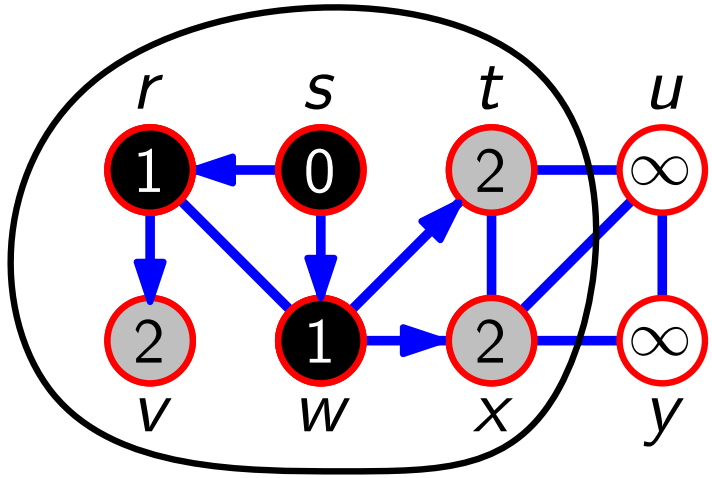


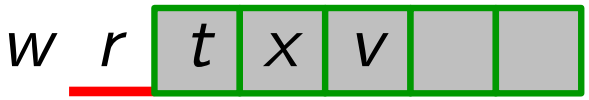
Breitensuche



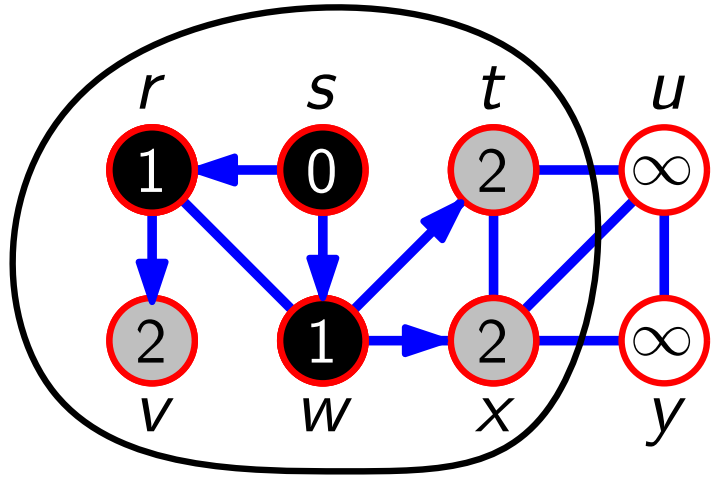


Breitensuche

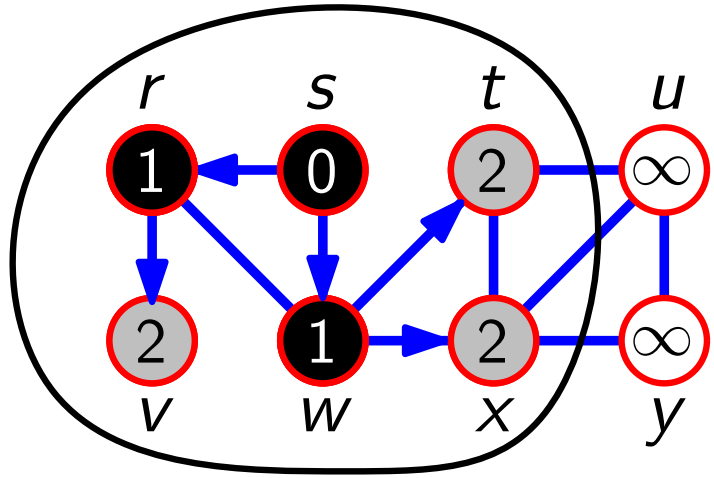




Breitensuche



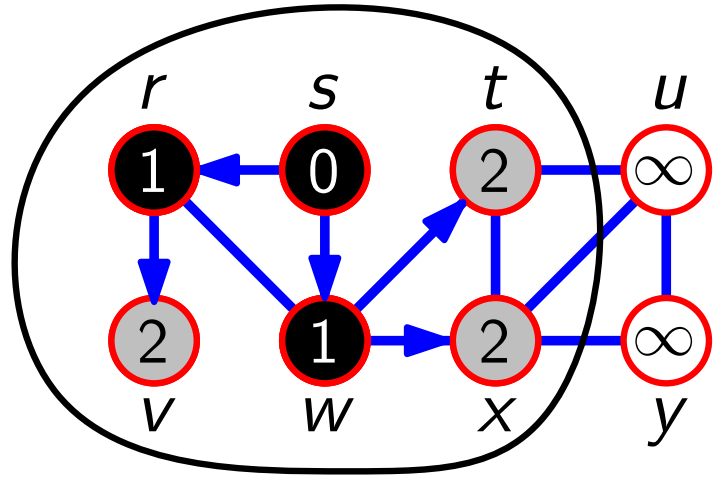
Breitensuche



Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.d = \infty$
    $u.\pi = nil$
  $s.color = gray$
  $s.d = 0$

Breitensuche

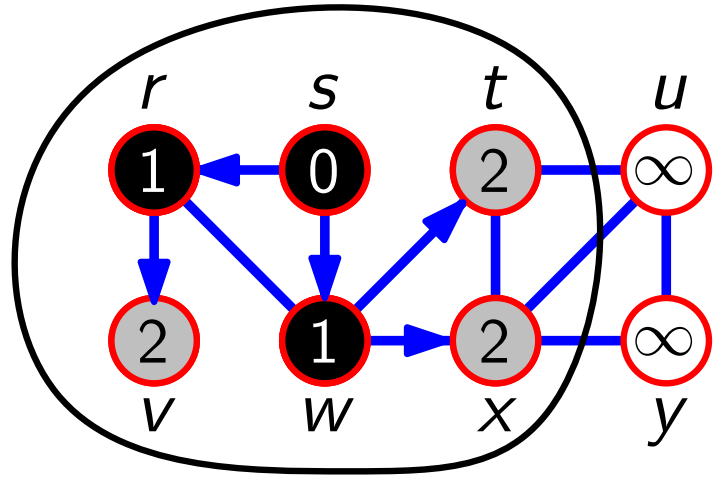
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  ■ = new ■■■■■ *Welche Datenstruktur??*

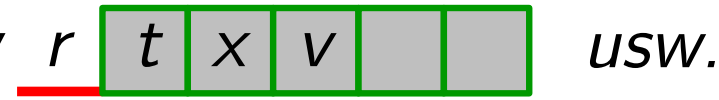


Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.d = \infty$
    $u.\pi = nil$
  $s.color = gray$
  $s.d = 0$

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
```

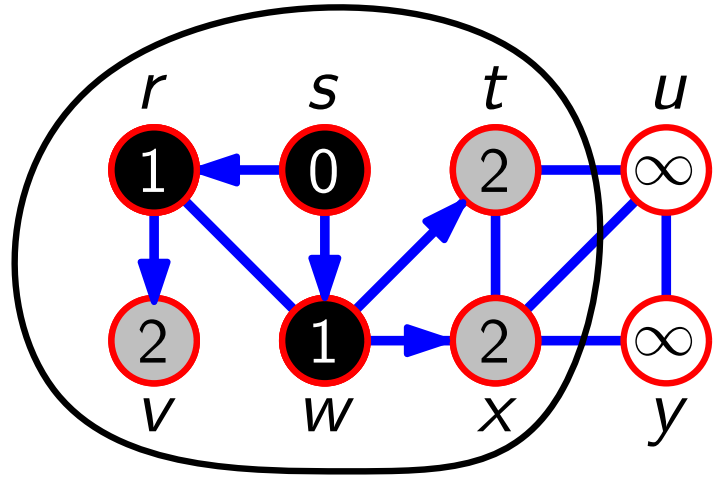





```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Breitensuche

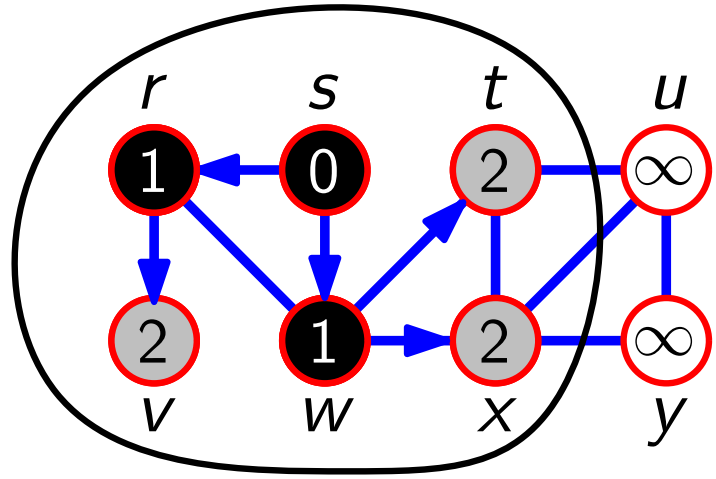
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Breitensuche

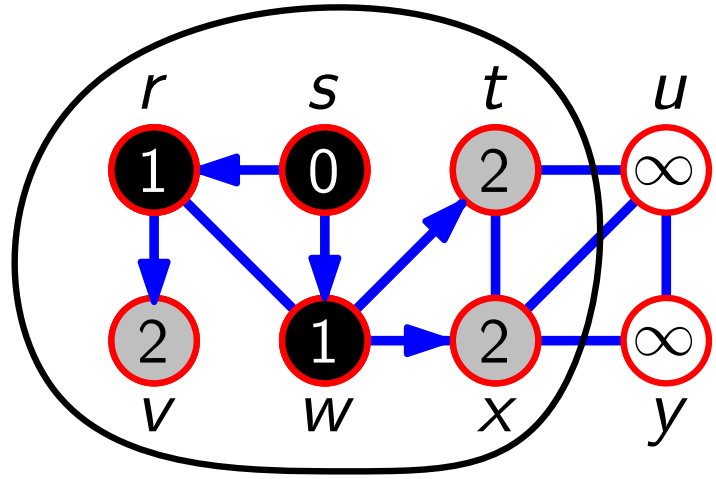
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Breitensuche

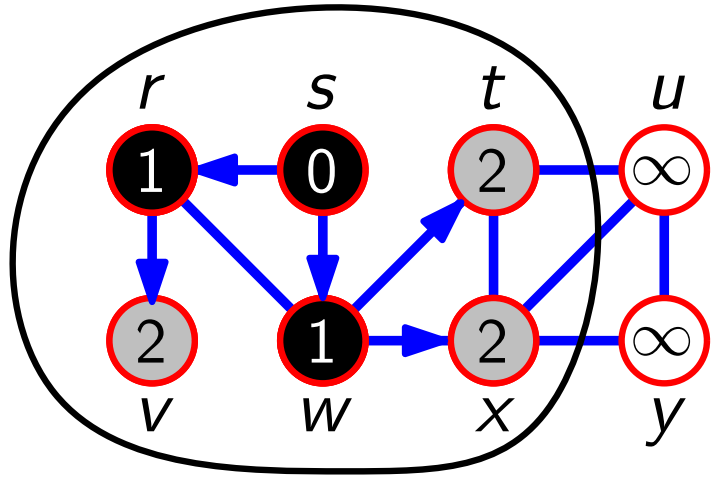
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Breitensuche

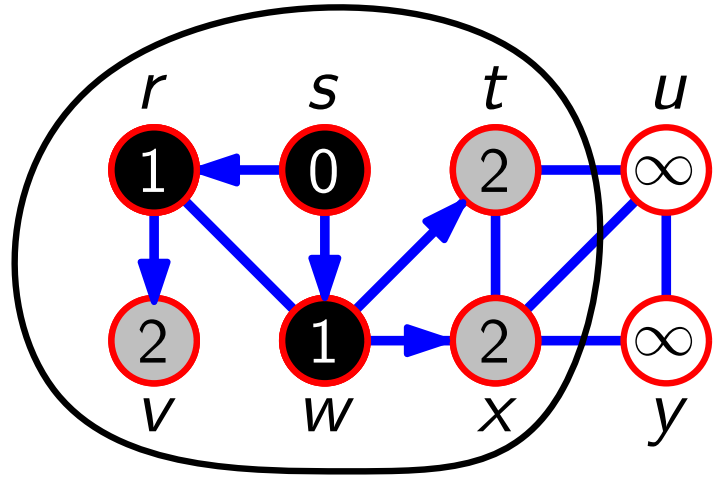
```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = gray
    s.d = 0
```

Breitensuche

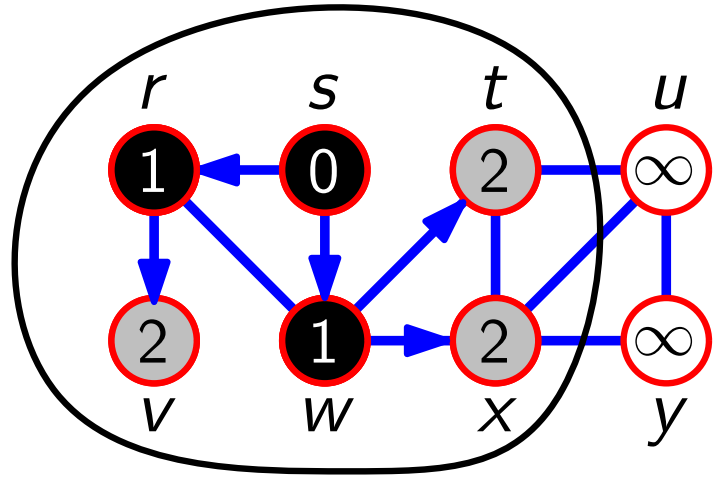
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          Aufgabe:
          Schreiben Sie Pseudocode, so dass:
          v.d = Länge eines kürzesten
                s-v-Weges über u, falls ...
          v.π = Vorgänger auf diesem Weg
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Breitensuche

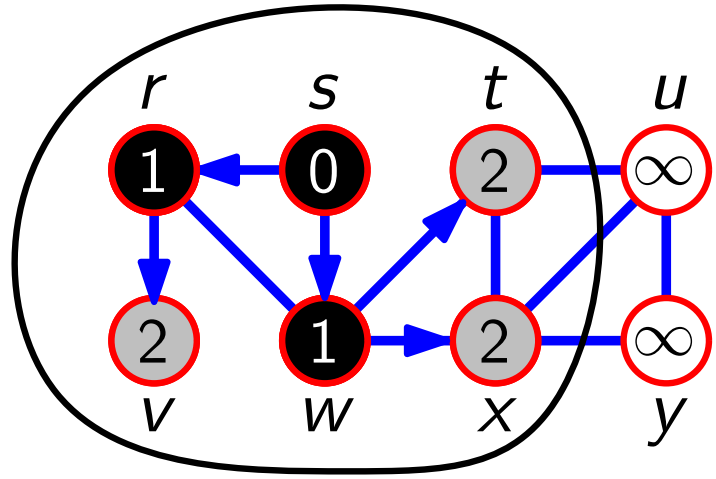
```
BFS(Graph G, Vertex s)
    Initialize(G, s)
    Q = new Queue()
    Q.Enqueue(s)
    while not Q.Empty() do
        u = Q.Dequeue()
        foreach v ∈ Adj[u] do
            if v.color == white then
                v.color = gray
                v.d = u.d + 1
                v.π = u
                Q.Enqueue(v)
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
    foreach u ∈ V do
        u.color = white
        u.d = ∞
        u.π = nil
    s.color = gray
    s.d = 0
```

Breitensuche

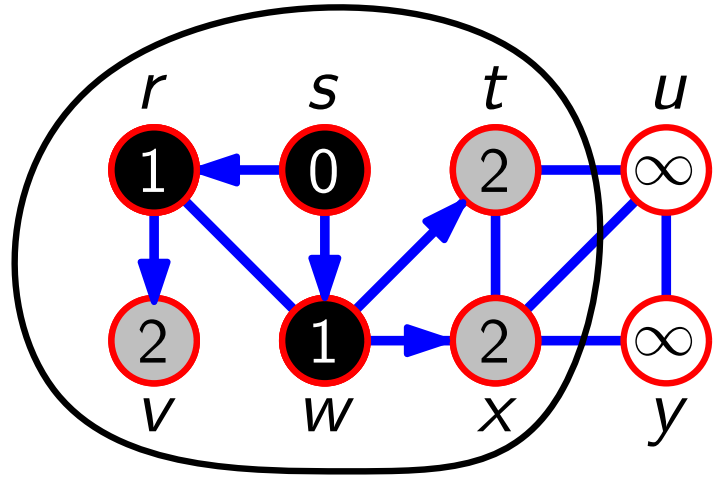
```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```

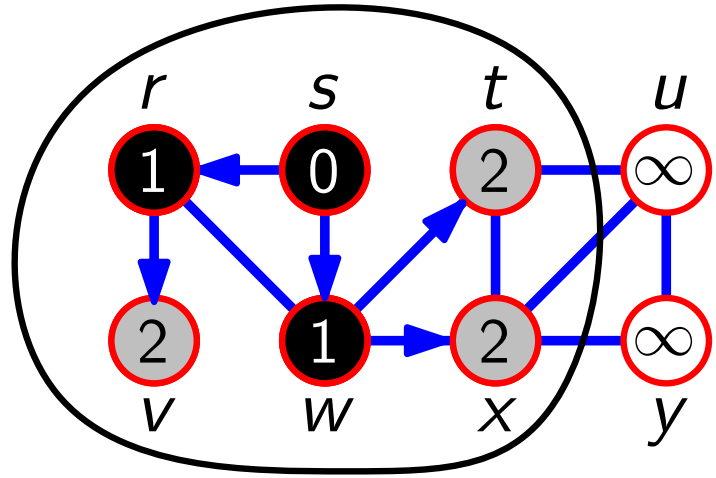


```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Laufzeit?

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```



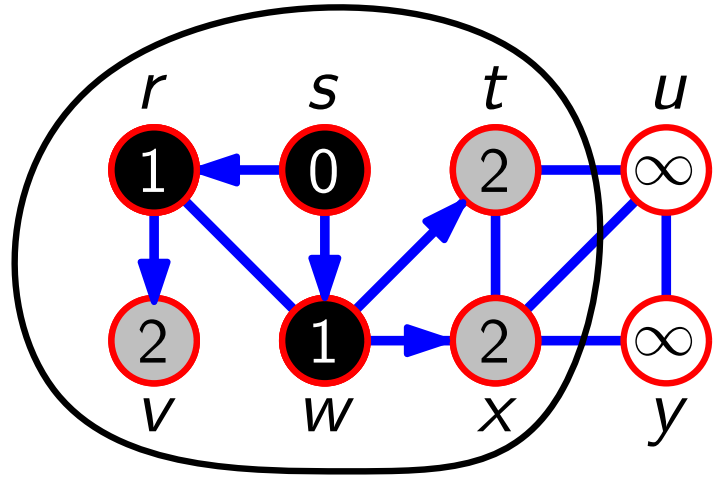
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Initialize

Laufzeit?

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```

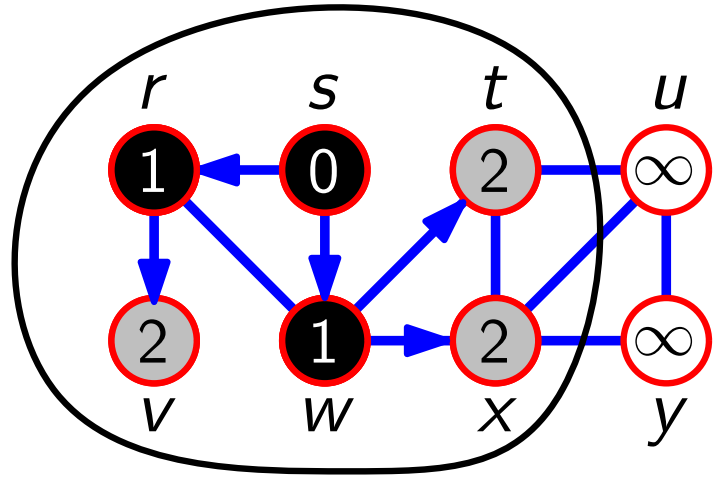


```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Laufzeit? Initialize $O(|V|)$

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```



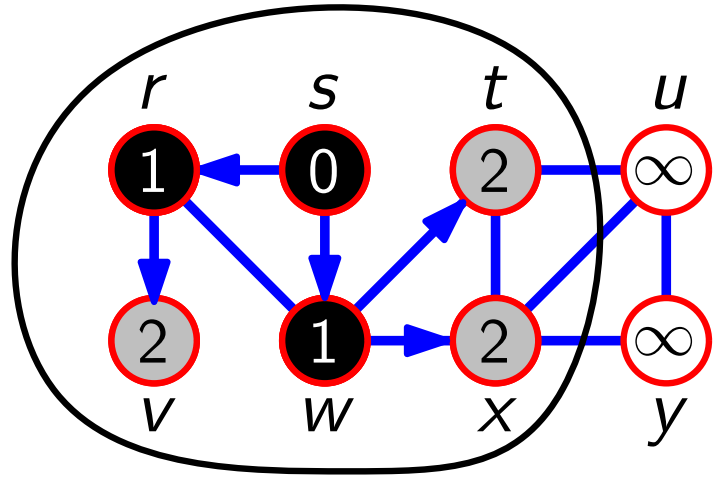
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Laufzeit?

Initialize	En-/Dequeues
$O(\|V\|)$	

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

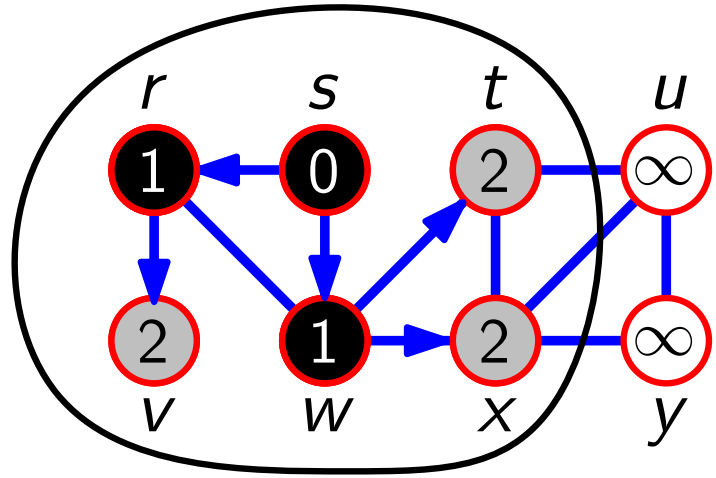


```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
      u.color = white
      u.d = ∞
      u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Laufzeit? $O(|V|)$ (Initialize) $+$ $O(|V|)$ (En-/Dequeues)

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```



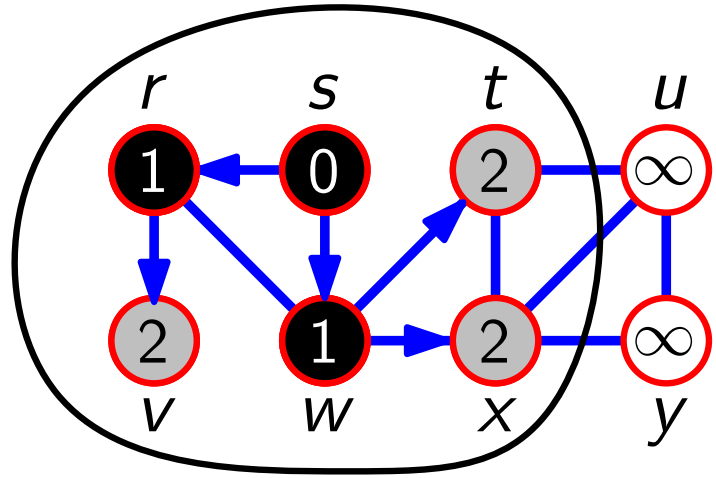
```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Laufzeit? $O(|V|) + O(|V|)$

Initialize En-/Dequeues Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```



```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

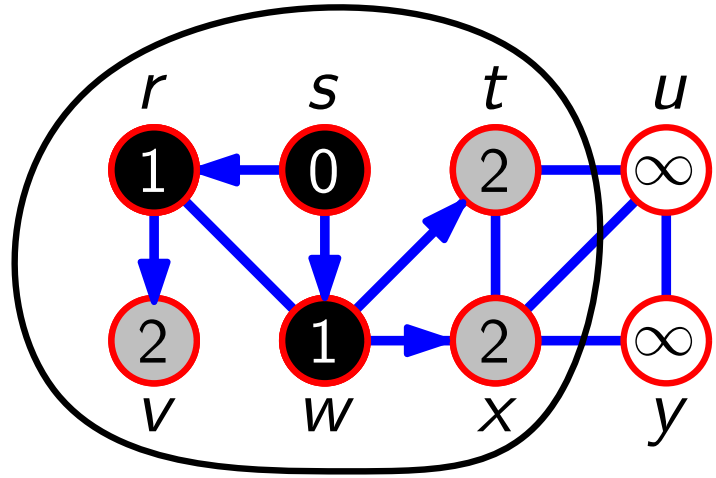
Laufzeit? $O(|V|) + O(|V|) + O(|E|)$

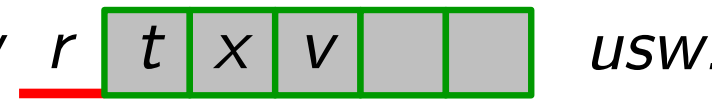
Initialize — En-/Dequeues — Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)

[Beob. über Knotengrade!]

Breitensuche

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```






```
Initialize(Graph G, Vertex s)
  foreach u ∈ V do
    u.color = white
    u.d = ∞
    u.π = nil
  s.color = gray
  s.d = 0
```

Laufzeit? $O(|V|) + O(|V|) + O(|E|) = O(|V| + |E|)$

Initialize — En-/Dequeues — Adjazenzlisten (foreach-Schleifen)

[Beob. über Knotengrade!]

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:
$$v.d = \delta(s, v).$$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s $v.d = \delta(s, v).$ *tatsächlicher Abstand von s*

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis.

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

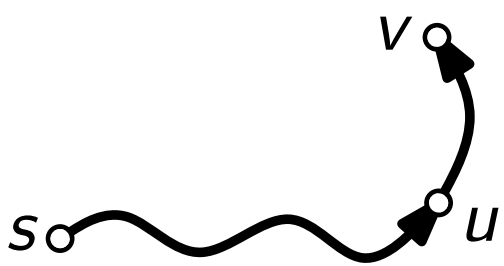
Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

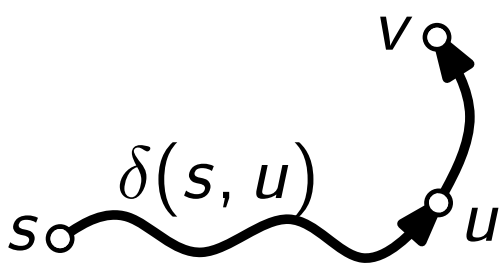
Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

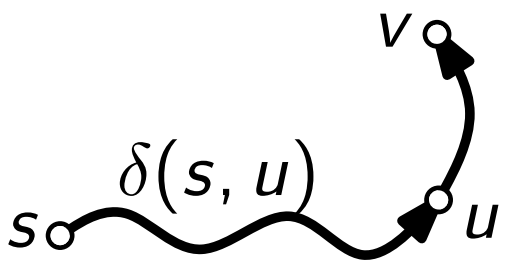
Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

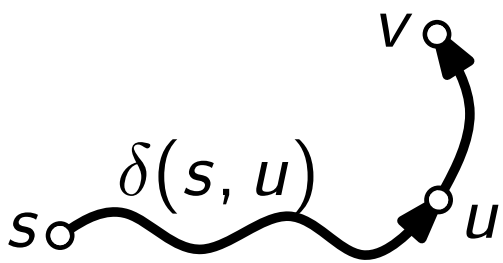
Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.

$\Downarrow$

Korrektheit von BFS – Vorbereitung

Definition. Sei $G = (V, E)$ (un)gerichteter Graph, $u, v \in V$.
$\delta(u, v) :=$ Länge eines kürzesten u-v-Wegs,
(falls v von u erreichbar; sonst $\delta(u, v) := \infty$).

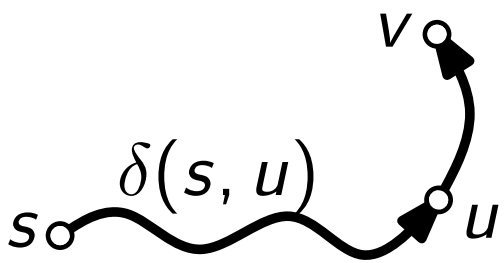
Ziel: Zeige, dass nach BFS(G, s) für alle $v \in V$ gilt:

berechneter Abstand von s — $v.d = \delta(s, v)$. — *tatsächlicher* Abstand von s

Lemma 1. (Eigenschaft kürzester Wege)
Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Beweis. 1. Fall: u ist von s erreichbar (d.h. $\exists$ s-u-Weg)



Dieser s-v-Weg hat Länge $\delta(s, u) + 1$.

$\Downarrow$

Kürzester s-v-Weg hat Länge $\leq \delta(s, u) + 1$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1.$$

✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
    u = Q.Dequeue()
    foreach v ∈ Adj[u] do
      if v.color == white then
        v.color = gray
        v.d = u.d + 1
        v.π = u
        Q.Enqueue(v)
    u.color = black
```

$k = 1$:

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s):

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.
$v.d = u.d + 1$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.
$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1$

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1$

Induktionsannahme für u

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1$

Induktionsannahme für u
($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$)

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$

Induktionsannahme für u
($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$)

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u ($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$) — Lemma 1

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u ($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$) — Lemma 1

Jetzt ist v grau.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u — Lemma 1

($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$)

Jetzt ist v grau. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v):

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u ($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$) — Lemma 1

Jetzt ist v grau. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 1. Sei $s \in V$. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:
$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$. ✓

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$.

Beweis. Induktion über die Anz. k von Enqueue-Oper.

```
BFS(Graph G, Vertex s)
  Initialize(G, s)
  Q = new Queue()
  Q.Enqueue(s)
  while not Q.Empty() do
      u = Q.Dequeue()
      foreach v ∈ Adj[u] do
          if v.color == white then
              v.color = gray
              v.d = u.d + 1
              v.π = u
              Q.Enqueue(v)
      u.color = black
```

$k = 1$: Situation nach Q.Enqueue(s): ✓

- $s.d = 0 = \delta(s, s)$
- für alle $v \in V \setminus \{s\}$ gilt $v.d = \infty \geq \delta(s, v)$

$k > 1$: Situation nach Q.Enqueue(v): ✓

v war gerade noch weiß und ist benachbart zu u.

$$v.d = u.d + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$$

Induktionsannahme für u ($u.d$ wurde gesetzt, als Anz. Enqueue-Oper. $< k$) — Lemma 1

Jetzt ist v grau. $\Rightarrow$ $v.d$ ändert sich nicht mehr. □

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:

(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und

(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$.
Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:

(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und

(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:

(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und

(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korollar. Angenommen u wird früher als v in Q eingefügt, dann gilt $u.d \leq v.d$, wenn v in Q eingefügt wird.

Korrektheit von BFS – Fortsetzung

Lemma 2. Sei $G = (V, E)$ ein (un)gerichteter Graph, $s \in V$. Nach BFS(G, s) gilt für alle $v \in V$: $v.d \geq \delta(s, v)$. ✓

Lemma 3. Sei $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ während BFS. Dann gilt:

(A) $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und

(B) $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ für $i = 1, \ldots, r-1$.

Also d-Werte der Knoten in Q z.B. $\langle 3, 3, 4, 4, 4 \rangle$.

Korollar. Angenommen u wird früher als v in Q eingefügt, dann gilt $u.d \leq v.d$, wenn v in Q eingefügt wird.

Beweis. Folgt aus Lemma 3 und der Tatsache, dass jeder Knoten $\leq 1\times$ einen endlichen d-Wert bekommt.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii).

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Lemma 2 $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

Lemma 2 $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$. Noch z.z.: $v.d \leq \delta(s, v)$.

Korrektheit von BFS – Hauptsatz

Satz. Sei G ein (un)gerichteter Graph, s ein Knoten von G. Nach BFS(G, s) gilt:

(i) Für alle Knoten $v \in V$ gilt $v.d = \delta(s, v)$.

(ii) Jeder von s erreichbare Knoten wird entdeckt.

(iii) Für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$ gilt: es gibt einen kürzesten s-v-Weg, der aus einem kürzesten s-$v.\pi$-Weg und der Kante $(v.\pi, v)$ besteht.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). Es genügt also (i) zu zeigen.

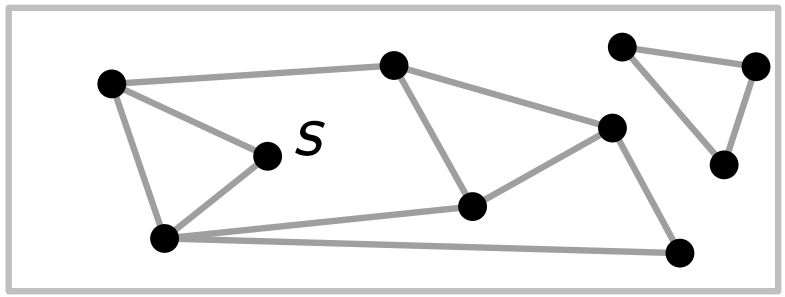
Lemma 2 $\Rightarrow v.d \geq \delta(s, v)$. Noch z.z.: $v.d \leq \delta(s, v)$.

Widerspruchsbeweis mit Wahl des „kleinsten Schurken“.

Siehe Kapitel 22.2 [CLRS].

BFS-Bäume

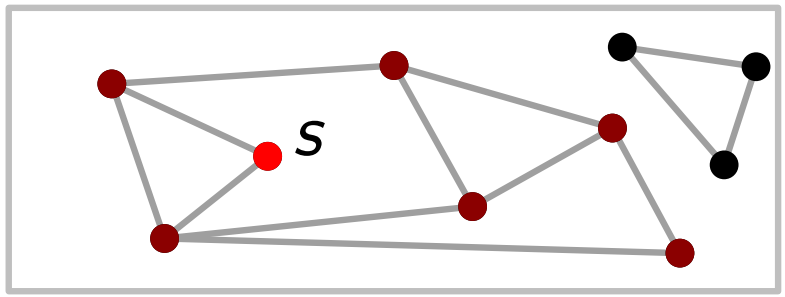
Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:



BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

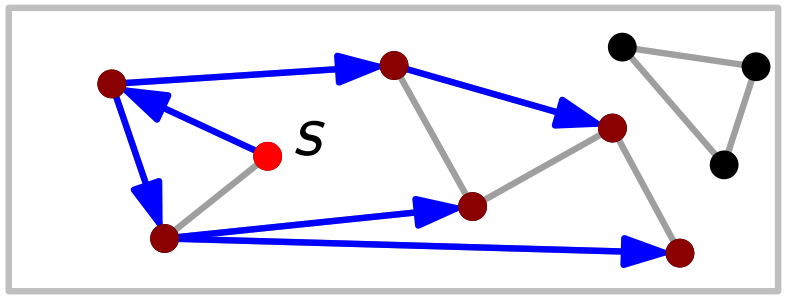
- $\boxed{V_\pi} = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$



BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

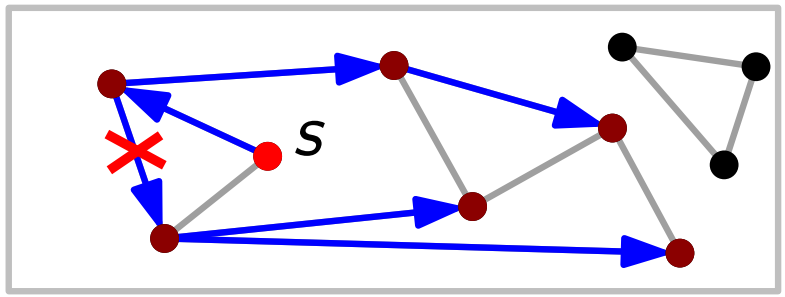
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

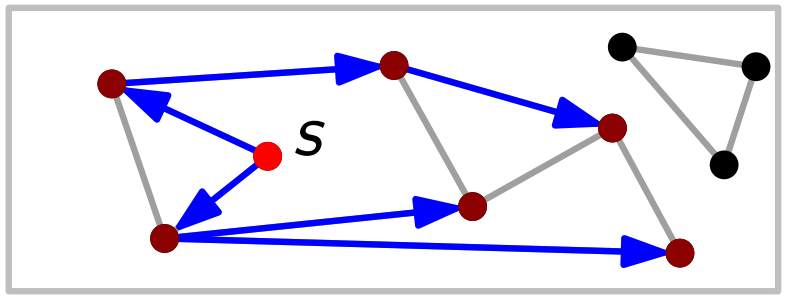
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

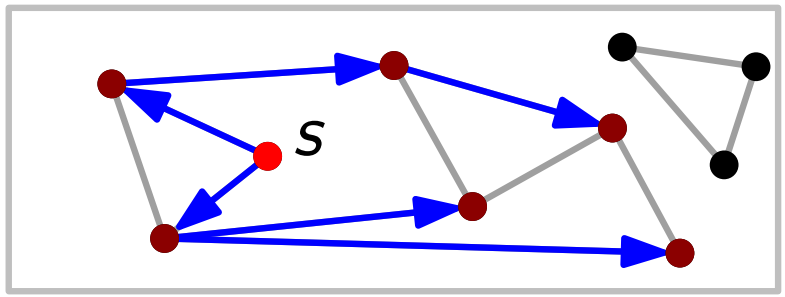
- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$

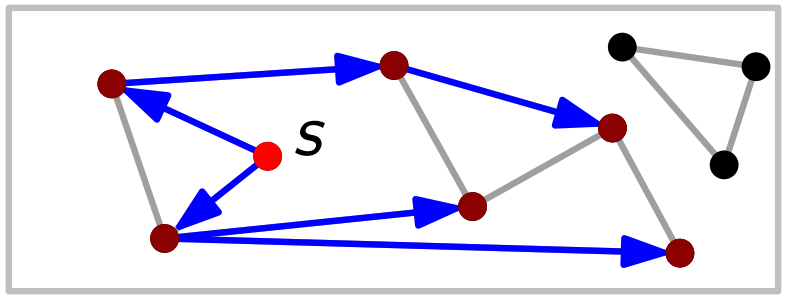


Klar: G_π ist ein Baum

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$

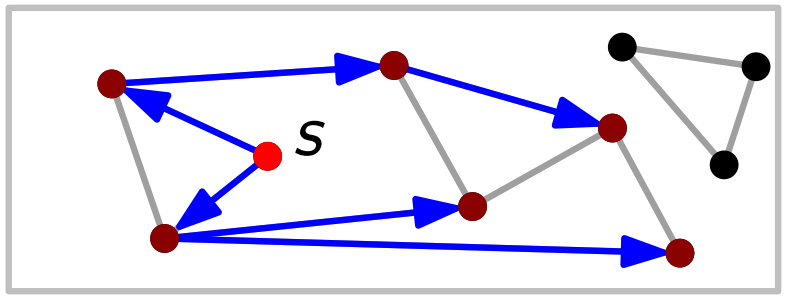


Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



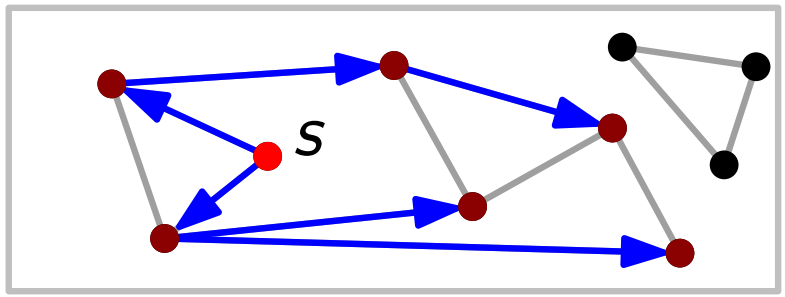
Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

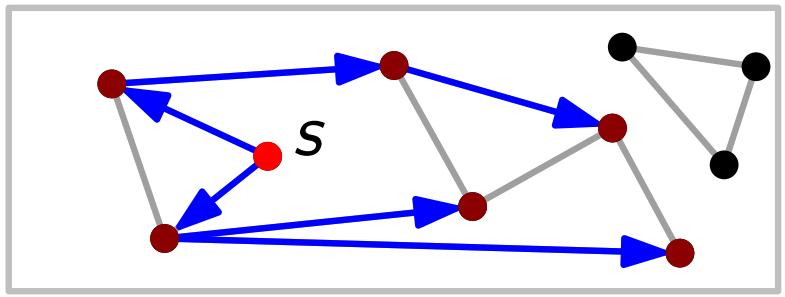
Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

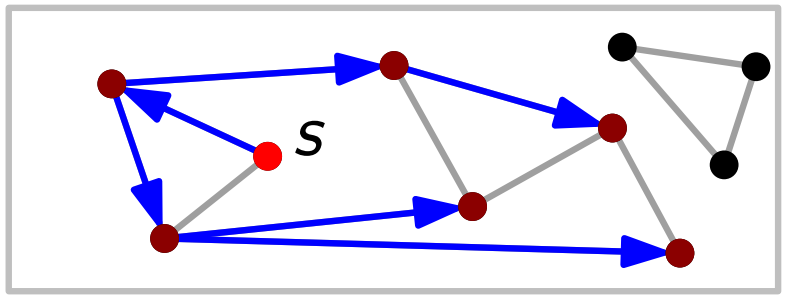
Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

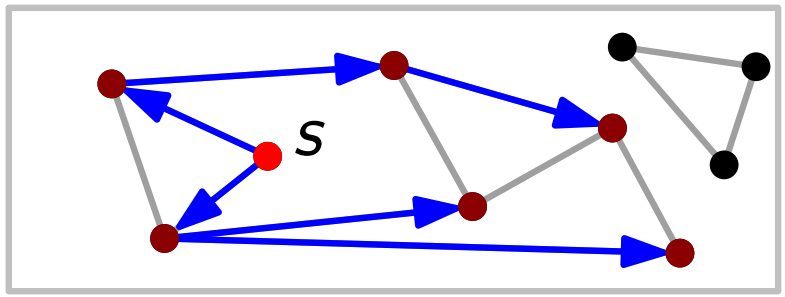
Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

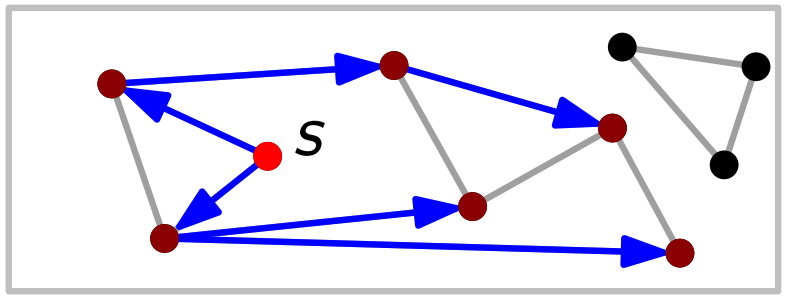
- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

Bew.:

BFS-Bäume

Betrachte den *Vorgänger-Graphen* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ von G:

- $\boxed{V_\pi} = \{v \in V : v.\pi \neq nil\} \cup \{s\}$
- $\boxed{E_\pi} = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$



Klar: G_π ist ein Baum (da zshg. und $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$).

Beh.: G_π ist ein *Kürzeste-Wege-Baum* (oder *BFS-Baum*), d.h.

- $V_\pi = \{v \in V : v$ erreichbar von $s\}$
- für alle $v \in V_\pi$ enthält G_π einen eindeutigen Weg von s nach v, der ein kürzester s-v-Weg ist.

Bew.: Folgt aus (ii) und (iii) im Hauptsatz. □