Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2019/20

4. Vorlesung

Laufzeitanalyse – Beispiele

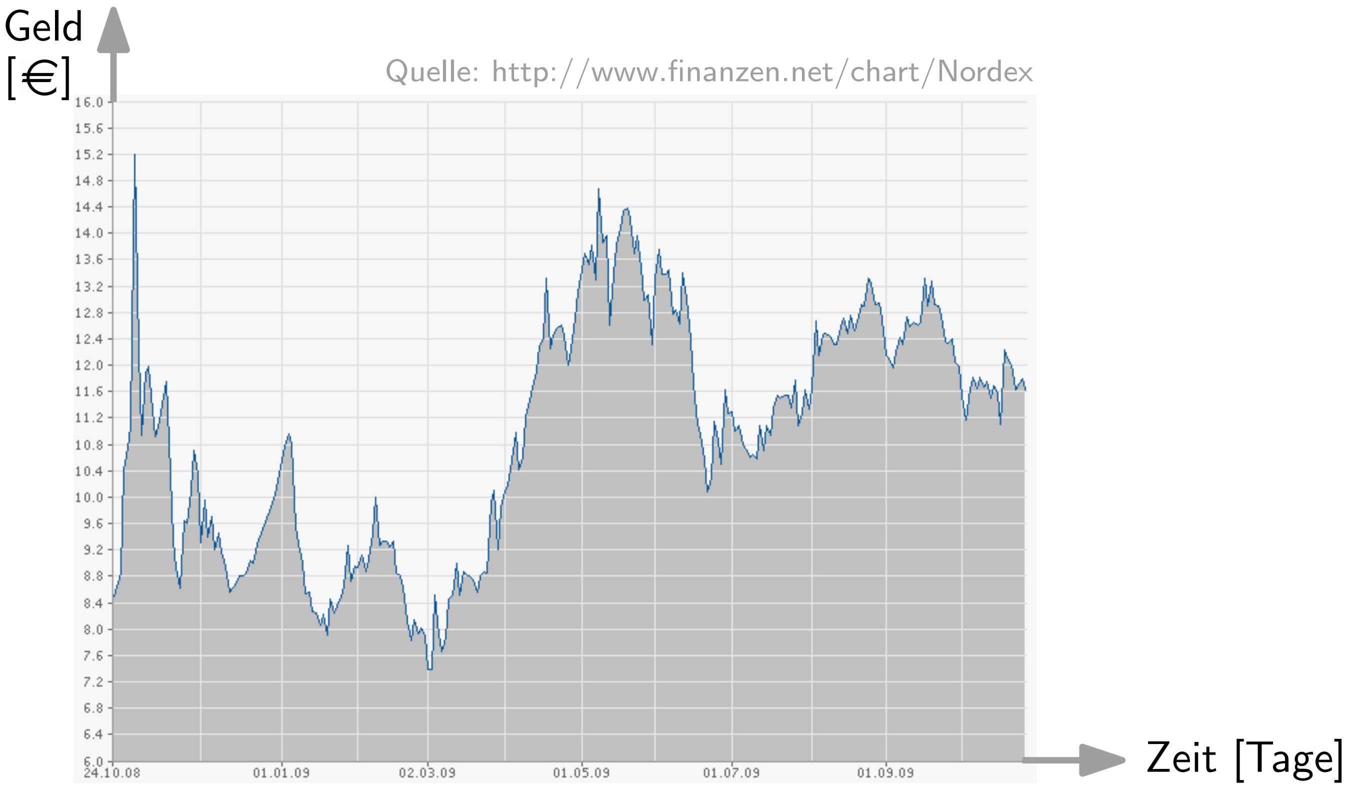
Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

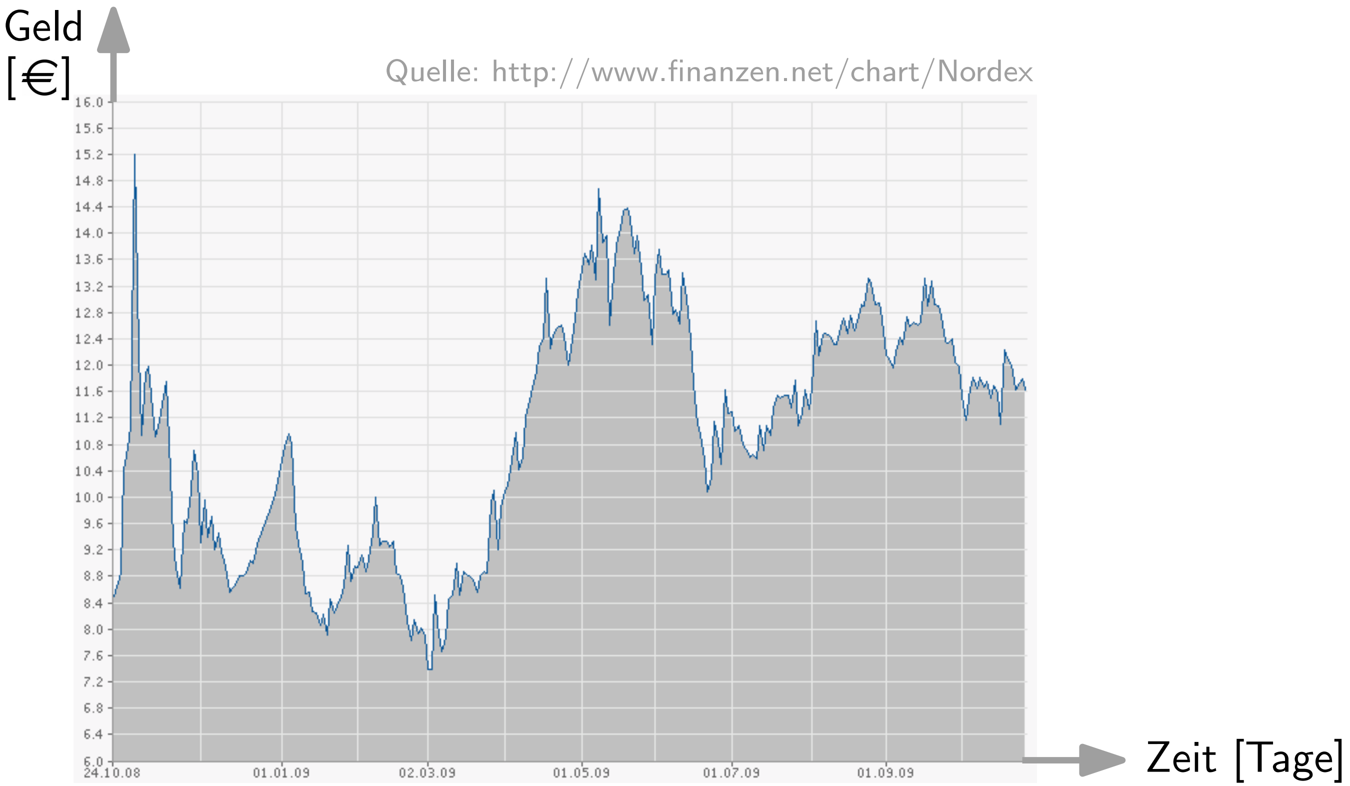
Analyse von Aktienkursen

Quelle: http://www.finanzen.net/chart/Nordex

Analyse von Aktienkursen

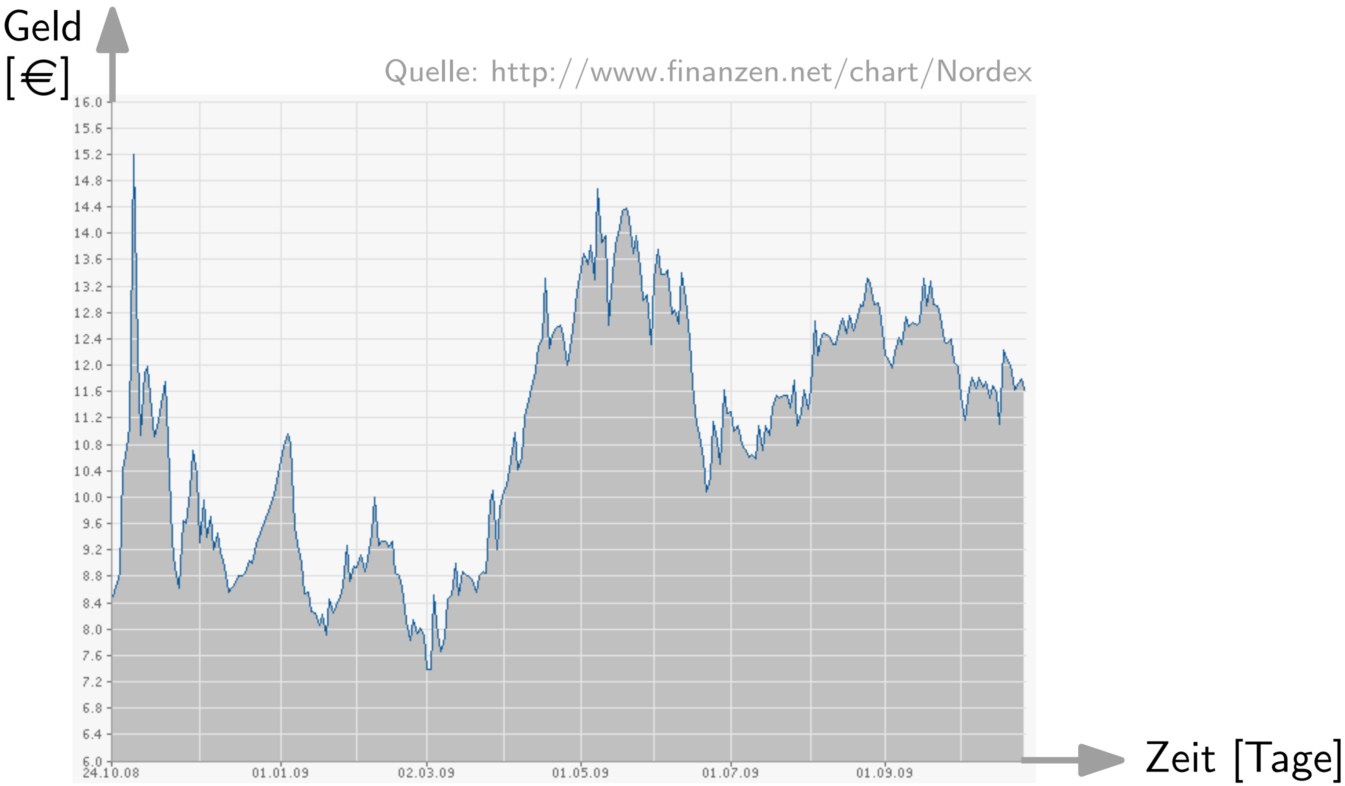


Analyse von Aktienkursen



Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

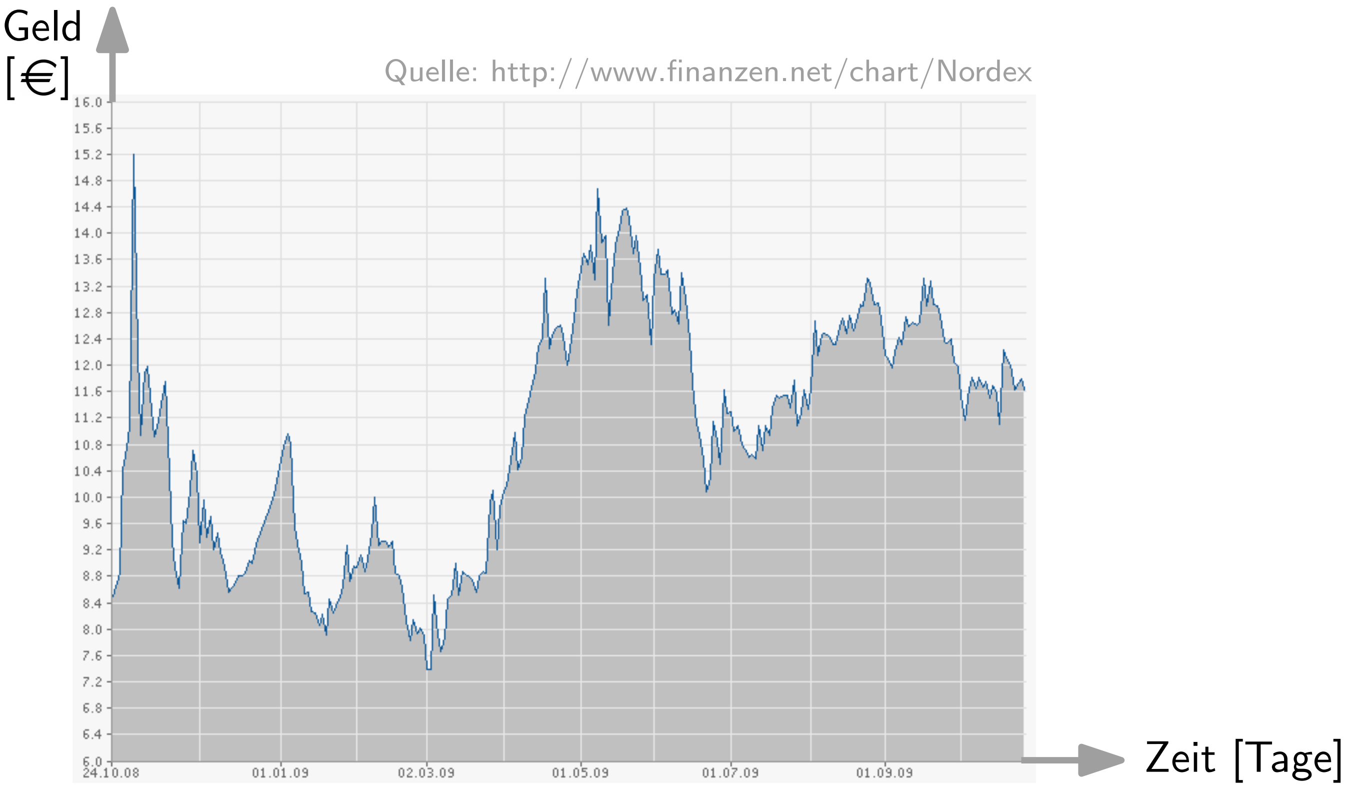
Analyse von Aktienkursen



Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

Analyse von Aktienkursen



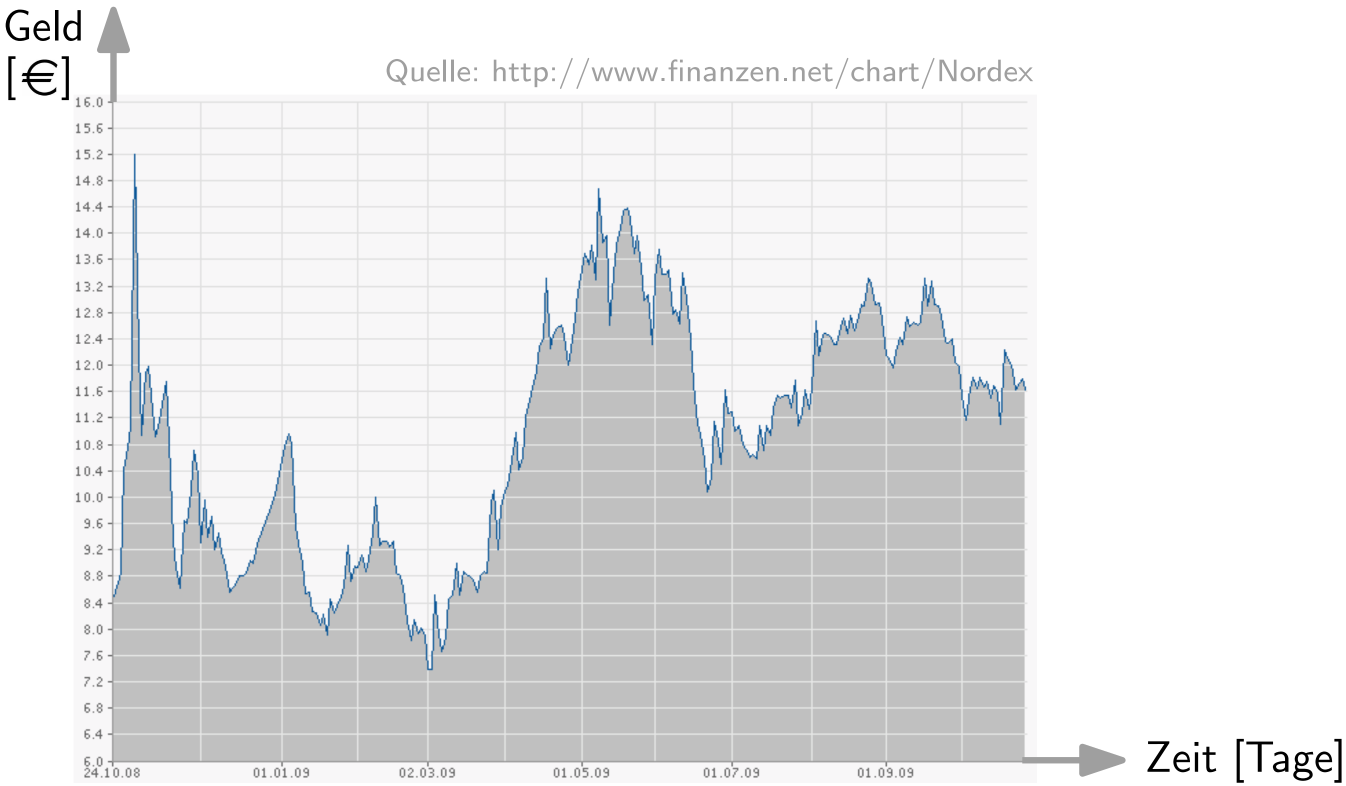
Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,

so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

Verkaufskurs

Analyse von Aktienkursen



Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,

so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

Verkaufskurs *Einkaufskurs*

Analyse von Aktienkursen

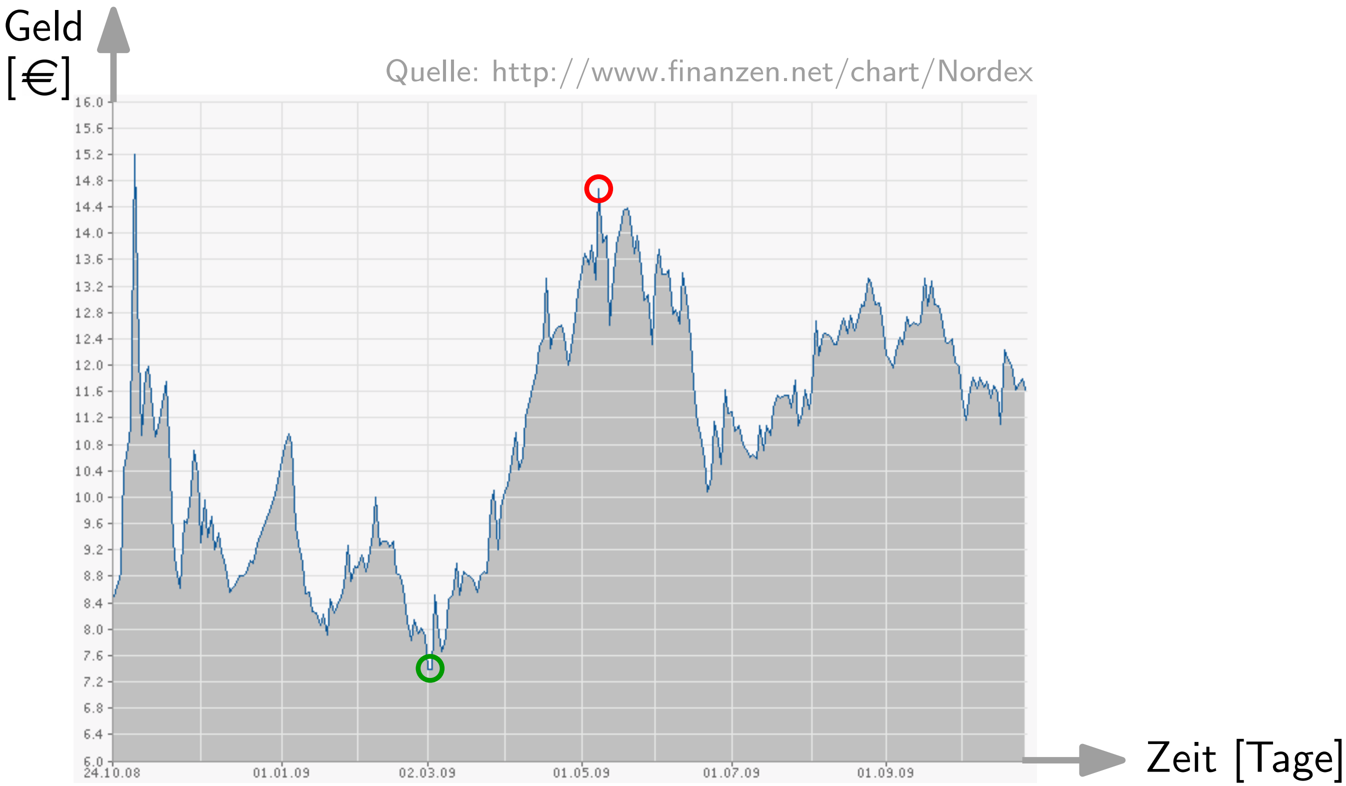
Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \le i < j \le n$,

so dass $\underbrace{A[j] - A[i]}_{\text{Profit pro Aktie}}$ maximal.

Verkaufskurs *Einkaufskurs*

Analyse von Aktienkursen



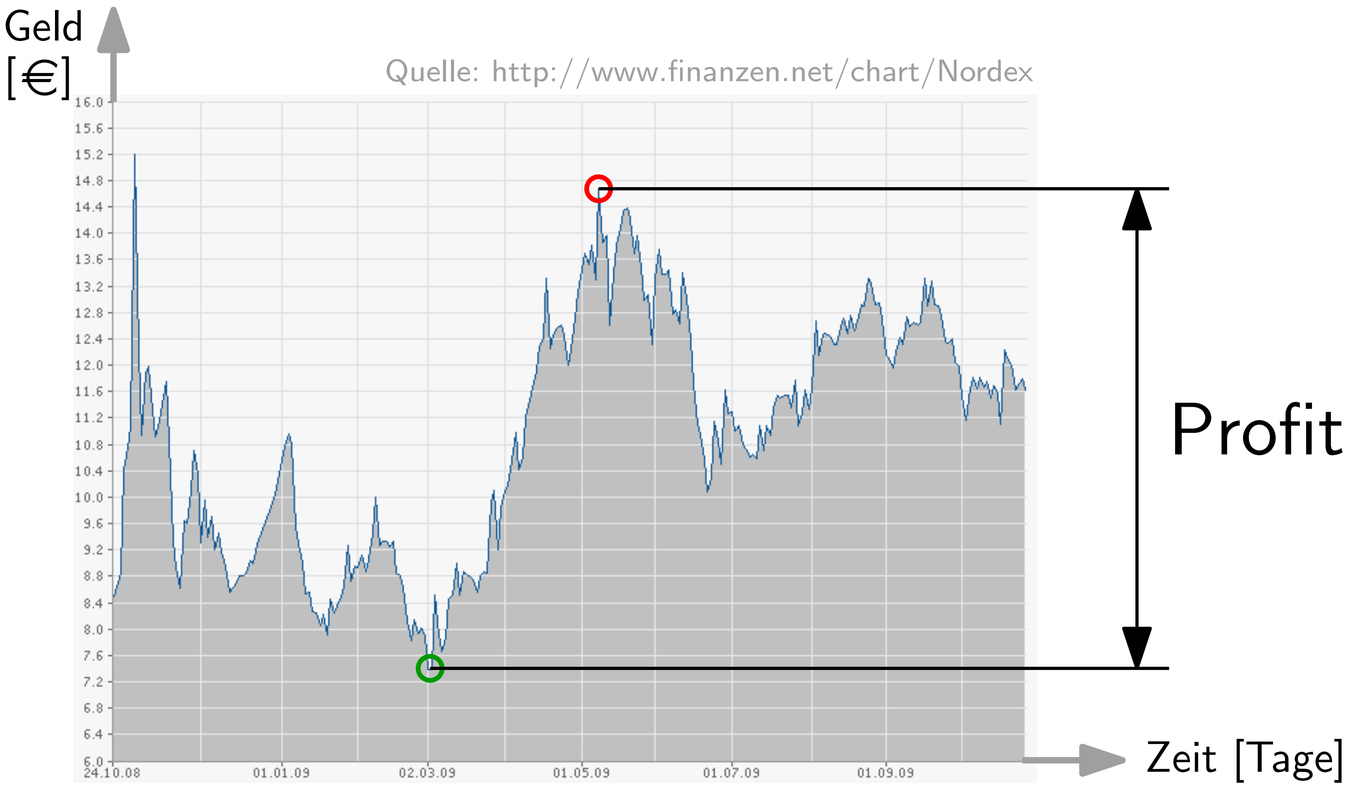
Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \le i < j \le n$,

so dass $\underbrace{A[j] - A[i]}_{\textit{Profit pro Aktie}}$ maximal.

Verkaufskurs *Einkaufskurs*

Analyse von Aktienkursen



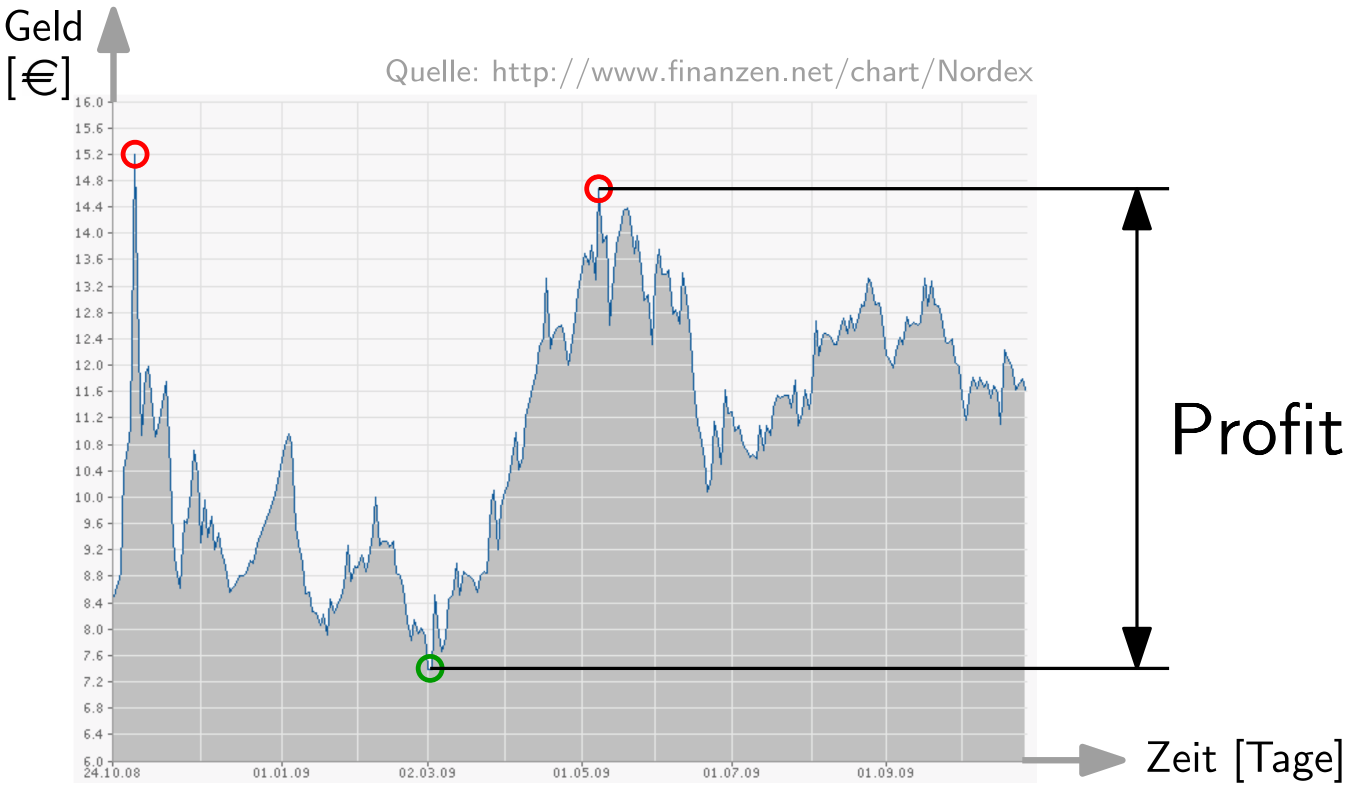
Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \le i < j \le n$,

so dass $\underbrace{A[j] - A[i]}_{\text{Profit pro Aktie}}$ maximal.

Verkaufskurs *Einkaufskurs*

Analyse von Aktienkursen



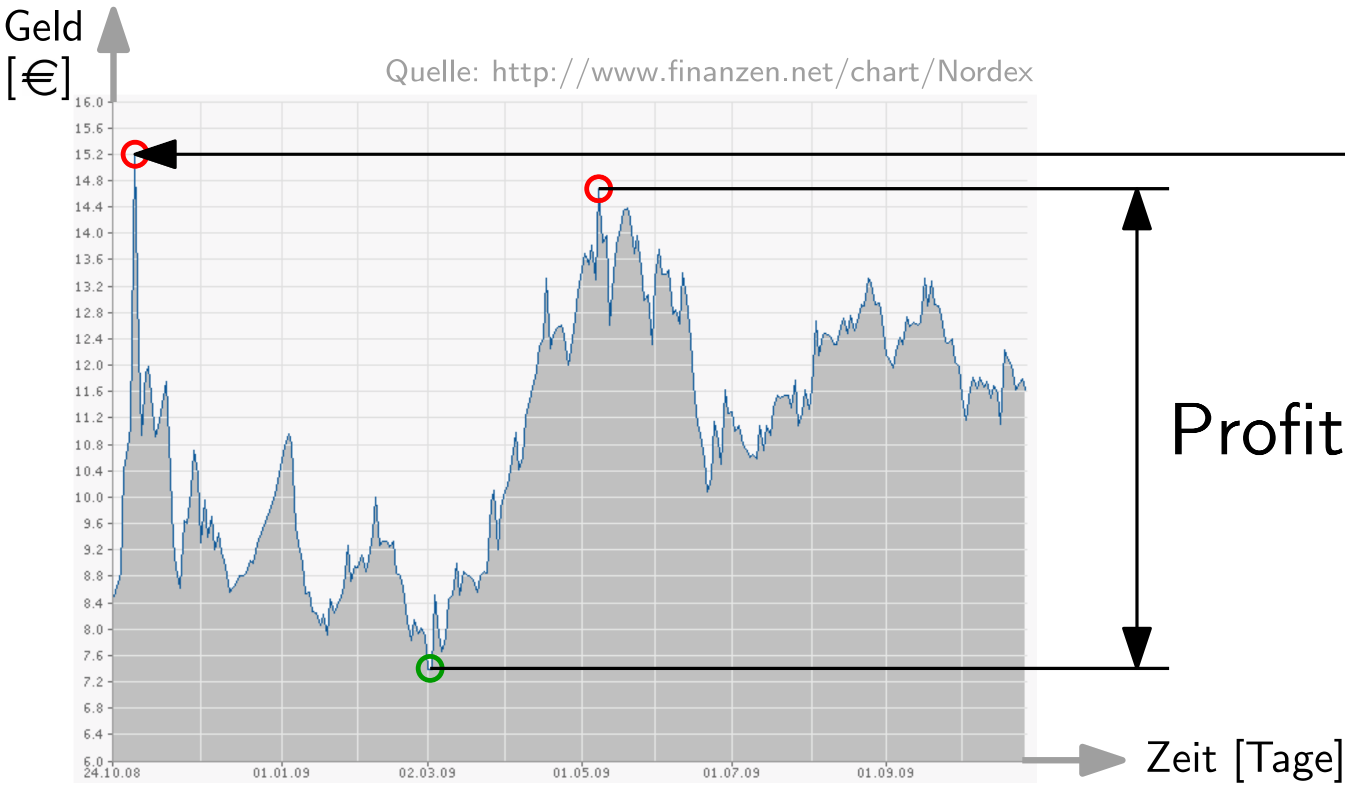
Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \le i < j \le n$,

so dass $\underbrace{A[j] - A[i]}_{\textit{Profit pro Aktie}}$ maximal.

Verkaufskurs *Einkaufskurs*

Analyse von Aktienkursen



Wichtig:
Es genügt *nicht* Minimum und Maximum zu suchen!

Problem. Gegeben: Folge $A[1..n]$ von Aktienkursen in Euro.

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $\underbrace{A[j] - A[i]}_{\text{Profit pro Aktie}}$ maximal.

Verkaufskurs *Einkaufskurs*

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

$\Bigg\}$ MAX-DIFF

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

} Max-Diff

Lösung: per *„roher Gewalt“*

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

$\Big\}$ MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt“*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

$\Big\}$ MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt“*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

$\Big\}$ MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl erlaubter Paare $=$

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

$\Big\}$ Max-Diff

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl erlaubter Paare $=$

$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$,
so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

$\Big\}$ MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl erlaubter Paare $=$

$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \qquad = \frac{n^2 - n}{2}$$

Analyse von Aktienkursen

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$, so dass $A[j] - A[i]$ maximal.

} MAX-DIFF

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $A[j] - A[i]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl erlaubter Paare $=$

$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \quad = \frac{n^2 - n}{2} \quad \in \Theta(n^2)$$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Ein ähnliches Problem

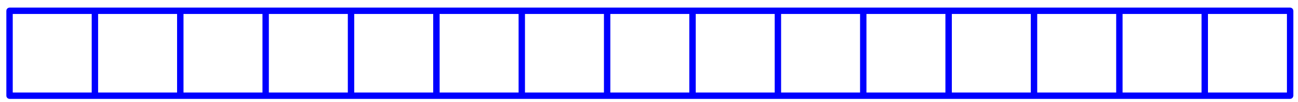
Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \le i \le j \le n$, so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

$\Bigg\}$ MAX-SUM

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

MAX-SUM



Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

$\Bigg\}$ MAX-SUM

7	4	9	1	3	3	1	12	0	2	0	4	2	8	2

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

$\Bigg\}$ MAX-SUM

7	4	9	1	3	3	1	12	0	2	0	4	2	8	2

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,

so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$

– gib Maximum zurück

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt"*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} Max-Sum

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$

– gib Maximum zurück

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür:

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

$\Bigg\}$ MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i, j)}$ berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$

– gib Maximum zurück

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{}$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt"*

- $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i, j)}$ berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
- gib Maximum zurück

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)}$.

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i,j)}$ berechne $\boxed{\sum_{k=i}^{j} A[k]}$
– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{}$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i,j)}$ berechne $\boxed{\sum_{k=i}^{j} A[k]}$
– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{O(n)}$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} Max-Sum

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt"*

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i,j)}$ berechne $\boxed{\sum_{k=i}^{j} A[k]}$

– gib Maximum zurück

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{O(n)} = O(n^3)$

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

$\Big\}$ Max-Sum

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i,j)}$ berechne $\boxed{\sum_{k=i}^{j} A[k]}$
– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{O(n)} = O(n^3)$
Untere Schranke

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} Max-Sum

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder (1, 13)

Lösung: per *„roher Gewalt"*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– für alle erlaubten Paare (i,j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen

Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{O(n)} = O(n^3)$

Untere Schranke (Anz. Paare)

Ein ähnliches Problem

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

} MAX-SUM

7	4	-9	1	-3	3	1	12	0	-2	0	4	2	-8	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\Rightarrow (6, 13)$
oder $(1, 13)$

Lösung: per *„roher Gewalt“*

Übung: Schreiben Sie Pseudocode!

– $\boxed{\text{für alle erlaubten Paare } (i, j)}$ berechne $\boxed{\sum_{k=i}^{j} A[k]}$

– gib Maximum zurück

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen
Obere Schranke dafür: $\boxed{O(n^2)} \cdot \boxed{O(n)} = O(n^3)$
Untere Schranke (Anz. Paare) $= \Omega(n^2)$

Wo ist die Wahrheit?

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

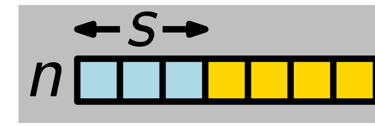
Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

Beob.

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



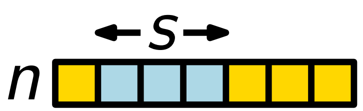
Beob. • Anz. der Summen mit s Summanden ist

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:

– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$

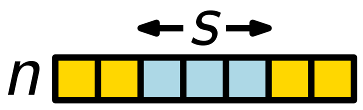
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist

Genauere Analyse

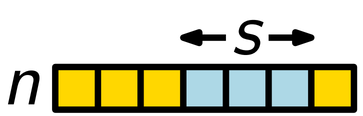
Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob. • Anz. der Summen mit s Summanden ist

Genauere Analyse

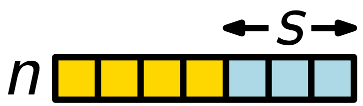
Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob. • Anz. der Summen mit s Summanden ist

Genauere Analyse

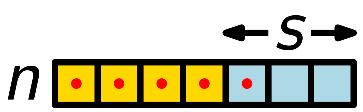
Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob. • Anz. der Summen mit s Summanden ist

Genauere Analyse

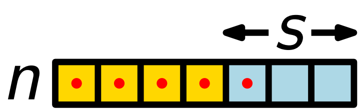
Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob. • Anz. der Summen mit s Summanden ist

Genauere Analyse

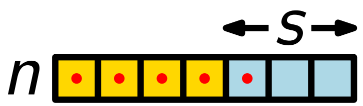
Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob. • Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.

Genauere Analyse

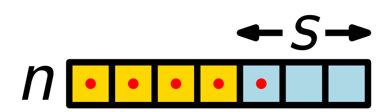
Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen **?** Additionen.

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

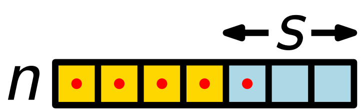


Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$\Rightarrow$ Anz. Add. $=$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

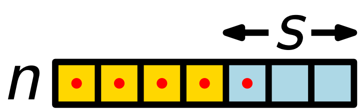


Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$\Rightarrow$ Anz. Add. $= \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



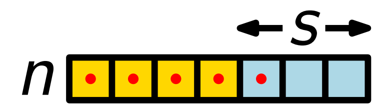
Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$

$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

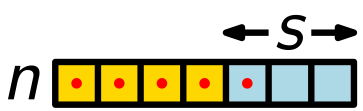


Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$
$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$
$$= \cdots + \tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4} + \ldots$$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück

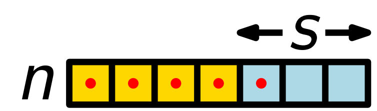


Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$
$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$
$$= \cdots + \underbrace{\tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4}} + \ldots$$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

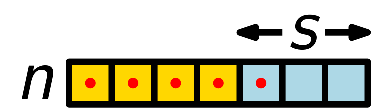
$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$

$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$

$$= \cdots + \underbrace{\tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4}}_{\frac{n}{2}+1 \text{ Terme der Größe mindestens } \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4}} + \ldots$$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

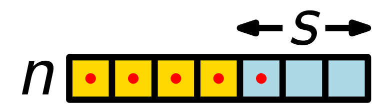
$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$

$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$

$$= \cdots + \underbrace{\tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4}}_{\frac{n}{2}+1 \text{ Terme der Größe mindestens } \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4}} + \ldots \quad \in \; \Omega(n^3)$$

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$

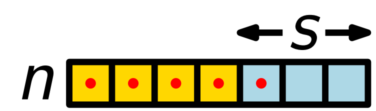
$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$

$$= \cdots + \underbrace{\tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4}}_{\frac{n}{2}+1 \text{ Terme der Größe mindestens } \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4}} + \ldots \quad \in \; \Omega(n^3)$$

$\Rightarrow$ Der Rohe-Gewalt-Alg. läuft in $O(n^3) \cap \Omega(n^3) = \Theta(n^3)$ Zeit.

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

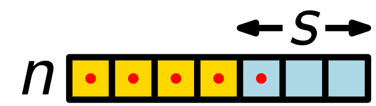
$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$
$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$
$$= \cdots + \underbrace{\tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4}}_{\frac{n}{2}+1 \text{ Terme der Größe mindestens } \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4}} + \ldots \in \Omega(n^3)$$

$\Rightarrow$ Der Rohe-Gewalt-Alg. läuft in $O(n^3) \cap \Omega(n^3) = \Theta(n^3)$ Zeit.

Can we do better?

Genauere Analyse

Laufzeit $\approx$ Anzahl der Additionen des Rohe-Gewalt-Algos:
– für alle erlaubten Paare (i, j) berechne $\sum_{k=i}^{j} A[k]$
– gib Maximum zurück



Beob.
- Anz. der Summen mit s Summanden ist $n - s + 1$.
- s Summanden benötigen $s - 1$ Additionen.

$$\Rightarrow \text{Anz. Add.} = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1) \cdot (s - 1)$$

$$= n \cdot 0 + (n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-1)$$

$$= \cdots + \underbrace{\tfrac{3n}{4} \cdot \tfrac{n}{4} + \cdots + \tfrac{n}{2} \cdot \tfrac{n}{2} + \cdots + \tfrac{n}{4} \cdot \tfrac{3n}{4}}_{\frac{n}{2}+1 \text{ Terme der Größe mindestens } \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4}} + \ldots \quad \in \; \Omega(n^3)$$

Übung:
Berechnen Sie diese Summe *genau* und beweisen Sie Ihr Ergebnis per Induktion!

$\Rightarrow$ Der Rohe-Gewalt-Alg. läuft in $O(n^3) \cap \Omega(n^3) = \Theta(n^3)$ Zeit.

Can we do better?

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$
berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \ldots,\ S_{i,n}$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$
berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \ldots,\ S_{i,n}$

Wie?

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

berechne $S_{ii}, \; S_{i,i+1}, \; S_{i,i+2}, \; S_{i,i+3}, \; \ldots, \; S_{i,n}$

$=$

Wie? $A[i]$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \dots, n$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \dots,\ S_{i,n}$

$=$ $+$

Wie? $A[i]$ $A[i+1]$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,

so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

berechne $S_{ii}, \; S_{i,i+1}, \; S_{i,i+2}, \; S_{i,i+3}, \; \ldots, \; S_{i,n}$

$=$ $+$ $+$

Wie? $A[i]$ $A[i+1]$ $A[i+2]$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,

so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \ldots,\ S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad +$

Wie? $A[i] \quad A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3]$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \ldots,\ S_{i,n}$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$$

Wie? $A[i]\quad A[i+1]\quad A[i+2]\quad A[i+3]\qquad A[n]$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,

so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

berechne $S_{ii}, \; S_{i,i+1}, \; S_{i,i+2}, \; S_{i,i+3}, \; \ldots, \; S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad \quad A[n]}_{n - i \text{ Additionen}}$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{berechne} & S_{ii}, & S_{i,i+1}, & S_{i,i+2}, & S_{i,i+3}, & \ldots, & S_{i,n} \\ & = & + & + & + & \cdots & + \\ \textit{Wie?} & A[i] & A[i+1] & A[i+2] & A[i+3] & & A[n] \end{array}$$

$n - i$ Additionen

Insgesamt

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,

so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \ldots, n}$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \ldots,\ S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i]$ $\underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad \cdots \quad A[n]}_{n - i \text{ Additionen}}$

Insgesamt

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \le i \le j \le n$,

so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \ldots, n}$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \ldots,\ S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i]$ $\underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad \cdots \quad A[n]}_{n-i \text{ Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}}$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \dots, n}$

berechne $S_{ii}, \; S_{i,i+1}, \; S_{i,i+2}, \; S_{i,i+3}, \; \dots, \; S_{i,n}$

$= \qquad + \qquad + \qquad + \qquad \cdots \qquad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad A[n]}_{\boxed{n-i} \text{ Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}}\ \boxed{}$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \dots, n}$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \dots,\ S_{i,n}$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad \quad A[n]}_{\boxed{n-i}\text{ Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}}\boxed{n-i}$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \dots, n}$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \dots,\ S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad A[n]}_{\boxed{n-i}\ \text{Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}} \boxed{n-i} = \sum$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \ldots, n}$

berechne $S_{ii}, \; S_{i,i+1}, \; S_{i,i+2}, \; S_{i,i+3}, \; \ldots, \; S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad A[n]}_{\boxed{n-i}\text{ Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}} \boxed{n-i} = \sum_{j=n-1}^{0} j$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen
Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \ldots, n}$

berechne $S_{ii},\; S_{i,i+1},\; S_{i,i+2},\; S_{i,i+3},\; \ldots,\; S_{i,n}$

$= \quad + \quad + \quad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \quad A[n]}_{\boxed{n-i}\ \text{Additionen}}$

Insgesamt $\boxed{\sum_{i=1}^{n}} \boxed{n - i} = \sum_{j=n-1}^{0} j = \sum_{j=1}^{n-1} j$

Eine schnellere Lösung

Problem: Gegeben: Folge $A[1..n]$ von ganzen Zahlen

Gesucht: Paar (i,j) mit $1 \le i \le j \le n$,
so dass $S_{ij} = \sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal.

Idee: Für $\boxed{i = 1, \dots, n}$

berechne $S_{ii},\ S_{i,i+1},\ S_{i,i+2},\ S_{i,i+3},\ \dots,\ S_{i,n}$

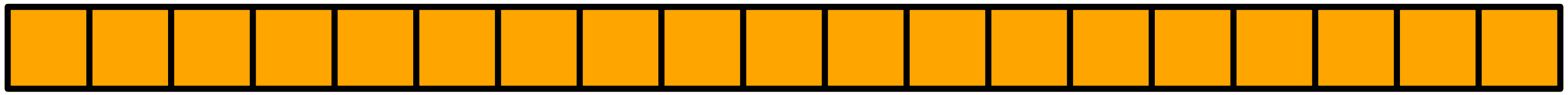
$= \qquad + \qquad + \qquad + \quad \cdots \quad +$

Wie? $A[i] \quad \underbrace{A[i+1] \quad A[i+2] \quad A[i+3] \qquad A[n]}_{\boxed{n-i}\ \text{Additionen}}$

Insgesamt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boxed{n-i} = \sum_{j=n-1}^{0} j = \sum_{j=1}^{n-1} j \in \Theta(n^2)$ Add.

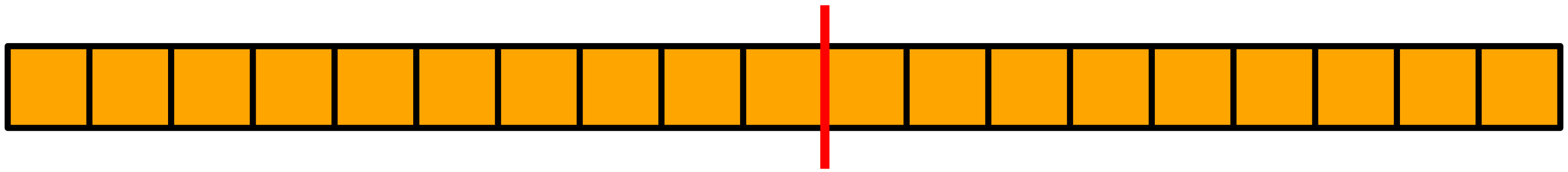
Eine noch schnellere Lösung?

Idee:



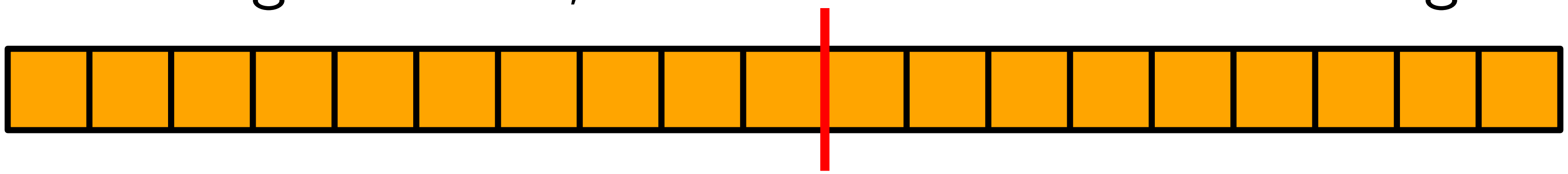
Eine noch schnellere Lösung?

Idee:



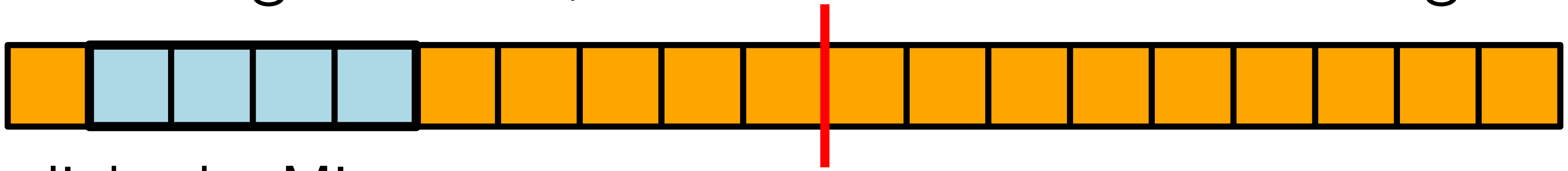
Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



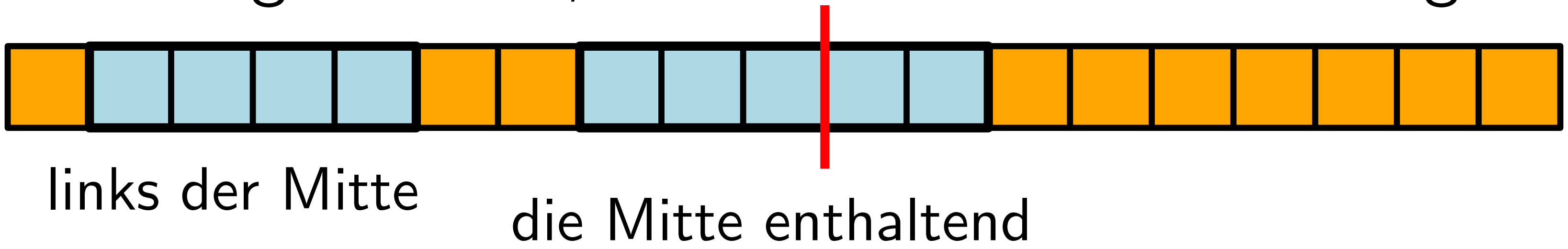
Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



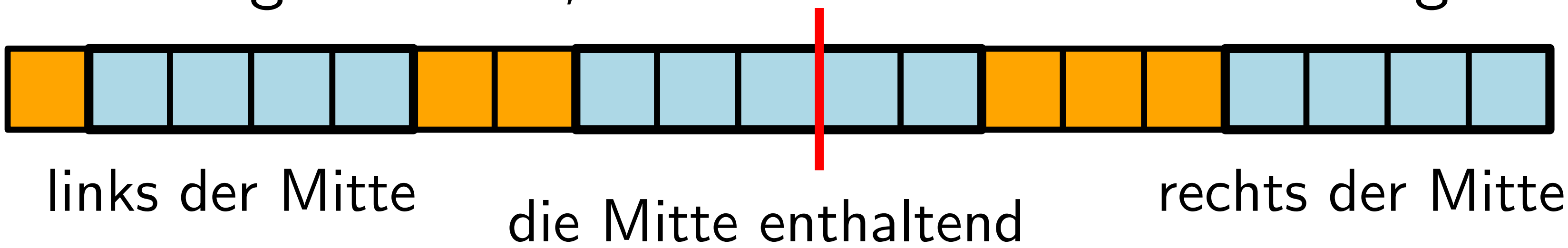
Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



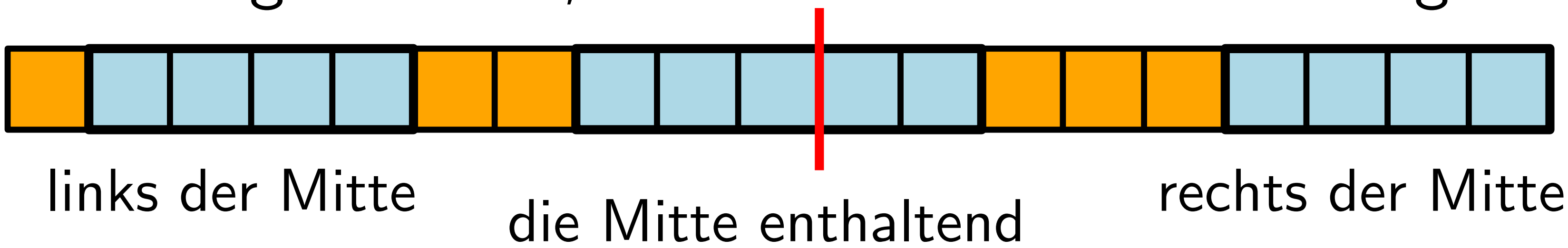
Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Eine noch schnellere Lösung?

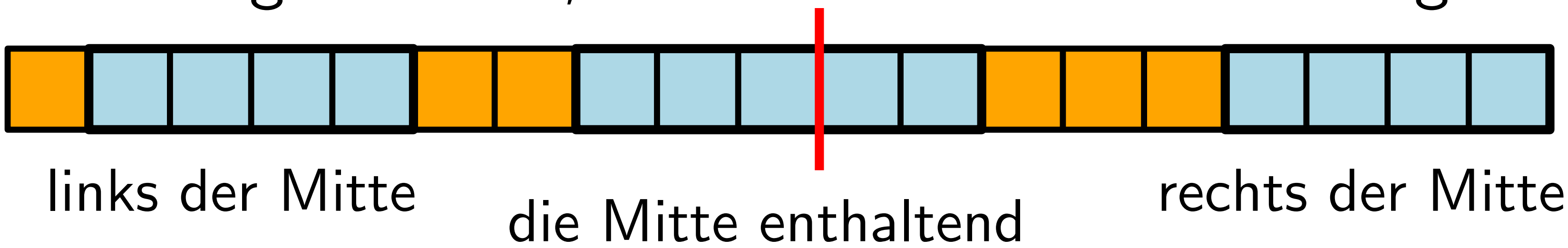
Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

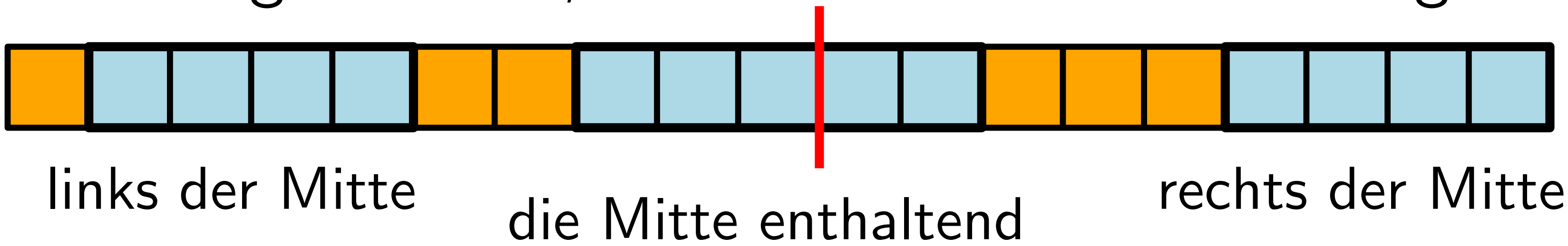
– *teile:*

– *herrsche:*

– *kombiniere:*

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:

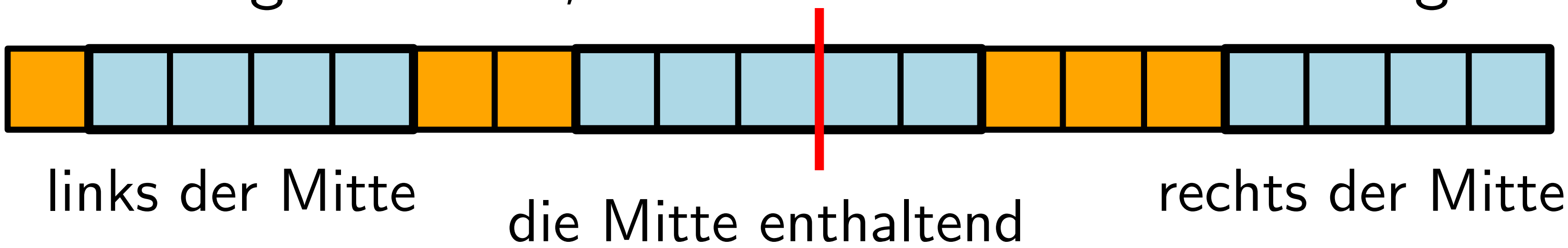


Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

– *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
– *herrsche:*
– *kombiniere:*

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:

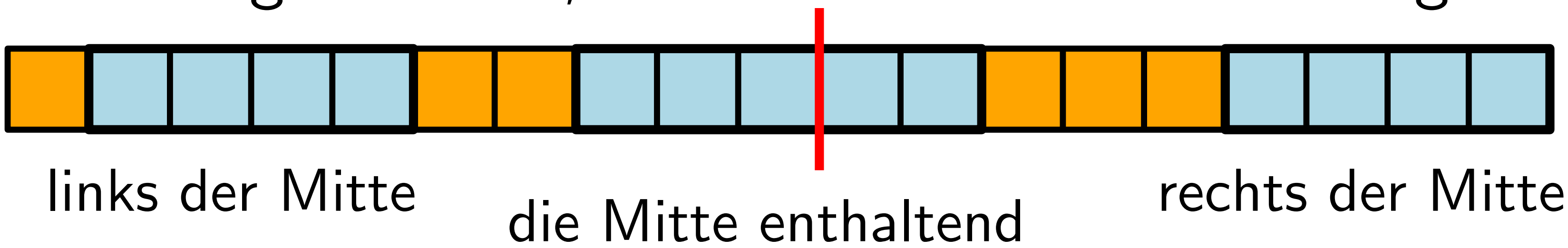


Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:*

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

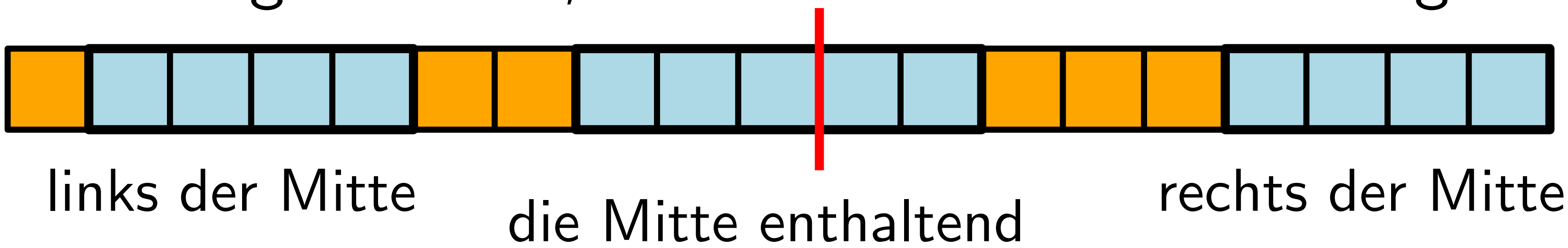
– *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften

– *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte

– *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:

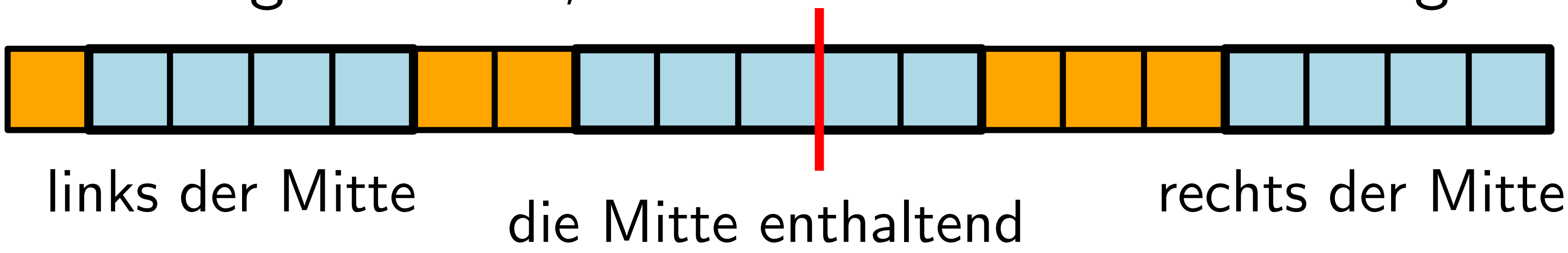


Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



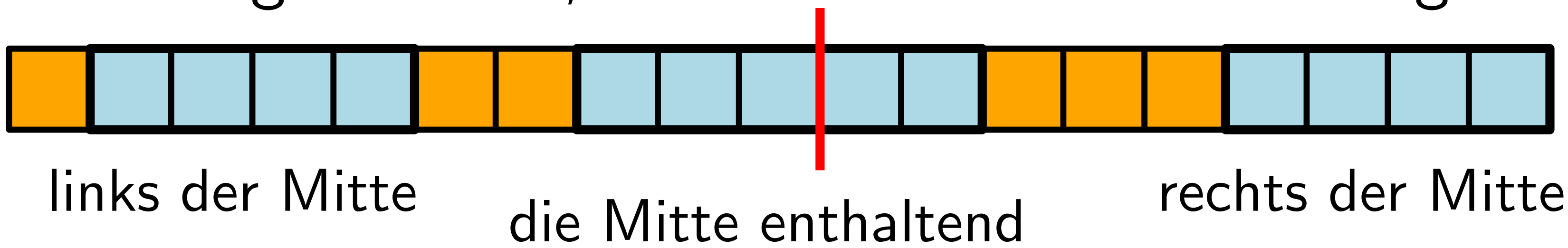
Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



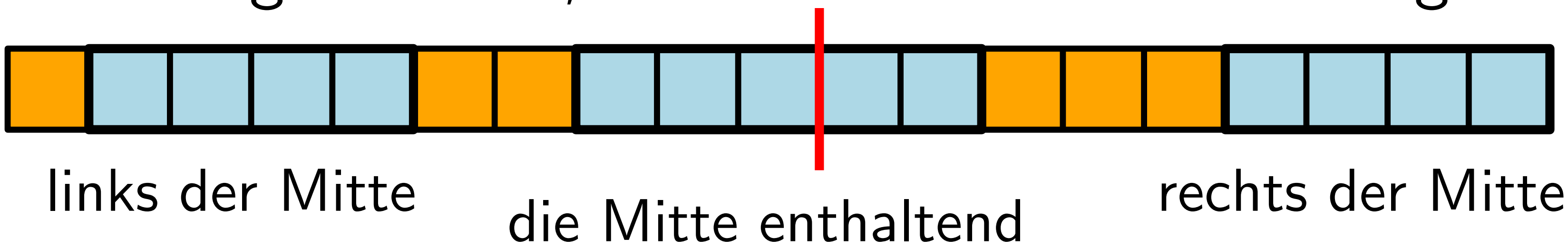
Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



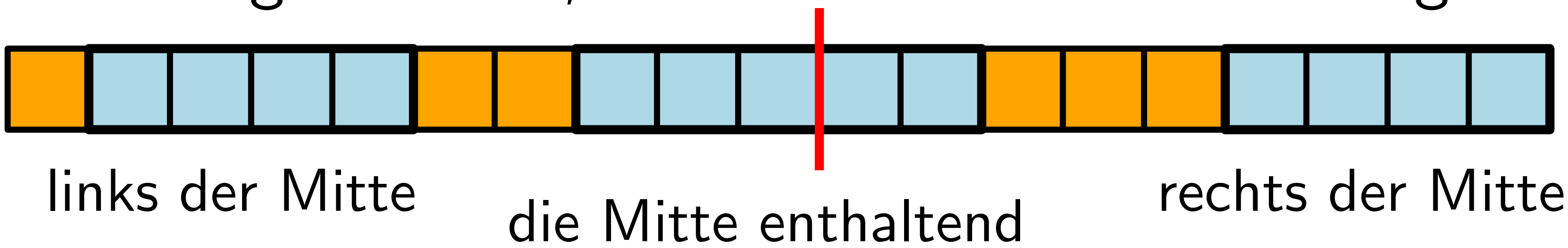
Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



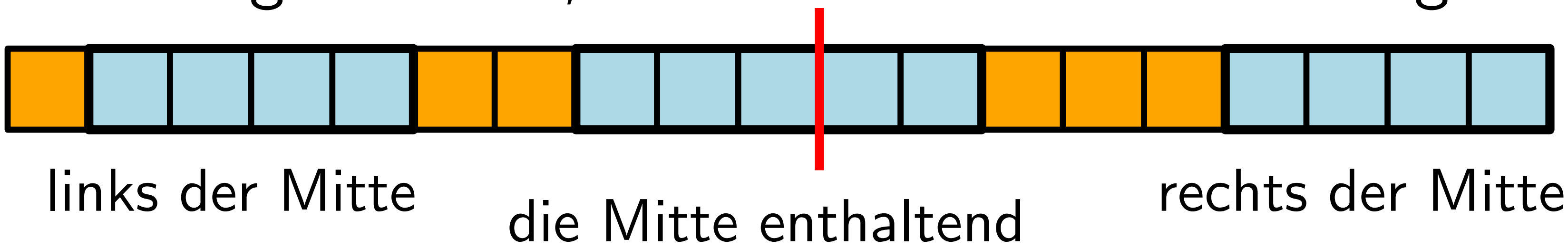
Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

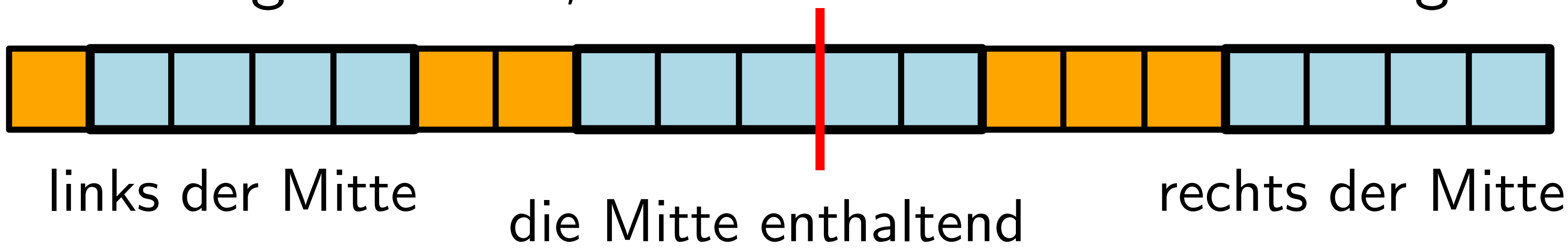
- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht:

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

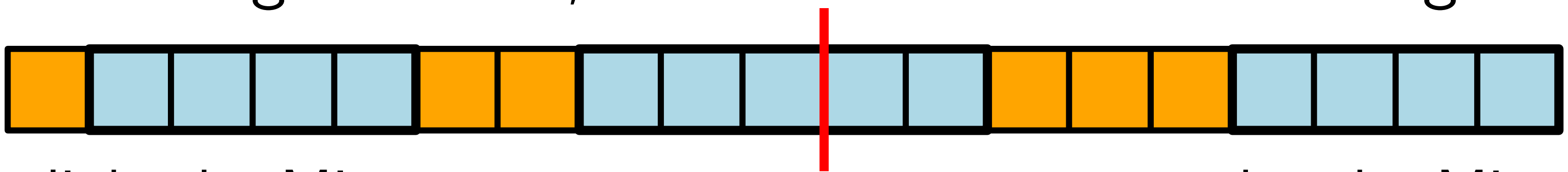
- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht: Wenn die *maximale* Teilsumme die Mitte enthält,

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



links der Mitte — die Mitte enthaltend — rechts der Mitte

Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

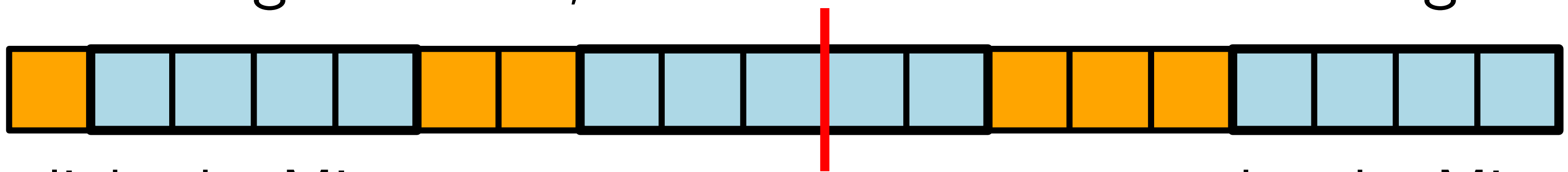
- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht: Wenn die *maximale* Teilsumme die Mitte enthält, dann muss ihr linker Teil (bis zur Mitte) maximal sein

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



links der Mitte — die Mitte enthaltend — rechts der Mitte

Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

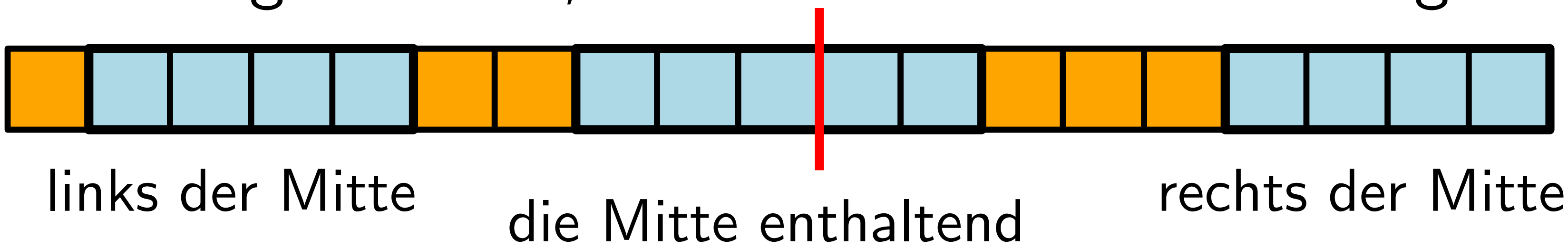
Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht: Wenn die *maximale* Teilsumme die Mitte enthält, dann muss ihr linker Teil (bis zur Mitte) maximal sein

und

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

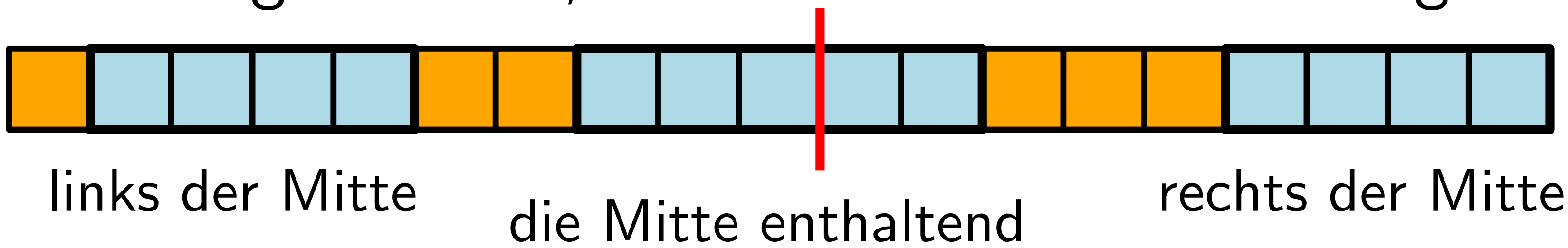
- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht: Wenn die *maximale* Teilsumme die Mitte enthält, dann muss ihr linker Teil (bis zur Mitte) maximal sein *und* dann muss ihr rechter Teil (ab der Mitte) maximal sein.

Eine noch schnellere Lösung?

Idee: Drei Möglichkeiten, wo maximale Teilsumme liegt:



Nimm Entwurfstechnik *Teile & Herrsche*!

- *teile:* in zwei ungefähr gleichgroße Hälften
- *herrsche:* durch rekursive Aufrufe für li. u. re. Hälfte
- *kombiniere:* kontrolliere alle Teilsummen, die die Mitte enthalten

Davon gibt's $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \in \Theta(n^2)$

Einsicht: Wenn die *maximale* Teilsumme die Mitte enthält,
dann muss ihr linker Teil (bis zur Mitte) maximal sein
und dann muss ihr rechter Teil (ab der Mitte) maximal sein.

$\Rightarrow$ Wir können li. u. re. Teil *unabhängig* von einander berechnen!

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$
else
  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$
  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) \;=$ MaxTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$)
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) \;=$ MaxTeilfeld(A, $mitte + 1$, $ende$)
  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$
    MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)
  return (Tripel mit größter Summe)

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

- **if** $beginn == ende$ **then**
  - **return** $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

- **else**
  - $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$
  - $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) =$ MaxTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$)
  - $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) =$ MaxTeilfeld(A, $mitte + 1$, $ende$)
  - $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$ MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)
  - **return** (Tripel mit größter Summe)

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

- **if** $beginn == ende$ **then**
  - **return** $(beginn, ende, A[beginn])$

  herrsche (in kleinen Teilinstanzen)
- **else**
  - $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$

    teile
  - $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$)
  - $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $mitte + 1$, $ende$)
  - $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe)$ = MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)
  - **return** (Tripel mit größter Summe)

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$ *herrsche* (in kleinen Teilinstanzen)
else
  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$ *teile* *herrsche*
  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$)
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $mitte + 1$, $ende$)
  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$
    MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)
  return (Tripel mit größter Summe)

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else

  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$ *teile*

  herrsche

  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$)
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $mitte + 1$, $ende$)

  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe)$ =
    MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)

  return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else
  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$ *teile*

  herrsche

  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$)
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe)$ = MaxTeilfeld(A, $mitte + 1$, $ende$)
  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe)$ =
    MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)
  return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else

  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$

teile

herrsche

  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) =$ MaxTeilfeld$(A, beginn, mitte)$
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) =$ MaxTeilfeld$(A, mitte + 1, ende)$
  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$
  MaxMittleresTeilfeld$(A, beginn, mitte, ende)$
  return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Laufzeit:

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else
  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$ *teile*
  herrsche
  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, beginn, mitte)$
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, mitte + 1, ende)$
  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$
    $\text{MaxMittleresTeilfeld}(A, beginn, mitte, ende)$
  return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Laufzeit: $T_{\text{MT}}(1) = \Theta(1)$

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else

$mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$

teile

herrsche

$(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, beginn, mitte)$

$(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, mitte + 1, ende)$

$(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) = \text{MaxMittleresTeilfeld}(A, beginn, mitte, ende)$

return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Laufzeit: $T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$

für $n > 1$: $T_{\mathrm{MT}}(n) = T_{\mathrm{MT}}(\lfloor n/2 \rfloor) + T_{\mathrm{MT}}(\lceil n/2 \rceil) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else
  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$ — *teile*

  herrsche
  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, beginn, mitte)$
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, mitte + 1, ende)$

  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$
    MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)

  return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Laufzeit: $T_{\text{MT}}(1) = \Theta(1)$

für $n > 1$: $T_{\text{MT}}(n) = T_{\text{MT}}(\lfloor n/2 \rfloor) + T_{\text{MT}}(\lceil n/2 \rceil) + T_{\text{MMT}}(n)$

$$\approx 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + T_{\text{MMT}}(n)$$

Teile & Herrsche

MaxTeilfeld(int[] A, int $beginn = 1$, int $ende = A.length$)

if $beginn == ende$ **then**
  return $(beginn, ende, A[beginn])$

herrsche (in kleinen Teilinstanzen)

else

  $mitte = \lfloor (beginn + ende)/2 \rfloor$ — *teile*

  herrsche

  $(L\text{-}beginn, L\text{-}ende, L\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, beginn, mitte)$
  $(R\text{-}beginn, R\text{-}ende, R\text{-}summe) = \text{MaxTeilfeld}(A, mitte + 1, ende)$

  $(M\text{-}beginn, M\text{-}ende, M\text{-}summe) =$
    MaxMittleresTeilfeld(A, $beginn$, $mitte$, $ende$)

  return (Tripel mit größter Summe)

kombiniere

Laufzeit: $T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$

für $n > 1$: $T_{\mathrm{MT}}(n) = T_{\mathrm{MT}}(\lfloor n/2 \rfloor) + T_{\mathrm{MT}}(\lceil n/2 \rceil) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$

$\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$

$T_{\mathrm{MMT}}(n) = ?$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[ ] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

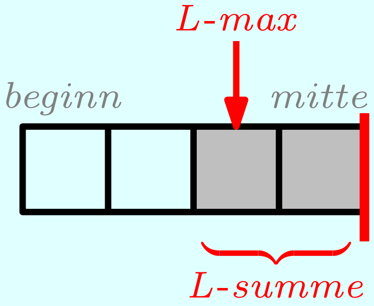
Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**



return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

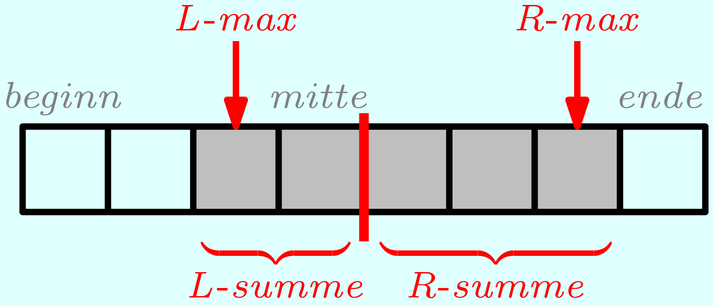
Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**



$R\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**

// analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Kombiniere

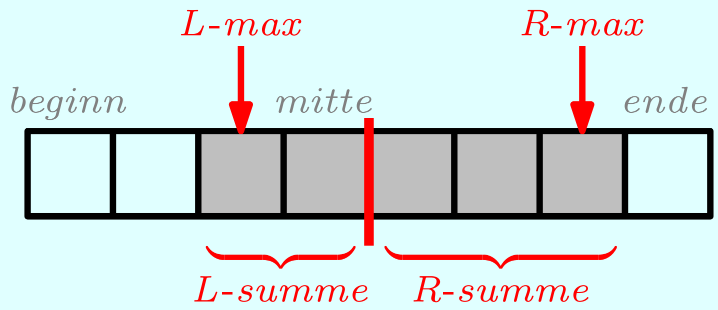
MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**

Vervollständigen Sie den Algorithmus!



$R\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**

// analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

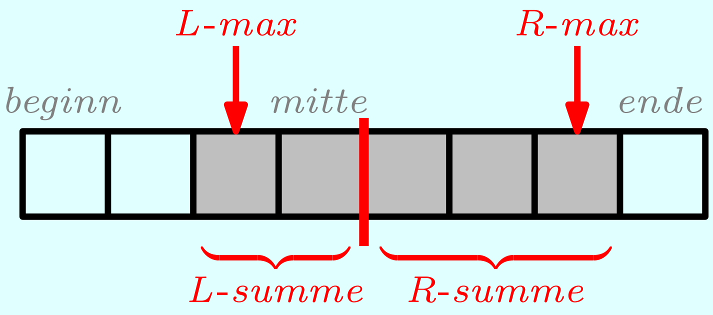
Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe + A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$



Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe + A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[ ] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe + A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Schleifeninvariante:

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
    $summe = summe + A[i]$
    if $summe > L\text{-}summe$ **then**
        $L\text{-}summe = summe$
        $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
    // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Schleifeninvariante:

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[ ] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe + A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe + A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Schleifeninvariante:
$summe = S_{i,mitte}$ und

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[ ] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**

$\quad summe = summe + A[i]$

$\quad$ **if** $summe > L\text{-}summe$ **then**

$\quad\quad L\text{-}summe = summe$

$\quad\quad L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**

$\quad$ // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe =$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
    $summe = summe + A[i]$
    if $summe > L\text{-}summe$ **then**
        $L\text{-}summe = summe$
        $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
    // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit?

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

```
    L-summe = −∞
    summe = 0
    for i = mitte downto beginn do
        summe = summe + A[i]
        if summe > L-summe then
            L-summe = summe
            L-max = i

    R-summe = −∞
    summe = 0
    for i = mitte + 1 to ende do
        // analog zu oben

    return (L-max, R-max, L-summe + R-summe)
```

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe + A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

```
L-summe = −∞
summe = 0
for i = mitte downto beginn do
    summe = summe + A[i]
    if summe > L-summe then
        L-summe = summe
        L-max = i

R-summe = −∞
summe = 0
for i = mitte + 1 to ende do
    // analog zu oben

return (L-max, R-max, L-summe + R-summe)
```

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

Kombiniere

Max**Mittleres**Teilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und
$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \leq k \leq mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:
$summe = S_{i,mitte}$ und
$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen
$mitte - beginn + 1$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**

  $summe = summe \oplus A[i]$

  if $summe > L\text{-}summe$ **then**

    $L\text{-}summe = summe$

    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$

$summe = 0$

for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**

  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
    $summe = summe \oplus A[i]$
    if $summe > L\text{-}summe$ **then**
        $L\text{-}summe = summe$
        $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
    // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

$ende - mitte$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \leq k \leq mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

$ende - mitte$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

$ende - mitte$

$ende - beginn + 1$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit?

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

$ende - mitte$

$ende - beginn + 1$

$= n$

Kombiniere

MaxMittleresTeilfeld(int[] A, int $beginn$, int $mitte$, int $ende$)

$L\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte$ **downto** $beginn$ **do**
  $summe = summe \oplus A[i]$
  if $summe > L\text{-}summe$ **then**
    $L\text{-}summe = summe$
    $L\text{-}max = i$

$R\text{-}summe = -\infty$
$summe = 0$
for $i = mitte + 1$ **to** $ende$ **do**
  // analog zu oben $\oplus$

return $(L\text{-}max, R\text{-}max, L\text{-}summe + R\text{-}summe)$

Korrektheit? ✓

Schleifeninvariante:

$summe = S_{i,mitte}$ und

$L\text{-}summe = \max_{i \le k \le mitte} S_{k,mitte}$

Laufzeit? ✓

$:=_{\text{hier}}$ Anz. Additionen

$mitte - beginn + 1$

$ende - mitte$

$ende - beginn + 1$

$= n$

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathsf{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $$T_{\mathsf{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\mathsf{MT}}(n/2) + T_{\mathsf{MMT}}(n)$$

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \end{aligned}$$

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \end{aligned}$$

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \; = \quad n \log_2 n \end{aligned}$$

[für n = Zweierpotenz]

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $$T_{\mathrm{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$$
$$= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n$$
$$= V_{\mathrm{MS}}(n) = O(n \log_{\cancel{2}} n)$$ ~~[für n = Zweierpotenz]~~

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$: $$T_{\mathrm{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$$

$$= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n$$

$$= V_{\mathrm{MS}}(n) = O(n \log_{\cancel{2}} n)$$ ~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch...

Denn für $a, b \geq 2$ gilt:
$\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \; = \; O(n \log_{\cancel{2}} n) \end{aligned}$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch. . .

Denn für $a, b \geq 2$ gilt:
$\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\text{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\text{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + T_{\text{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\text{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\text{MS}}(n) \; = \; O(n \log_{\cancel{2}} n) \end{aligned}$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch. . .

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxTeilfeld in $O(n)$ – also in linearer – Zeit!

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \ = O(n \log_{\cancel{2}} n) \end{aligned}$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch...

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxTeilfeld in $O(n)$ – also in linearer – Zeit!
- Was hat MaxTeilfeld mit Aktienkursanalyse (vom Anfang der VL) zu tun?

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:
$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \;=\; O(n \log_{\cancel{2}} n) \end{aligned}$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch...

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxTeilfeld in $O(n)$ – also in linearer – Zeit!
- Was hat MaxTeilfeld mit Aktienkursanalyse (vom Anfang der VL) zu tun?

Und wenn...?

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{MT}}(n) &\approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n) \\ &= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n \\ &= V_{\mathrm{MS}}(n) \;=\; O(n \log_{\cancel{2}} n) \end{aligned}$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch...

Denn für $a, b \geq 2$ gilt: $\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxTeilfeld in $O(n)$ – also in linearer – Zeit!
- Was hat MaxTeilfeld mit Aktienkursanalyse (vom Anfang der VL) zu tun?

Und wenn...? $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

Putting Things Together

Laufzeit von MaxTeilfeld:

$$T_{\mathrm{MT}}(1) = \Theta(1)$$

für $n > 1$:

$$T_{\mathrm{MT}}(n) \approx 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + T_{\mathrm{MMT}}(n)$$

$$= 2 \cdot T_{\mathrm{MT}}(n/2) + n$$

$$= V_{\mathrm{MS}}(n) \; = \; O(n \log_{\cancel{2}} n)$$

~~[für n = Zweierpotenz]~~

Warum die Einschränkung wegfällt, sehen wir noch...

Denn für $a, b \geq 2$ gilt:
$\Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$.

Denkaufgaben:

- Lösen Sie MaxTeilfeld in $O(n)$ – also in linearer – Zeit!
- Was hat MaxTeilfeld mit Aktienkursanalyse (vom Anfang der VL) zu tun?

Und wenn...? $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 4n$ (und $T(1) = \Theta(1)$)

Gilt dann auch $T(n) = O(n \log n)$ **?**