

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2019/20

3. Vorlesung

Laufzeitanalyse

Recap: Diskutieren Sie mit Ihrer NachbarIn!

1. Was sind die zwei (oder drei?) entscheidensten Fragen, die wir uns über einen Algorithmus stellen?
2. Warum eigentlich interessieren wir uns fürs Sortieren?
3. Welche Entwurfstechniken für Algorithmen kennen wir schon?
4. Wie beweisen wir die Korrektheit
 - a) einer Schleife?
 - b) eines inkrementellen Algorithmus?
 - c) eines rekursiven Algorithmus?

Heute schon implementiert?
Zum Beispiel
– InsertionSort,
– MergeSort, ...
Probieren Sie's selbst!

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur Vergleiche!

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur Vergleiche!
(zwischen Elementen der Eingabe)

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```
InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key

```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): *Betrachte Extremfälle!*

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): Betrachte Extremfälle!

Bester Fall:

Schlechtester Fall:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): Betrachte Extremfälle!

Beste Fall: A vorsortiert

Schlechtester Fall:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): Betrachte Extremfälle!

Beste Fall: A vorsortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall:

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): Betrachte Extremfälle!

Beste Fall: A vorsortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): Betrachte Extremfälle!

Bester Fall: A vorsortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + (n - 1) =$$

Laufzeit analysieren: InsertionSort

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Zwei Konventionen:

- 1) $n :=$ Größe der Eingabe
= hier $A.length$
- 2) Wir zählen nur **Vergleiche!**
(zwischen Elementen der Eingabe)

Gesucht: Maß für die Laufzeit, das nur von n abhängt.

Problem: Tatsächliche Laufzeit hängt stark von Eingabe ab.

Lösung(?): Betrachte Extremfälle!

Beste Fall: A vorsortiert $\Rightarrow n - 1$ Vergleiche

Schlechtester Fall: A absteigend sortiert

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n^2 - n}{2} \text{ Vgl.}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile  
    MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ ) } herrsche  
    MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ ) }  
    Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ ) } kombiniere
```

Korrekt?

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$ 
```

```
  } teile
```

```
    MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ )
```

```
  } herrsche
```

```
    MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ )
```

```
  } kombiniere
```

Korrekt? ✓

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
    |  $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile  
    | MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ ) } herrsche  
    | MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ ) }  
    | Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ ) } kombiniere
```

Korrekt? ✓

Effizient?

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

$m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$	}	teile
MergeSort(A, ℓ, m)	}	herrsche
MergeSort($A, m + 1, r$)	}	herrsche
Merge(A, ℓ, m, r)	}	kombiniere

Korrekt? 

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile
    MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ )      } herrsche
    MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ )   }
    Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ )      } kombiniere
```

Korrekt? ✓

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \begin{cases} & \text{falls } n = 1, \\ & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile
    MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ ) } herrsche
    MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ ) }
    Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ ) } kombiniere
```

Korrekt? ✓

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ \text{sonst.} & \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

$m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$	}	teile
MergeSort(A, ℓ , m)	}	herrsche
MergeSort(A, $m + 1$, r)	}	
Merge(A, ℓ , m , r)	}	kombiniere

Korrekt? ✓

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ \text{[blauer Balken]} + \text{[grüner Balken]} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

$m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$	}	teile
MergeSort(A, ℓ, m)	}	herrsche
MergeSort($A, m + 1, r$)	}	herrsche
Merge(A, ℓ, m, r)	}	kombiniere

Korrekt? ✓

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{MS}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile
    MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ ) } herrsche
    MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ ) }
    Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ ) } kombiniere
```

Korrekt? ✓

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{MS}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array} \right\} = n \log_2 n$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
    {  $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile
    { MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ ) } herrsche
    { MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ ) }
    { Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ ) } kombiniere
```

Korrekt? ✓

Effizient?

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{MS}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} n \log_2 n \\ \text{falls } n \\ \text{Zweierpotenz} \end{array}$$

Laufzeit von MergeSort

```
MergeSort(int[] A, int  $\ell = 1$ , int  $r = A.length$ )
```

```
  if  $\ell < r$  then
```

```
     $m = \lfloor (\ell + r) / 2 \rfloor$  } teile
    MergeSort(A,  $\ell$ ,  $m$ ) } herrsche
    MergeSort(A,  $m + 1$ ,  $r$ ) }
    Merge(A,  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$ ) } kombiniere
```

Korrekt? ✓

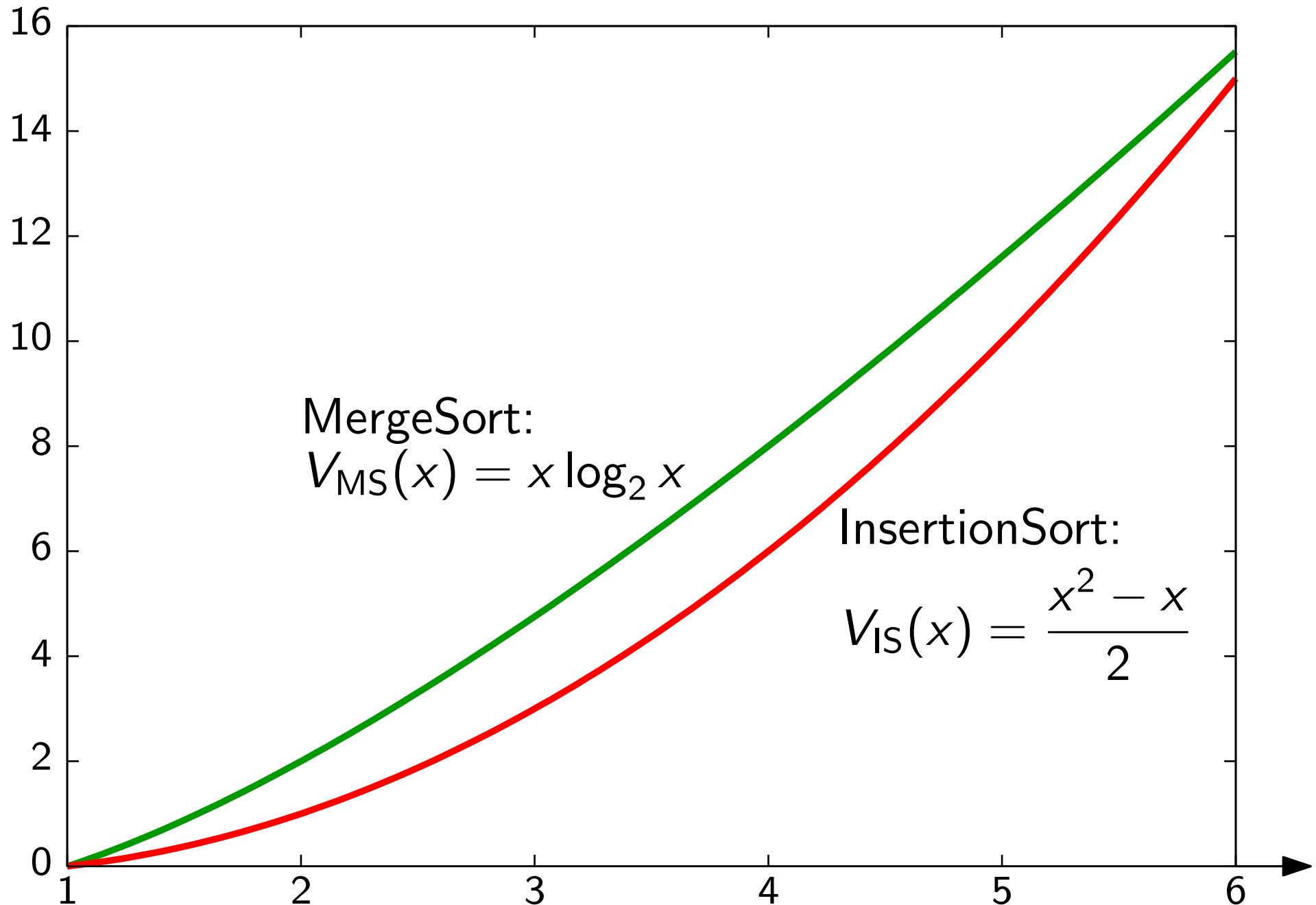
Effizient? ✓

Sei $V_{MS}(n)$ die maximale Anzahl von Vergleichen, die MergeSort zum Sortieren von n Zahlen benötigt.

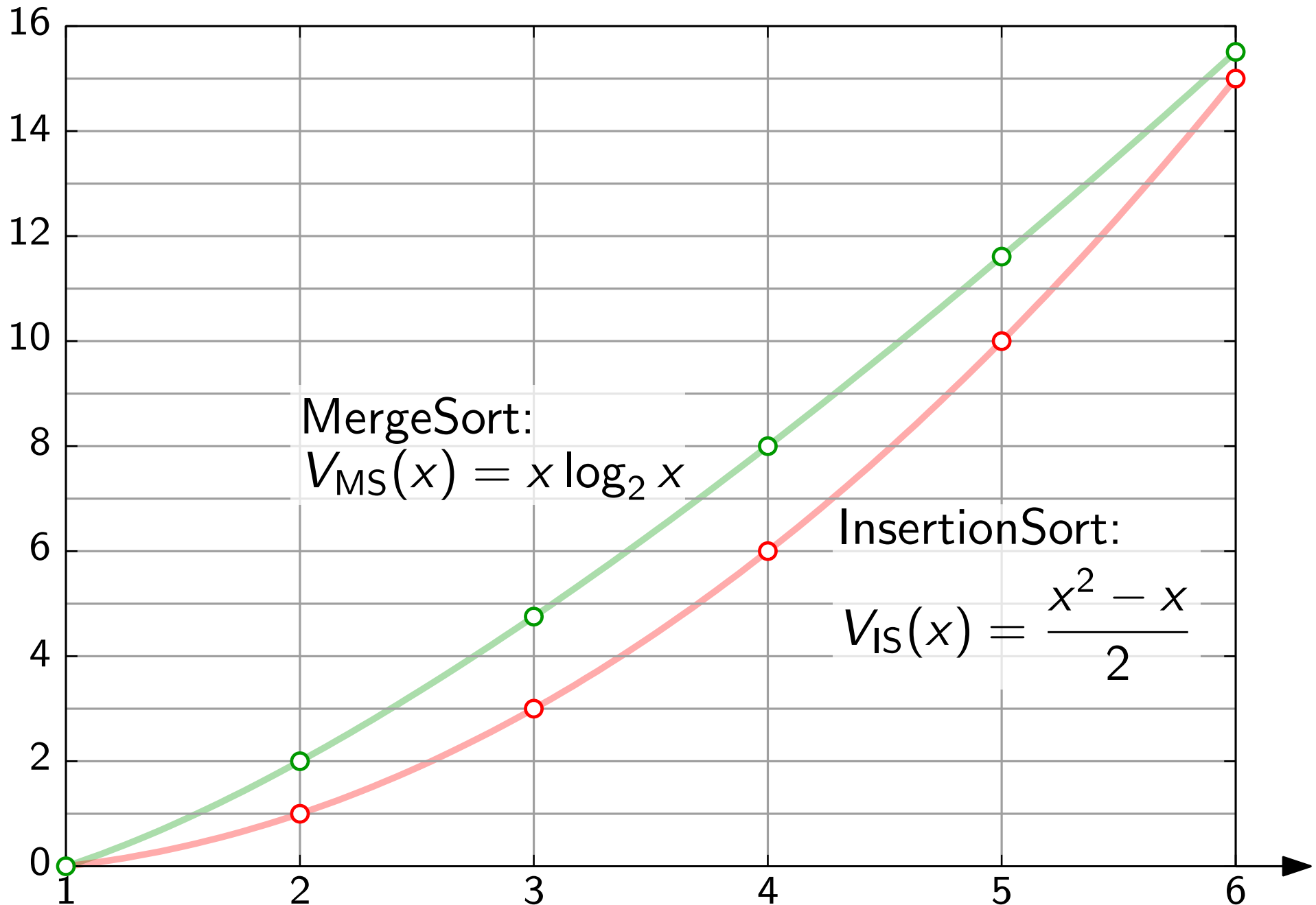
Dann gilt

$$V_{MS}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2V_{MS}(n/2) + n & \text{sonst.} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} n \log_2 n \\ \text{falls } n \\ \text{Zweierpotenz} \end{array}$$

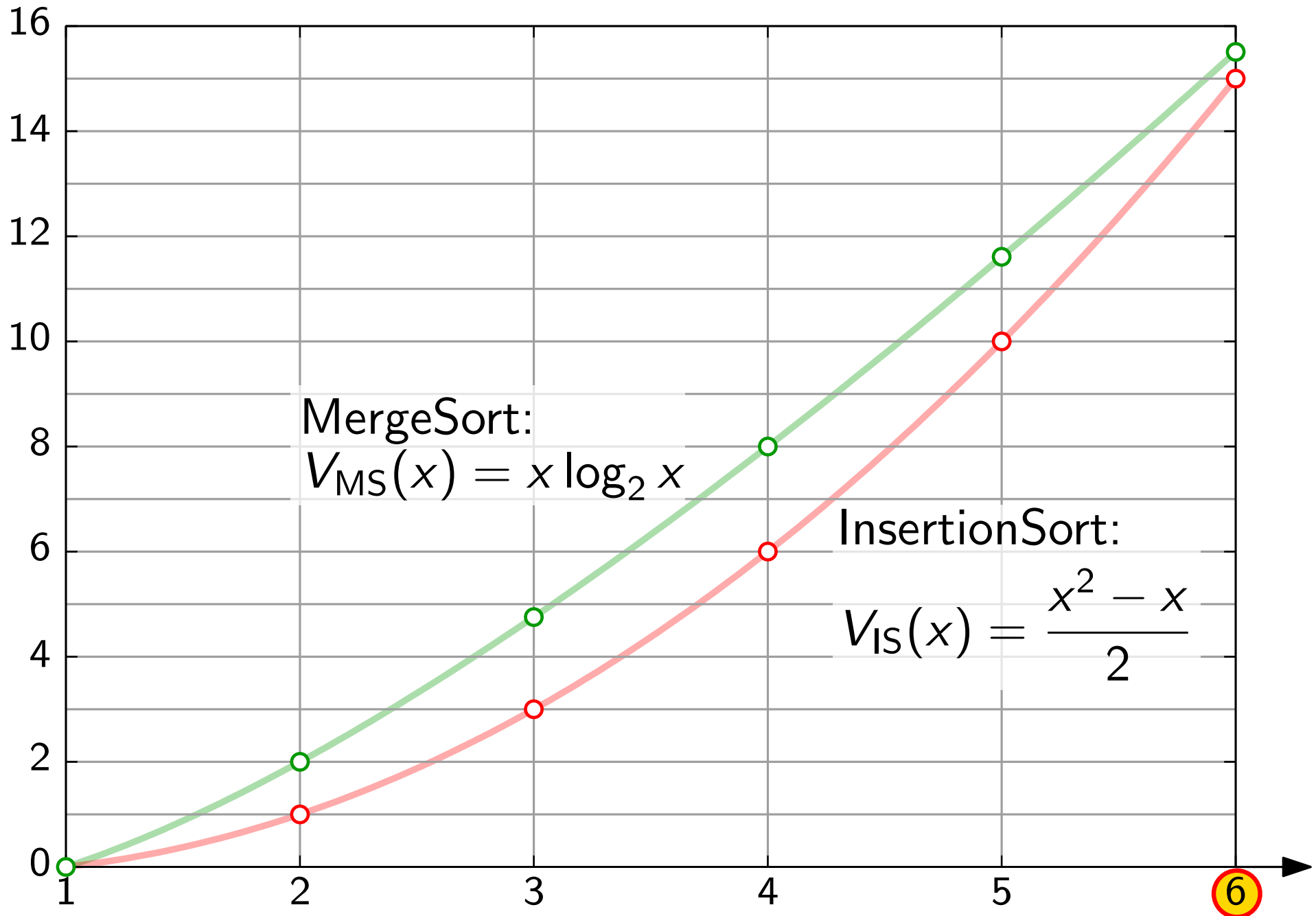
Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



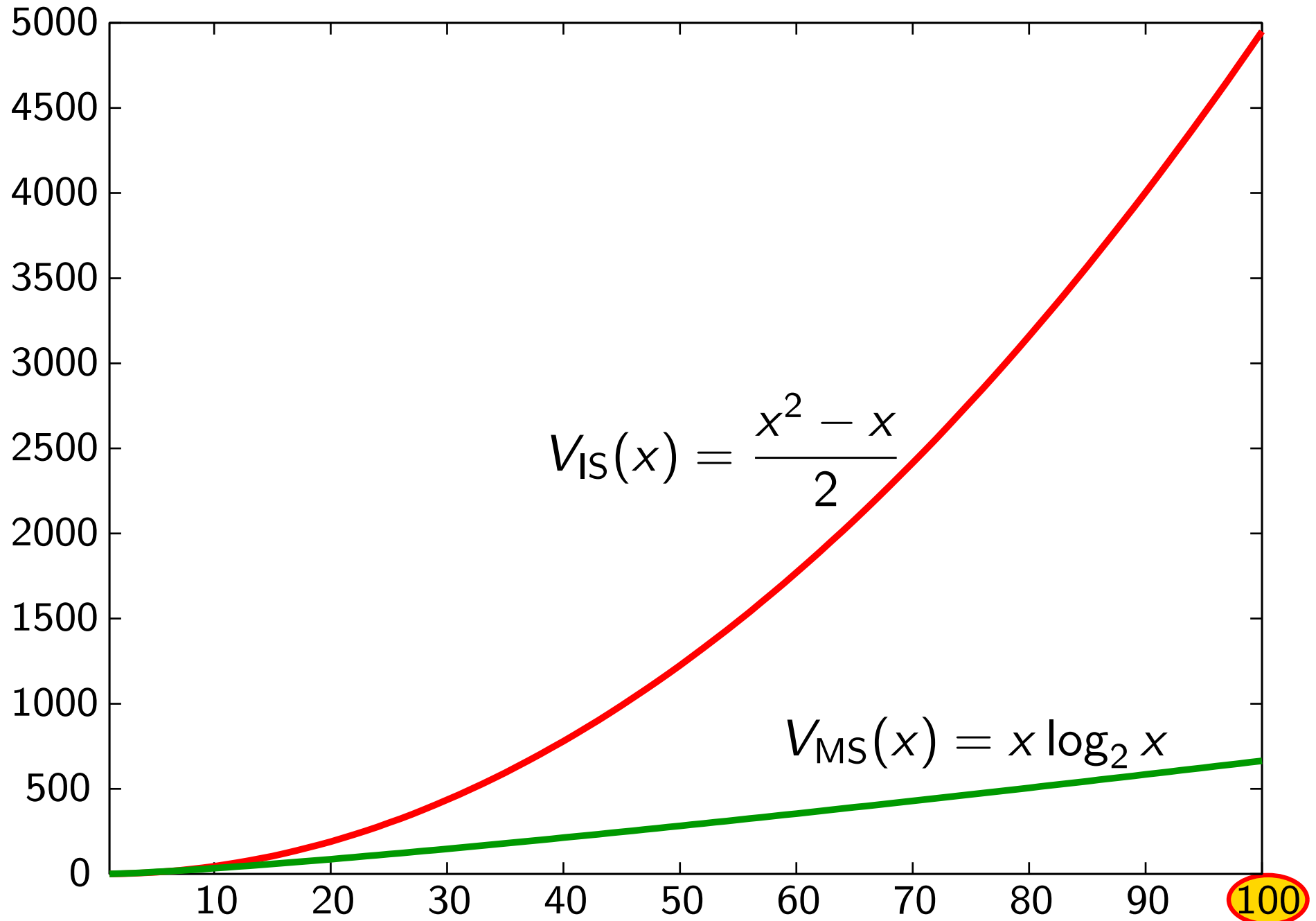
Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Vergleich InsertionSort vs. MergeSort



Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Menge der *reellen* Zahlen, z.B. -7 , 3 , $\frac{2}{9}$, $\sqrt{2}$, e , π^2 .

Menge der *natürlichen Zahlen* $0, 1, 2, \dots$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,

so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq$$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,

so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2$$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.

da $4n \leq 4n^2$

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2$$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.
 $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$

da $4n \leq 4n^2$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.
 $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$ wähle $c = 6$.
 da $4n \leq 4n^2$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.
 $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$ wähle $c = 6$.

da $4n \leq 4n^2$

Welches n_0 ?

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.
 $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$ wähle $c = 6$.

da $4n \leq 4n^2$

Welches n_0 ? Aussage gilt für jedes $n \geq 0$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \in O(n^2)$; m.a.W. f wächst höchstens quadratisch.

Beweis. **Wähle** positive c und n_0 ,
 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot n^2$.
 $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 \leq 6n^2 \Rightarrow$ wähle $c = 6$.

da $4n \leq 4n^2$

Welches n_0 ? Aussage gilt für jedes $n \geq 0$. Nimm z.B. $n_0 = 1$.



Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

negiere! (\neg)

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,
so dass $f(n) > c \cdot n$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,
so dass $f(n) > c \cdot n$.

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Behaupt.: $f \notin O(n)$; m.a.W. f wächst schneller als linear.

Beweis. Zeige: für alle pos. Konst. c und n_0 gibt es ein $n \geq n_0$,
so dass $f(n) > c \cdot n$.

Also: bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass
 $n \geq n_0$ und $f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber ...

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen,
dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen,
dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n =$

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen,
dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max(c, 5, n_0) \rceil$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.



$$n > c/2$$



Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen,
dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max(c, 5, n_0) \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > cn$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$n > c/2$$

Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen,
dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max(c, 5, n_0) \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > cn$.

Fortsetzung des Beweises $f \notin O(n)$

Bestimme n in Abh. von c und n_0 , so dass $n \geq n_0$ und

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20 > c \cdot n.$$

Problem: Die „ -20 “ stört.

Aber wenn $n \geq 5$, dann gilt $4n - 20 \geq 0$.

D.h. wenn $n \geq 5$ und $2n^2 > cn$, dann $f(n) > cn$.

$$n > c/2$$

Wie wär's mit $n = c$?

Gut, aber wir müssen sicherstellen,
dass auch $n \geq 5$ und $n \geq n_0$ gilt.

Also nehmen wir $n = \lceil \max(c, 5, n_0) \rceil$.

Für dieses n gilt $n \geq n_0$ und $f(n) > cn$. Also gilt $f \notin O(n)$. \square

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (I)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Oh von g “

$$O(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *höchstens* so schnell wachsen wie g .

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n), f \in O(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n), f \in O(n^2), f \in O(n^3)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n), f \in O(n^2), f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n), f \in O(n^2), f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n), f \in \Omega(n^2)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n), f \in O(n^2), f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n), f \in \Omega(n^2), f \notin \Omega(n^3)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen:

$$f \in \Theta(n^2)$$

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel.

$$f(n) = 2n^2 + 4n - 20$$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen:

$$f \in \Theta(n^2)$$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

Ein Klassifikationsschema für Funktionen (II)

Definition.

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist „Groß-Omega von g “

$$\Omega(g) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \\ \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt:} \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

die Klasse der Fkt., die *mindestens* so schnell wachsen wie g .

Beispiel. $f(n) = 2n^2 + 4n - 20$

Bewiesen: $f \notin O(n)$, $f \in O(n^2)$, $f \in O(n^3)$

Entsprechend: $f \in \Omega(n)$, $f \in \Omega(n^2)$, $f \notin \Omega(n^3)$

Zusammen: $f \in \Theta(n^2)$

d.h. es gibt pos. Konst. c_1, c_2, n_0 , so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2.$$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.
 $f \in \Omega(n^2)$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.
 $f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ „genau“

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ „genau“

$f \in o(n^2)$

neu!



Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ **bedeutet** f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ „genau“

$f \in o(n^2)$ *echt langsamer als*



neu!

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ „genau“

$f \in o(n^2)$ *echt langsamer als*

$f \in \omega(n^2)$



neu!

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ bedeutet f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ „genau“

$f \in o(n^2)$ *echt langsamer als*

$f \in \omega(n^2)$ *echt schneller als*



neu!

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$ **bedeutet** f wächst *höchstens* quadratisch.

$f \in \Omega(n^2)$ *mindestens*

$f \in \Theta(n^2)$ „*genau*“


$f \in o(n^2)$ *echt langsamer als*

$f \in \omega(n^2)$ *echt schneller als*



Genauere Definition für „klein-Oh“ und „klein-Omega“ s. Kap. 3, [CLRS].

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$	bedeutet	f wächst <i>höchstens</i>	quadratisch.
$f \in \Omega(n^2)$		<i>mindestens</i>	
$f \in \Theta(n^2)$		„genau“	
$f \in o(n^2)$		<i>echt langsamer als</i>	
$f \in \omega(n^2)$		<i>echt schneller als</i>	


Genauere Definition für „klein-Oh“ und „klein-Omega“ s. Kap. 3, [CLRS].

Übung.

Gegeben folgende Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \dots$:

$$n^2, \log_2 n, \sqrt{n \log_2 n}, 1,01^n, n^{\log_3 4}, \log_2(n \cdot 2^n), 4^{\log_3 n}.$$

Das Klassifikationsschema – *intuitiv*

$f \in O(n^2)$	bedeutet	f wächst <i>höchstens</i>	quadratisch.
$f \in \Omega(n^2)$		<i>mindestens</i>	
$f \in \Theta(n^2)$		„ <i>genau</i> “	
$f \in o(n^2)$		<i>echt langsamer als</i>	
$f \in \omega(n^2)$		<i>echt schneller als</i>	

Genauere Definition für „klein-Oh“ und „klein-Omega“ s. Kap. 3, [CLRS].

Übung.

Gegeben folgende Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \mapsto \dots$:

$$n^2, \log_2 n, \sqrt{n \log_2 n}, 1,01^n, n^{\log_3 4}, \log_2(n \cdot 2^n), 4^{\log_3 n}.$$

Sortieren Sie nach Geschwindigkeit des *asymptotischen Wachstums*, also so, dass danach gilt: $O(\dots) \subseteq O(\dots) \subseteq \dots \subseteq O(\dots)$.