Introduction to Knapsack

Frederik Pilz, Felix Hauser

12.06.2024

0-1-Knapsack - Problem

Gegeben:

- n Gegenstände mit
  - Gewichten w_i
  - Werten v_i

  für $i \in \{1, ...n\}$

0-1-Knapsack - Problem

Gegeben:

- n Gegenstände mit
  - Gewichten w_i
  - Werten v_i

  für $i \in \{1, ...n\}$
- Maximales Gesamtgewicht W

0-1-Knapsack - Problem

Gegeben:

- n Gegenstände mit
  - Gewichten w_i
  - Werten v_i

  für $i \in \{1, ...n\}$
- Maximales Gesamtgewicht W

Gesucht:
Teilmenge $S \subseteq \{1, ..., n\}$ der Gegenstände sodass $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ gilt und $\sum_{i \in S} v_i$ maximal ist.

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$		
$\{\square\}$		
$\{\bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square\}$		
$\{\triangle, \bigcirc\}$		
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$		
$\{\bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square\}$		
$\{\triangle, \bigcirc\}$		
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square\}$		
$\{\triangle, \bigcirc\}$		
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
$\{\triangle, \square\}$		
$\{\triangle, \bigcirc\}$		
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
$\{\triangle, \square\}$	12	11
$\{\triangle, \bigcirc\}$		
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
~~$\{\triangle, \square\}$~~	~~12~~	~~11~~
$\{\triangle, \bigcirc\}$		
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
~~$\{\triangle, \square\}$~~	~~12~~	~~11~~
$\{\triangle, \bigcirc\}$	9	9
$\{\square, \bigcirc\}$		
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
$\cancel{\{\triangle, \square\}}$	~~12~~	~~11~~
$\{\triangle, \bigcirc\}$	9	9
$\{\square, \bigcirc\}$	11	14
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
~~$\{\triangle, \square\}$~~	~~12~~	~~11~~
$\{\triangle, \bigcirc\}$	9	9
~~$\{\square, \bigcirc\}$~~	~~11~~	~~14~~
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$		

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
$\cancel{\{\triangle, \square\}}$	~~12~~	~~11~~
$\{\triangle, \bigcirc\}$	9	9
$\cancel{\{\square, \bigcirc\}}$	~~11~~	~~14~~
$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$	16	17

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
~~$\{\triangle, \square\}$~~	~~12~~	~~11~~
$\{\triangle, \bigcirc\}$	9	9
~~$\{\square, \bigcirc\}$~~	~~11~~	~~14~~
~~$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$~~	~~16~~	~~17~~

0-1-Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\emptyset$	0	0
$\{\triangle\}$	5	3
$\{\square\}$	7	8
$\{\bigcirc\}$	4	6
~~$\{\triangle, \square\}$~~	~~12~~	~~11~~
$\boxed{\{\triangle, \bigcirc\}}$	$\boxed{9}$	$\boxed{9}$
~~$\{\square, \bigcirc\}$~~	~~11~~	~~14~~
~~$\{\triangle, \square, \bigcirc\}$~~	~~16~~	~~17~~

0-1-Knapsack - ILP

$x_i = 1 \iff$ Gegenstand i wird in den Knapsack gepackt

0-1-Knapsack - ILP

$x_i = 1 \iff$ Gegenstand i wird in den Knapsack gepackt

$$\max \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i v_i$$

0-1-Knapsack - ILP

$x_i = 1 \iff$ Gegenstand i wird in den Knapsack gepackt

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i v_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i w_i \le W \end{aligned}$$

0-1-Knapsack - ILP

$x_i = 1 \iff$ Gegenstand i wird in den Knapsack gepackt

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i v_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i w_i \leq W \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \end{aligned}$$

0-1-Knapsack - ILP

$x_i = 1 \iff$ Gegenstand i wird in den Knapsack gepackt

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i v_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i w_i \leq W \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Also: 0-1-Knapsack $\in$ NP

Es gilt auch: 0-1-Knapsack ist NP-Vollständig

Unbounded Knapsack - Problem

Gegeben:

- n *Arten von* Gegenständen mit
  - Gewichten w_i
  - Werten v_i

  für $i \in 1, ...n$
- Maximales Gesamtgewicht W

Unbounded Knapsack - Problem

Gegeben:

- *n Arten von* Gegenständen mit
  - Gewichten w_i
  - Werten v_i

  für $i \in 1, ...n$
- Maximales Gesamtgewicht W

Gesucht:
Kombination aus Gegenständen, so dass das Gesamtgewicht $\leq W$ und der Gesamtwert maximal ist.

Unbounded Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Unbounded Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\triangle, \bigcirc$	9	9

Unbounded Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\triangle, \bigcirc$	9	9
$\bigcirc, \bigcirc$	8	12

Unbounded Knapsack - Beispiel

Gegeben:

$W = 10$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

Lösung:

	Gewicht	Wert
$\triangle, \bigcirc$	9	9
$\bigcirc, \bigcirc$	8	12
$\triangle, \triangle$	10	6

Unbounded Knapsack - Dynamische Programmierung

Sei $V(r)$ der maximale Wert, der mit einer Restkapazität von r erreicht werden kann.

Wie formulieren wir $V(r)$?

Unbounded Knapsack - Dynamische Programmierung

Sei $V(r)$ der maximale Wert, der mit einer Restkapazität von r erreicht werden kann.

Wie formulieren wir $V(r)$?

$$V(0) = 0$$

Unbounded Knapsack - Dynamische Programmierung

Sei $V(r)$ der maximale Wert, der mit einer Restkapazität von r erreicht werden kann.

Wie formulieren wir $V(r)$?

$$
\begin{aligned}
V(0) &= 0 \\
V(r) &= \max_{1 \leq i \leq n, w_i \leq r} \{v_i + V(r - w_i)\}
\end{aligned}
$$

Unbounded Knapsack - V(10)

$$V(r) = \max_{1 \le i \le n, w_i \le r} \{v_i + V(r - w_i)\}$$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(r)$											

Unbounded Knapsack - V(10)

$$V(r) = \max_{1 \leq i \leq n, w_i \leq r}\{v_i + V(r - w_i)\}$$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(r)$	0	0	0	0							

Unbounded Knapsack - V(10)

$$V(r) = \max_{1 \le i \le n, w_i \le r} \{v_i + V(r - w_i)\}$$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(r)$	0	0	0	0	6	6	6				

Unbounded Knapsack - V(10)

$$V(r) = \max_{1 \leq i \leq n, w_i \leq r} \{v_i + V(r - w_i)\}$$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(r)$	0	0	0	0	6	6	6	8			

Unbounded Knapsack - V(10)

$$V(r) = \max_{1 \leq i \leq n, w_i \leq r}\{v_i + V(r - w_i)\}$$

	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$
w_i	5	7	4
v_i	3	8	6

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V(r)$	0	0	0	0	6	6	6	8	12	12	12